x 1

C. Segre – Encyklop. d. Math. Wiss. – III C 7 Mehrdimensionale Räume (finito 1912 stamp. 1920-21)

Bertini – Introduz. alla geom. proiettiva degli iperspazi (1907)

La nozione di spazio a più dim. si presentò certo spontaneamente (spontaneously, by itself) a quei matematici che, avendo a trattare questioni in cui (involving) figuravano più di 3 var. indip., vollero interpretarle in modo analogo a quanto per 1, 2, 3 variabili è reso possibile dalla Geom. anal., cercando altresì in questa nuova visione dei problemi un aiuto alla loro soluzione.

Lo si vede già più volte nella 1ª metà sec. XIX – Dalla prima „Ausdehnungslehre" di Grassmann (1844) fino attorno al 1880 quella nozione sempre più, e da più parti, si fa strada nella Scienza (Segre, n° 1): ricordo, fra altro, la „Habilitationsschrift" di Riemann (1854 – 67), che inaugura la geom. metrica di una V_n, colla relativa forma diff. quadr. – il concetto di Plücker (sostanz^te quello di Grassmann) di considerare una figura dip. da un n° qualq. n di parametri, da assumersi come sue coord.; e trattare questo sist. ∞^n di figure come spazio a n dim.; onde la dim. di uno spazio non è qualcosa ~~che~~ di pertinenza (belonging) dello spazio in sè, ma in relaz. all'insieme delle figure messe a base (geom.ª retta in S_3) – molto in Cayley

] e che compare pure in taluni lav. di Cayley e Sylvester – v. art. Segre

(sp. rigato, C^n piane in S_3 rette, sfere, Q)

– Ma erano singole questioni e applic^ni, senza ~~co~~ connessione fra loro. 1870-80 un po' più sistematicamente: Jordan, D'Ovidio, Clifford (1878), e, all'occasione, se ne vale ripetut^e Klein.

1881, Veronese col lavoro dei Math. Ann. 19: 1° lavoro veramente organico di Geom. a n dim., e più particolarmente di geom. proiett. di S_n, in analogia all'ord. geom. proi. di S_3 – nel quale lavoro Veronese, allievo di Cremona, profonde tutta l'agilità (agility, ~~suppleness~~) dei metodi cremoniani. – si cessa di parlare di spazi a più dim. quasi furtivamente (secretly, in clandestine way), in occasione di probl. algebrici; si fa della vera geometria: come l'S_3 si genera da un piano per Prz, così l'S_n da S_{n-1}, ... (we are at home) fund. config. of 1 ... dims

geometric primitive forms of 1, ... dims

Corrispze proiettive tra S_n, e tra forme fondli in questi spazi - linee, sup., ecc. generate da queste corrispe proiettive - caratteri di queste linee e superficie, loro proiezioni in spazi inferiori e S_3 ... Relazioni fra i caratt. di una linea in estensione delle formole di Plücker, Cayley

or of the 1st, 2nd, ... grade

Un primo abbozzo (sketch) in order to ~~extend~~ generalize to S_n the whole work of Poncelet, Möbius, Steiner, Staudt, Chasles, Cremona.

È qui che entra in campo a geom. of 1st rank C. Segre, che nella sua Diss laurea 1883 tratta a fondo thoroughly uno di questi argomenti, abbozzati dal V., le quadriche di S_n (Mem. Torino, 36, 1884)

quadric hypersurfaces

con applic. alla G. retta

- negli anni 1883-88 fa altrettanto per molte altre questioni di geom. proi. iperspaziale [tipi più semplici e interess. di Curve, sup, V^a alg. (fra altro dei minimi ordini) manifolds] - e assunto poi alla 1888 Cattedra di Geom. Sup. nell'Univa di Torino, assurge a vero founder Capo-Scuola; a new leader of geometry in Italy

entrato nel campo scientifico precisl quando si estingueva l'attività scient. di as school Cremona since 80 years the ... seppe anche appropriarsi e far estimate apprezzare in Italia quanto, a favore del suo indirizzo dev. of his prog., si poteva trarre da valenti stranieri: Klein, Noether, Lie, ...

Con 35 anni di insegnto, nei campi più svariati della Geom., anche differ. numerativa, ha esercito immensa azione sullo sviluppo di tutta la geom. in Italia.

Suoi allievi diretti nelle Universt Fano - B. Levi - Severi - Giambelli - e altri indirettamente - molti buoni in S. medie

Castelnuovo, allievo di Veronese (1886), Enriques, (1891) allievo di De Paolis, entrambi perfezionatisi sotto Cremona, (enumerative - algebr.) traggono anch'essi vantaggio dai rapp. pers. e scambi exchanges di idee con Segre. Cast. Torino - Enriques Roma. Ecco i capisaldi della nuova scuola Italiana,

Terracini
Togliatti

che, insieme col Severi (1900 - da Segre) ~~va ad~~ affermarsi attest itself principte nella geometria sopra un ente algebrico (curva; sup, ~~M_3~~). L'indirizzo alg. geom. quasi completamente, con nuovi proced. e perfezionti, ~~per le~~ salvo le ~~poche~~ prime basi di Clebsch - Noether, e anche con import. contributi all'indro trascendente; M_3 ...

Condizni a cui deve soddisf. un sist. di enti = che chiameremo punti = perché in tale sist. valga la geom. proj. di S_n; definiz. di spazio proiettivo S_n - Complesso di postulati suffti a caratterizzare S_n proiettivo e introdurvi coordte π.

dopo l'introduz. della pg. seg.

(Veronese - Amodeo - Fano - Enriques - Pieri ...)
Fondami (Atti T 1891) (G. Matem. 92)

Applicni mecc., fisica - Sistema n gradi di libertà - Relatività a surface mapped ~~by~~ from the plan by a lin. syth …

2

Un'altra via per procedere doveva, infatti, suggerirla i numerosi casi già noti di rappres. piana di superficie razionali dello spazio.

Quando una F di S_3 è rappresent. sul piano (cioè razionale), alle sue ∞^3 sez. piane corrisp. curve di un sist. lin. ∞^3

(1) $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 + \lambda_4 \varphi_4 = 0$ e $\varphi_1 : \varphi_2 \dots = \varphi_1 : \varphi_2 \dots$ sono le eq. delle corrisp., e anche eq. param. delle sup.

Viceversa, dato questo sistema lineare inv., ~~le eq~~ ponendo $y_i = \rho \varphi_i$ si hanno in S_3 le eq. parametriche di una F — A ogni punto (x) generico del piano un punto (y) di F — Viceversa, dato un punto (y) di F, restano definiti i rapporti mutui delle φ — $\frac{\varphi_1}{y_1} = \frac{\varphi_2}{y_2} = \frac{\varphi_3}{y_3} = \frac{\varphi_4}{y_4}$, equiv. a 3 eq. distinte, 3 curve del sist. (1), che devono avere a comune almeno un punto, non base per (1). — Se ne hanno uno solo (come avviene in gen.^{e}), vale a dire se le φ per un punto generico del piano non hanno di comune altri punti comuni variabili col primo (es. — ~~C^2 per 2 punti~~ rappres. Q, F^3, …), la F risulta rappres. biunivoc.^{te}, biraz.^{te} sul piano. ~~L'ordine~~ ~~In caso diverso~~ L'ordine di F è il n. delle interes. variabili di due φ = grado del sistema = In caso diverso, se vi sono altre $k-1$ soluz. cioè in tutto k, sono k punti (x) del piano che hanno lo stesso omol. (y) su F, e che rendendo le φ proporz. alle stesse y, sono ~~tali che~~ perciò fra loro impongono alle φ del sistema (1) la stessa condiz. (meglio viceversa) F sarà col piano in corrisp. $(1, k)$ = o il piano in corrisp. $(1,1)$ colla F pensata k volte, $(F_k\, k^{ple})$ = grado = k. ordine F. — Esempio: C^6 con 8 p. basi doppi, $k = 2$, cono Γ^2 doppio; e su F linea di diramaz., ~~linea limite~~, luogo dei punti per cui 2 (almeno) dei p. omologhi del piano coincidono: su Γ^2 curva C^6_4, con immag. C^9 aventi 8 p. tripli. (grado 4 = 2 . 2) $n = k.\nu$

δ (y), point of F, is a point for which $y_1 \dots \varphi_1 \dots$ has certainly ~~almost~~ at least 1 solut. (x).

In ogni caso, a (1) corrisp. F, semplice o multipla, superficie rappresentante il (o rappres. dal) sistema (1).

I problemi pei sist. lin. ∞^3 di C^n piane ~~si rispecchiano in problemi~~ are equivalents sulle sup. F, semplici, o multiple con curva limite, in modo che le proprietà dei sist. lin. invarianti p. trasf. biraz. corrisp. a proprietà ~~delle F~~ invariantive del sistema, F e loro sez. piane"

cioè in proprietà proiettive delle F — onde legame con Geom. Proiettiva — in base al quale è prevedibile di poter ottenere una semplific. di alcune questioni; appunto facendole rientrare nella G. P.

E adesso viene natural di non più limitarsi al caso ~~che~~ che il sist. (1) sia ∞^3 — Anche ∞^n: ma allora nello spazio S_n.

retro

Quindi necessità di prendere conoscenza dello sviluppo che nel frattempo aveva ricevuto la geom. a più dimens.

In generale: La Geom. proi. delle sup. razionali di S_n equivale alla Geom. dei sist. lin. (loro rappresentativi) di C piane risp. al gruppo delle trasf. ~~biraz.~~ Crem. del piano.

Segre - Rend. Palermo IV-1890 p. 86 - Nota a Castelnuovo
Enriques - M. Ann. 46 - p. 179-80 (da Segre)

E si è potuto con vantaggio dallo studio proiettivo di quelle sup. dedurre proprietà dei sist. lin. di curve.

P. es. le riduzioni accennate dei sist. lin. di curve piane ~~si collegano~~ risultano comprese nella determ. delle sup. razionali di S_n a curve sezioni di genere 0, 1, ...

(se almeno ∞^3)

E allgemeiner Ansatz anche per ricondurre le M_3 di S_n nelle riduz. sistema lineari ∞^n di sup. in R_3, che, direttamente, non si poteva pensare di affrontare.

Inoltre 2 sist. lin. deducibili l'uno dall'altro a $\frac{1}{2}$ trasf. Cremoniana rappresenteranno sup. deducibili fra loro con trasf. birazionale che muta sez. piane in sez. piane - quindi con trasf. Π - cioè rappres. sup. proiett. identiche, vale a dire, dal p. di v. G. Proi., una ~~sola~~ med. superficie.

To go on the right way, we want to consider, with a linear system, only ~~other~~ such figures and characters, which are birationally connected with this system; which ~~have to~~ are, so to say, „covariant" of the given lin. syst., with respect to Cremona-transf. ~~But it was only the~~ To this purpose, some new concepts were wanted, which the progressive development of ~~the~~ the so-called „geometry on an algebraic curve", that is the study of groups of points (or sets of points) on curves and of their „linear series", ~~which ought~~ could only suggest. ~~these concepts, as it happened some years afterwards, about~~ The necessary material already existed, in Germany, given by Riemann & by a Memoir of Brill & Noether in the 7th vol. of Math. Ann.; but it wanted to be brought in contact with Italian researches: as it was about 1890.

Particularly we ought to consider:

1st The groups of points ~~etc~~, on a generic curve of the lin. syst., constituting the intersections (outside of base-points) of that curve with ~~the others~~ the others. No doubt that this syst. of groups of points is covariant with the lin. syst. of curves: characteristic series of the lin. syst. If $f(x,y)=0$ is this generic curve, $\varphi(xy)+\lambda\,\psi(xy)=0$ a pencil of other curves of the syst. in which $f=0$ is not contained, this pencil will intersect $f=0$ in a ∞^1 of groups of points G_n. The system of the G_n's is then in a $(1,1)$ corresp. with the values of λ. If you consider now the „surface of Riemann" defined by the equation $f(x,y)=0$, the expression $\lambda = -\dfrac{\varphi(xy)}{\psi(xy)}$ (where x,y are connected by $f=0$) will appear as a „rational function" on that surface, and the G_n's as the groups of points in which this function assumes the same value, that is as the so-called „points of level" of the function. — We are, on this way, in connexion with „Riemann's „Theorie d. Ab. Fct."

2nd The most important „covariant" of a given lyn. syst. of curves of order n is the lin. syst. of its adjoint curves of order $n-3$ (leaving at the side its eventual fixed parts) „pure Adjoint. Syst". ~~If Γ is transf. by a~~ If F is transf. by a Crem-transf. into Γ', the „adjoint ~~system~~" of Γ ~~is transf. into~~ (without fixed parts), that is its „pure adj. syst." transf. into the adjoint syst. of Γ' (....).

Ex. - quadr. transf. - str. lines into Conics (ABC) — C^4 ~~into~~ (adj. st. lines) into $C^8(A^4B^4C^4)$ — Adj. $C^5(A^3B^3C^3)$; leaving at the side the 3 str. lines AB, BC, CA, we get Conics (ABC).

This ~~property~~ „adjoint system" was already considered by Brill & Noether, for a single curve.

Its invariant connexion with a given lin. syst., towards Cremona-transf., was ~~stated~~ uttered by S. Kantor, without giving a compl. dem. of it — Definitively stated and dem. by Castelnuovo

(Ric. gen. sui sist. lin. di C piane; Mem. Torino 42, 1891); v. la prefazione — e la Relazione (Report) Segre Atti 26 - 1890-91, p. 595)

Students who know the theory of Ab. int. may understand this connexion, ~~also~~ even if I cannot ~~give~~ demonstrate it. Suppose the generic C^n of the given syst. to be of genus p, and to have some multiple points of order k — which must be all among the base-points of the system: we ~~will~~ have:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \Sigma \binom{k}{2}$$

Then the number of intersections of a C^n with the adjoints C^{n-3}'s, outside of mult. points, is:

$$n(n-3) - \Sigma k(k-1) = 2p-2$$

~~But, if f=0 is a C^n of the system, $\varphi(xy)+\lambda\psi(xy)=0$ a pencil of adj. C^{n-3}'s~~

and the degree of freedom (dims.) of the adj. system is

$$\frac{(n-3)n}{2} - \Sigma\binom{k}{2} = p-1$$

(so it is, though to be completely sure of it some other considerations are necessary, in order to demonstrate the asked conditions are, with resp. to the C^{n-3}'s, all independent.)

Then, if $f(x,y)=0$ is a generic C^n of the given system, ~~the~~ eq. of the „adj. syst." may be written in the form:

The intersect[illegible]

$$[illegible] + \lambda_1\varphi_1(xy) + \dots + \lambda_p(xy) = 0$$

If we cons. now the surf. of Riemann $f=0$, ~~and~~ ~~then~~ $\frac{\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\dots+\lambda_p\varphi_p}{f_y}$ is, on that surface, the most general differential coefficient of an Abelian integral of the 1th kind (involving, as you know, p linear constants).

The intersection of $f=0$ with an adjoint C^{n-3} outside of ...., are the zero's of the diff. ~~[illegible]~~ coeff. of Ab. Int.

The connexion between the curve C^n and its adj. syst. is also quite the same as between a surf. of Riem. and its Ab. int. of the 1th kind

In order ~~I ought now~~ to explain Castelnuovo's ~~Memoir~~ Paper of 1891, ~~it~~ we want before to ~~ex~~ study all these things about curves — & that we shall do.

But the two concepts of the „characteristic series" & of the „adjoint syst." of a given ~~of a~~ linear system are applicable, not only to the plane, that is to rational surfaces, but to ~~ever~~ all lin. syst. of curves, on all surfaces. We shall meet them, from this much ~~more~~ general point of view, in ~~the~~ our last 4-5 lectures.

(4)

* Articolo recente Coble: Cremona Transf. and applications to Algebra, geometry & modular functions Bull. Am. Soc. 28, oct. 1922, p. 329
— e prima: Amer. Trans. 17. 1916 p. 345

Introdotte nella geom. le trasf. biraz. (del piano e dello spazio), era naturale che si (begin) avviasse la costruz.e di una „geom. delle trasf. biraz.", in analogia alla geom. proj., già ormai in stabile assetto, e ad ulteriore (further development) svolgimento del „Progr. di Erlangen" di Klein. — ~~Tutti~~ L'attenzione doveva concentrarsi sugli enti invarianti per trasf. biraz., e proprietà di questi enti, analog.te invarianti. (*)

Fra i primi enti consimili si presentavano, nel piano, i sist. lin. di C^n (in S_3 ....) — Quindi l'idea / di sceglierne, in ogni singola famiglia di sist. lin. biraz.te equiv., un tipo, ~~caratt~~ distinto p. qualche particolare carattere — E il carattere su cui si fissò dapprima l'attenz.e dei geometri fu l'ordine, carattere π, assumendosi come tipo il sistema che aveva l'ord. più basso — Così ebbero origine le ricerche sull'abbassamento (bring down) di ordine di un sist. lin., a m. di trasf. Cremoniane (in part.e, quadratiche) — In questo senso già le reti omaloidiche sono equiv. al sist. delle rette — Ora ad es. per i sistemi lineari dei minimi generi — p = 0, 1, 2, ... (Bertini, Guccia, Jung (Sicardi, Caporali, Martinetti); in seguito De Franchis 1898-99, Ferretti (Palermo - 16 - 1902) *

/ di disting. in fam.

~~e con queste si collega la riduzione delle I_2 del piano a tipi determ.i~~
~~(Bertini — Annali (2) vol. 8)~~

$p = 0$ (almeno ∞^1): sistema ∞^5 delle C^2 = sistema delle C^n con punto $(n-1)^{plo}$ e 1) un p. base semplice — oppure 2) $\mu \genfrac{}{}{0pt}{}{\geq 0}{\leq n-1}$, relative tang. fisse — $n-1$, $\mu = 0$, le ∞^2 rette.

$p = 1$, ~~almeno ∞^1~~ fasci: C^{3r} con 9 punti r^{pli} $(r \geq 1)$
almeno ∞^2: C^3 con $\mu \genfrac{}{}{0pt}{}{\geq 0}{\leq 7}$ p. basi semplici (~~dist.~~ o ∞ vicini) = C^4 con 2 p. doppi (dist. o ∞ vicini).
p = 0, dim. grande quanto si vuole; $p \leq 1$, dim ≤ 9; e $p > 1$ anche limite, $3p+3$ e anche iperell.

