

LETTURE

RELAZIONE sulla Memoria del Prof. RICCARDO DE PAOLIS, intitolata: *Le corrispondenze proiettive nelle forme geometriche fondamentali di 1^a specie.*

Fra le produzioni scientifiche più meravigliose del secolo che volge al tramontò, è certamente da porsi la geometria proiettiva, quella che l'HANKEL chiamò *la strada regia della Matematica*! Essa, dopo aver cominciato ad organizzarsi in un corpo di scienza per opera della scuola francese del primo quarto di secolo, e specialmente di PONCELET, ha poi, grazie a sommi matematici di varie nazioni, esteso rapidamente ed in modo mirabile il campo e gli strumenti delle sue ricerche. Dalle curve e superficie di 2^o ordine, dalle proiettività, è progredita allo studio delle curve e superficie di ogni ordine, delle corrispondenze algebriche qualunque, di innumerevoli nuove specie di enti. A ciò han contribuito potentemente tanto il metodo sintetico quanto l'analitico; ed anche la gara che in certi periodi vi fu tra essi, e che alternativamente condusse i partigiani dell'un metodo o dell'altro ad escogitare dei mezzi di ricerca atti a raggiungere e sorpassare i risultati degli avversari.

Ormai non è più necessario di star a rilevare i vantaggi propri dell'analisi e della sintesi geometrica, e la utilità e quasi necessità che ne consegue pel progresso della geometria, di valersi di entrambe. Ciò però non è in contrasto con l'idea di fare una geometria proiettiva *pura*, cioè svolta con metodo esclusivamente sintetico, senz'alcun uso di coordinate e di principî analitici. Come già fu rilevato più volte (anche da noi), questo problema, oltre ad avere per se stesso un'alta importanza scientifica e a condurre ad una più completa illuminazione delle proprietà

degli enti geometrici, è stato ed è tuttora utilissimo per ciò che, escludendo gli altri strumenti, viene ad esigere un perfezionamento in quelli di cui si vale il metodo sintetico. — Allo stesso modo fra i grandi progressi recenti dell'analisi, che tanto hanno contribuito ad accrescerne il rigore, vi è stata la sua purificazione, cioè la dimostrazione dei suoi principî fondamentali indipendente da certe rappresentazioni geometriche; le quali, se giovavano a renderli più intuitivi, avevano però l'inconveniente di basarsi su postulati non necessari all'analisi, o (quel che è peggio) su concetti non rigorosi. Si potrebbe dire che in alcuni punti la trattazione simultanea dell'analisi con la geometria produceva una dannosa confusione. Stabiliti invece in modo puramente analitico e rigoroso quei principî fondamentali, si può ora applicarli con sicurezza anche alla geometria. Ovvero, ritornando al problema della geometria pura, si possono cercare, guidandosi su quelle analitiche già note, delle dimostrazioni sintetiche dei corrispondenti principî fondamentali geometrici.

Alla costruzione di una geometria proiettiva essenzialmente sintetica, furon dedicati gli sforzi di molti geometri, presso i quali però il concetto della *purezza* si presenta con grado diverso. Un primo periodo, che si riferisce specialmente alla geometria proiettiva degli enti algebrici di 1° e 2° ordine, è rappresentato da un lato dalla citata scuola francese e in particolare da PONCELET e CHASLES, e dall'altro lato da MÖBIUS e STEINER e poi dall'opera di STAUDT, la quale chiude gloriosamente la serie, e raggiunge la *completa* purezza di metodo, facendo una teoria esclusivamente geometrica degli elementi imaginari. Il secondo periodo, che si riferisce agli enti di ordine qualunque, parte ancora da ricerche dei geometri nominati, e più specialmente di STEINER; e cominciò ad avere un principio di soluzione, od almeno una preparazione di questa, coi noti trattati del CREMONA sulla teoria geometrica delle curve e superficie algebriche, nei quali per altro alcuni principî fondamentali son presi dall'algebra: come ad es. il principio di LAMÉ relativo ai fasci, il *principio di corrispondenza* nelle forme semplici (*), ecc. I tentativi per liberare com-

