RELAZIONE intorno alla Memoria di GUIDO CASTELNUOVO: *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane.*

I sistemi lineari di curve piane costituiscono uno fra gli argomenti di ricerche geometriche cui ripetutamente si è rivolta in questi ultimi anni l'attenzione dei geometri d'Italia: del paese cioè al quale la scienza era già debitrice della teoria generale delle corrispondenze piane birazionali, vale a dire delle reti omaloidiche di curve piane. In breve tempo son comparsi vari lavori di BERTINI, CAPORALI, GUCCIA, JUNG, MARTINETTI, ecc., nei quali sono ottenuti parecchi nuovi risultati, generali o speciali, su quei sistemi (*). E veramente lo studio dei sistemi lineari di curve piane è degno che ad esso si rivolgano i geometri, poichè la sua importanza è notevole, sia che lo si consideri in se stesso, sia che si badi alle sue applicazioni. Si pensi in fatti: che lo studio delle superficie, semplici o multiple, rappresentabili univocamente sul piano, ed in particolare lo studio dei piani multipli rappresentabili su un piano semplice, si riducono a ricerche intorno al sistema lineare rappresentativo. Che dall'esame delle rappresentazioni piane di una superficie razionale si trae la costruzione delle corrispon-

(*) Pel confronto di questi ed altri risultati fra loro e con quelli contenuti nella Memoria che esaminiamo, rimandiamo a questa e particolarmente al cenno storico sui sistemi lineari che si trova nell'Introduzione.

denze birazionali fra due spazi. Che lo studio delle *involuzioni piane* nel senso più generale, cioè dei raggruppamenti dei punti del piano in gruppi di μ, tali che ogni punto del piano stia in un sol gruppo, si può far dipendere in infiniti modi (ad esempio ricorrendo ad una superficie sui cui punti si rappresentino univocamente i gruppi dell'involuzione) da quello di particolari sistemi lineari di curve piane, tali che tutte le curve passanti per un punto qualunque del piano passino in conseguenza per i $\mu - 1$ associati. Ecc., ecc.

Quando di una varietà algebrica si studiano quelle proprietà che non mutano trasformando birazionalmente la varietà stessa, si fa quella che ora si suol chiamare la *geometria sulla varietà*. La *geometria sulla retta (punteggiata)* coincide con la geometria projettiva della retta stessa: non così la *geometria su una curva qualunque* di genere p, nè la *geometria sul piano*. Quelle proprietà dei sistemi lineari di curve piane che sono invariabili per trasformazioni Cremoniane appartengono appunto alla geometria sul piano. Esse serviranno d'introduzione allo studio delle *serie lineari di curve sopra una superficie qualunque* fatto nel senso della geometria su una superficie: studio che non è ancora avviato.

Ora allorquando i sistemi lineari di curve piane vengono studiati secondo quest'indirizzo, si ha nelle trasformazioni birazionali del piano uno strumento per semplificarli; e considerando come equivalenti quei sistemi che così si posson trasformare gli uni negli altri, nasce la questione di ridurre tutti i sistemi a dati tipi. Appunto di essa, per i sistemi di un dato genere p, si sono occupati alcuni fra gli scienziati italiani ricordati. Ma il CASTELNUOVO in questa Memoria si pone problemi di un'altra natura; e si basa sopra un concetto che, per quanto spontaneo possa sembrare, non era ancora stato applicato in queste ricerche con quell'ampiezza che era necessaria per rivelarne tutta la fecondità. Vogliam dire l'uso della geometria sulla curva, ed in particolare delle serie lineari di gruppi di punti sopra la curva, delle curve aggiunte di questa, ecc.: di quelle nozioni insomma che, introdotte nella scienza da RIEMANN, CLEBSCH ed altri, hanno poi trovato in un notissimo lavoro di BRILL e NÖTHER il loro assetto definitivo. Era ben naturale che queste cose dovessero aiutare grandemente le ricerche sui sistemi lineari di curve piane. Il CASTELNUOVO, che già aveva dimostrato, in alcuni scritti accolti dalla nostra Accademia nei suoi *Atti*, di possedere a fondo quelle proprietà di geometria sulla curva; e che in altre due Note se n'era già valso utilmente pei sistemi lineari, sia determinando tutti quelli che si compongono di curve iperellittiche, sia mostrando quali sono quei sistemi di genere p che hanno la massima dimensione (*); giunge nella Memoria su cui riferiamo, a tutta una serie di risultati della massima generalità ed importanza, basandosi appunto su quei concetti.