$p = 2$, risultato più complesso — Jung ha notato che non sempre con 1 trasf. quadr. si può ottenere ridur. ordine — ~~talvolta~~ solo con più successive — Teorema sulla dim. massima dato p. (1) mediante riduz. di ordine di sist. lin., e la consideraz. che in una I_2 il sistema formato dalle C fond. deve corrisp. a se stesso

Riduzione I_2 piane a tipi determinati — Bertini Annali (2) vol. 8, p. 11, 244 —

Tipi involutorî a) Coppie I_2 distribuite sulle rette di un fascio = Omolog. armonia = e curva di p. uniti C^n con p. $(n-2)^{plo}$ nel centro del fascio.

b) Involuz. determ. da rete C^3 con 7 p. basi semp. = c) Involuz. determinata da sist. lin. C^6 con 8 p. basi doppi: C^6 per 1 punto ulteriore contengono il conieg.te 2° p. determinato = Anche qui, nello studio, un carattere π: la classe: a further change Cremonian invariant number

Essendosi riconosciuto che dette I_2 ~~tutte~~, come enti ∞^2, sono tutte razionali, perciò riferibili a un nuovo piano, onde corrisp. (2, 1) fra i 2 piani, si dovevano ritrovare i tipi di p.ni doppi razionali...

* dopo la nuova ~~...~~ dimostr.e Castelnuovo sulla riduz. trasf. Crem. a prodotti quadratiche — e valendosi delle progredite teorie sist. aggiunto ecc.

(1) Ann. Mat. 15, 277; 16, 291, Ist. L. 1887-88 = sist. coll. fra n° punti e p. fond.

Ma le difficoltà crescevano col crescere di p: s'avevano tipi sempre più numerosi, e a volte complicati; e per lo studio di un sistema lineare riesce poco vantaggioso, in generale, l'abbassto ordine quando porti di conseg za magg. complicazioni nella natura dei p. basi.

doubtful

Aggiungasi che la riduz. a un determinato ord. minimo possibile in taluni casi, cessa di esserlo in altri che appaiono casi particolari del primo — appaiono essenz te diverse famiglie

lowett

tuttavia

che in realtà rientrano l'una nell'altra
~~corrisp.~~ attuata immag. a sup. — una caso part. dell'altra.
not quite satisfactory

$C^3(A^2BC)$, riducibile a C^2 per 1 punto in generale, cessa di esserlo se B, C ∞ vicini ad A in direz. diverse.

$C^6(A^4B^2C^2)$, id a $C^4(A^2)$, id. id.

Anche nella determin. e tipi J_2 di Bertini certi casi partic., apparentemente diversi, in realtà non lo erano
C^6 con 8 p. d — 2 inf. vicini = 3 allin = 5 su C^2 = c'è sempre, nel sist. ∞^3, una rete ellittica.

Fu Segre a rilevarlo (Nota al lavoro Castelnuovo „ Sulle sup. alg. le cui sez. piane sono C iperell — Palermo 4 - 1890). — La classif. in base all'ordine minimo ha dell'arbitrario, e introduce il concetto di ordine, che è proiettivo, non invar. p. trasf. biraz. — È qualcosa che non appare naturale] — Conviene fermare l'attenzione su enti che siano legati birazionalmente al sistema lineare.

[Come se, in geom. proi a, si assumessero a rappresentanti di certe classi di enti, tipi metricamente particolarizzati. — pentagoni trasformabili in pentag. regolari

Tali ad es. la serie lineare caratteristica, il sistema aggiunto puro, e anche i successivi aggiunti. Ma era solo il progressivo sviluppo della geom. sulla curva alg. che doveva suggerire questi concetti — e i procedim ti da adattarsi dovevano essere sostanzialmente applicabili a tutte le sup. algebriche, anche non raz.

già considerata in Brill - Noether p. 308
Segre - Palermo I p. 217 (senza il nome)

Soltanto dal 1890 = Castelnuovo, Ricerche generali sui sist. lin. di curve piane = Mem. Torino, 42, 1891.

? anche ~~BN~~? Noether?

Relaz. Segre Atti 26. 1890-91 p 595

Del sist. agg. puro aveva fatto uso — ma senza dim e completa ~~sel~~ sua ~~ino~~ legame invariantivo — S. Kantor: il legame inv. fu invece stabilito da Castelnuovo (n° 27)

? sist. agg. in BN, a proposito ? canonica
anche i successivi S. Kantor p. trasf. cicliche (C. Rend. 9/2 1885) e Acc. Napoli 1892

~~sist.~~ Non ne parlo, perchè per ora impossibile — e poi verrà assorbita in ciò che dirò sulle F.

sist. lin. C raz., dim. arbitraria — C ellittiche ≤ 9
altre $\leq 3p+5$; e se $> 2p+7$, si compone C. iperell., hanno sist. totale C^4 e C^5.

Noether' Memoir = Ueber Flächen welche Schaaren rationaler ~~Flächen~~ Curven besitzen (Math. Ann. 3 – 1871)
p. 161

I mentioned that, ~~by~~ in mapping rational surfaces on the plane, Cremona repeatedly ~~met together~~ came in contact with Clebsch & Noether. I want now to recall some important results obtained on this subject by these two geometers.

When we map a rational surface F on a plane, every pencil of straight lines on the plane is the representative of a pencil of rational curves on F. Conversely, ~~if on F~~ supposed to be ~~given~~ a surface containing, a linear (that is a rational) pencil of rational curves C ~~is given~~ (in other words, such a rational system of C's, such that through a generic point of F one C only may pass): may we map F on the plane, in such a manner that the C's may have, as their correspondent lines, the straight lines of a pencil?

More generally: ~~if on F~~ we may suppose F to contain ~~an~~ an even not rational pencil of rational curves C ~~is given~~ – say, a pencil of genus p of rational curves –, that is a system of genus p (to be referred in a [1,1] correspondence to a curve of genus p) of rational curves C, so that one C only passes through a generic point of F. Such a system of C may be called a fascio. I ought to say immediately that, if $p > 0$, F cannot be a rational surface; the most simple example is given by a ruled surface of genus p, ~~the~~ the rational C's being its generators. And we may ask then if it will be possible to ~~represent~~ map F on a cone of genus p (if $p = 0$, the pencil of rays may be considered as a cone of genus 0), the curves C being transformed into the generators of the cone?

The vertex of the mentioned cone (in the plane, the center of the pencil) will have as a correspondent locus on F either a common point of the C, or a fundamental line intersecting every C in one point. The existence on F of such a line, intersecting every C in one point (of a one-secant of the C's) is therefore a necessary condition; but the mentioned line may also reduce itself to a single point, on all C. In order to demonstrate that the same condition is also a sufficient one, we may etc.

We may start from the following consideration. If a rational curve is given, say a rational plane C^n how can we get the expressions of ~~its~~ the ~~point~~ coordinates of a generic point of it as rational and rationally invertible functions of a parameter t? By getting a pencil of plane curves, having t as its variable parameter, and whose curves may ~~have~~ intersect C^n in one variable point only (unisecant) (that is in points which are ~~all fixed points~~, only one excepted); we get so the desired (1,1) correspondence between C^n and the system of values of t. – A rational C^n (that is a C^n of genus 0, also with $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ double points, or an equivalent number of higher multiple points) has a ∞^{n-2} system of adjoint C^{n-2} (having in every point of multiplicity k of C^n the multiplicity $k-1$ at least), which intersect C^n, out of the ~~mentioned~~ multiple points, in $n-2$ other points. If ~~we~~ we only ~~know~~ know on C^n a single point ~~irrationally given~~, we ~~only want to~~ may consider ~~the mentioned~~ its adjoint C^{n-2}'s having there a ($n-3$)-point-contact with C^n (that is $n-3$ consecutive common simple points), and will ~~have~~ so obtain our purpose. By solving the system of equations of C^n and C^{n-2} (the last one containing linearly the parameter t), one solution only will depend on t, and this one will be constituted by rational – and rationally invertible – functions of t.

For a twisted C^n, we ~~should~~ want a pencil of surfaces intersecting C^n in only one variable point; and this one is also to be get, by knowing one point on C^n.

Now, a (rational or not rational) surface F may be given, and on it a (rational or not rational) pencil = fascio = of rational curves C, every generic point of F belonging to one, and only one C. The ∞^1 system of the C's will be in a $[1,1]$ correspondence ~~to~~ with a plane curve $f(\lambda,\mu)=0$, of a certain genus p (≥ 0); we may also ~~consider~~ interpret $f=0$ in a bundle of rays, as the equation of a cone or of a cylinder, whose system of generators is in a $[1,1]$ correspondence with the „fascio" of C's. – Suppose now that on every C one point be rationally known – that is its ~~bet~~ coordinates ~~depending~~ may be rational functions of λ, μ (which are always ~~bounded~~ connected by the equation $f(\lambda,\mu)=0$) and of known quantities –, geometrically: that a curve is known on F, which intersects every C in one variable point only: they shall be able to obtain, for every C, a pencil of surfaces (or curves)

$f(x_i,\lambda,\mu)+t\,\varphi(x_i,\lambda,\mu)=0$ intersecting the ~~mentioned~~ C in question in one variable point only; and, if we solve the system formed by the equations of a single C and by $f+t\varphi=0$, we shall get the x_i, that is the coordinates of a generic point on F, as rational functions (algebraic ones, and with one value only) of λ, μ, t (λ, μ being always ~~obliged to~~ connected by ~~satisfy the~~ $f(\lambda,\mu)=0$), whilst to every point of F only one group of values of these variables [$f(\lambda,\mu)=0$] will correspond.

~~So~~ We shall so have mapped F on the cone $f(\lambda,\mu)=0$; λ, μ (with $f=0$) and t may be considered as coord. on the cone: particularly on the plane, if $p=0$, as f may then ~~receive~~ be a linear function $a\lambda+b\mu+c$.

that is for every pair of values of λ, μ for which $f(\lambda,\mu)=0$,

the points of the surf. will be then in a (1,1) corresp. with the groups of values of λ, μ, t, connected by $f=0$

x_i = rat. fct. (λ, μ, t) with $f(\lambda\mu)=0$

If the coefficients of the equation of F are regarded as known (defining a field of rationality), we only ~~want~~ may want to adjoin to them an arithmetical irrationality, ~~as~~ in order to distinguish the above curve intersecting every C in one variable point from eventual others.

& in order to get the representation mentioned above

~~We~~ The question now arises, if and when the „fascio" of curves C on F may have such a one-~~secant~~ cutter (as we shall say).

From Noether's Analysis, it appears that:

1. The C's may be always supposed to be plane curves, as, by substituting to every C a ~~to them~~ convenient projection, say C', of ~~themselves~~ it, we ~~may~~ get, ~~a new surface~~ as the locus of C', a new surface F' in a $[1,1]$ correspondence with F; and ~~now~~ we may then proceed by considering F' and the curves C''s on it.
2. By plane transformations which I cannot explain with more details, we are allowed to reduce the order n of the C''s ~~by~~ by 2 unities; to change it therefore in $n-2$, $n-4$, ... as far as to reduce it to be $= 2$ or 1; that is the curves C''s to be conics or straight lines, F also into a surface containing ∞^1 conics, or into a ruled surface.
3. A one-~~secant~~ cutter of the C''s is certainly to be obtained if the curves C''s have been transformed into straight lines, that is if they were originally of an odd order: we only want to take f. inst. a plane section of the ruled surface, ~~as~~ and its corresponding curve on the former F.
4. If the C's were originally of an even order, and F has therefore been transformed into a surface with a „fascio" of conics (one conic through every generic point of the surface), we ~~must~~ ought now to distinguish the case of a rational fascio $(p=0)$ from the case $p>0$.

4.a) If $p=0$, Noether procedure allows to transform F into a surface ~~intersected by a sheaf of planes~~ having its ∞^1 conics in the single planes of a sheaf, that is into a surface of order m, having a straight line (the axe of the sheaf) as a multiple line of order $m-2$. And he succeeds then in constructing on this surface a curve of a certain order k intersecting the multiple line in $k-1$ points, having also with a single conic one common point, as desired.

We may also conclude: ~~Every~~ All surfaces containing a rational pencil of rational curves may be mapped on the plane, in such a manner that the ~~mentioned~~ rational curves be transformed into the rays of a pencil.

Particularly, if the given surface F is a plane: All pencils of plane rational curves may be transformed by a Cremona-transformation in a pencil of rays.

4 b) If $p > 0$, that is for a surface containing an „irrational fascio" of conics (i.e. of curves of an even order) Noether did not get to any more ~~pre~~ definite result.

Only much later Enriques (Rend. Lincei 1898, p. 281, 344; Math. Ann. 52 (1899), p. 449) succeeded in concluding that in this case also the required one-~~secant~~ cutter exists, and the surface may be mapped on a ruled surface, f. inst. on a cone: his long proof is based on properties of algebraic curves and of sets of points on them, meanwhile obtained.

Noether's results have also a ~~greater~~ larger interest than it appears from the particular case we considered.
Every ∞^2-system of rational curves in space, having the property that through a generic point one curve only of the system passes (shortly „a congruence of the 1th order of rational curves"), if it has a one-secant (line, or surface; and it has certainly if its curves are of an odd order), may be transformed by a Cremona-correspondence into a bundle of ~~line~~ rays.

In more-dimensional spaces: Every M_k containing a ∞^{k-1}-congruence of curves of the 1th order (through ~~every~~ a generic point, one ~~to~~ curve only) with a one-secant (and this always happens for curves of an odd order) may be mapped on another M_k containing a correspondant congruence of rays (f. inst. on a S_0-cone).

Two M_K of the mentioned typus are birationally equivalent if their congruences are so.

Double plains

I may also mention some other ~~repr map~~ representations of surfaces, considered by Noether and Clebsch, and which had a certain influence on the development of theory of surfaces.

~~And~~ I already showed how a quadric may be mapped on a plane by its stereographic projection. If we project a quadric onto a plane ~~conversely~~ - from a point C not belonging to the surface, every point of the plane is the image of two (generally distinct) points P, Q of the quadric; and if we think to get, on the plane, two superposed sheets, as the loci of the projections P', Q' respectively, we may ~~have~~ say to have got a „double plane", in a [1,1] correspondence with the quadric. ~~Th~~ Both sheets are joined along a conic γ, the locus of the intersections of the plane with the ~~traces of~~ straight lines through C and ~~being~~ tangent to the quadric; ~~the mentioned~~ conic is ~~th~~ called the branch-curve of the double plane.

We have so mapped the quadric on a double plane, with a conic as a branch-curve. This double plane with its branch-curve ~~is~~ (a conic), as it may be mapped on a quadric and consequently on a (simple) plane, is also a rational surface. - It may be analytically represented by the equation $z^2 = f(xy)$, if we suppose $f = 0$ to be the equation of the branch-conic, and to ~~put~~ lay - down (depose) - I may say - on both sheets of the x, y-plane the two values of $z = \sqrt{f(x,y)}$. (square root)

The (1,1) correspondence between the mentioned double plane and a simple plane is at the same time a (1,2) correspondence between the same planes, if both considered as simple ones; the ~~first one~~ branch-conic of the former one ~~having now also its branch-conic (which~~ appears at present as the locus of points whose 2 correspondent points are coincident).

In the same way ~~similarly~~, if we project a surface of the 3rd order F^3 from one of its ~~points / simple~~ points (eventual multiple points excluded) on a plane, we get again a double-plane; the branch-curve being now, generally, of the 4th order - as to a general plane curve of the 3rd order we may lead from one of its points four tangents. As ~~the~~ a ~~every~~ surfaces of the 3rd order are rational, the only exception being given by cones of genus 1, and as the branch-curve breaking up then into 4 straight lines through ~~t~~ one point, we ~~may~~ ~~conclude~~ get on this way rational double-planes with a branch-curve of the 4th order (not consisting in 4 lines through one point).

If the ~~center~~ projections-center on F^3 is taken as the ~~point~~ [0] points of the coordinate ~~point [0]~~, we may write the surface's equation in the form:

(1) $$x_0^2 A_1 + 2 x_0 A_2 + A_3 = 0$$

the A_i being homogeneous polynomials of degree i involving x_1, x_2, x_3: the branch-curve in the plane (x_1, x_2, x_3) $(x_0 = 0)$ is then:

(2) $$A_2^2 - A_1 A_3 = 0$$

and its double tangents (whose number is 28, if the mentioned C^4 is of genus 3) are all - only one excepted - the projections of the (27) straight lines on F^3; the last one is the intersection ~~trace~~ of the tangent plane of F^3 ~~at~~ the point [0].

Conversely, if a plane curve of the 4th order is given, we may always assume its equation in the ~~form~~ (2): $A_1 = 0$ being one of its double tangents, $A_2 = 0$ a conic through both points of contact, $A_3 = 0$ a cubic which is tangent to the C^4 in all its 6 residual intersections with $A_2 = 0$. And the double plane $x_0 = 0$ with the branch-curve (2) is then the projection of the surface (1) from the point [0].

All double planes with a branch-curve of the 4th order, which does not break up into 4 rays of a pencil, ~~it~~ are rational surfaces.

The equation $x_0^2 = A_2^2 - A_1 A_3$ represents ~~now~~ a (rational) surface of the 4th order, having the point [0] as a double point, and in a [1,1] correspondence with the ~~mentioned~~ double plane.

Abbiamo veduto come, nelle questioni di rappres. piane di sup. raz., Cremona si incontrasse ripetut.te con Clebsch e Noether.

È bene segnalare anche qualche altro risultato ottenuto da questi ultimi due (att. 1870), e rivelatosi di grande importanza per il seguito.

Quando una sup. raz. F si rappresenta sul piano, a un fascio di rette del piano corrisp. sulla F un fascio di C. razionali. Viceversa, se sopra una F si ha un fascio (lineare, oppure raz.) di curve razionali C, si potrà la F rappres. sul piano in modo che alle C corrisp. p. es. rette d'un fascio? — Più generalmente, se sulla F si ha un fascio, anche non raz., e diciamo di genere p, di curve C, si potrà la F rappres. sopra un cono di genere p, in modo che alle C corrisp. le generatrici di questo cono?