(*) A questo proposito, e trattandosi di un principio che dovremo ancora nominare ripetutamente, ci sia concesso di porre qui una questione: *È egli tratto di attribuire, come sempre si fa* (anche in recenti lavori storici), *al solo CHASLES la scoperta di quel principio di corrispondenza?* Non v'è dubbio che questo grande scienziato ha il merito di averlo per primo formulato e

pletamente quelle teorie geometriche da ogni nozione analitica proseguirono poi, senza risultati definitivi, fino a questi ultimi anni, quando l'Accademia delle Scienze di Berlino pose ripetu-

dimostrato come un modo di procedere *generale*, rilevandone tutta l'importanza, nella seduta del 27 giugno 1864 dell'Académie des sciences (Comptes Rendus, t. 58, p. 1175); e poco prima nelle sue lezioni alla Sorbonne del 1863-64 (secondo quanto egli stesso asserisce poi nella nota alla pag. 821 del t. 63 dei Comptes Rendus). Ma ciò che va rilevato si è che già tre anni prima il DE JONQUIÈRES nella Nota *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque* (Journal de Mathém., 2. sér. t. 6, pag. 113; 1861) ed il CREMONA nell'*Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (Memorie Acc. Bologna, 1^a ser. t. 12; 1861) facevano molte applicazioni dello stesso principio, specialmente alla determinazione degli ordini di luoghi geometrici (senza enunciarlo in generale, ma accennandone in ogni caso speciale la breve dimostrazione analitica). Veggasi anche quanto accenna il JONQUIÈRES in nota a pag. 872 del t. 63 dei C. R., rilevando che il CREMONA gli aveva comunicata per lettera una dimostrazione basata appunto su quel principio: « s'il fallait citer quelqu'un à ce sujet ce serait M. CREMONA ». Alcuni, — e lo stesso CHASLES in qualche punto della polemica col JONQUIÈRES (relativa alla priorità nell'introduzione degli *indici* o *caratteristiche* di una ∞^1 di curve piane) svoltasi nel t. 63 dei C. R., ed alla quale si riferiscono appunto le due precedenti citazioni di quel vol. (polemica in cui è singolare, essendosi nel 1866! di vedere che lo CHASLES considera quasi come privo di valore *perchè evidente* il lemma, adoperato dal JONQUIÈRES nella citata Nota del 1861, e poi nei *Théorèmes fondamentaux*, etc. del Giornale di mat. t. IV, 1866, pag. 45, secondo cui nell'equazione delle curve di una ∞^1 algebrica i coefficienti sarebbero *sempre* funzioni *razionali* di un parametro!) — vogliono giustificare l'attribuzione esclusiva del principio di corrispondenza allo CHASLES basandosi sulla comunicazione del 24 dic. 1855 (C. R. t. 41, pag. 1097) « *Principe de correspondance entre deux objets variables, qui peut être d'un grand usage en Géométrie* ». Ma il principio di cui qui si tratta (ed al quale il JONQUIÈRES poco dopo, sotto il nome di *principe de correspondance anharmonique*, dedicava il Cap. 4^o dei *Mélanges de géométrie pure* 1856) consiste, come ben si sa, nel fatto che una corrispondenza algebrica (1, 1), od (1, 2) fra due forme semplici non è altro che una *proiezione* fra le forme stesse, ovvero tra l'una forma ed una involuzione ordinaria dell'altra. Si tratta dunque della struttura della corrispondenza; e non del numero degli elementi uniti, come nel principio di corrispondenza formulato poi nel 1864: nè la detta comunicazione del '55 contiene alcun indizio che lo CHASLES intravedesse fin d'allora l'utilità di considerare corrispondenze algebriche d'indici qualunque (non è neppur riportata la rappresentazione analitica delle due corrispondenze (1, 1), (1, 2), che poteva servire alla dimostrazione del principio, e che poi bastava generalizzare per giungere al principio del '64). E del resto, se lo CHASLES avesse posseduto fin d'allora il principio generale di corrispondenza, si può asserire con sicurezza che non avrebbe lasciato trascorrere otto anni senza mai farne applicazioni e nem-

pletamente quelle teorie geometriche da ogni nozione analitica proseguirono poi, senza risultati definitivi, fino a questi ultimi anni, quando l'Accademia delle Scienze di Berlino pose ripetu-