La Memoria è divisa in due capitoli. Il 1° studia i sistemi lineari di curve C d'ordine n che vengono determinati assegnando le multiplicità *(virtuali)* ν_1, $\nu_2, \ldots$ con cui queste curve passano per i punti a_1, $a_2, \ldots$ (comunque collocati, distinti od infinitamente vicini) di un dato gruppo A. In conseguenza di queste condizioni la curva generica C del sistema può venir ad avere in qualche punto di A una multiplicità superiore alla data, sicchè i numeri ν possono differire dalle multiplicità *effettive* che C avrà nei punti di A. Può accadere che uno stesso sistema lineare d'ordine n si possa determinare secondo quel concetto in più modi, con diverse scelte per A e per le ν. Bisogna dunque riferire sempre le proprietà dei sistemi lineari contenute in questo Cap.° ad un gruppo A e ν ben fissato: esse sono proprietà *relative* a questo gruppo. Quando poi nel 2° Cap.° si studieranno le proprietà *assolute* dei sistemi lineari determinati dai punti base, basterà prendere per A il gruppo di tutti i punti comuni alle curve del sistema e per multiplicità ν quelle effettive della curva generica. Ma le ipotesi più generali che su A e le ν si fanno nel Cap° 1° non hanno un mero scopo di generalizzazione: esse sono addirittura necessarie per ottenere risultati che si possano anche applicare alle curve *fondamentali*, od alle *aggiunte pure*, od a curve *particolari* del sistema, poichè quella scelta speciale di A fatta in relazione col sistema (o meglio con le sue curve generiche) non avrebbe più rapporti analoghi con quelle curve.

Al sistema dato spettano i seguenti *caratteri rispetto ad* A.

La *dimensione virtuale* $\mathbf{k} = \frac{1}{2}(n \,.\, n+3 - \Sigma\, \nu \,.\, \nu + 1)$, che

(*) Il risultato notevole che in questa seconda Nota aveva ottenuto, egli generalizza alla fine della presente Memoria seguendo un metodo affatto diverso; quantunque com'egli osserva nella prefazione, anc può essere minore della *dimensione effettiva* k del sistema (in tal caso il sistema si dirà *sovrabbondante*): la differenza $k - \mathbf{k}$ è la *sovrabbondanza* del sistema; essa è nulla solo quando il sistema è *regolare*, cioè tale che le condizioni imposte da A sono tutte indipendenti. Il *grado* (secondo JUNG) del sistema, cioè $D = n^2 - \Sigma \nu^2$ (nozione che poi si generalizza coll'espressione $n'n'' - \Sigma \nu' \nu''$ pel *numero delle intersezioni rispetto ad* A di due curve qualunque). Il *genere effettivo* ed il *genere virtuale* (sempre rispetto ad A), definiti da $p = k' + 1$, $\mathbf{p} = \mathbf{k}' + 1$, ove k' e $\mathbf{k}'$ indicano le dimensioni, effettiva e virtuale, del sistema lineare $[C']$ costituito dalle *curve aggiunte* (sottint. d'ordine $n - 3$) *rispetto ad* A delle C. Fra questi caratteri (che si possono riferire anche ad una sola curva C in rapporto con un dato gruppo A) passano alcune relazioni, fra cui la $D = \mathbf{k} + \mathbf{p} - 1$. Si dimostra poi che essi non mutano quando si eseguisce una trasformazione birazionale qualunque del piano, purchè allora si definisca convenientemente il gruppo, trasformato di A, al quale si riferisce il sistema lineare trasformato di [C]. Ciò permette di supporre nel seguito che A si componga di punti tutti distinti.

Data una curva irriduttibile C, assumendo per multiplicità virtuali quelle effettive dei punti di A, si ottiene uno stesso valore pei generi effettivo e virtuale; e la considerazione delle curve aggiunte rispetto ad A (di ogni ordine) conduce a definire su C delle *serie lineari di gruppi di punti rispetto ad* A per le quali hanno luogo certe proprietà (alcune delle quali, sotto ipotesi più generali, furono già considerate dal NÖTHER) perfettamente analoghe a proprietà note delle serie segate dalle ordinarie curve aggiunte (in luogo del genere ordinario si ha solo da mettere l'attuale genere rispetto ad A). Ad esempio si ha che se la curva generica del sistema lineare [C] è irriduttibile, la serie g_D^{k-1} (rispetto ad A) che su essa vien segata dalle altre curve del sistema è *completa*.