Prendiamo le mosse di qui. Se abbiamo una curva raz., diciamo C^n piana, come possiamo rappres.te a ½ funzioni razionali e invertibili di un parametro ρ? — Il concetto è di procurarsi un fascio di C. piane, nel quale ρ sia parametro, tale che ogni C. d'esso tagli la C^n in un solo p. variabile: Così corrisp.za biunivoca fra p. della C^n e valori parametro. — La C^n avendo C^{n-2} agg. (ordine minimo) in n° di ∞^{n-2}, ~~basta~~ che la segano ancora in ~~l~~ $n-2$ p. (fuori p. mult.), basta conoscere sulla C^n un punto, e prendere le C^{n-2} agg. con contatto $(n-3)$-punto ivi, p. avere ottenuto lo scopo .... Risolvendo il sistema delle 2 eq. di C^n e C^{n-2}, si ha una soluz. comune dip. da ρ: ossia x, y fz. raz. di ρ, e a ogni $(x\,y)$ un solo valore di ρ. es. C^3, C^4

Così anche p. C^n sghemba ~~[illegible]~~: occorre sempre fascio con una intersez. variabile — e per questo un punto sulla curva.

~~Nell~~ La questione di cui sopra per le sup. è stata trattata da Noether (Math. Ann. 3 p. 161). Si abbia sulla F un fascio di C — per ogni punto una — eventualmente anche non razionale, sicchè siano segate da sup. Φ di un fascio, ogni Φ segando anche 2 o più C. ~~Il fascio~~ Le curve C corrispondono biraz.te alle soluzioni λ, μ di un'eq. alg. $f(\lambda\,\mu)=0$ che si può a sua volta interpretare come eq. di un cilindro o cono; perciò la ∞^1 delle C ci corrisp. biraz. col sist. delle gener. di tale cono. — Se sopra ogni C è razion.te noto un punto, cioè se esiste sopra F una curva unisecante le C, potremo

$F(x y z) = 0$
$\phi(x$

costruire ~~pe~~ per ogni C un fascio di sup. pre unisecanti a parametro ρ; e allora dal sistema delle equazioni di una C generica (eq. nei cui coeff. entrano $\lambda\,\mu$, legati dalla $f=0$) e del corrisp. fascio ~~avre~~ ricaveremo $x\,y\,z$, coord. di un punto generico della F, come funz. ~~raz. di~~ alg. univoche, perciò razionali, di λ, μ, ρ — λ, μ sempre legate dalla $f=0$ — e tali ancora che a una data terna $x\,y\,z$ corrisp. una sola $\lambda\,\mu\,\rho$ — λ, μ sempre legate da $f=0$.

Avremo così la rappres. di F sul cono, in particolare sul piano se il fascio di C è razionale.
(Irrazionalità aritmetica unica per tutto il fascio, p. avere le unisecante).

Tutto si riduce a vedere quando è che il fascio ~~raz.~~ di C ammette una unisecante — Dall'Analisi di Noether appare che senza di ciò la rappres. non è possibile.

Da detta analisi appare altresì: 1) Che si può ricondursi razionalmente al caso che le C siano piane. (a $\frac{1}{2}$ π_2 da un p. fisso sul piano corrisp. di un certo fascio).

2) Che con una trasf. ~~ra~~ ~~Cremoniana~~ birazionale ~~ra~~ raz. nota l'ordine di ogni C ~~può~~ (se > 2) può abbassarsi di 2 unità: può dunque ridursi a 2 o 1 — ossia le C a coniche o rette.

è trasf. biraz., non Crem. in generale, delle C^n, a $\frac{1}{2}$ C^{n-2} agg. per $n-4$ punti generici del piano

3) Che la unisec. esiste certo quando le C possono ridursi a rette, cioè siano di ordine dispari.

4) Che nell'altro caso la F può rappres. però sempre sopra una sup. con ∞^1 coniche — Se però questa ∞^1 è razionale, perciò la F rappres. sopra una Φ^n con retta ~~n^{pl}~~ $(n-2)^{pla}$, i piani per questa segando le ∞^1 coniche, la unisecante esiste pure (C^k con $k-1$ p. sulla retta nominata).

Pertanto: ogni sup. contenente un fascio razionale di C. raz. si può rappresentare sul piano in modo che alle dette curve corrispondano le rette di ~~da p~~ un fascio.

(Nel piano: Ogni fascio di C^n piane razionali può ridursi con trasf. Cremoniana a un fascio di rette).

the tangents to the ~~two~~ conics, ~~The 2 conics give~~, at ~~in~~ this point, are tangents to the asymptotic ~~direct~~ ~~tangents~~ lines. — These tangents cannot coincide, without coinciding the whole conics: the tangent plane is then ~~tangent~~ tangential along this whole conic, which is then a part of the parabolic line of F^4. This line breaks up into 4 conics. —

By projecting the F^4 from its ~~three folds~~ triple points ~~into~~ on a plane, the ∞^2 conics on F^4 are mapped as conics ~~on~~ through 3 fixed points, the ~~latter~~ points being the images of the 3 double lines. By a quadratic transformation we can ~~tra~~ change the ~~named~~ conics into straight lines of another plane, and the 3 points into as many particular straight lines, the sides of a triangle. ~~There is~~ The 4 parabolic conics are then represented by the sides of a ~~then a quadran~~ quadrilateral, having the sides of this ~~that~~ triangle as diagonals ~~one~~. ~~and whose sides correspond to four determined conics; along each of them F^4 has a fixed plane tangent plane.~~

C^2 retta doppia
C^2 parabol } punti 1° d.

Two superposed points of each double line of F^4 have now their correspondents on a diagonal of the ~~same~~ quadrilateral, and in such a position as to be harmonic conjugate with respect to the two vertices — There are ∞^1 conics inscribed in the ~~named~~ quadrilaterals: two of them say ~~$\gamma_1 \gamma_2$~~ pass through a given point P, and their tangents in P, ~~name~~ say t_1, t_2, are the double elements of the involution considered in ~~by~~ Desargues' theorem (more exactly: in ~~by~~ its dual theorem) in the pencil of lines P.

L J

They ~~are~~ also intersect all ~~sides of~~ the ~~quadrilateral in~~ diagonals of the quadrilaterals ~~triangle, on~~ in harmonic conjugate points with respect to the vertices on the same diagonal. Hence ~~and from that it~~ ~~they~~ t_1, t_2 are images of conics γ_1, γ_2 ~~in~~ intersecting the 3 double lines in the same 3 points, and lying therefore in the same plane, namely in the tangent plane of F^4 at the fourth intersection of γ_1, γ_2, ~~of the named conics,~~ that is on the corresp. point P' of P.

The two conics γ_1, γ_2 ~~passing on~~ through P' give also the ~~two~~ directions of the two asymptotic lines at ~~directions in~~ this point; and the corresponding directions in the plane at ~~in~~ the point P are given by t_1, t_2. ~~From that~~ Hence it follows that asymptotic lines on F^4 have as their images the ∞^1 conics γ; they are also rational curves of the 4th order.

A birational transformation, or Cremona-transf. between two spaces, is, ~~similar~~ in a complete analogy with the case of two planes, an algebraic (1,1) correspondence between the ~~mentioned~~ spaces, which may transform the planes of the one space into surfaces ~~of the other~~ of a certain order n: the so-called order of the transf. ~~Suppos~~ the equations of the transf. to be:

(1) $$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

the φ being homogeneous polynomials of the order n involving the coordinates y. The planes of the space (x) are transformed into the surfaces of the web:

(2) $$\Sigma \lambda_i \varphi_i = 0$$

and it must be possible to deduce from the equations (1) a second system of the kind:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = f_1 : f_2 : f_3 : f_4$$

representing the so-called inverse transformation, of which the order, that is the common degree of the f's, contrary to what we saw in the plane, may be different from n. Geometrically, the possibility of the ~~mentioned resolution~~ rational solution giving the y's rationally in terms of the x's, requires that three generic surfaces ~~of the~~ of the system (2) may have only one variable intersection. The system (2), and also its analogous $\Sigma \mu_i f_i = 0$, are then be said to be „homaloidic".

~~In piani devono consist. sup. di ... 3, ... non appart.~~ a una rete abbiano una intersez. variabile.

Among birational ~~trasf. space-~~ transf., single examples were already known: the one, of the 3^d order, in Cremona's „Mémoir"; the transf. (2, 2), that is by ~~reciprocal radii vectores~~ inversion; the „ (2, 3), by Cayley, Lond. Math. Proc. 3 | Papers VII, p. 189 |; Noether.

Cremona (Ist. Lomb. & Ann. di Mat. 1871) attacks the general question. Whilst in every birational transf. we map on the plane the ∞^3 surfaces of an ~~so called~~ „homaloidic" system ~~of surfaces~~, he shows, conversely, how, starting from a known plane representation of a rational surface, we may construct all homaloidic systems containing this latter surface & having the same multiple points. It may happen there are ~~no~~ such systems; ~~there may be also no one of these systems~~ we have however in it an inexhaustible source of new representations; among them some which are very remarkable, and not to be expected.

U. delle Q.
Tr. stereografica.
tutte le Q segano C^4 rappres. da $C^4(A^2B^2)$, sist. ∞^8. In questo tutte le reti omal.
C^2 per A, B, e 3° punto C – residua altra C^2 per AB, cui immag. è anche C^2 su Q. Le Q per tale ultima C^2 e per il p. C' d'immag. C segheranno sulla 1ª cubiche (per C') di un sist. omal., e formeranno sulla colla 1ª un sist. omal. di Q.

For this purpose, we want to map F^n on the plane; to consider the images of its intersections with all F^n's having the same multiple points; to extract from their system a homaloidic net, of it we denote by K the residual curve ~~may be~~; three F^n's through K & 3 independent curves of the net will determine, with the first F^n, the ~~other~~ system required.

All these cases were studied for $n = 2, 3$, with their inverses, of orders ≤ 4, resp. ≤ 9.

Dal concetto generale di corrisp.za birazionale, Cremona deriva una nuova serie importantissima di lavori, da un lato ~~intorno~~ sulle rappr. piana delle sup. razionali, dall'altro sulle trasf. biraz. nello spazio: argomenti si intrecciano a vicenda, e nei quali ripetutamente si incontra, quanto ai risultati, con Clebsch e Noether. – A Clebsch egli anzi scrive che questo incontrarsi è segno che si lavora nel senso giusto – e che „I am fully convinced of the mutual help which analysis & synthesis must afford ~~each~~ one another in geometry!"

punto di partenza importante p. geom. sulle sup.

I due argomenti sopra accennati compaiono già entrambi nel Mémoire sulle F^3 (Cap. V e seg.) – Da un lato, nel Cap. VII, ~~ponendo una T^i fra un~~ riferendo proj.te un S_3 di punti a 3 diversi S_3 di piani sovrapposti, e facendo corr. a ogni punto del 1° l'intersezione dei 3 piani omologhi, egli determ. 1 vera e propria corr. biraz. di S_3 – ai piani le ∞^3 F^3 per una C^6_3, le quali perciò risultano singolarm.e riferite a quei piani; e d'altra parte fa pure vedere che queste sono le F^3 gen – ossia ogni F^3 gen. può generarsi con 3 stelle di piani collineari (Generaz. Grassmann Crelle 49. 1855)

mapped on the plane

Grassmann, analog. C^n, anche per F^n – per F^3 varie, di cui questa è la + imp. e feconda.

A proposito di rappres. piana di sup. razion., è notevole la semplicità con cui Cremona, dalla rappres.e piana della sup. di Steiner, riuscì a dedurre geom.te che le asint. di tale F^4 sono linee raz. del 4° ordine (2a specie) – (Ist. Lomb. 1867 – n° 71): dopo che Clebsch gli aveva comunicato essere giunto a detto risultato (Crelle 67) formando le relat. eq. diff. e integrandole.

~~Asp~~ F^4 con A^3, 3 r.e doppie per esso: i p.ni tg segano coppie di coniche per il p. di contatto – si rappr. sul piano riferendo omog.te il sist. delle ∞^2 coniche a un p.no rigato (oppure π da A^3, e trasf. quadr.).
– Vi sono 4 coniche lungo le quali ammette piano tg fisso – e formano la linea dei p. parabolici (le 2 tg princ. in un punto non possono coincidere che coincidendo le 2 coniche relative). – A queste i lati di un quadrilatero.

Alle 3 rette doppie, le diag. del quadrilatero; ai 2 punti sovrapposti nei singoli p. della 2ª doppia, le coppie arm. risp. vertici del quadrilatero, ai p. cuspidali, detti ~~p. d~~ vertici!

Le asint. F^4 sono linee tg in ogni punto P a una delle 2 coniche per ~~quel p.~~ P stesso e contenute nel relativo p^no tg: dunque occorre vedere, per un p. P del piano, quali sono le rette immag delle 2 C^2 contenute nel piano tg a F^4 in P: e di tali rette l'inviluppo.

no – Ora le 2 C^2 nel piano tg in P ~~tagl~~ si appogg. alle rette doppie di F^4 negli stessi p. le rette immag devono tagliare diagonale del quadril. in p. armonici risp. vertici; cioè sono le rette doppie dell'involuz. duale di Desargues nel fascio P'. – Gli inviluppi sono dunque C^2 inscritte nel quadrilatero suaccennato, ecc.

[Forse meglio, con Cremona, viceversa: C^2 inscritte nel quadr. – le due per P' hanno tangenti che segano le 3 diagonali in p. armonici... sono dunque immag. di C^2 per P con 3 altri p. comuni: dunque in un piano, che è il p^no tg in P – Perciò alle prime C^2 (inscr. quadr.) corrisp. curve inviluppo di queste ultime su F^4, cioè delle tg princ.).

Fra altre rappr. piane, rigate con 2 direttr. rett., distinte o no; e loro asintotiche.

Di trasf. biraz. fra spazi erano già noti singoli casi – Quella del Mémoire sulle F^3 – caso (2, 2), ossia raggi reciproci – (2,3) in Cayley, London Proc. Math. Soc., vol. 3 – poi Noether.

Cremona (Ist. Lomb. e Ann. Mat. 1871) affronta la quest. in generale – e mentre è ovvio che ogni tale trasf. conduce a una rappr. piana delle sup. del sist. omaloidico ∞^3, egli inverte il concetto, e mostra come si possa, muovendo da una rappres. piana nota di una F raz., costruire tutti i sistemi omaloidici di cui essa può far parte (e cogli stessi p. multipli): sistemi che possono anche mancare – ma comunque in ciò sorgente inesauribile di nuove rappres^ni, alcune anche veram^te singolari, forse non altrimenti prevedibili. – [Rappres. piana di F^n – Immag. delle sezioni di F^n colle altre F^n stessi p. multipli – in tale sist. immag. una rete omal. con curva residua K – tre F^n che segnino K + risp. 3 curve indip. della rete ....]

Sfruttato per n = 2, 3 : inverse fino al grado 4, risp. 9.

The ∞^2 curves form a „homaloidic ~~réseau~~ net": the homaloid name having been used by Sylvester p. spazi lineari. – La trasf. è definita dalla rete e da una π^a fra questa e piano rigato –

L'esistenza di certi casi provata con costruz.e geometrica elegante, e p. quel tempo veramente singolare – sagace estensione della costruz.e trasf. quadr. a $\frac{1}{2}$ π_2 sghemba Steiner.

~~[illegible]~~ Sg. C^{n-1} sghemba con corda $(n-2)^{pla}$, quale si può ottenere segando R^2 con F^{n-2} per $n-3$ gener. stesso sist.

Allora corrisp.za fra 2 piani....

Dalle rette di un piano π, R^n della cgr., C^n sull'altro piano – E siccome le R^n hanno tutte a comune d^{n-1}, C^{n-1}, e le $n-1$ rette della cgr. nel piano π.....

(~~costruz.e~~ cui è uno dei tipi di cgr. di 1^o ord. trovati da Kummer (1866) – E così si può fare con ogni cgr. di $1'$ordine.

In the 2^{nd} Note, the fundam. curves, the Jacobian of the unicursal system in ~~every~~ both planes (composed ~~with~~ by the fund. curves) and the theorem of the equality of the numbers of conjugate solutions (completely prouved afterwards by Clebsch, Annalen 4)

Lavoro da annoverarsi fra quelli che hanno magg.te contribuito al progresso studi geom. nella 2^a metà sec. XIX, per i nuovi mezzi di indagine che hanno dato alla Scienza (applicaz. di Noether alla risoluzione dei p. sing. C piane), e per le numerose ricerche ulteriori cui ha fornito p. di partenza

~~Tipi di~~ Involuz. piane (Bertini, Caporali; Castelnuovo); e più generalm.te trasf. biraz. periodiche (Kantor).

Riduz. sist. lineari C piane a tipi determ.i (Bertini, Picard, Guccia, Segre, Jung, Castelnuovo, ...) Autonne 1885–88

Gruppi d'ord. finito (Kantor – Wiman) (Math. Ann. 48) Preisschr. Napoli 1883/4 : Acta 19 ; Theorie d. endl. Gr. von 1-d. Tr. Berlin 1895

id. continui (Enriques)

Clifford (per i casi $n \leq 8$), Noether e Rosanes per n qualq. hanno mostrato che una trasf. Crem. si può sempre risolvere in un prod. di trasf quadr. (3 punti basi di multiplà tali che $k_1 + k_2 + k_3 > n$, onde ....)

Noether e Rosanes, anche il caso di p. basi ∞ vicini.

Segre (Acc. Torino 1901) ha mostrato che non avevano tenuto conto di tutti i casi possibili – ~~Mancava sopra~~ Potrebbe darsi non si avessero in alcun modo 3 punti $\Sigma k > n$ sopra un ramo lineare di curve (come necessario p. avere cancella p. essi); p. es.

linear branch: P_a 1ª è $C^n(O^{n-1})$ tg coinc.

$$\lambda \left(y^{n-1} + \overset{\text{omog.}}{\varphi_n(xy)}\right) + \mu x y^{n-1} + \nu y^n = 0$$

p. $(n-1)^{\text{plo}}$, e, sul ramo di ord. $n-1$ che ne esce, $2(n-1)$ p. consec.

Grado non direttte abbassabile con trasf. ordine $< n$. – Obbiez. grave perchè già molti risultati in applice

Castelnuovo (Acc. Torino 1901) mostrò per altra via:

1. ogni trasf. Crem. tra 2 piani può scindersi nel prodotto d'un n° finito trasf. di Jonq.