dimostrato come un modo di procedere *generale*, rilevandone tutta l'importanza, nella seduta del 27 giugno 1864 dell'Académie des sciences (Comptes Rendus, t. 58, p. 1175); e poco prima nelle sue lezioni alla Sorbonne del 1863-64 (secondo quanto egli stesso asserisce poi nella nota alla pag. 821 del t. 63 dei Comptes Rendus). Ma ciò che va rilevato si è che già tre anni prima il DE JONQUIÈRES nella Nota *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque* (Journal de Mathém., 2. sér. t. 6, pag. 113; 1861) ed il CREMONA nell'*Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (Memorie Acc. Bologna, 1^a ser. t. 12; 1861) facevano molte applicazioni dello stesso principio, specialmente alla determinazione degli ordini di luoghi geometrici (senza enunciarlo in generale, ma accennandone in ogni caso speciale la breve dimostrazione analitica). Veggasi anche quanto accenna il JONQUIÈRES in nota a pag. 872 del t. 63 dei C. R., rilevando che il CREMONA gli aveva comunicata per lettera una dimostrazione basata appunto su quel principio: « s'il fallait citer quelqu'un à ce sujet ce serait M. CREMONA ». Alcuni, — e lo stesso CHASLES in qualche punto della polemica col JONQUIÈRES (relativa alla priorità nell'introduzione degli *indici* o *caratteristiche* di una ∞^1 di curve piane) svoltasi nel t. 63 dei C. R., ed alla quale si riferiscono appunto le due precedenti citazioni di quel vol. (polemica in cui è singolare, essendosi nel 1866! di vedere che lo CHASLES considera quasi come privo di valore *perchè evidente* il lemma, adoperato dal JONQUIÈRES nella citata Nota del 1861, e poi nei *Théorèmes fondamentaux*, etc. del Giornale di mat. t. IV, 1866, pag. 45, secondo cui nell'equazione delle curve di una ∞^1 algebrica i coefficienti sarebbero *sempre* funzioni *razionali* di un parametro!) — vogliono giustificare l'attribuzione esclusiva del principio di corrispondenza allo CHASLES basandosi sulla comunicazione del 24 dic. 1855 (C. R. t. 41, pag. 1097) « *Principe de correspondance entre deux objets variables, qui peut être d'un grand usage en Géométrie* ». Ma il principio di cui qui si tratta (ed al quale il JONQUIÈRES poco dopo, sotto il nome di *principe de correspondance anharmonique*, dedicava il Cap. 4^o dei *Mélanges de géométrie pure* 1856) consiste, come ben si sa, nel fatto che una corrispondenza algebrica (1, 1), od (1, 2) fra due forme semplici non è altro che una *proiezione* fra le forme stesse, ovvero tra l'una forma ed una involuzione ordinaria dell'altra. Si tratta dunque della struttura della corrispondenza; e non del numero degli elementi uniti, come nel principio di corrispondenza formulato poi nel 1864: nè la detta comunicazione del '55 contiene alcun indizio che lo CHASLES intravedesse fin d'allora l'utilità di considerare corrispondenze algebriche d'indici qualunque (non è neppur riportata la rappresentazione analitica delle due corrispondenze (1, 1), (1, 2), che poteva servire alla dimostrazione del principio, e che poi bastava generalizzare per giungere al principio del '64). E del resto, se lo CHASLES avesse posseduto fin d'allora il principio generale di corrispondenza, si può asserire con sicurezza che non avrebbe lasciato trascorrere otto anni senza mai farne applicazioni e nem-

tamente pel premio STEINER (da conferirsi nel 1884 e nel 1886) appunto il tema di fare una teoria puramente geometrica delle curve e superficie d'ordine qualunque (*); ed il concorso fu vinto da un giovane geometra, ERNESTO KÖTTER, con un lavoro (**) nel quale la detta teoria geometrica è svolta, od almeno avviata, per le curve piane. In pari tempo però, ed indipendentemente dal detto concorso, il Prof. DE PAOLIS, il quale (secondo che avverte nell'introduzione al lavoro intorno a cui dobbiamo riferire) « già da parecchio tempo aveva indirizzato i suoi studi allo scopo di rendere la geometria indipendente dall'analisi, risolveva completamente il problema »; e prima della pubblicazione della Memoria del KÖTTER presentava alla R. Accademia dei Lincei un manoscritto contenente i suoi risultati.

L'impresa a cui il prof. DE PAOLIS si accinse è più ampia che non sia il tema dell'Accademia Berlinese; e del resto, perchè la trattazione di questo risultasse più completa e luminosa, era forse opportuno prender le mosse un po' da lontano, cioè dai

meno un cenno nei suoi lavori; nè avrebbe taciuto nella citata nota a pag. 821 del t. 63 dei C. R., nella quale invece (come già dicemmo) si limita a nominare la nota del '64 e le lezioni del 1863-64.