Segue lo studio dei caratteri nel caso che la curva C sia composta. Qui per ottenere risultati generali occorre la nozione di curva *connessa* (rispetto ad A), cioè di curva composta tale che ciascuna delle sue componenti (irriduttibile o no) abbia colla componente complementare infiniti punti comuni od almeno un punto d'intersezione rispetto ad A. Si dimostra ad esempio che la curva è certo connessa se il genere effettivo uguaglia il genere virtuale, e che viceversa questo fatto accade sempre quando la curva è connessa (e priva di componenti multiple). Il genere effettivo di una curva composta di due o più altre, il quale in generale non è minore della somma dei generi effettivi di queste, è appunto uguale a tal somma quando quelle parti non hanno a due a due intersezioni rispetto ad A.

Il 2° Cap.° tratta dei sistemi lineari determinati dai punti base e nei quali la curva generica è irriduttibile. Scegliendo allora A e le ν nel modo particolare già accennato, si ottengono dalle cose generali che precedono, dei caratteri *assoluti* $\mathbf{k}$, k, p $(=\mathbf{p})$, D, e delle proprietà *assolute* di un sistema [C]. Qui la serie lineare completa g_{D}^{k-1} che sulla curva generica è segata dalle altre curve di [C] (*serie caratteristica* del sistema) assume una grande importanza. Essa è speciale o non speciale secondo che il sistema è sovrabbondante o regolare; e da ciò seguono subito alcuni utili corollari (così, la sovrabbondanza del sistema non può superare $p-k+1$; in un sistema lineare sovrabbondante di curve iperellittiche il passaggio di una curva per un punto arbitrario porta di conseguenza il passaggio per un altro punto determinato da quello; ecc.). L'applicazione poi di note proprietà delle serie lineari, e specialmente del teorema Riemann-Roch, conduce al teorema seguente: « Se esiste un sistema ∞^{k+r} d'ordine n le cui curve passano soltanto $r-1$ volte per un punto base r-plo a del sistema [C], ma si comportano come le C negli altri punti base, ogni curva aggiunta (d'ordine $n-3$) a [C] che passi per le intersezioni variabili di due curve di [C] avrà un punto r-plo in a; e reciprocamente ecc. ».

Indi si passa allo studio dei caratteri di due *sistemi residui* rispetto a [C], cioè tali che ogni curva dell'uno insieme con una curva dell'altro costituisce una curva di [C]; e delle *curve fondamentali*, cioè delle curve (semplici o composte) che non son segate fuori dei punti base dalla curva C generica. Si ottiene la seguente proposizione: « il genere effettivo di una curva fondamentale (che ammetta un sistema residuo) non può superare la sovrabbondanza del sistema, e se la uguaglia (e se inoltre la serie residua della serie caratteristica del sistema non ha punti fissi), la curva fondamentale contiene ogni punto base del sistema » ; e varie altre relative ai caratteri virtuali ed al grado di una curva fondamentale, e non meno notevoli, ma che, per non dilungarci troppo, ci asteniamo dal riferire. Riportiamo invece i singolari risultati a cui si giunge nelle applicazioni ai sistemi sovrabbondanti col minimo numero di punti base: « Un sistema lineare sovrabbondante ha almeno nove punti base; e se ne ha precisamente nove esso dev'essere necessariamente un fascio di curve (ellittiche) d'ordine $3r$ colla multiplicità r in ogni punto base ». « Ogni sistema lineare di genere p, il quale sia determinato da nove dei suoi punti base e possegga tuttavia altri punti base, può sempre ridursi al tipo $[a_1^p \ldots a_8^p a_9^{p-1} b]$ d'ordine $3p$ e dimensione effettiva p; i 10 punti base giacciono sopra una cubica fondamentale ».