2. Ogni trasf di J. può scindersi nel prodotto di un n° finito di trasf. quadr. (questo partendo dalle eq. $x' = x$, $y' = \dfrac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$, essendo α... fz. di x a det $\neq 0$).

Ultimamente Chisini (Atti Modena (5) 6 1921-22) ha osservato che il proced. di Noether si può modificare e completare in modo da renderlo ~~valido~~ applicabile in ogni caso. – La teoria completa seguirà nel 3° vol. dell' Enriques: „Teoria geom. delle eq."

Result of appl. of Crem T, part. quadr., to C^n & its mult. points.

Cenno sulla trasf. di una C. piana alg., per mezzo di trasf. Cremoniana, in altra dotata di sole singolarità ordinarie (punti k^{pli} con k tg. distinte). — C irrid: basterebbe, priva di parti multiple.

(Noether, Gött. Nachr. 1871, p. 267; Math. Ann. 9. 1876. 166 — 23. 1884. 311 = Severi n° 16 – 18)

contributi anche Bertini – Picard – Hamburger 1871

Noether, partendo da p. d. v. princip^te^ algebrico, cioè della cond^e^ che la multiplicità che un p. singolare comune a 2 curve ha per il numero complessivo delle loro interf. — e quella a ½ della multiplicità della corrisp. radice dell'eq. risultante

0) a punto, punto, biunivoc^te^, ~~senza eccezione~~, ~~al finale ficord~~ dei punti fond. e linee fond.; ~~a punti fond. linee e viceversa.~~

1) Quando a una C. piana alg. si applica una trasf. Crem., qualunque suo punto multiplo che non appartenga ad alcuna C. fond. di quel piano (perciò anche non cada in nessun punto fond.) si muta in un punto della C. trasf. di eguale multiplicità = anzi del medesimo tipo.

ma a punti fond, linee fond e viceversa; onde ½ si risolvere e concentrare sing^e^

2) Punti multipli che scompaiono, o si riducono, o si formano ex-novo. (concentrate, spread out) resolver

Ci riferiamo al caso più semplice di una trasf quadratica a 3 punti fond. tutti distinti:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{x_1'} : \frac{1}{x_2'} : \frac{1}{x_3'} = x_2'x_3' : x_3'x_1' : x_1'x_2'$$

$$f_k(x_1 x_2)x_3^{n-k} + \dots + f_n(x_1 x_2) = 0$$

$$f_k\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\right)\frac{1}{x_3^{n-k}} + \dots + f_n\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\right) = 0$$

A variable ... st. line

A una retta variabile $x_1 + k x_2 = 0$, per il punto [3], has as corresp. line the la retta, pure variab., $f_k(x_1 x_1)\cdot(x_1 x_2)^{n-k}$

$x_2' + k x_1' = 0$ per il punto [3]'; sono fasci di punteggi. proiettive,

e al punto $x_3 = 0$ della prima, il punto di coord. $(k, -1, 0)$ della seconda, ~~viceversa al~~ di coord. $(0, 0, -k)$, cioè il p. [3']; similmente punto [3] della prima il punto $x_3' = 0$ sulla 2^a^

Therefore the single points ∞ near to [3] on the single straight lines $x_1 + k x_2 = 0$ are changed into the points of the st. line $x_3' = 0$

Perciò all'intorno di 1° ordine del punto [3], l'intera retta $x_3' = 0$, biunivocamente; (all'intorno di 2° ordine di [3], l'insieme degli intorni di 1° ordine dei punti di $x_3' = 0$) — e viceversa, scambiati i 2 piani.

Per conseguenza:

a) Se in [3] vi è un punto s^{plo} con $l \leq s$ tangenti distinte (ammettano l tang. distinte), di equaz. $x_1 + k_i x_2 = 0$, ognuna di queste assorbendone τ_i fra le s (onde $\sum_{i=1}^{l} \tau_i = s$), la curva trasf. passerà per le l interfez. della retta $x_3' = 0$ colle rette $x_2' + k_i x_1' = 0$, ciascuna delle quali assorbirà τ_i interf. della C. stessa con $x_3' = 0$, onde tali punti avranno per la curva trasf. multiplicità $s_i \leq \tau_i$. Quindi multiplicità di ord. $\leq s$: anzi certo $< s$ ogni qualvolta vi siano in [3] almeno 2 tang. distinte.

Continuando così, per ognuno dei nuovi punti s_i^{pli} e loro trasformati successivi, si può dimostrare che, ~~dopo~~ per un intorno del 1° punto (s^{plo}) di ordine conven^te^ elevato, ma finito, quindi dopo un n° finito di operazioni, si trovano solo punti semplici.

Così la singolarità s è sciolta.

∞ vicini — E si ha il concetto della composizione del punto s^{plo} con punti s_i^{pli} nell'intorno di 1° ordine, punti s_{ik}^{pli} nell'intorno di 2° ordine ecc. — i numeri $s_i, s_{ik}, \ldots$ essendo indipendenti dalla particolare scelta di trasf. quadr.

Facendo così per ogni p. s^{plo}, con un n° finito di successive trasf. quadratiche, e quindi con una trasf. Crem. loro prodotto si sciolgono tutti i p. multipli.

Se nel 1° punto vi erano s tang. dist., nessun p. mult. ult. è ∞ vicino; p. s^{plo} ordinario.

b) Viceversa, così facendo, si introducono nei vertici dei successivi Δ fondamentali nuovi p. multipli (con procedimento inverso). Ma si può fare in modo da introdurre sole singolarità ordinarie.

Basta all'uopo prendere:

Le rette $x_1=0$ e $x_2=0$ per il punto $[3]$ in modo che, fuori di questo, abbiano colla data C^n $n-s$ interf. distinte.

I punti $[2]$ e $[1]$ su di esse non sulla C^n, e in modo che la loro cong. incontri la C^n in n p. distinti.

Lo scioglimento delle sing^a secondo Noether ha grande import^e, in quanto i p. mult. ∞ vicini si comportano come p. staccati sia per il n° delle condiz. che impong. alla curva, sia per il loro comportamento nel computo delle interf. di 2 curve. Tutto ciò messo in evidenza dalla trasf^e

Trattaz^e diffusa, ~~anche per C non~~ e perfezionata, anche p. curve non piane, nel ~~anche per C non~~ altch. altri p. di v. libro di Bertini e nel libro Enriques - Chisini. Teor. geom. delle Eq. II

Analiticamente.

F^3 per il punto (0):

(1) $\qquad x_0^2 A_1 + 2x_0 A_2 + A_3 = 0$

Da $[0]$ è tratta nel piano doppio con C. diramaz

(2) $\qquad A_2^2 - A_1 A_3 = 0$

le cui bitangenti (28 nel caso della C^4 di genere 3) provengono dalle (27) rette di F^3 e dalla traccia del p. tang. in O.

Viceversa, data C^4 piana, ella può sempre rappres. sotto quella forma ($A_1 = 0$ una bitang., $A_2 = 0$ una C^2 per i 2 p. di cont., $A_3 = 0$ una C^3 tg alla C^4 nelle ulter. intersez. con C^2 πz dr (1)) e allora il piano doppio è ~~autonom. app.~~

Però se (2) si compone di 4 rette per un punto, la F^3 è cono, e perciò in gen.e non razionale.

$f(x_1 x_2) = 0 \qquad \Sigma a_i x_1^{4-i} x_2^i = 0$

$(\sqrt{a_0}\, x_1^2 + \sqrt{a_4}\, x_2^2)^2 + x_1 \; \dots = 0$

manca x_3! $\qquad x_0^2 \cdot x_1 + 2x_0 (\qquad) + \dots = 0$

$(x_2^2 - x_1 x_3)\, x_1 x_3 = 0$

$x_2 \cdot x_1 x_2 x_3 - (x_1 x_3)^2 = 0$

$x_0^2 x_2 + 2x_0 x_1 x_3 + x_1 x_2 x_3 = 0$

$k x_0 x_2 + x_1 x_3$

$2x_0 x_3 + x_2 x_3 = x_3 (2x_0 + x_2)$

$x_0^2 + x_1 x_3$

$2x_0 x_1 + x_1 x_2 = x_1 (2x_0 + x_2)$

$\begin{cases} x_1 = x_3 = 0 = x_0 \\ 2x_0 + x_2 = 0 . \; 0 . \; x_0 = x_2 = 0 = \begin{cases} x_1 \\ x_3 \end{cases} \end{cases}$

nella sessione [illegible]

Torino, addì 24-10-922

Firma: [illegible]

Dai registri della Segreteria risulta che il candidato è stato iscritto { regolare / d'ufficio

al corso indicato nell'anno 1921.22 *nel* 2

ha ottenuta la firma di frequenza dal Prof. [illegible]

ha pagata la sopratassa di esame addì 30/10 1922

Il Segretario

[illegible]

Elzeviriana - Torino — 8-922.

Che se la F contiene una ∞^1 non raz. di curve raz. di ordine pari, in particolare di coniche, la unisecante esiste pure, e quindi ...
Ma ciò fu assodato solo molto più tardi da Enriques (R. Lincei 1898_2, p. 281, 344; Math. Ann. 52 (1899) p. 449. — Dim.^e completa, che fa uso di geom. sulle C^2 alg.

Il ragionamento di Noether ha portata molto più vasta:
Se una varietà M_k contiene una congruenza ∞^{k-1} di curve razionali del 1° ordine, tale cioè ~~per~~ che p. ogni suo punto ne passi una, e se questa cgr. ha varietà unisecante (perciò certo se le anzidette C razionali sono di ordine dispari), si può la M_k rappresentare sopra un'altra contenente una cgr. ∞^{k-1} del 1° ord. di rette.
Due M_k del tipo anzidetto sono rappresentabili biraz.^te una sull'altra, qualora ciò avvenga per le M_{k-1} costituite dalle risp. congruenze.

Piani doppi razionali

Una Q di S_3 si rappres. sul piano a $1/2$ π_2 stereogr. — D'altra parte, da un punto non app. ad essa si π_{ta} in un piano doppio (a 2 strati), con curva di passaggio = Uebergangskurve (branch-curve) = lungo la quale sono raccordati i 2 strati.
Quindi piano doppio, con C^2 di passaggio, che deve essere razionale: cioè questo piano in corrisp. (1, 2) con quello della π_2 stereogr., la C^2 apparendo ora come C^2 di diramaz.
Lo stesso per una $F^3_{gen.}$, se la si rappres. sul piano nel modo solito, e poi la si π_{ta} da un suo punto. Qui C^4 (generale) di passaggio ×
Id. per F^n più generale con retta $(n-2)^{pla}$. È rappres. sul piano (v. sopra) e per π_2 da un punto di tale retta da piano doppio con C^{2n-2} di passaggio avente un p. $(2n-4)^{plo}$, diciamo C^{2m} con A^{2m-2}. (Il primo tipo rientra in questo p. $m=1$).

Vi sono però anche dei piani doppi non razionali. Es. quello che si ha da una F^k generale con A^{k-2}.

Un piano doppio è complet.te definito – dal p. di vista bira-zionale – dalla sua C di passaggio, che si può supporre di ordine pari $2m$ ~~(se no, s'andrebbe~~ e priva di parti multiple. Indicandola con $f(xy) = 0$ il piano stesso si può concepire come π_2 doppio della F^{2m}: $z^2 = f(xy)$ avente un punto $(2m-2)^{plo}$ nel p. ∞ asse z.

Se $f = 0$ fosse di ordine dispari, andrebbe integrata colla retta all'∞ del piano (in corrisp.te alla quale si avrebbero pure per z valori coincidenti).

Piani doppi con C. di passaggio trasformabili una nell'altra a $\frac{1}{2}$ trasf. Crem. sono biraz.te identici.

I piani doppi sopra indicati furono considerati e riconosciuti razionali da Clebsch (Math. Ann. 3 – 1870 – 48).

Un altro tipo trovato da Noether (Sitzungsber. Erlangen 10, 1878)], – e ricontrati ancora ~~più tardi~~ ~~muovendo~~ nella consid. delle sup. del 4° ord. razionali: C^6 di passaggio con 2 p. tripli ∞ vicini – In detta Mem. sulle F^4 raz. osserva che tale F^4 deve avere almeno un p. doppio (semo, genere uno): e di qui – se il p. non è triplo – si proietta su piano doppio, curva di dirama. ord. ≤ 6.

e poi ancora Math. Ann. 33 (1889), p. 525 (ibid. p. 547)

Noether ~~fu~~ giunse anche a concludere che non vi dovevano essere altri tipi di p.mi doppi razionali.

Assodato in modo rigoroso, p. altra via, da Castelnuovo-Enriques (Palermo 14 – 1900 – p. 290).

Noether's rational surfaces of the order m and having a multiple straight line of the order $m-2$ (the planes through it intersecting the surface in conics) are projected from a point of the mentioned line into rational ~~into~~ double planes with a branch-curve of the order $2m-2$, having the intersection of this plane with the multiple line ~~as~~ ~~as~~ a multiple point of order $2m-4$. (To a general plane C^m with a $(m-2)^{ple}$ point, the number of tangents to be led from the ~~mentioned~~ point is just $2m-2$). For $m=2$ we get the particular case of the quadric and of the double-plane with a branch-conic; for $m=3$, a surface of the 3^{rd} order, and a double plane with a branch-curve of the 4^{th} order having ~~with~~ a double point (the existence of this double point corresponds to the particular fact that the projection has been made from a point of a straight line $(m-2=1)$ of the given surface.

But a double plane with a given branch-curve (which is necessarily of an even order: unless, we want to add to it the line at infinity of the same plane) is generally not rational.

The examples mentioned above were considered by Clebsch (Math. Ann. 3 - 1870 - p. 45) - Noether (Sitzungsber. Erlangen, 10, 1878; Math. Ann. 33 (1889), p. 525) was led by his researches on rational surfaces of the 4^{th} order ~~to~~ (ibid., p. 547) to consider another example of a rational double plane (branch-curve of the 6^{th} order having 2 consecutive triple ~~threefold~~ points).

He also concluded, there were ~~ought to be~~ no other rational double planes, those excepted whose branch-curve might be transformed by a Cremona-correspondence into one of the mentioned types (C^{2m} having A^{2m-2}; C^4; C^6 having ~~$A^3 B^3$~~ two infinitely near triple ~~threefold~~ points).

The complete demonstration of it was given ~~in~~ 1900, in a quite different way, by Castelnuovo & Enriques (Rend. Palermo, 14 (1900) p. 290).

In any case, the theory of Cremona-transformations gives a means in order to classificate all double plans with branch-curves: as two double planes with given branch-curves are birationally identical, if their branch-curves may be transformed into each other by a Cremona-correspondence between their planes.

Application of Cremona-transf., particularly of quadratic transf., to a curve C^n and its multiple points. — Transformation of an irreducible algebraic plane curve, by means of Cremona-transf., into another one having only ordinary multiple points, that is multiple points of certain orders k ~~with their~~ whose k tangents are all distinct.

(Principally Noether, Gött Nachr 1871 and Math. Ann. 9-23; others afterwards).

d (even, of a series of quadratic transf.)

We must remember that a Cremona-transf. between two planes is a (1,1) correspondence, whose only exceptions to biunivocity are ~~the~~ given by the fundamental points & ~~curves~~ lines.

Therefore, when we trasform an algebraic plane curve C^n by a Cremona-correspondence into another plane curve, every multiple point of the former one, which does not belong to any fund. curve, and is ~~therefore~~ ~~is~~ also not a fundamental point, is changed into a multiple point of the new curve, exactly of the same multiplicity and the same typus as the given point.

On the contrary, as fundamental points are transformed into fund. curves and conversely, (points, ~~and~~ particularly) multiple points of the ~~former curve~~ given C^n ~~which happen to~~ belonging to the same fundamental curve γ are concentrated, by the transformation, into the fundamental point corresponding to γ; whilst, conversely, a complexive singularity falling in a fundamental point ~~may~~ will be spread out on the corresp. fund. curve, that is, so to say, resolved into more simple singularities. — We want now to direct this proce~~eding~~, in order to resolve all the singularities of the given C^n, and to introduce only ordinary singularities ~~(as above)~~.

We refer to the most simple case of a quadratic transf. whose 3 fund. points are all distinct, and whose equations (as it may easily be proved) may ~~then~~ be written in ~~receive~~ the form:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{x_1'} : \frac{1}{x_2'} : \frac{1}{x_3'} = x_2'x_3' : x_3'x_1' : x_1'x_2'$$

To this purpose, we only want to take in ~~every~~ each plane the triangle of the fundamental points and lines as the triangle $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ of the coord.-system of and as points $(1,1,1)$, $(1,1,1)$ in the two planes a generic pair of correspondent points.

$(k \neq 0, \infty)$

A variable straight line $x_1 + kx_2 = 0$ through the point [3] (that is through the point ~~...~~ $x_1 = x_2 = 0$) has as its corresponding line the straight line $x_2' + kx_1' = 0$, through the point [3']; ~~the mentioned lines contain~~ corresponding points (belonging to respectively to these) ~~of the mentioned~~ straight lines ~~are forming~~ constitute two projective ranges; the point $x_3 = 0$ on the former one, whose coord. are $(k, -1, 0)$ is changed into the point $[0, 0, -k]$ that is into the point [3'] of the second; conversely, the point ~~x~~ [3] of the former,

one, having the coordinates 0, 0, 1, with $\frac{x_1}{x_2} = -k$

is transformed ~~goes~~ into the point $(1, -\frac{k}{1}, 0)$ ~~$x_3 = 0$~~ of the latter, that is into its point $x_3' = 0$.