Sarebbe poi interessante di ricercare se, prima ancora dei geometri menzionati, lo STEINER non si sia valso del principio di corrispondenza per ottenere parecchi teoremi che si trovano, senza dimostrazioni, in alcuni suoi scritti.

(*) Nell'enunciato del tema di concorso ci pare di scorgere un concetto non giusto, che rileviamo perchè lo si trova pure tuttora nell'opinione di alcuni geometri: quello cioè che a risolvere pienamente il detto problema sia necessario di sostituire agli elementi *immaginari*, punti, rette, ecc., che stanno sulle curve, superficie, ... algebriche, degli enti *reali*. Ciò non pare esatto. Si sa bene che la locuzione « elementi *immaginari* » sta per indicare certi enti perfettamente reali, come quelli considerati da STAUDT od altri equivalenti; ma non è necessario che in tutti i ragionamenti si ricorra a queste rappresentazioni. Poichè il grande geometra Bavarese ha dimostrato in base ad esse che gli elementi immaginari hanno comuni con quelli reali gran parte delle proprietà, noi possiamo fondarci a dirittura su queste, cioè possiamo partire dalla teoria di STAUDT già fatta, senza più curarci in generale delle rappresentazioni reali, sicuri che ogni volta che queste occorrono veramente, le potremo enunciare senz'altro. Così la curva o superficie algebrica si può ben considerare come un insieme di punti complessi, ai quali basterà sostituire le immagini reali per avere immediatamente delle rappresentazioni reali dell'ente algebrico.

(**) *Grundsätze einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven* (Abhandlungen der k. Preuss. Akad. d. Wissenschaften 1887).

tamente pel premio STEINER (da conferirsi nel 1884 e nel 1886) appunto il tema di fare una teoria puramente geometrica delle curve e superficie d'ordine qualunque (*); ed il concorso fu vinto da un giovane geometra, ERNESTO KÖTTER, con un lavoro (**) nel quale la detta teoria geometrica è svolta, od almeno avviata, per le curve piane. In pari tempo però, ed indipendentemente dal detto concorso, il Prof. DE PAOLIS, il quale (secondo che avverte nell'introduzione al lavoro intorno a cui dobbiamo riferire) « già da parecchio tempo aveva indirizzato i suoi studi allo scopo di rendere la geometria indipendente dall'analisi, risolveva completamente il problema »; e prima della pubblicazione della Memoria del KÖTTER presentava alla R. Accademia dei Lincei un manoscritto contenente i suoi risultati.

L'impresa a cui il prof. DE PAOLIS si accinse è più ampia che non sia il tema dell'Accademia Berlinese; e del resto, perchè la trattazione di questo risultasse più completa e luminosa, era forse opportuno prender le mosse un po' da lontano, cioè dai

meno un cenno nei suoi lavori; nè avrebbe taciuto nella citata nota a pag. 821 del t. 63 dei C. R., nella quale invece (come già dicemmo) si limita a nominare la nota del '64 e le lezioni del 1863-64.

Sarebbe poi interessante di ricercare se, prima ancora dei geometri menzionati, lo STEINER non si sia valso del principio di corrispondenza per ottenere parecchi teoremi che si trovano, senza dimostrazioni, in alcuni suoi scritti.

(*) Nell'enunciato del tema di concorso ci pare di scorgere un concetto non giusto, che rileviamo perchè lo si trova pure tuttora nell'opinione di alcuni geometri: quello cioè che a risolvere pienamente il detto problema sia necessario di sostituire agli elementi *immaginari*, punti, rette, ecc., che stanno sulle curve, superficie, ... algebriche, degli enti *reali*. Ciò non pare esatto. Si sa bene che la locuzione « elementi *immaginari* » sta per indicare certi enti perfettamente reali, come quelli considerati da STAUDT od altri equivalenti; ma non è necessario che in tutti i ragionamenti si ricorra a queste rappresentazioni. Poichè il grande geometra Bavarese ha dimostrato in base ad esse che gli elementi immaginari hanno comuni con quelli reali gran parte delle proprietà, noi possiamo fondarci a dirittura su queste, cioè possiamo partire dalla teoria di STAUDT già fatta, senza più curarci in generale delle rappresentazioni reali, sicuri che ogni volta che queste occorrono veramente, le potremo enunciare senz'altro. Così la curva o superficie algebrica si può ben considerare come un insieme di punti complessi, ai quali basterà sostituire le immagini reali per avere immediatamente delle rappresentazioni reali dell'ente algebrico.

