# Relazione sulla memoria del Dott. Francesco Severi, intitolata: *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, e sopra certe classi di superficie.*

La 1ª Parte di questa Memoria è dedicata principalmente ad una ricostruzione, per via geometrica semplice ed elegante, della teoria delle corrispondenze sopra una curva algebrica, che il sig. Hurwitz aveva svolta tempo fa, per via trascendente, in una Memoria fondamentale.

Indicando con $A \equiv B$ la *equivalenza* di due gruppi $A, B$ di $n$ punti sopra una curva $C$, ne deriva un significato ovvio per la notazione

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots \equiv \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \ldots,$$

ove $A_1, A_2 \ldots B_1, B_2 \ldots$ son gruppi di punti di $C$, e le $\lambda$ e $\mu$ son numeri interi positivi. La stessa notazione, quando fra questi interi ve ne sian dei negativi, significherà la relazione che si deduce da essa col trasportare i termini corrispondenti nell'altro membro. Ciò premesso, si dice che una corrispondenza $T$ fra i punti di $C$ è *a valenza* $\gamma$, ove $\gamma$ è un intero positivo o negativo o nullo, quando, chiamando $Y, Y'$ i gruppi dei punti omologhi in $T$ di due punti qualsiansi $a, a'$, sempre si ha:

$$Y + \gamma a \equiv Y' + \gamma a'.$$

Servendosi di convenienti sommazioni di corrispondenze, partendo da certe corrispondenze particolari, si giunge a dimostrare il seguente teorema (che dà, ove lo si traduca in numeri, l'intima ragione del *principio di corrispondenza* CAYLEY-BRILL): Se nella corrispondenza $T$, di valenza $\gamma$, al punto $a$ corrispondono i punti del gruppo $Y$, mentre nella inversa $T^{-1}$ allo stesso punto corrispondono i punti del gruppo $X$, si ha la relazione:

$$U \equiv X + Y + 2\gamma a + \gamma K,$$

ove $U$ rappresenta il gruppo dei punti uniti di $T$, e $K$ un gruppo canonico di $C$.

Per passare poi alle corrispondenze prive di valenza, l'Autore introduce il concetto di *corrispondenze dipendenti*. Date su $C$ $k$ corrispondenze qualunque $T_1, \dots T_k$, si dirà che esse sono *dipendenti*, se esistono $k$ interi (positivi o negativi) $\lambda_1, \dots \lambda_k$ non tutti nulli, tali che indicando con $Y_i\, Y_i'$ i gruppi degli omologhi nella $T_i$ $(i = 1, \dots k)$ di due punti qualsiansi $a\ a'$, sempre si abbia

$$\lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_k Y_k \equiv \lambda_1 Y_1' + \dots + \lambda_k Y_k'.$$

In particolare dunque una corrispondenza dotata di valenza è una corrispondenza dipendente dalla *identità*. Sopra ogni curva vi è un numero finito di corrispondenze indipendenti, per modo che tutte le altre corrispondenze sono dipendenti da queste. Se le $T_1, \dots T_k$ sono dipendenti nel modo detto, e se gli omologhi del punto $a$ in queste corrispondenze, e nelle loro inverse, formano risp. i gruppi $Y_1, \dots Y_k$ e $X_1, \dots X_k$, avrà luogo la relazione

$$\lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_k U_k \equiv \lambda_1 (X_1 + Y_1) + \dots + \lambda_k (X_k + Y_k)$$

ove $U_1 \dots U_k$ indicano i gruppi dei punti uniti nelle $T_1, \dots T_k$. Ne segue subito il principio generale di corrispondenza di HURWITZ.

Nella 2ª Parte della Memoria l'A. applica i risultati esposti a due classi molto ampie di superficie, sulle quali in questi ultimi mesi furon pubblicate delle ricerche simultaneamente da tre giovani geometri italiani: DE FRANCHIS, MARONI e SEVERI. Son le superficie che rappresentano biunivocamente le coppie di punti di due date curve, o di una sola curva. Sia $F$ una superficie che rappresenti le coppie di punti di due curve $C, C'$: vale a dire una superficie che contenga due fasci $K_x, K_y$ di curve unisecantisi, corrispondenti rispettivamente alle coppie di punti che han fisso il punto di $C$, o quello di $C'$. Ogni corrispondenza $(\alpha, \beta)$ fra i punti di $C, C'$, e quindi anche fra $K_x, K_y$, dà origine, colle intersezioni delle curve omologhe di questi fasci, ad una curva di $F$ segante in $\beta$ punti le $K_x$ e in $\alpha$ punti le $K_y$. Viceversa ogni curva $T$ di $F$ rappresenta in questo senso una corrispondenza fra $C, C'$.

Ciò posto, e adottando per curve $A_1, A_2, \ldots B_1, B_2, \ldots$ di $F$ la notazione

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots \equiv \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \ldots$$

ove le $\lambda$ e le $\mu$ sono interi, positivi o negativi, in senso analogo a quello accennato in principio nel caso dei gruppi di punti di una curva, il Severi conviene di dire che più curve $\Gamma' \ldots \Gamma^k$ tracciate su $F$ sono *dipendenti*, se esistono degl'interi (positivi o negativi, ma non tutti nulli) $\lambda_1 \ldots \lambda_k$, tali che la curva (virtuale) $\lambda_1\Gamma' + \ldots + \lambda_k\Gamma^k$ si componga per somma e sottrazione colle curve dei fasci $K_x, K_y$. Egli dimostra allora che su $F$ si può fissare un numero finito di curve indipendenti (una *base*) per modo che ogni altra curva di $F$ sia dipendente da quelle. Ne segue per questa superficie una proprietà importantissima: che cioè tutte le questioni relative alle curve tracciate su di essa si risolvono quando sian noti i caratteri delle curve rispetto a quelle fisse costituenti una base. Così si può calcolare il numero dei punti comuni a due date curve di $F$ (l'analogo del *teorema di Bézout*); come anche il genere ed il grado di una curva tracciata su $F$.

Una ricerca analoga vien fatta per la superficie che rappresenta le coppie di punti, non ordinate, di una curva $C$. Al posto dei due fasci unisecantisi $K_x, K_y$ si ha in essa un sistema $\infty^1$ d'indice 2 e grado 1 di curve, corrispondenti risp. ai punti di $C$.

Per non dilungarci troppo, ci limitiamo a questi cenni, i quali ci pajon già sufficienti per dimostrare la speciale importanza della Memoria del Dott. Severi. Concludiamo quindi col proporre che essa venga accolta nei volumi accademici.

G. Morera.

C. Segre, *relatore*.