Therefore, the single points which are infinitely near to [3] on the single straight lines $x_1 + kx_2 = 0$, are changed into the single points of the straight line $x_3' = 0$; and the straight line $x_3 = 0$ is changed into the neighbourhood of [3']. – In other words, every branch of a curve passing through (having its origin in the point) [3] and having $x_1 + kx_2 = 0$ as its tangent there is transformed into a branch through the point $x_2' + kx_1' = x_3' = 0$, and every branch through $x_1 + kx_2 = x_3 = 0$ is transformed into a branch through [3'] and having $x_2' + kx_1' = 0$ as its tangent there.

that is which constitute the neighbourhood of [3]

For inst., the conic

$$(x_1 + kx_2)x_3 + (x_1 - ax_2)(x_1 - bx_2) = 0$$

containing the 3 points $(0\ 0\ 1)$, with $x_1 + kx_2 = 0$ as a tangent there, and $(a, 1, 0)$, $(b, 1, 0)$ is transformed into

$$\left(\frac{1}{x_1'} + k\frac{1}{x_2'}\right)\frac{1}{x_3'} + \left(\frac{1}{x_1'} - a\frac{1}{x_2'}\right)\left(\frac{1}{x_1'} - b\frac{1}{x_2'}\right) = 0$$

that is the C^3:

$$(x_2' + kx_1')\,x_1'x_2' + x_3'\,(x_2' - ax_1')(x_2' - bx_1') = 0$$

having in [3'] a double points, with the 2 tangents $x_2' - ax_1' = 0$, $x_2' - bx_1' = 0$, and intersecting $x_3' = 0$, beside the fundamental points [1] and [2], in the point $x_2' + kx_1' = x_3' = 0$.

If a C^n has in [3] an ordinary point of multiplicity ~~k~~ s, that is with ~~k~~ s distinct tangents, this point will be changed into a system of ~~k~~ s simple points (on the line $x_3' = 0$), and will consequently be completely resolved.

More generally, if
~~If~~ C^n has in [3] a point of multiplicity ~~$\leq$~~ s, with $l \leq \rho$ distinct ~~tangents~~, whose equations we suppose to be $x_1 + k_i x_2 = 0$ $(i = 1, 2, \ldots \cancel{l}\,\rho$; $k_i \neq 0, \infty)$, everyone of them absorbing σ_i tangents among the s (so that $\sum_{i=1}^{i=l} \sigma_i = s$), the corresponding curve will pass through ~~each of~~ the l intersections of $x_3' = 0$ with the single lines $x_2' + k_i x_1' = 0$, and everyone of these points will absorb σ_i among the intersections of the new curve with $x_3' = 0$; it will be therefore for this curve of point of a certain multiplicity $s_i \leq \sigma_i$. These multiplicities cannot be also of a higher order than s; and they are certainly of a lower order, if the given C^n has in the point [3) at least 2 different tangents.

We may now continue, and apply, successively, to everyone of the ~~mentioned~~ points of the new curve ~~having~~ the multiplicities s_i the same proceeding; the multiple point of order s_i will be resolved into points of multiplicities $s_{i1}, s_{i2}, \ldots$, so that $s_{i1} + s_{i2} + \ldots \leq s_i$; and so on. It has been demonstrated by Noether that, after a finite number of transformations, the last s's (everyone among which is $\leq$ than the the preceding) will be all $= 1$. The given singularity of C^n will consequently be resolved into simple points only. ~~In~~ By this way we get the conception of a multiple point of the order s, having (as we shall say) in its neighbourhood of the 1th order some points of the multiplicities s_i ~~(all s_i being~~ $(\sum_i s_i \leq s)$, in the neighbourhood of the last ones, that is in its neighbourhood of the 2nd order, some points of multiplicities s_{ih}, $(\sum_h s_{ih} \leq s_i)$, and so on. It has been shown that all numbers $s_i, s_{ih}, \ldots$ are quite independent from the particular quadratic transformation we choosed.

An ordinary multiple point of order s has in its neighbourhood no other multiple points; only simple ones. –

If we apply this proceeding successively, to each ~~to every~~ multiple point of the given C^n, by a finite number of a quadratic transformations, consequently by the Cremona-transf. constituting ~~we obtain as~~ their product, we may resolve, that is transform into simple points only, all the multiple points of C^n. But, in ~~By~~ doing so, ~~new we ar also constituting~~ new multiple points will be formed (in the fundamental points of the single quadratic transformations, and their successive corresponding points).

This now the matter, to get on attentively and to arrange the proces, in order to ~~get~~ obtain as new ~~ordinary~~ multiple points, ordinary ones only.

As, by every successive quadratic transformation, the new multiple points only fall in the fundamental points, and they correspond, ~~and are~~ consequently, to the intersections of the former curve with the fundamental straight lines $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, it is sufficient that these lines ~~may~~ have their intersections with the ~~giv~~ mentioned curve, out of the fundamental points, all distinct. Particularly, ~~it is sufficient~~ if we suppose the multiple point to be resolved may always be assumed as the point [3], it is sufficient to assume:

As straight lines $X_1=0$, $X_2=0$, two lines through the ~~mentioned~~ point of multiplicity s in question ~~intersecting~~ having their $n-s$ other intersections with C^n all distinct from each other and from the former multiple point;

As line $X_3=0$ a line intersecting C^n in n distinct points.

*

This resolution of singularities of algebraic plane curves has a great importance, as it was also shown that, ~~concerning all multiple points of a curve, even if infinitely near, have~~, concerning these two following questions:

1. Number of conditions required in order that a ~~given~~ point may be for a curve a multiple point of a given multiplicity;

2. Number of the intersections of two curves absorbed by a common multiple point of them;

every multiple point has a constant ~~the same~~ influence, may it be at a finite distance from all others, or infinitely near to some of them, in the mentioned sense.

The most recent & perfectionated treatment of this theory, from different ~~with more recent~~ points of view, may be found in Enriques-Chisini, Teoria geometrica delle equazioni, vol. II.

1) They embodied the conception of a geometrical transformation beyond that of the projective type; and it was the first step towards other extensions.

2) They constituted a new instrument of investigation for science – such was applied f. inst. by Noether to the singularities of plane curves.

3) They formed a point of departure for other researches, on linear systems of plane curves, involutions, ...

Clifford, for $n \leq 8$, Noether and Rosanes for any value of n, showed that every Cremona-transformation may be resolved into a product of quadratic transformations.

Suppose a Cremona-transf. to be given, with its homaloidic net of C^n's; it can be easily demonstrated that among the base-points of the net there are certainly three points of multiplicities k_i for which $k_1 + k_2 + k_3 > n$. Consider the conics through these 3 points; they will have with the C^n's of the homaloidic net, beside the 3 fundamental points, a number of residual intersections $= 2n - (k_1 + k_2 + k_3) < n$. Therefore, by a quadratic transf. having these 3 points as fundamental ones, we can transform the given homaloidic net of C^n into a new net of curves of order $2n - (k_1 + k_2 + k_3)$, that is into curves of lower order. And so one.

A continuous use of this consideration was made ~~also~~ in the ~~other~~ researches I mentioned above at 2) and 3), in order to reduce the order of a given linear system as much as possible.

Noether and Rosanes considered also the case of infinitely near base-points, and they stated that in every case 3 base-points were to be found, to which we might apply a similar process.

But they wrong. Segre (Atti Acc. Torino, 1901) remarked that some of the possible cases had not yet been considered. It may happen that we cannot find, among the base-points of a homaloidic net, 3 points for which $\Sigma k_i > n$ and lying on a linear branch of line, ~~with~~ which is necessary to get conics through them. They do not exist f. inst. in the net:

for which $k_1 + k_2 + k_3 > n$. ~~by a quadratic transformation~~
~~beside the 3 fund. points~~, a number of residual intersections $= 2n - (k_1 + k_2 + k_3) < n$; Therefore, by a quadratic [illegible]
having these 3 points as fundam. ones we can transf. the C^n's into a new net of curves [illegible]

$$\lambda\{y^{n-1}+\varphi(xy)\}+\mu.xy^{n-1}+\nu.y^{n}=0$$

where φ denotes a homogeneous polynomial of degree n involving x, y. This net is constituted by C^n's having a common point of multiplicity $n-1$, on a branch of order $n-1$ (also not on a linear branch, if $n>2$) and $2n-2$ consecutive common ~~p~~ simple points.

There are also cases in which it is not possible to reduce the order of n by means of a quadratic transf., as we showed before, and it is also not by means of a transf. of order $< n$. This objection affected the validity of all results obtained on linear systems of curves in the period 1870-1900!

Castelnuovo (Atti Acc. Torino, 1901), a few months afterwards, showed in a quite different way:

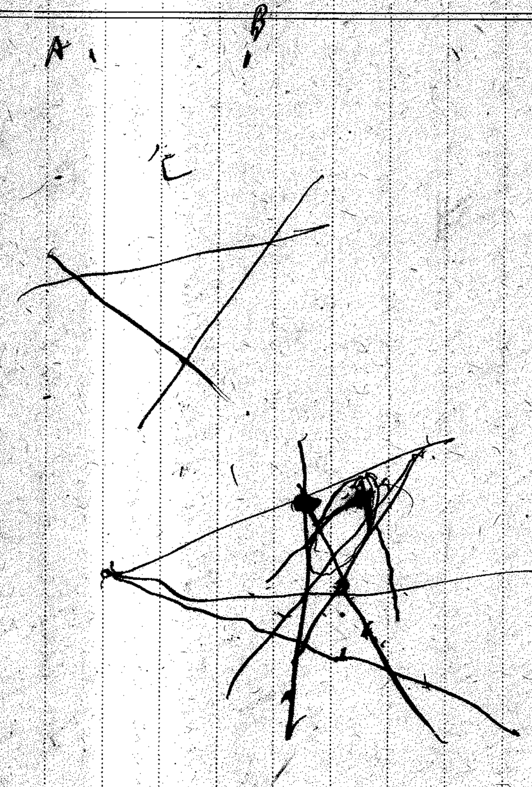
1. That every Cremona-transf. between two planes can be resolved into a product of a finite number of Jonquières-transformations; - and
2. That Jonquières' transf. can be resolved into a product of a finite number of quadratic transf.

More recently Chisini (Atti Acc. Modena [5], 6, 1921-22) observed that Noether's process may be modified and completed, so as to be applicable in all cases: it is not always possible to reduce n by one quadratic transf. only, but it is by a finite number of them. (s. Enriques-Chisini, Teoria geom. delle eq. - vol. III, § 18).

From his general conception of a (1,1) correspondence, Cremona derives a new series of most important works, on the one ~~side~~ hand concerning the ~~plane~~ (the so-called representation of) rational surfaces on the plane – a first step towards geometry on algebraic~~al~~ surfaces –; on the other hand about birational transf. of space; two arguments ~~interlacing each other~~ which hang together, and in which he repeatingly ~~meets together with~~ came in contact with Clebsch & Noether. – To Clebsch he ~~was~~ wrote also that 'twas a sign they were working in the right direction; and, concerning their methods, ~~and~~ „I am fully convinced of the mutual help which „analysis & synthesis must afford each other in geometry".

My first word to-day is directed to express to the Principal & the ~~[illegible]~~ Council
of this University College my deepest ~~gratefulness~~ gratitude for the great honor they ~~did to me~~ have done me
by the kind invitation to deliver here some lectures on ~~the~~ geometry. ~~This honor is~~
~~on Italy's [illegible]~~ If Italy's contributions to modern geometry are very important,
I am only a very modest representative of this geometrical School. I hope to succeed
in suggesting to you the interest of the matter - I come here, to my hearers, much more as a friend
than as a teacher; as a friend wishing also to learn from you, as there is always
something to learn, ~~[illegible]~~ by visiting a foreign country - especially a country having such brilliant
traditions in every branch ~~of~~ of mathematics - and by seeing its organisation, its scientifical life.
I shall speak to-day of the scientifical position & works of Luigi Cremona, as modern
Italian geometry begins with him, & ~~he was also especially particularly~~ birational transformations
had their origin in the particular case which is generally known as „Cremonian transf."

$$X_0X_1X_2X_3 + X_1^2X_2^2 + X_1^2X_3^2 + X_2^2X_3^2 + X_1^2X_2X_3 + X_2^2X_1X_3 + X_3^2X_1X_2 = 0$$



πa^2

vehical

to suggest the interest of the matter

The most important and vigorous impulse
L'importante e vivissimo impulso che hanno ricevuto gli studi geom. in Italia nella 2ª metà del secolo XIX è dovuto principalmᵗᵉ a Luigi Cremona.

To him belongs the merit of this new life infused into studies of pure geometry L. The Italian geometers ~~of these~~ who began to work 1860–1900, ~~last 60–70 years~~, even if not pupils of Cremona, and also after that his scientific activity had ceased, considered him as their master, feeling that their activity and inspiration, ~~the important place that Italy was acquiring, and has now acquired, for Geometry, among other Nations~~, had its first source, ~~though~~ indirectly in his teaching and his works. Rightly he has been called the father of It. Geom.

L che portò l'Italia ad acquistare e mantenere un posto importante fra le altre nazioni.

δ che fu vero apostolato

~~In 1860~~ Cremona was appointed in 1860 to the new Professorship of „Higher Geometry" L in the Un. of Bologna (just at the same time as Battaglini in Naples). ~~In his prolusione~~

L (he liked better „modern")

Nella sua first prolusione Oper. vol. 1 n° 25 fa un quadro preciso exact e interessante delle condiz. degli studi e dell'insegnamᵒ matem. 1800–1860

Incrementi ~~On increase~~ advance in tutti i paesi, quale non si era mai visto in sì breve giro di tempo, come attestano le pubblicaz.ⁿⁱ works articles in giornali scientif., Atti Accademie, e ~~primi~~ trattati riassuntivi — Ma la vastità vastness e profondità depth di alcune fra le nuove dottrine size richiedeva imperiosamente proudly ch'esse venissero taught bandite da apposite cattedre chairs Univ.; e a questo bisogno della crescente civiltà si soddisfece in Fr., Germ. in Ingh.; non, pur troppo allora, in Italia.

L'Italia aveva explaining pur uomini men eminenti nelle Mat., specialmente Analisi (Betti, Brioschi, Casorati ~~Casorati~~ *): ma il piccol numᵒ di cattedre, la brevità shortness del tempo concesso given riflesso anche delle condiz. politiche, forzavano ~~tenevano~~ l'insegnᵗᵒ to be confined in small limits in limiti ristretti — No teaching in higher Math.

* Art. Volterra Congr. Parigi

Even Cremona's first steps in Math. did not proceed from any impulse derived from Univ. lectures; but had their origin in familiar relations & talks with Brioschi, who gave him books, personal help & advice, & to whom Cremona also in his „Prolusione" publicly expressed his a gratitude. — ~~And his~~

But that was an entirely analitical education. His ~~being~~ strongly attracted towards geometry, his

his
„opening ~~the~~ eyes to the sun of pure Geometry", ~~as~~ he declared himself, that he ~~to be~~ owed to Chasles, to whom he was writing: "God bless your „Aperçu historique" & your „Traité de Géom. Sup."

Scientifical activity lasted 1855-85 — Best & most productive time (1858-1872)

Professorship Bologna until 1866 — afterwards in Milan — & lastly after 1873 in Rome, always with the same professorship & also as Director of the School of Engineers, which he completely reorganized. — Political life interferred then with his ~~political~~ scientific activity. But he still continued in his teaching, including very often some accounts on the latest & most remarkable advances; even in his last years, as I remember, on Lie's continuous groups, being an enthusiastic admirer.

Veronese, Bertini, De Paolis, Caporali, Guccia, Montesano sono suoi allievi diretti = tutti prof. di Geom. Sup.
Padova, Pavia-Pisa, Pisa, ?, Palermo, Napoli

Un primo gruppo importante e caratteristico di lavori, dal 1858 in poi, è quello sulle twisted cubics. — muovendo dalla ben nota rappr. parametrica ottenuta col considerare la C^3 come int. parz. di 2 coni 9 $(1, \omega, \omega^2, \omega^3)$, che, si ritiene a sua insaputa, già era stata usata da Möbius.

C^3 ?

Ma dal lavoro Crelle ~~58~~ 58 (1861) — n°24 — la trattazione si fa sintetica — He begins to make full treatise use of those pure geometrical methods, entirely independent of algebra & analysis, which derived from Poncelet, Steiner, Staudt, Chasles; & he gave ~~to~~ gradually to them, also in other series of works, an impress of his own, which was characterized by a simplicity of proof, by an excellent & perfectly lucid style, like an artistic production.

Poncelet ...?...

Les Anglais excellent dans l'art d'écrire les livres d'enseignement mathématique

The studies of geometry received its
~~The~~ most important and vigorous impulse ~~that geometrical~~
~~studies received~~ in Italy ~~during~~ ~~in~~ during the 2nd half of the XIX from
~~century it owed principally to~~ Luigi Cremona.

To him belongs the merit of ~~this new life~~ having infused ~~into~~ new life into this subject,
~~studies of pure geometry~~, which ~~brought~~ has caused Italy to acquire and
~~to~~ maintain an important place among ~~other~~ the nations all. The
Italian geometers who ~~began~~ commenced to work 1860-1900, even if not Cremona's ~~direct~~ direct
~~and~~ pupils, even if they commenced after that his scientific activity had ceased,
~~considered~~ looked to him all as their master, ~~feeling that~~ they felt indeed that the source of their activity, as well as their
~~and~~ inspiration ~~had a source, though indirectly~~ lay in his works, and, directly or indirectly,
~~and also~~ in his teaching, which ~~was for him~~ constituted a true apostolate.
Rightly he was called the father of Italian geometry.

Cremona was appointed in 1860 to the new professorship
of „Higher Geometry" at the University of Bologna: just
at the same time as Battaglini in Naples. He would have
liked better to say „Modern Geometry"; but the former name
remained, and is still used today. - In his first lecture
(Opere - vol I - n° 21) he made a quite exact and interesting
picture of the conditions of mathematical studies and teaching
in Italy in the period 1800-1860. In all countries mathematics
~~matics~~ had advanced ~~in such~~ in a manner as ~~was~~ had never ~~had~~ seen before,
in so short a time, ~~as it~~ this was proved by ~~plenty~~ the large numbers of articles
published in ~~scientifical papers~~ scient. periodicals, in the Proceedings of academies, and in form of monographs & treatises.
and by many ~~books on single subjects~~ resuming But the ~~size~~ scope and ~~depth~~ importance actively ~~that~~
of some ~~among~~ of these new theories ~~were asking proudly, they~~
~~might also~~ be ~~taught from~~ apposite University chairs should be specially devoted to them
~~and~~ to this ~~want of the growing activity it had been obtemperated~~ need had been met, at least in part,
in England, in France, in Germany; ~~not~~ but yet in Italy,

the political conditions were considerable for this
perhaps ~~also because of its political conditions~~. Italy had certainly some very distinguished mathematicians, especially in Analysis: I ~~want~~ need only ~~to~~ mention Brioschi, Betti, Casorati (~~I about them~~ for whom I may refer to the lecture delivered by Volterra, printed in the Proceed. of the 2nd international Congress of Math., Paris 1900); but the ~~small~~ very little number of University Chairs, and the shortness of the disposable time ~~obliged~~ rendered it necessary to confine the teaching ~~to be contained in small~~ within narrow limits; so that in higher Mathem. there ~~was no teaching at all~~ had never been any teaching, and it was just then going to begin. Even Cremona's first steps in Math. did not proceed from any impulse derived from University lectures; but had their origin in familiar relations and talks with Brioschi, who gave him books, personal help and advice, and to whom Cremona too in his ~~named~~ mentioned above mentioned lecture ~~publicly~~ expressed his gratitude. This was, however, an entirely analitical education. His strong attraction towards geometry, his „opening his eyes to the sun of pure geometry", Cremona declared himself that he owed to Chasles, to whom he ~~was writing~~ wrote: „God bless your „Aperçu historique" and your „Traité de Géom. Sup."