(**) *Grundsätze einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven* (Abhandlungen der k. Preuss. Akad. d. Wissenschaften 1887).

fondamenti di tutta quanta la geometria. Così una prima parte, la più generale, della ricerca del DE PAOLIS, consiste nella *Teoria dei gruppi geometrici* (come quelli composti dei punti di una linea, superficie, ecc.) e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi; e fu già pubblicata, appunto con questo titolo, tra le Memorie della Società Italiana delle Scienze (t. 7°, ser. III, 1890). Essa contiene, tra altre cose di *Analysis situs*, la teoria della connessione delle superficie, e delle dimostrazioni puramente geometriche di teoremi sulle corrispondenze d'indici finiti, e specialmente continue, fra due o più gruppi di punti (linee, superficie), i quali equivalgono a noti teoremi analitici di VEIERSTRASS, CANTOR, ecc. (*). Si può dire che quella Memoria riguarda la parte della geometria che corrisponde alla *teoria generale* delle funzioni. Invece l'attuale e quelle che le faranno seguito, corrispondono alla teoria delle *funzioni algebriche*; si restringono cioè a trattare degli enti algebrici, rispettivamente nelle forme (fondamentali) di 1^a specie, e poi in quelle di specie superiore.

Si sa che nella geometria degli enti algebrici la parte che si riferisce alle forme di 1^a specie è quella che serve di fondamento ed alla quale è sufficiente di applicare quei principî che si trattava di stabilire geometricamente. Così la teoria generale della polarità deriva da quella particolare relativa alle forme binarie; i teoremi sul numero dei punti d'intersezione di curve o superficie algebriche, come pure quelli sugli ordini delle curve o superficie generate da fasci proiettivi, od in vari altri modi, si traggono dal principio di corrispondenza in una forma semplice; ecc. La parte dunque del suo lavoro che il prof. DE PAOLIS presenta alla nostra Accademia, e che appunto riguarda le forme di 1^a specie, è della massima importanza per gli enti algebrici; e, come si vedrà, essa non solo raggiunge pienamente il suo scopo particolare, ma prepara altresì nel miglior modo le parti successive.

Fra le vie secondo cui si soglion generare le forme algebriche di ordini qualunque mediante forme d'ordini inferiori, se ne posson distinguere principalmente due: l'una conduce ad es. alla generazione delle curve, superficie, ecc., mediante fasci proiettivi di ordini

(*) Quei capⁱ della detta Memoria che contengono proposizioni necessarie per quella su cui riferiamo sono riuniti, come avverte l'A., in un altro scritto pubblicato nel t. 18 ser. 2^a degli Annali di Matematica (1890).

inferiori; l'altra a considerarle come fondamentali per una polarità. Il 1° concetto, che deriva dalla generazione di STEINER delle curve di 2° ordine, ecc., è quello che ha guidato il KÖTTER nel suo lavoro. Il 2° invece è la base della trattazione fatta da STAUDT delle coniche e quadriche; e, se non erriamo, è da esso che, con un'opportuna generalizzazione, il DE PAOLIS è stato condotto al metodo da lui seguito. — Questo metodo raggiunge in pari tempo la massima generalità e la massima naturalezza. Si tratta infatti, in gran parte delle ricerche geometriche sugli enti algebrici, di applicare, come dianzi rilevammo, da un lato la teoria della polarità rispetto ad un gruppo di n elementi $a_x^n = 0$ della forma semplice, teoria che deriva tutta dall'equazione $a_x^r a_y^{n-r} = 0$; e da un altro lato il principio relativo ad una corrispondenza $[m, n]$ di equazione $a_x^m b_y^n = 0$. Ora è chiaro che entrambe queste equazioni, e più in generale quella di una qualunque corrispondenza algebrica $[m_1, m_2, m_3, \dots]$, si possono dedurre da un'equazione *plurilineare* $a_x b_y c_z \dots = 0$ tra gli elementi di un numero qualunque di forme, facendo coincidere questi elementi in gruppi di $m_1, m_2, m_3, \dots$. Si può dunque porre a fondamento di tutta la teoria lo studio delle corrispondenze *n-lineari* $a_x b_y c_z \dots = 0$ tra n forme di 1ª specie; e con ciò si sarà ridotti ad un ente definibile elementarmente. È appunto così che fa il nostro A.: il fondamento della sua Memoria sono queste corrispondenze, le quali raggruppano gli elementi delle n forme in una ∞^{n-1} di gruppi di n elementi, che egli chiama *aggruppamento proiettivo* (*) d'ordine n , $\mathcal{A}p_n$, e definisce con la condizione che, se di un suo gruppo si fissano gli $n-2$ elementi di $n-2$ forme, i rimanenti due descrivano nelle rispettive due forme una proiettività (cioè un $\mathcal{A}p_2$). — Questo è, come dicemmo, l'ente principale di tutta la trattazione: tutti gli altri ordinari enti algebrici, i sistemi di corrispondenze, le involuzioni, ecc., non sono che combinazioni o casi particolari di aggruppamenti proiettivi. — Aggiungiamo che l'aggruppamento $\mathcal{A}p_n$ può, come la sua equazione, essere *riducibile*, cioè spezzarsi in due o più altri; ed in particolare può essere *singolare*, cioè spezzarsi in $n(a_x = 0, b_y = 0, c_z = 0, \dots)$. La considerazione costante di siffatti aggruppamenti è d'importanza capitale.