Finalmente l'A. si rivolge alla considerazione del sistema aggiunto a $[C]$ e più specialmente del *sistema aggiunto puro* ∞^{p-1} costituito dalle sole parti variabili delle curve aggiunte di $[C]$. L'idea di valersi di questo elemento (invariabile per trasformazioni birazionali) per lo studio del sistema lineare non era stata ancora adoperata da altri; le applicazioni di grande importanza che qui ne son fatte ne mostrano tutta la fecondità e costituiscono un merito speciale di questa Memoria. Il sistema aggiunto puro $[C']$ di $[C]$ non può esser riduttibile se non quando la C generica è iperellittica; ove sia riduttibile e $k > p + 1$, la curva generica di $[C']$ si spezzerà in $p - 1$ curve razionali. Si ottengono notevoli proposizioni (che servono poi per dimostrare l'ultimo teorema del lavoro) collegando il sistema aggiunto puro con la serie lineare che sulla curva generica di $[C]$ è segata da tutte le rette del piano, ovvero dalle sole rette di un fascio. Indi si dimostrano i teoremi seguenti: « Se la curva generica del sistema aggiunto puro $[C']$ di genere virtuale (rispetto al gruppo base di $[C]$) $\mathbf{p}'$ non forma parte di alcuna curva di $[C]$, si ha $\mathbf{k} < 2p - \mathbf{p}' - 1$; mentre se il sistema $[C']$ ammette un sistema residuo $[C'']$ di dimensione virtuale $\mathbf{k}''$, si ha $\mathbf{k} = 2p - \mathbf{p}' + \mathbf{k}'' - 1$ ». « Se $\mathbf{k} > p + 1$, il sistema aggiunto puro $[C']$ è regolare ed il suo genere $\mathbf{p}'$ è inferiore a $p - 1$ ». L'importanza del primo appare meglio dopo che si è provato che $\mathbf{k}'' \leq 9$: si giunge con ciò alla relazione generale

$$\mathbf{k} \leq 2p - \mathbf{p}' + 7,$$

alla quale fanno solo eccezione quei sistemi che si possono trasformare nel sistema costituito da tutte le curve piane di un certo ordine (per essi si ha $\mathbf{k} = 2p - \mathbf{p}' + 8$). Questo risultato ha un grande valore e merita una speciale attenzione. Da esso si deducono subito una serie di proposizioni importanti, la prima delle quali era già stata ottenuta dall'A. in un lavoro che abbiamo ricordato. « Ogni sistema lineare la cui dimensione superi $3p+5$ si compone di curve razionali; fatta eccezione pel sistema di tutte le cubiche piane e pei suoi trasformati ». « Ogni sistema lineare di dimensione $> 2p+7$, o è contenuto in uno dei sistemi anzidetti, oppure si compone di curve iperellittiche; fatta eccezione pei sistemi trasformabili in quelli di tutte le quartiche o di tutte le quintiche ». « Ogni sistema lineare la cui dimensione superi $\frac{5}{3}p+9$, o è contenuto in uno dei precedenti, oppure si compone di curve contenenti una serie g^1_3; fatta eccezione pei sistemi trasformabili in uno di sestiche con un punto base semplice al più, ovvero nel sistema di tutte le curve del 7° ordine ». Il teorema generale di questa serie (nel quale si trova anche un fatto che, per brevità, abbiamo omesso nel riferire i casi particolari precedenti) viene enunciato così: « *Un sistema lineare di genere* p *la cui dimensione* k *soddisfi alla relazione*

$$k \geq (\mu+2)\left(\frac{p}{\mu}+2\right)$$

(μ intero positivo) si può trasformare o in un sistema di curve d'ordine $\leq 2\mu+1$, ovvero in un sistema di curve di un certo ordine M *avente un punto base di molteplicità $\geq$ M $-\mu$* »; e dimostrato per induzione completa, provando che esso vale pel sistema primitivo se ha luogo pel sistema aggiunto puro. Esso costituisce, come ognun vede, uno dei più generali ed importanti acquisti che si potessero fare in questo campo.

Al sistema aggiunto puro si potrebbero collegare vari altri problemi, alcuni dei quali si trovano accennati nella prefazione. Così esso può dare delle proprietà caratteristiche dei sistemi sovrabbondanti, le quali servano per costruirli. Ad esempio « se in un sistema ∞^r di genere p (non iperellittico) una tra le condizioni imposte dai punti base è conseguenza delle rimanenti, esiste una curva fondamentale di genere (virtuale = effettivo) uno, la quale contiene tutti i punti base del sistema. » Così ancora il sistema aggiunto puro potrà servire per lo studio dei sistemi la cui curva generica contiene una serie speciale di caratteri dati, Esso dà pure una classificazione dei sistemi lineari, se si assumono come criteri di distinzione i generi dei successivi sistemi aggiunti puri. Ecc.

Dal riassunto che ne abbiamo fatto emerge evidente senz'altre considerazioni il valore di questa Memoria. Essa ha una grande importanza sia pei risultati che essa contiene, sia per le vie che apre e pei nuovi originali concetti, per gl'innumerevoli problemi che essa addita, e di cui prepara la soluzione. Essa merita di avere dall'Accademia una piena approvazione.

E. D'Ovidio
C. Segre, *Relatore*.

L'Accademico Segretario
Giuseppe Basso.