Cremona's scientifical activity lasted 1855-85; the best and most productive time was 1858-1872.

He remained in Bologna until 1866, ~~was~~ went afterwards to Milan, and since on 1873 to Rome, always with the same professorship, and in Rome also as Director of the School of Engineers, which he completely reorganized. Political life interferred then with his scientifical activity. But his teaching was still continued by him, and included very often some accounts on the latest and most remarkable advances; even in his last years I remember him lecturing on the „theory of continuous groups" by Lie, of whom he was an enthusiastic admirer.

Veronese (Padova), Bertini (Pavia-Pisa), De Paolis (Pisa), Caporali (Naples), Guccia (Palermo), Montesano (Naples), were all Cremona's direct pupils, and became all professors of Higher Geometry. (sono 11 in tutto)

A first, very important and characteristic group of Cremona's works, in 1858 & foll. years, concerned the twisted cubics, starting from ~~the~~ their presently well known parametric representation $(1, \omega, \omega^2, \omega^3)$, obtained by considering the curve as a partial intersection of 2 cones of the 2nd degree, and which he probably did not know to have been already used by Möbius.

{1. analyt. { $x_0 x_2 - x_1^2 = 0$, $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$; 2. synth.}

But, beginning with his papers in Crelle 58 (1861) – Opere n° 24 – his treating the matter becomes a synthetical one. He begins to make a full use of those pure geometrical methods, entirely independent from Algebra & Analysis, which derived from | Poncelet, Steiner, Staudt, Chasles; and he gave gradually to them, ~~in~~ on his following works, an impress of his own, which was characterised by a simplicity of proof, and by an excellent and perfectly lucid style, like an artistic production. – From this point of view, I may also say ~~add~~ that he admired very much English books ~~about~~ on ~~Mathematical teaching~~. – In his works concerning twisted cubics, he applies principally on the two projective generations, which were given by Seydewitz, and demonstrates many old and new theorems, also concerning the „Null system" determined by the cubic. No

(analogo conica tratt. synth.)

| the great geometers of the 1st half of the cent.

But Cremona's most important scientifical works are refered to ~~is concentrated into~~ 2 ~~argum~~ subjects:

1. ~~The~~ General theory of algebraic curves & surfaces.
2. ~~The~~ Theory of birational transformations between 2 planes or spaces.

The former ~~one~~ theory he enriched with numerous & brilliant ~~inquiries~~ researches,

results
new meth Vs coord

which culminated in 2 wonderful treaties (Introduzione .... Preliminari ....), ~~pu~~ both published also in German ~~language~~, the first one also in Cech ~~too~~. He exposes there ~~in~~ by an unified geometrical method, all the ~~preced~~ essential ~~ing~~ results of the preced. geometers, together with many new ones; giving ~~of~~ to the whole subject ~~an~~ harmonic coordination, ~~with~~ a true artistic perfection..

By the second theory, which takes ~~from him~~ its almost complete ~~origin~~ origin from him, so ~~much~~ in as far as these transformations are called, by general agreement, Cremona-transf., he was really opening to geometrical investigations a new field, not yet exhausted; he gave to science new conceptions, and created for himself the highest title of fame.

4) punto di partenza

The „Introduzione a una teoria geom. delle Curve piane" (Dic. 1861) „Preliminari di una teoria geom. delle sup." (1866-67) mark about the principle & the end of Cremona's Bologna's period.

I do not ~~wait~~ need to mention that in 1852 ~~&~~ the 1th edition had appeared of the celebrated book of Salmon on the theory of plane curves, treated by methods of ~~various~~ varying characters, but in the main analytical, & connected with the theory of great invariants of algebraic forms. — In England there was then a ~~large~~ great interest for this theory, in which also C. & Sylv. were masters. It was then the matter to build up for these curves a geometrical, question I should say a synthetical theory.

Some, but very few geometrical questions ~~ha~~ were to be found in ~~the~~ Grassmann's „Ausdehnungslehre" of 1844 & following works: ~~a kind of~~ mechanical generations of a C^m ~~being a kind of~~ like a geometrical translation of the equation $f(xy)=0$; and the generation of a C^{m+n} by two proj. pencils of C^m and C^n. This second one was also generally used by Chasles & De Jonquières. But ~~no theory~~ nothing more than single questions.

~~But~~ To a true synthetical definition & theory of algebraic curves & surfaces it was ~~only~~ not possible to get ~~by~~ without by traversing ~~through~~ many & serious difficulties. Two things were principally wanted:

~~1. The theory of imaginary elements, in order to give to the theorems their most precise & most simple form, like~~

1. Something taking the place of the theory of (rational integral functions) of a single variable – essentially, the so-called fundamental theorem of algebra, from which also the theory of functions of two or more variables then proceeds. (polynomials) involving

2. The theory of imaginary elements, in order to give to all theorems their most precise & most simplest form. – Such a theory was furnished by Staudt in his „Beiträge," 1856–60 which tho' very complete and even elegant, was somewhat fatiguing, ~~but also~~ heavy; only much later (1886 – Mem. Acc. Torino (2). 38) C. Segre showed how it might be simplified by ~~limiting~~ considering only pairs of conjugate - imaginary elements. 2 viz {Poncelet – Chasles, Staudt}

What attitude does Cremona ~~behave himself towards~~ adopt with regard to these two points?

Concerning the former one, he avails himself of the so-called „Principle of correspondence", which I ~~am going to~~ shall explain ~~soon~~ shortly

Concerning the imaginary theory, he does not make any ~~difference~~ distinction from the beginning, between real & imaginary elements; he accepts the latter as equivalent to real ones. more or less expl. mann

I could not say. Cremona is in all his details quite rigorous; but there is no doubt that ~~he goes on very quickly~~, he ~~attains to~~ obtains exact results – that is always the most important thing: he feels that his reasoning ~~proceeds~~ carries him on – ~~and~~ he ~~is ... also very~~ goes on very quickly, and he is also very suggestive!

The plane curve of order n is defined by the number n of its intersections with a generic straight line. (... conic) explain generic

~~It is admitted~~ He starts from the assumption that, the number of common points of a C^m & C^n ~~cannot~~ depend ~~but from~~ only on the two orders m, n; if ~~the~~ two curves break up into m, resp. n straight lines, we see the said number must be $= m \cdot n$.

To oblige a C^n to ~~be on~~ pass thro' a given point, is a simple condition; to oblige it to be there tangent to a given straight line, involves a further ~~another~~ condition; if we ~~do so for~~ oblige a second straight line ~~to be the~~ to be a tangent at the same point, we have altogether 3 conditions, and the C^n will have

Defin. – 1e, sans C. agg. interf. alter.

polari successi. forme a $n-2$ variat.

there a double point. And so on. In order that a given point may have for C^n the multiplicity r, $\binom{r+1}{2}$ conditions are required. As a C^n with a point of the multiplicity n breaks up into n straight lines ~~thru~~ this point, we may ~~derive~~ deduce from this that the number of parameters determining a C^n is $= \binom{n+1}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2}$. Etc.

n into $n+3$ over two

(Schnittpunktsätze).

a generalisation already devised by Newton for the case of a cubic curve

Cremona proceeds ~~afterwards~~ next to the theory of polarity, a theory which may be regarded as one of the possible ~~by~~ generalisations + of the theory of diameters of a conic ~~already~~ by Newton in his „Enumeratio" for diam. C^3, Mac-Laurin & Poncelet are also to be mentioned in the same connection, making use of the theory of harmonic centers. For harmonic conjugate points on a straight line, we have (Mac-Laurin's relation):

$$\frac{2}{OX} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} \qquad \text{that is} \qquad \left(\frac{1}{OX} - \frac{1}{OA}\right) + \left(\frac{1}{OX} - \frac{1}{OB}\right) = 0$$

If ~~we have~~, instead of a pair of points A, B, a group of n points $A_1, A_2 \dots A_n$ (G_n is given, with an origin O), we can likewise define a point X by the equation:

$$\sum_{r=1}^{n} \left(\frac{1}{OX} - \frac{1}{OA_r}\right) = 0$$

and more generally a group of i points, by:

$$\sum \left(\frac{1}{OX} - \frac{1}{OA_r}\right)_i = 0$$

Cremona

combinations of n things i at a time

where the index i means the product of i factors, & Σ the sum of these products. & l.h.s. is evidently of degree i in $\frac{1}{OX}$. These are the pole and the successive polar groups of O respect to a G_n.

If we consider a pencil of straight lines, O being its centre, and on every line the polar G_i of O respect to the G_n which is its intersection with a C^n, the locus of all these G_i is the polar-C^i of O respect to C^n.

O

G_i

Hessian locus of pts for wh. polar (conic) C^2 breaks up into 2 st lines

From here he proceeds to define the Hessian, Steinerian, Cayleyrian curves. (polar conic C_2 ... C_{2-1})

Steinerian is locus of double pts of these degenerate conics

Cayleyrian envelope of st lines joining corr. pts of ~~two corr~~ ~~pts of~~ Hessian & Steinerian

If two projective pencils of C^m resp. C^n are given, we can ask for the locus of intersections of two corresponding curves (= generated by the 2 proj. pencils).

$+ \lambda C' = 0$

On a straight line, the intersections of two corresponding curves determine a (m, n)-correspondence, which, if referred to an arbitrary origin O, is represented by an equation $f(Oa, Oa') = 0$ ~~of degree~~ containing Oa, resp. Oa' at the degree m, resp. n.

~~As for~~ The points of the required locus ~~Oa must be $= Oa'$~~ which are on the considered straight line, are united points of the above correspondence, and are determined by putting $Oa' = Oa$.

We get thus C^{m+n}. (It is supposed that the above equation (corresp.) does not contain as a factor $Oa - Oa'$ (the identical corresp.).

~~It was~~ This kind of consideration which was ~~even~~ the source of the so-called Principle of correspondence, to which the name of Chasles has come to be attached. Chasles formulated it indeed explicitly in 1864; but Cremona before that time had already understood its full importance, and made a great use of it ¶ (and De Jonquières also) Théor. généraux ... 1861). - It has revealed itself, also in later theories, / even for linear series of sets of points on algebraic curves, as a most powerful instrument; ~~we shall see it very often used also~~ it takes the exactly place of the fundamental theorem of algebra, of which it is an immediate application.

(Jacobian curve of 3 given curves; pencils, nets, .. Applications to C^3)

You may perhaps object that the title of pure geometry in this connexion is not a correct one; as Cremona's method, though proceeding synthetically, nevertheless postulates some fundamental algebraic theorems: whereas the name of pure geometry should be given only to a structure which is entirely independent of algebra.

Such a pure geometrical theory of plane curves was given ~~indeed~~ in 1886 by Ernst Kötter, and commenced also, in a quite different way, by De Paolis 1887-92, whose very important work was unfortunately interrupted by his death, only 38 years old!

Both were rather complicated — I think it could not be otherwise — and they had no followers: whilst Cremona's book admirably furthered the end which the author had at heart, that is of spreading over all Italy the love for geometrical speculations.

However, I must acknowledge that for every mathematical question there ~~is the~~ may be a most appropriate method to study & treat it. In this sense, as the conception of an algebraic curve of order n is essentially an analytical one, as so it entered into geometry, the analytical & invariantive treatment seems, above all, preferable. And the theory of Salmon, Cayley, etc. is certainly to-day more ~~alife~~ alive than Cremona's.

In the „Preliminari" the same theory is extended, by analogous methods, to surfaces, including ~~des~~ cones, developable surfaces, ruled surfaces (skew surf., scrolls); ~~and~~ twisted curves are considered too.

Concerning ruled surfaces, I may ~~recollect~~ recall his elegant demonstration of the well known theorem, that 2 curves ~~among~~ between which an algebraic (1,1) correspondence exists, must be of the same genus.

Lemma sulle rigate (R^k)

Let the two curves be a C^m, with d double points, cusps included, and a C^n with δ d.p., in two different planes: by joining the pair of corresponding points, we get a ruled surface R^{m+n} of order $m+n$ (as in the plane of C^m f.inst. there are, besides C^m, n generators). Such a scroll appears also in more recent ~~works~~ (Segre, Castelnuovo) as a useful instrument. As R^{m+n} will have ~~generally~~ a double ~~line~~ curve (except if $m=n=1$), we may calculate its order, by two different ways, that is how many points of it lie on ~~both~~ planes of C^m & C^n respectively.

In the plane of C^m we have: $\binom{n}{2}$ intersections of pairs of generators; ~~and~~ d double points on C^m; and mn intersections of C^m with the named generators. But as, for each of the n generators, the plane of C^m is tangent to R^{m+n} in one of its intersections with C^m, among the said mn points only $mn-n$ ~~n(m-1)~~ are on the double line of R. We have also:

$$\binom{n}{2}+d+mn-n=\binom{m}{2}+\delta+mn-m$$

or

$$\binom{n-1}{2}-\delta=\binom{m-1}{2}-d$$

q.e.d.

To the general theory of surfaces are consecrated also ~~the for~~ some chapters in the celebrated „Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du 3ème ordre", presented 1866 to the Academy of Berlin for the Steiner-prize, published only 1868.

Charles

The works, however, of the Bologna-period ~~which~~ taking higher rank by reason of their importance in the progress of modern geometry are the two Notes 1862-64 (opere n°40-62) on birational transformations of plane figures.

order n
quadratic

Besides projective transf., quadratic ones were already known, ~~sending~~ transforming straight lines into conics ~~on~~ thr. 3 fixed points (Poncelet's conjugate points with respect to a pencil of conics; ~~Hesse~~ Plücker, Crelle 5, 1830; Steiner's corresp. by means of a linear congruence (Syst. Entw.); transf. by reciprocal radii vectores; Möbius' „Kreisverwandtschaften") – It had also been observed (by Magnus) that the product of two quadratic transf. was of the 4th degree – De Jonquières had presented in 1859 to the Acad. d. Sc. a mém. about the transf. having now his name (in Comp. Rend. 49 - 1859 - p. 542 there is the report by Poncelet, Liouville, Chasles, Bertrand): but he took it back, p. 632 – published only 1864.

In any case, it is the great merit of Cremona to have been the first to understand & to realize the full importance of the ~~theory~~ ~~problem~~ of these transf.; and to have given, already in ~~the~~ his 1st Memoir, the perfectly general solution of it.

In that Memoir he gives in ~~deed~~ fact the 2 well known equations which must be satisfied by the numbers of points of multiplicity common to those curves in the one plane, which corresp. to straight lines in the other:

Spezzam. C^n Jacob.
hom. ~~...~~ omolog.
p. fond.
curve
$n-1$
n ... fond.

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + \dots + (n-1)^2\alpha_{n-1} = n^2 - 1$$
$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + \dots + \binom{n+1}{2}\alpha_{n-1} = \frac{n(n+3)}{2} - 2$$

$\alpha_1 = 2(n-1)$

Jonquière

from which a 3rd one follows:

$$\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + \binom{n-1}{2}\alpha_{n-1} = \binom{n-1}{2} \quad (\text{genus } 0)$$

The ~~said~~ ... curves are implicitly supposed to be ~~irreducible~~

If $n > 1$, that is if the transf. is not a projective ~~one~~, there are certainly fundamental points. (Curve corrisp.)

The determination of all the possible cases, for a given n, depends upon the solution of ~~...~~ a problem of indeterminate Analysis: but a solution in integer ~~numbers~~ may ~~...~~ give ~~no~~ corresp. system of irreducible curves (if with. if not $r_1 + r_2 \leq n$, $r_1 + r_2 + \dots + r_5 \leq 2n$, ...).

Those ∞^2 curves form a „homaloidic net": the name „homaloid" having been used by Sylvester (for linear more-dimensional spaces). — The transf. is completely defined by the net on the one plane, & the projectivity between it and the corresponding ~~other~~ net of straight lines on the other plane.

The true existence of such transf. is proved by an elegant & ~~at~~ for that time quite ~~singular~~ remarkable construction, ~~extending~~ Steiner's construction of quadratic transf.

Generation

We want a twisted C^{n-1} having $\underline{n-2}$ of its points on the same straight line $\underline{d}$: we may get it by intersecting a quadric scroll with a F^{n-2} ~~pattern~~ containing $\underline{n-3}$ of its generators of the same system. — Then the ~~∞^2 trans~~ congruence of lines whose directors are C^{n-1} & $\underline{d}$ (one of the types found 1866 by Kummer) determines between two generic planes the asked corresp. — ~~To~~ The straight lines of the one plane are ~~sent~~ into C^n of the other: the fundamental points on each plane are its intersections with d, C^{n-1}, & with the $n-1$ lines of congruence lying on the other plane.

~~[illegible]~~ Desired transformation

In the 2nd Cremona's ~~note~~ memoir, the fundamental curves are considered; the Jacobian of the ~~universal~~ homaloidic net, which is composed by the fund. curves; and the theorem is given of the equality of the numbers forming two conjugate solutions (which was completely proved by Clebsch, Math. Ann. 4).