(*) Con questo qualificativo di « *proiettivi* » per gli aggruppamenti, corrispondenze, ecc., l'A. sostituisce quelli consueti di « *algebrico, lineare, ecc.* » i quali sembrano presupporre una definizione analitica.

Quanto allo svolgimento della Memoria possiamo limitarci a qualche cenno, perchè già la prefazione di questa lo delinea con sufficienti ragguagli. La teoria generale degli $\mathcal{C}p_n$ esige alcune preparazioni, fra cui meritano di esser rilevate quelle dei due primi capitoli relativi ai *sistemi fondamentali* di elementi qualunque: i quali non sono altro che quelle varietà che si sogliono chiamare *varietà lineari*, od *iperspazi*. Un sistema fondamentale vien definito da queste proprietà: che entro esso vi sian dei gruppi S_1 , o *fasci*, d'infiniti elementi, tali che per due elementi passi sempre uno ed un solo fascio; e che se tre fasci S_1', S_1'', S_1''' hanno a due a due un elemento comune diverso dall'una coppia all'altra, ogni altro fascio, che abbia un elemento comune con S_1' ed un altro con S_1'' , abbia necessariamente un elemento comune con S_1''' . Da questi soli postulati e dalla solita generazione di sistemi superiori $S_2, S_3, \dots$ mediante quelli inferiori, si deducono tutte quelle proprietà che corrispondono ai principi della geometria proiettiva degl'iperspazi; e solo per procedere nello studio delle corrispondenze proiettive occorre poi aggiungere il postulato che una corrispondenza proiettiva (cioè ottenuta mediante proiezioni e sezioni) tra due fasci sia individuata da 3 coppie di elementi corrispondenti. — Questi sviluppi eran necessari per tutto il lavoro, perchè in esso s'incontrano ripetutamente dei sistemi infiniti di enti che verificano le dette condizioni, cioè che sono *fondamentali*; e ad essi allora vengono applicati con frutto i risultati generali ottenuti in quei due capitoli: il che dà origine a vari ragionamenti che si posson riguardare come *iperspaziali* (*).

(*) Del resto ragionamenti di tal natura si trovano anche nel lavoro del KÖTTER e sono inevitabili in queste teorie! Come esempio rileviamo nella Memoria in esame il n. 131 nel quale si considera un certo sistema semplicemente infinito N^k di aggruppamenti proiettivi, pel quale si dimostrano delle proprietà completamente analoghe a quelle ben note della curva razionale normale d'ordine k . Se quel sistema si rappresentasse analiticamente, si avrebbe pei suoi aggruppamenti un'equazione i cui coefficienti sarebbero forme binarie d'ordine k di due parametri x_1, x_2 : il che spiega quell'analogia. Chiamando m l'ordine degli aggruppamenti e (supposte coincidenti le m forme) considerando per ognuno di essi gli m elementi m -pli, la N^k del DE PAOLIS ci dà una ∞^4 di gruppi di m elementi che il KÖTTER sotto il nome di *involuzione d'ordine m e rango k* studia (§§ 99 e seg. del suo lavoro; v. anche § 189) mostrandone l'analogia con la curva razionale normale d'ordine k . Essa nasce in modo evidente da una corrispondenza $[k, m]$; sicchè si doveva presentare necessariamente ad ambi gli scienziati.

Tale applicazione si presenta da prima nel sistema costituito da tutti gli aggruppamenti proiettivi d'ordine n fra n forme fondamentali. Definiti in modo ovvio i *fasci* di aggruppamenti (e stabilita per essi, nel n. 56, una proprietà caratteristica importante), si riconosce poi in base ad essi che quel sistema di aggruppamenti è fondamentale (di specie $2^n - 1$). In conseguenza si possono introdurre dei sistemi fondamentali di varie specie ($\leq 2^n - 1$) di $\mathcal{A}p_n$, e riferirli proiettivamente fra loro: cosa importante per tutto il seguito. — Mediante ciò, e partendo dagli aggruppamenti di 2° ordine, per poi procedere con l'induzione completa ad aggruppamenti d'ordine qualunque, si definiscono e si studiano gli aggruppamenti proiettivi *armonici*. Se $a_x b_y c_z \dots = 0$ e $a'_x b'_y c'_z \dots = 0$ sono le equazioni dei due aggruppamenti, la condizione di armonia è $(aa') (bb') (cc') \dots = 0$. Geometricamente due $\mathcal{A}p_n$ si definiscono come armonici (supposta già data la definizione per due $\mathcal{A}p_{n-1}$) nel seguente modo. Due elementi x, x' di una delle n forme son completati in gruppi di due $\mathcal{A}p_n$ qualunque dai gruppi di elementi delle rimanenti $n-1$ forme i quali costituiscono due $\mathcal{A}p_{n-1}$: si considerino x, x' come omologhi quando questi ultimi due aggruppamenti sono armonici; allora x, x' si corrisponderanno in una proiettività. Orbene, se questa è un'involuzione, si dice che i due $\mathcal{A}p_n$ sono armonici. Tale relazione è di somma importanza per tutta quanta la teoria. Essa determina una corrispondenza reciproca involutoria fra i sistemi di $\mathcal{A}p_n$. Essa conduce ad uno svolgimento della massima generalità della teoria della polarità rispetto ad un $\mathcal{A}p_n$, e quindi dell'apolarità fra aggruppamenti proiettivi di qualunque ordine, ecc.

Come caso particolare degli $\mathcal{A}p_n$ si ottengono (quando le n forme sono sovrapposte) le involuzioni d'ordine n e specie (dimensione) $n-1$, vale a dire, secondo la denominazione del DE PAOLIS, le *involuzioni proiettive d'ordine n e rango $n-1$* ($\mathcal{I}p_{n, n-1}$); e come intersezione di $n-\rho$ involuzioni siffatte (e quindi del sistema fondamentale da esse determinato) un'*involuzione proiettiva di ordine n e rango ρ* ($\mathcal{I}p_{n, \rho}$) (*). Così pure da un aggruppamento

(*) Il KÖTTER nel suo lavoro in vece che dagli $\mathcal{A}p_n$ parte dalle involuzioni d'ordine n e 1ª specie (che costruisce come luogo del gruppo degli elementi nati di due involuzioni fisse d'ordini minori m , ed $n-m$, riferite secondo una proiettività la quale varia in un dato fascio di proiettività); e mediante questa genera successivamente le involuzioni di specie superiori.

proiettivo $\mathcal{A}_{p_n}$ considerando solo i gruppi in cui gli elementi coincidono secondo le molteplicità $m_1, m_2, \dots, m_r$, ove $\sum m_i = n$, si ha (come già notammo) una *corrispondenza proiettiva* $[m_1, m_2, \dots, m_r]$: ogni corrispondenza siffatta si ottiene in tal modo da tutti gli $\mathcal{A}_{p_n}$ di un sistema fondamentale la cui dimensione è $2^n - 1 - \sum m_1 - \sum m_1 m_2 - \dots - m_1 m_2 \dots m_r$. Di tutti questi enti si ottengono molte proprietà valendosi di quelle già date precedentemente per gli $\mathcal{A}_{p_n}$. Così si considerano le involuzioni armoniche, gli elementi multipli od apolari, per involuzioni o per $\mathcal{A}_{p_n}$ qualunque, ecc.; e di questi elementi si determina poi il numero, come si trova il numero degli elementi uniti di una corrispondenza (il principio di corrispondenza), il numero delle coppie comuni a due corrispondenze tra due forme, quello degli elementi uniti di due involuzioni di 1° rango riferite proiettivamente, ecc., ecc. La polarità generale rispetto ad un gruppo G_n deriva poi da quella relativa alla $\mathcal{I}_{p_{n-1}}$ che ha gli elementi di G_n per n -pli; e rapidamente, in poche pagine, si possono ottenere come semplici corollari le principali proposizioni che vi si riferiscono, il Jacobiano di due gruppi, l'Hessiano e lo Steineriano di uno, l'armonia fra gruppi, ecc.