(1^{th} ex. $n=6$; $\alpha_1=4$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=3$; $\alpha_1=3$; $\alpha_2=4$, $\alpha_4=1$)

The above

Two memoirs are among those which have in the highest degree contributed to the progress of geometrical theories in the 2nd half of the 19th century, because of ~~the new instrument of investigation given to science~~

In a Cremona-~~transformation~~ correspondence between 2 planes, ~~the~~ straight lines of the one plane are transformed into irreducible C^n_s of the other having α_1 fixed common simple points, α_2 double points, ... α_r common points of multiplicity r, ... α_{n-1} of multiplicity $n-1$, such that:

(1) $$\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 + \cdots + r^2\alpha_r + \cdots + (n-1)^2\alpha_{n-1} = n^2 - 1$$

(2) $$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3 + \cdots + \binom{r+1}{2}\alpha_r + \cdots + \binom{n}{2}\alpha_{n-1} = \frac{n(n+3)}{2} - 2$$

from which we derive a 3th equation:

(3) $$\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + \binom{r}{2}\alpha_r + \binom{n-1}{2}\alpha_{n-1} = \binom{n-1}{2}$$

showing that the C^n_s above mentioned are of genus 0, as it follows also from their being in a (1,1) corresp. to straight lines.

The determination of all the possible cases, for a given n, depends upon the solution of ~~a problem~~ equations (1) and (2) in positive ~~or null~~ integers (including zero), that is a problem of indeterminate Analysis; but such a solution may fail to give a corresponding system of irreducible C^n (f. inst. if there ~~would be~~ were two base-points of multiplicities r_1, r_2 such that $r_1 + r_2 > n$; or 5 points of mult. $r_1 \ldots r_5$ such that $r_1 + \cdots + r_5 > 2n$; etc.). - These solutions are all known for the lowest values of n.

for $n = 2$ (quadratic transf.) no other solution exists, as $\alpha_1 = 3$; ~~for~~ if $n > 2$ we want also ~~point~~ base-points of multiplicity ≥ 2.

The above ~~mentioned~~ ∞^2 C^n_s form a „homaloidic net", that is a ∞^2 linear system, in which two generic curves have only one variable intersection: the name „homaloidic" derives from Sylvester, who used it for linear (and consequently rational) more-dimensional spaces. - You will remember that a „homographic" ~~tran~~ correspondence between two planes, in which straight lines of the one plane are transformed into straight lines of the other, is completely determined by giving four pairs of corresponding straight lines, the four lines of each plane being the sides of a quadrilateral. ~~Similarly~~ In the same way, if to straight lines of the first plane ~~ought to~~ correspond in the second plane the C^n_s of the ~~ne~~ homaloidic net:

$$\lambda f + \mu \varphi + \nu \psi = 0$$

We may ~~shall~~ choose arbitrarily in ~~this~~ the net four C^n_s, such that no three of them belong to the same pencil, and make ~~let~~ them correspond to the sides of an arbitrary quadrilateral in the first plane: the Cremona-correspondence between the two planes will then be completely determined, and its equations, by a convenient system of coordinates x_i in the first plane, may be given ~~receive~~ the form:

$$x_1 : x_2 : x_3 = f : \varphi : \psi.$$

Straight lines of the second plane, as they intersect the ~~mentioned~~ C^n of the homaloidic net in n points, will have as their corresponding lines in the first plane curves intersecting every straight line in n points, that is also curves of order n, say f^n, with only one variable intersection, and forming therefore ~~similarly~~ also a ~~hom~~ homaloidic net, corresponding to an integral solution of equations (1) and (2), for the same ~~preceding~~ value of n.

These two solutions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ for the homaloidic nets in the two corresponding planes may coincide, but they ~~do not we~~ may also be different: ~~Cremona already stated~~ in any case they are called Conjugate solutions. Cremona already stated that in two conjugate solutions the values of the α's are always ~~quite~~ exactly the same, only in a different order; the complete proof of it was given by Clebsch in Math. Ann. 4. The lowest value of n admitting two different conjugate solutions is $n = 6$:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = 4,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 3,\ \alpha_4 = \alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 4,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 1,\ \alpha_5 = 0 \end{array}\right.$$

~~For ever~~ The base-points of the two homaloidic nets respectively in the two planes are called fundamental points (of order 1, 2, … r, …). If $n > 1$, that is if the correspondence is not a projective one, there must be, in each plane, some fundamental points.

To a fundamental point of order r (to which I suppose, for simplicity, that no other may be infinitely near) every C^n of the homaloidic ~~the~~ net has r superposed points; the corresponding points of the other plane must therefore ~~lay~~ lie so, that r among them may be on every straight line, that is they will form an algebraic (even a rational) ~~braic~~ curve of order r, which we call a fundamental curve.

Fundamental points are therefore ~~also~~ exceptional points, ~~concerning the univocity of the correspondence~~ in as far as the correspondence is no longer univocal there; ~~to~~ everyone of them has an infinite number of corresp. points, that is a corresponding "fundamental curve" in the other plane.

It may be demonstrated (but I will ~~do~~ not stop here) that every fundamental curve, on each plane, ~~must~~ ~~ought to~~ must contain some fund. points of this plane.

An ~~[...]~~ algebraic (1,1) correspondence between two planes, that is a Cremona-transformation, if it is not a projective one, cannot be (1,1) without exceptions.

If a straight line of the one plane passes through a fundamental point of ~~the~~ order r, ~~its~~ the corresponding C^n breaks up into the fundamental C^r corresponding to the ~~mentioned~~ fundamental point in question and a residual C^{n-r}

~~At~~ The fundamental curves of each plane form altogether a reducible curve of the order $\Sigma r\alpha_r$. By subtracting equation (1) from equation (2) multiplied by 3, we get

(4) $$\Sigma r\alpha_r = 3(n-1).$$

and we ~~so~~ may easily convince ourselves that this reducible curve is the so called „Jacobian curve" of the homaloidic net $\lambda f + \mu\varphi + \nu\psi = 0$, that is the curve $\begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0$, the indices denoting the differential coefficients with respect to x_1, x_2, x_3.

~~It is important to remember that, among~~

Among integral solutions of equations (1), (2), there is ~~also~~ for every value of n the following:

$$\alpha_1 = 2(n-1) \qquad \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-2} = 0 \qquad \alpha_{n-1} = 1$$

which also coincides with its conjugate. We have then in every plane a fund. point of the order $n-1$ (A, B) and $2(n-1)$ simple fund. points ($A_1, A_2 \dots A_{2n-2}$, $B_1, B_2 \dots B_{2n-2}$). ~~If no two of these points are infinitely near, we may assume that the point~~ The fund. point A (or B) of order $n-1$ is transformed into the $C^{n-1}(B^{n-2}, B_1 \dots B_{2n-2})$, resp. $(A^{n-2}, A_1 \dots A_{2n-2})$; the points A_i (or B_i) into the straight lines BB_i (or AA_i). If a straight line of the first plane passes ~~plane~~ through A, its correspondent C^n breaks up into the ~~mentioned~~ fundamental $C^{n-1}(B^{n-2}, B_1 \dots B_{2n-2})$ and a residual straight line through B.

Leaving ~~So that~~ aside the C^{n-1}, ~~from the former ones~~, we may say that straight lines through A are transformed into straight lines through B. - It is the case of "Jonquières' transformations", that is Cremona-correspondences transforming a pencil of straight lines in a similar pencil.

For this particular case, Cremona gave an elegant and for that time remarkable geometrical construction, generalising Steiner's construction of quadratic transformations.

Take a twisted curve C^{n-1}, such that it has ~~having~~ $n-2$ of its points on ~~the same~~ a certain straight line d: we may get it by cutting ~~intersecting~~ a quadric scroll (~~that~~ say a hyperboloid) by ~~with~~ a surface of ~~the~~ order $n-2$ passing through $n-3$ of its generators of the same systems: every generator of this system may then be taken as the mentioned ~~above~~ straight line d. The lines C^{n-1} and d are then the directrices ~~directors~~ of a congruence of ~~to~~ straight lines of the 1st order, so that throught every generic point of ~~the~~ space only one line of the congruence ~~is~~ passes. (This line is the residual intersection of the cone projecting C^{n-1} and ~~of~~ the plane projecting d, beside the lines projecting their $n-2$ common points). These congruence (which is one of the congruences of the 1st order found in 1866 by Kummer) determines ~~between two~~ between two generic planes the desired correspondence. Straight lines of the one plane are transformed into C^n's of the other; in each plane, its intersection with d is a fundamental point of order $n-1$; the $2n-2$ ~~fund~~ simple fundam. points are given by its intersections with C^{n-1} and with the $n-1$ lines of the congruence lying on the other plane.

The two memoirs by Cremona on birational transf. of the plane are among those which contributed in the highest degree to the progress of geometrical studies in the 2nd half of the 19th century, and ~~they~~ did so for many reasons:

successive — Look up again
Nel lavoro cit. di Crelle 58 e in altri successivi riprende
e pone a centro tutto l'imp. argom. della generaz. proj.le
C^3 e sup. p.ni osculatori (Seydewitz), ridimostrando
adding
teoremi nuovi, e aggiungendone altri originali.

Fra altro, Null-system. — Null-Syst. ?

is concentrated into
Ma l'opera scient. princ. di Cremona si concentra su 2 argom.

a) la teoria gen. Curve e sup. alg.

b) id delle trasf.ni biraz. fra 2 piani e 2 spazi.

enriched with numerous
La prima di queste, egli ha arricchita di numerose e ~~brillanti~~
inquiries culminated wonderful ~~treaties~~ papers
ricerche, che culminarono in 2 trattati mirabili (Introduz. – Prelim.),
in 1.a anche in Greco Cech
pubbl. anche in lingua tedesca, nei quali espose con metodo
unified geom. method all the preceding results
geom. unif. tutti i risultati essenz. acquisiti preced.te e per diverse vie,
together with many new ones harmonic coordination a true
insieme con molti altri nuovi. – Coordinam.o armonico di risultati vecchi e nuovi, con vera perfez. artistica.
takes from Cr. almost its origin, so much as
Colla 2a, che da Cremona ripete quasi esclus. le origini,
by general ~~consens~~ agreement
tanto che p. ~~concordo~~ consenso ~~di tutto~~ quelle trasf. veng. chiam. „Cremoniane",
he was really " opening a new path" to geom. invest.
egli è diventato vero „Bahnbrechender Forscher"; ha
gave
dato alla scienza concetti nuovi, ha aperti nuovi campi non
for highest
ancora del tutto sfruttati, creando così a sé il maggior
fame
titolo di gloria.

Introduz. a una teoria geom.ca delle C piane (dic. 1861) } presso che inizio e fine
Preliminari di una teor. geom. delle sup. (1866-67) } del periodo Bologna.

I do not want to mention that 1852 has appeared of the 1th ed. of the celebrated book of Salmon on the theory of plane C., treated by methods of various character but in the main analytical & connected with the theory of inv. of algebraic forms. It was now the matter to build up...

~~Al concetto, e perciò~~ alla definiz. e teoria sintetica di C. e sup. alg.
non si è potuto giungere che con difficoltà.

Necessità degli immag. per dare agli enunciati forma + precisa
Beiträge
e + semplice – Sintet.te solo Staudt, e in modo elegante, ma pesante
(C. Segre – Mem. Torino (2) 38 – 1886 per le coppie elem. immag. con.)

Occorre qualcosa che sostituisca la teor. delle fr. ~~ed~~ raz. intere di una variabile, e essenz. il teor. fond. dell'algebra.

Singole questioni da Grassmann (1844 - Ausdeh. e seguito — ma generaz.e meccanica, tradiz. della legge $F(x,y)=0$ — e generaz.e C^{m+n} con fasci Π)

Da certo n° p. e rette fissi, linearm.e un p. e retta che debbano apport.

Steiner 1848 — quest. polarità — Hessiana St., Cayl.,

Chasles - de Jonquières di nuovo fasci Π: estensione generaz. conica.

$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} = 0$

Non potrei dire che Cr. sia in tutti i dettagli perfett.e rigoroso: ma certo procede rapid.te, e giunge a risultati esatti — höchst anregend (suggestive!)

sentiva che il ragion. correva 3 meriti

Ammette i p. imag. come equiparati reali. — C^n piane med. n° interses. retta.

n° punti comuni C^m e C^n, in generale, ammettendo dipenda solo da m e n, e facendole spezz. in rette.

3 cond. p. un p. doppio — $\frac{r(r+1)}{2}$ p. punto r^{plo} — per det. C^n, $\frac{n(n+1)}{2}$ per p. n^{plo}, e altra ~~1~~ per ~~ogni~~ ogni singola retta p. questo p.

(C^n spezzata in n rette per 1 punto).

Così Schnittpktsätze

Definisce i successivi gruppi polari di un punto risp. G_n sulla punteggi. per relaz. metriche fra le distanze di questi punti (estensione Maclaurin p. gruppi arm.

$\left(\frac{1}{0x}-\frac{1}{0A}\right)+\left(\frac{1}{0x}-\frac{1}{0B}\right)=0$

e di qui polarità risp. C^n (Sezione II)

In generale
$\Sigma\left(\frac{1}{0x}-\frac{1}{0a}\right)_r=0$
dove l'indice indica somma dei prodotti a r a r.

Hess, Stein, Cayl ...

Genera C piane med. sistemi Π di C ord. inf. (ed. fasci). Gli ordini risultano in base al n° p. uniti di certe corrisp. algebriche, e riposano sul Kar. fond. algebra.

2 fasci Π determinano su trasversale corrisp. (m,n) — riferendosi a un'origine, eq. $f(\overset{m}{x},\overset{n}{x'})=0$ ....

Sono quelle considerazioni da cui è nato il Princ. di corrisp. detto di Chasles — Cremona ne aveva compresa importanza prima ~~che venisse~~ fosse formulato in modo generale.

Jacobiana di 3 curve —

Fasci, reti, ...
pencils, nets,

Sezione III — Applicaz. C^3

It may perhaps be said the title of pure geometry in this connexion is not a correct one; as Cremona's method, though its proceeds synthetically, nevertheless postulates ~~certain~~ some fundamental algebraic theorems, whereas the name of pure geometry is usually given only to a structure which is entirely independent of algebra.

Such a pure geometrical theory of plane curves was given indeed 1886 by Kötter & commenced by De Paolis 1887-92, whose very important work was unfortunately interrupted by his death, but 38 years old! — But ~~it~~ such a theory could not be but very complicated & ~~without~~ has no other successive results or influence — whilst Cremona's book admirably furthered the end which its author had at heart, that of spreading in Italy the love for geometrical speculations.

Nei „Preliminari" l'anzidetta teoria è estesa ~~alle sup.~~ con analoghi proced^ti alle sup. nello spazio — considerandovisi anche coni, sviluppabili, C. sghembe; e, fra le sup., le rigate (ruled, skew surfaces).

A proposito di queste ultime, notevole la dim. elegante della proprietà ben nota eguagl^za genere di 2 curve piane in corrisp. alg. biunivoca.

C^m con d punti d. (incl. cuspidi), C^n con δ

Ordine $\underline{m+n}$ (sez. col piano di C^m, ad es.: in più n generatrici).

Due modi di calcolare l'ordine della C^a doppia di R^{m+n}, secondo il n° dei suoi punti nel piano di C^m o C^n.

1° modo: $\binom{n}{2}$ intersez. delle n rette a due a due; più in $n(m-1)$ punti comuni a C^m e singole rette (si esclude p. ogni retta il p. di contatto col piano stesso); più ancora d. Onde

$$\binom{n}{2} + mn - n + d = \binom{m}{2} + mn - m + \delta$$

onde

$$\binom{m-1}{2} - d = \binom{n-1}{2} - \delta$$

Alla teoria gen. delle sup. fuo dedicati anche i primi Capitoli del „Memoire de géométrie pure sur les surfaces du 3me ordre", presentato 1866 per il premio Steiner, e pubbl. solo 1868

(Pentaedro e 27 rette – già da Cayley – Salmon – Sylvester).

The works, however, of the Bologna-period which ~~takes~~ took higher rang by reason of their importance in the progress of modern geometry are the two Notes 1862–63 (Opere n° 40–62) on the birational transf. of plane figures

Oltre le trasf. proiettive, erano già note quelle quadratiche (C^2 per 3 punti)*, e, come loro casi part., quelle p. raggi reciproci (Möbius, Kreisverw.). Si era anche detto non ve ne fossero altre (Schiaparelli, Mem. Torino 60?); mentre pure si era asserito che il prod. di 2 consimili era del 4° ordine. – E altri tipi già

* Poncelet, p. conig. risp. fascio di C^2 Steiner (System. Entw.) Tr. sgh.

in una ~~Nota~~ mscr. di Jonq., pres. 1859 Acc. di Parigi (CR 49, p. 542), ~~pubb. 1864~~ rapporto Poncelet, Liouville, Chasles, Bertrand – poi ritirato p. 632) public. 1864

In any case, it is the great merit of Cremona to have been the first to understand & to realize the full importance of the probleme of these transf., & to have given, already in the 1st Memoir, the perfectly general solution of it

In the 1st Memoir he gives the two well know equations which must be satisfied by the numbers of points of equal multiplicity common to these curves in the one plane, which correspond to straight lines in the other

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + \dots \quad + (n-1)^2 \alpha_{n-1} = n^2 - 1$$
$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + \dots \quad + \binom{n}{2} \alpha_{n-1} = \frac{n(n+3)}{2} - 2$$

$(n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1 \cdot n-2}{2}$

(dalle quali p. diff. genere $= 0$)

se $n > 1$, cioè trasf. non Π, esistono certo p. fond.

The determination of all the possible cases, for a given $\underline{n}$, depends from a probleme of indeterminated Analysis; but ~~not ever~~ some of solutions in integer numbers may give no corresponding system of curves (cond. ?)

$(n = 5,\ \alpha_3 = 2,\ \alpha_1 = 6)$. $\begin{cases} r_1 + r_2 \leq n \\ r_1 + \dots + r_5 \leq 2n \dots \end{cases}$

A rational curve is a (plane or twisted) curve, ~~for~~ whose generic point has coordinates, which may be expressed as rational functions of a parameter t; in such a manner that every point may be obtained for one and only one value ~~for~~ of t. In other words, the ~~above~~ curve must be in a (1,1) correspondence with a straight line (on which we may consider t as a coordinate)

Lüroth (Math. Ann. 9 1875) demonstrated that the condition, that every point of the curve is to be obtained ~~by~~ for one value only of t, is not essential; ~~in that~~ if it ~~would~~ were not ~~be~~ originally satisfied, we ~~may render it~~ always arrange that it is satisfied by a convenient changing of the parameter (f. inst., if the ~~multivalued~~ given ~~rational~~ functions were ~~would be~~ at the same time rational functions of t^2, by assuming t^2 as a ~~new parameter~~). I shall say then we have, rational & rationally invertible functions.