Ad un certo punto di questa trattazione compare la necessità di stabilire un teorema geometrico che compia in essa ufficio analogo a quello che per l'algebra ha il teorema fondamentale di questa. Ed invero è solo da un teorema siffatto che si posson trarre ad es. i risultati citati relativi a *numeri* di elementi multipli, uniti, ecc... Il nostro A. ha scelto in sostanza per teorema fondamentale questo: che una $\mathcal{I}_{p_{n-1}}$ ed una $\mathcal{I}_{p_{n-1}}$ hanno sempre un gruppo comune. Val la pena di riferire il concetto della dimostrazione: Esso consiste nel considerare un fascio di $\mathcal{I}_{p_{n-1}}$ di cui quella data faccia parte, e riferirlo alla forma sostegno, riguardando come omologa ad un elemento di questa la $\mathcal{I}_{p_{n-1}}$ che contiene il gruppo della $\mathcal{I}_{p_{n-1}}$ determinato da quell'elemento. Rappresentando gli elementi della forma e quelli del fascio di $\mathcal{I}_{p_{n-1}}$ coi punti di due sfere σ, σ' , si avrà una corrispondenza $[n, 1]$ fra i punti di σ e quelli di un certo gruppo di σ' . Ma la corrispondenza si dimostra esser continua (e con un numero finito di punti di diramazione): le si può dunque applicare un teorema sulle corrispondenze continue che il DE PAOLIS ha stabilito geometricamente nei lavori precedenti, e che qui corrisponde al teorema analitico a cui bisogna sempre ricorrere nel

punto trascendente (cioè relativo alla continuità, ecc.) della dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra. Esso permette di concludere che quel gruppo di σ' abbraccia *tutti i punti* di questa sfera, cioè che *ogni* $\tilde{J}p_{n,n-1}$ del fascio (e quindi in particolare la data) ha comune un gruppo con la $\tilde{J}p_{n,1}$.

Questi cenni sono sufficienti per dare un'idea del contenuto della Memoria, e mostrarne l'originalità e l'importanza. Quanto al metodo con cui essa è svolta, non occorre dire che è essenzialmente sintetico e che della pura sintesi ha tutti i pregi, come deve avere presentato all'A. tutte le difficoltà. Per gli enti fondamentali le definizioni e le costruzioni, come pure le dimostrazioni delle principali proprietà, sono in generale basate sull'induzione completa: il che è nella natura del metodo (*). I ragionamenti sono sempre rigorosi, anche quelli più delicati relativi alla continuità delle corrispondenze proiettive. Infine osserveremo che la trattazione dell'argomento, fatta con sì grande generalità, mentre è una continua prova d'ingegno da parte dell'A., raggiunge in pari tempo una grande naturalezza, e quasi il carattere di necessità, sì che ci par difficile che in avvenire vi si possano introdurre delle semplificazioni importanti, almeno di concetto. Essa ci permette già di prevedere che l'A. potrà, in base ad essa, seguendo lo stesso indirizzo, svolgere egregiamente le parti successive del suo tema, cioè la teoria geometrica delle curve piane, delle superficie e delle varietà algebriche di ogni dimensione. E noi facciamo voti che ciò accada sollecitamente, com'egli (almeno in parte) ci fa sperare. Così quello che abbiamo chiamato il secondo periodo nella costruzione della geometria proiettiva essenzialmente sintetica si potrà considerare come chiuso ottimamente dall'importante opera del Prof. DE PAOLIS!

E. D'OVIDIO.

C. SEGRE, *Relatore*.

(*) E in fatti il KÖRTER procede allo stesso modo. — Del resto, all'infuori di poche coincidenze richieste dall'identità dello scopo e del punto di partenza (la teoria di STAUDT), non vi sono altri punti di contatto fra i due autori.