~~Similarly~~ In the, we define a rational surface, as a surface whose generic point has coordinates which may be expressed as rational functions of two ~~pa~~ (independent) parameters u, v, so that to every point of the surface only one pair of values of u, v may correspond. This last condition ~~it also not~~ may in ~~that~~ any case ~~also~~ be satisfied, if it is not originally, by changing the parameters; but to ~~get~~ be sure of ~~T~~ this ~~it~~ was a very difficult problem, which Castelnuovo ~~was able~~ succeeded ~~to~~ in solving in 1893 (Rend. Acc. Lincei, 1893: Math. Ann. 44); whilst the answer to the same question ~~concerning~~ in the case of 3 independent parameters ~~we~~ must ~~give a~~ be negative ~~answer~~ (Fano - Enriques, ~~19~~ 1909-12).

A rational surface is consequently a surface in ~~a (1,1)~~ an algebraic (1,1) correspondence with a plane — in which u, v ~~are~~ are to be assumed as coordinates —; but this correspondence may also have, on both sides, ~~fundamental elements points~~ exceptions to the univocity, that is fundamental points & curves.

~~By~~ If we ~~mapping~~ map a rational surface on a plane, the plane ~~sections~~ sections of the surface (each ~~one~~ of which is determined by three generic among its points), are transformed into such a system of ~~∞^3~~ ∞^3 plane curves, that one and only one of them may pass through 3 generic points of the plane. This system is therefore an „∞^3 linear system", that is a „web" of plane curves.

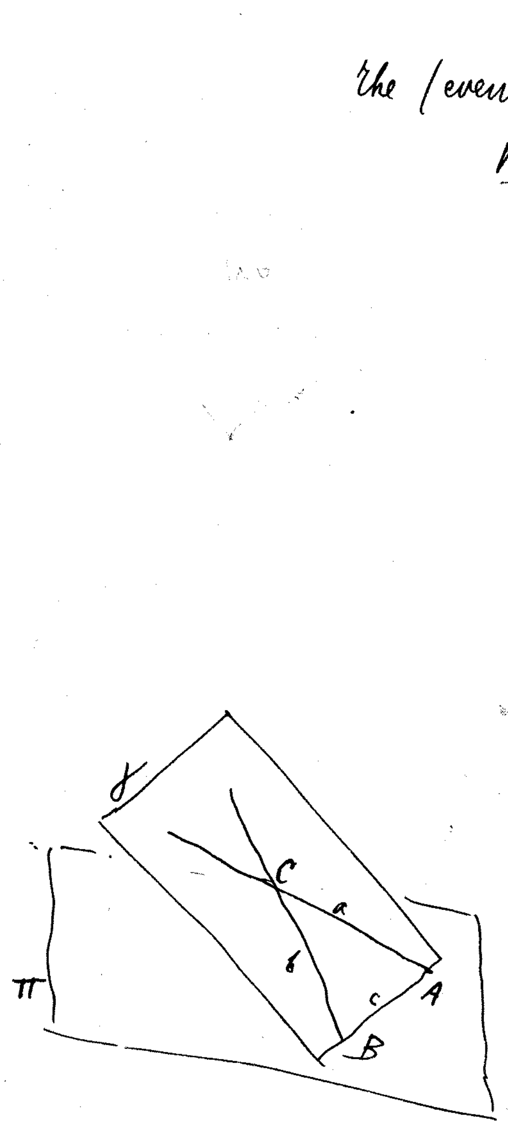
(1) $\lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \lambda_3\varphi_3(x) + \lambda_4\varphi_4(x) = 0$;

and (in a ~~quite~~ perfectly analogous manner ~~way~~ to ~~as by~~ Cremona-transformations between two planes):

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

will be the equations of the (1,1)-correspondence between the surface and the plane, or the parametric equations of the surface, the ratios $x_1 : x_2 : x_3$ being considered as parameters. ~~General~~ ~~The fundamental points~~

The (eventual) ~~the~~ base-points of the net (1) are the fundamental points of the plane $x_1 : x_2 : x_3$. ~~for the correspondence~~. The fundamental points on the surface are the base-points of the „homaloidic net" (we keep the same name) corresponding to ~~the~~ straight lines of the plane. – The whole theory is an immediate generalization of Cremona-correspondences between two planes.



We get a most simple ~~of~~ example of it by the so-called „stereographic projection" of a quadric, that is by mapping a quadric on a plane π ~~through~~ by ~~its~~ projecting it from one of its points C. We may suppose the quadric ~~of~~ to be a ruled hyperboloid, whose tangent plane in C and generators through C we may call γ, a, b. The plane ~~s~~ sections of the quadric are projected into conics through the two points $A \equiv a\pi$ and $B \equiv b\pi$; and these are the two (only) fundamental points on ~~the~~ π; their corresponding fundamental lines on the quadric are the generators a, b. Conversely, there is on the quadric one fundamental point, the center C; its corresponding fund.-line on π is the straight line $\gamma\pi \equiv AB$.

The linear system of conics through A, B may be represented by

$$\overset{x_0x_2}{\cancel{(x_0x_2 - x_1^2)}} + x_1(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = 0$$

and the parametric representation of a quadric is consequently given by:

$$y_1 = x_0 x_2 \qquad y_2 = x_0 x_1 \qquad y_3 = x_1^2 \qquad y_4 = x_0 x_3$$

or, if we put $x_1 = 1$, $x_0 = u$, $x_2 = v$:

$$y_1 = uv \qquad y_2 = u \qquad y_3 = 1 \qquad y_4 = v \qquad\qquad (1, u, v, uv).$$

A surface of the 3rd order, if it is not a cone of genus 1, is also a rational surface, but its representation on the plane ~~it gui~~ may be obtained as follows:

1. If there is any double point – by projecting the surface ~~bu~~ from this double point ~~into~~ on to a plane. (In the same manner we may proceed for every surface of ~~the~~ order n having a ~~multipl~~ point of multiplicity $n-1$).

2. If there are no double points, the surface contains 27 straight lines, among which many pairs of skew lines are to be found: every generic line of the linear congruence having ~~two of~~ one among these pairs as directrixes, meets the surface in one other point, and a generic plane in a point ~~too~~ also, which will be the correspondent of the former one in the desired representation.

We shall next extend the conception ~~of~~ of Cremona-transformation from the case of two planes to that ~~other one~~ of two spaces. ~~The~~ The planes of ~~the~~ one of these spaces will then be transformed into surfaces of the other, being in a (1,1) correspondence with those planes, that is into rational surfaces. Both ~~argument are therefore~~ the theories – Cremona-transformations in space and plane representations of rational surfaces – are therefore, as I ~~p~~ said, ~~interlacing each other~~ connected each other. They appear both in Cremona's „Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du 3me ordre", which obtained from ~~of~~ Berlin ~~the~~ Academy the Steiner-prize.

We may consider firstly a projectivity between a space of points Σ and a space of planes Σ_1; secondly, three superposed spaces of planes $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, all projectively related to the former space of points Σ. For every point P of Σ we get 3 corresponding planes in $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ respectively: say π_1, π_2, π_3, and consequently, generally, a point P' as their intersection. We may verify – I ~~do~~ will not stop over ~~this~~ –

that to every point P' also one corresponding point P is generally to be found; we get therefore a $(1,1)$ correspondence between the two spaces. – If P varies in a plane α, $\pi_1\ \pi_2\ \pi_3$ ~~are~~ describing homographic bundles of planes A_1, A_2, A_3; the locus of P' is therefore generated by these 3 homographic bundles, ~~that~~ and is a surface of the 3^{rd} order (F^3) (Grassmann). – If P varies on a straight line r, $\pi_1\ \pi_2\ \pi_3$ will describe homographic ~~sheaf~~ sheaves of planes, and P' a twisted cubic. The ~~above~~ surfaces F^3 have also these twisted cubics as their variable intersections; their residual intersection, a curve of the 6^{th} order (and of the genus 3) must therefore be a fixed curve, through which all the ∞^3 surfaces F^3, corresponding to the planes of Σ, will pass.

Analytically, if x_i are the coordinates of P, I may suppose the 3 planes $\pi_1\ \pi_2\ \pi_3$ to be represented by the equations:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 = 0$$
$$x_1 B_1 + \cdots\cdots = 0$$
$$x_1 C_1 + \cdots\cdots = 0$$

the A, B, C being linear homogeneous polynomials involving the point-coordinates y_i of the second space. By solving them with respect to the x's, we get the equations of our space-transformation:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = [A_2 B_3 C_4] : [A_3 B_4 C_1] : [A_4 B_1 C_2] : [A_1 B_2 C_3]$$

and we ~~and~~ see that the planes α of Σ are transformed into the F^3 of the web (surfaces):

$$\lambda_1 [A_2 B_3 C_4] + \lambda_2 [A_3 B_4 C_1] + \lambda_3 [A_4 B_1 C_2] + \lambda_4 [A_1 B_2 C_3] = 0$$

all passing ~~all~~ through the line whose points make all the determinants of the matrix

$$\left|\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{matrix}\right|$$

vanish. ~~And~~ We know from algebra that it is a C^6 (of genus 3).

Reye Grassm.

It is easily ~~to~~ seen that, conversely, also the points P' of a plane in the second space have their correspondents P, in the former one, on surfaces Φ^3, all passing ~~all~~ through an analogous curve γ^6.

The plane sections of a single Φ^3 will therefore be transformed into the sections determined by its corresponding plane φ on the ∞^3 surfaces F^3 of the second space ~~by a~~ (all passing through C^6) ~~by a single plane of the one, which corresponds to Φ^3~~ – that is into the ∞^3 curves C^3 of the plane φ passing through its 6 intersections with C^6. We get in this way the well known representation of the surface Φ^3 on the plane φ, so that the plane sections of Φ^3 are transformed into C^3 through 6 fixed (fundam.) points

Among rational surfaces mapped on the plane at that time, there was the so-called surface ~~of~~ Steiner's, with a triple point and 3 double lines through this point. Taking the [0]-point of the coordinates as the triple point, and the lines $x_1 = x_2 = 0$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_3 = x_1 = 0$ as double lines, the equation of the surface may be written in the form:

$$x_0 x_1 x_2 x_3 + a x_1^2 x_2^2 + b x_2^2 x_3^2 + c x_3^2 x_1^2 + d x_1^2 x_2 x_3 + e x_2^2 x_3 x_1 + f x_3^2 x_1 x_2 = 0$$

For this surface Cremona succeeded in demonstrating geometrically that its asymptotic lines are rational curves of the 4th order ~~(curves of the „1st kind")~~ (Rend. Ist. Lomb. 1867 - n° 71), whilst Clebsch had obtained the same result by forming their differential equations and by integrating them.

The surfaces contains a double infinity of conics, as it is cut by every tangent plane in two conics through the point of contact. The tangents to the two conics ....

7) Gli inv. delle rette che secano una C^4 piana secondo quad. di p. π formano una schiera. Nell'art. dell'Enc. tedesca sulle C^4 (Kohn-Loria n. 38, p. 596) è detto che nel caso della q. equian. o risp. armonica, l'inv. è di classe 4 ($P=0$) o risp. 6 ($Q=0$), la schiera, di classe 12, è perciò rapp. da $P^3 - kQ^2 = 0$. Le $12^2 = 144$ rette basi, per le quali ~~il birapp.~~ la quad. deve avere birapp. ind., e perciò 3 almeno dei 4 p. devono coincidere, sono date dalle 24 tg. d'infl. della C^4, ciasc. delle q. assorb. 6 rel. bas.

C^4 2 e 3; è $P^3 - kQ^2$ è l'inv. rel. di C

I detti ∞^1 inv. possono essere tutti riducib. solo

1) quando contengono una parte fissa — comp. ~~a~~ per una volta di rette quali le q. tra le della art. colla C^4 coinc. È il caso della C^4 comp. tripl. Le rette di un fascio segano allora su i gruppi di un inv. I_4 contenente 2 gruppi eq. e 3 arm. Perciò $P=0$ e $Q=0$ sono inv. di classe (che è 4)

2) quando tutti si spezz. in 2 o più inv. di una stessa schiera Σ (di classe inf. a 12) invece var.

I 2 elem. $P^3=0$ e $Q^2=0$, entrambi multipli, ~~compl~~ equimultipli, di 2 elem. di S; perciò gli altri inv. $P^3 - kQ^2 = 0$ ~~non possono contenere~~ devono comporsi di elem. di Σ tutti dist.

In part. l'inv. delle rette per cui coinc. 2 delle 4 inters. colla C^4 deve comp. oltre che delle tg. vere e propr. della C^4, di un'altra parte che, di = classe, che può soltanto comp. di fasci con centri nelle cusp. della C^4. E ciò avviene ~~soltanto~~ solo nel caso della C^4 tricusp.

In questo caso le tg. nelle 3 cusp. concorrono in un p. O; e le rette del fasc. O segano su C^4 un I_4 con 3 gruppi (sorretti a 2) con p. triplo, quindi comp. di gr. tutti equian. (e forse sol.).

Trasp. la quest. p. dualità alla cubica nodata, si può rappres. questa coll'eq.

$$(1) \qquad 27\, x_1 x_2 x_3 - S^3 = 0$$

dove $S \equiv x_1 + x_2 + x_3 = 0$ è la retta dei flessi, le 3 rette fond. sono le tg. di flessi, e il nodo è nel p. unità. Il fascio di C^3 duale del s. è

$$(2) \qquad x_1 x_2 x_3 + \lambda S^3 = 0$$

e l'identità

$$27\, x_1 x_2 x_3 \left(27\, x_1 x_2 x_3 - S^3\right) + \frac{1}{4} S^6 = \left(27\, x_1 x_2 x_3 - \frac{1}{2} S^3\right)^2$$

mostra che $27\, x_1 x_2 x_3 - \frac{1}{2} S^3 = 0$ è la C^3 luogo dei p. pei q. la q. delle tg. alla (1) è arm.

Rimane a verif. che l'inv. assoc. comune alle due C^3 del fasc. (2)

non hanno ness.

$$\left(27\, x_1 x_2 x_3 - \frac{1}{2} S^3\right) \pm k S^3 = 0$$

è pure quella della quad. delle tg. cond. da un p. alla C^3 (1).

Se la C^4 ha un p. doppio A, le relative tg sono elementi comuni a $P=0$ e $Q=0$ colla stesso p. di contatto – dualmente, tg doppie, ecc.

$$\frac{(2+3)^2}{4}(2^2-3)^2+23(2+3)^3$$

$$\frac{(2^2-3^2)^2}{4} \qquad \frac{1}{4} \qquad + \qquad +\frac{1}{3} \qquad 1 \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{16}-\frac{1}{2}+$$

$$1^2 2^2+1^2 3^2+2^2 3^2-2.1^2 23-2.2^2 13-2.3^2 12$$

$$1=-\frac{2+3}{2}$$

$$\frac{(2+3)^2}{4}(2^2+3^2-2.23)$$

$$1=\frac{2+3}{2}$$

$$\frac{(2^2-3^2)^2}{4}+2^2 3^2-2.3(2+3)^2 \qquad \frac{1}{4} \qquad +1 \qquad -\frac{3}{2} \qquad -1 \qquad \frac{1}{4} \qquad -$$

$$-\frac{1}{2}+1-2 \qquad \frac{1}{16}-\frac{1}{4}+3\frac{1}{16}$$

$$2^4-4.2^3 1$$

$$4.4.4 \qquad 16+16+256-32-4.64$$

$$\frac{x_2^4-2x_2^2x_3^2+x_3^4}{4}+x_2^2x_3^2-x_1x_3(x_2^2+2x_2x_3+x_3^2)$$

Ho corretto perchè solo sulla C^4 con p. triplo (non su quello con 3 nodi) ~~è indiff~~ il tono di 4 pall è anche quello loro corrisp. a C^4

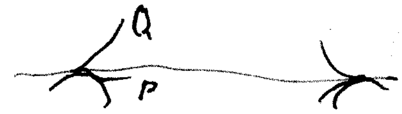
Curva con cusp, 1 p. sempl. e stessa tg — duale — Curve, 1 con tg di flesso, 1 tg sempl, stesso p. cont

3 inters, 2 tg comuni — 3 tg comuni, 2 inters

p. doppio della C^6 — $P=0$ vi ha p. doppio colle stesse 2 tang.

per $Q=0$ queste sono tg di flesso, entrambe

dualmente



$P^3 - Q^2$, 2 p. tripli, p. quadruplo con doppio ∞ vicino

$3.4 + 2.3 = 18$ inters.

$\lambda = 24$ triplo e 0 semp — $\lambda(\lambda-24)^3$ — $\lambda^4 - 72\lambda^3 + 1728\lambda^2 - 24^3\lambda = 0$

$A = 18 \pm 6\sqrt{3}$ doppi — $\lambda^2 - 36\lambda + 216 = 0$ — $\lambda^4 - 72\lambda^3 + 1728\lambda^2 - 72.216\lambda + 216^2 = 0$

$\lambda = \infty$ tripl, 27 semp — $\lambda - 27 = 0$ — $\lambda - 27 = 0$

$(1+2+3)^3 - \alpha 123 = 0$

polare di 0.1.−1 $\quad (3(1+2+3)^2 - \alpha 13) - (3(1+2+3)^2 - \alpha 12) = 0 \quad I - II = 1728(\lambda - 27) \quad 24^3.3$

si spezza in $x_1 = 0$ e $x_2 = x_3$ — $3y_2y_3 = 12 - \alpha$

$(x_1 + 2x_2)^3 - \alpha x_1 x_2^2 = 0 \qquad x_1^3 + 6x_1^2 x_2 + (12-\alpha) x_1 x_2^2 + 8x_2^3 = 0 \qquad y_2 y_3 = 4 - \frac{\alpha}{3}$

$\frac{3}{y_1} = \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} \qquad 2 y_2 y_3 = y_1 (y_2 + y_3) \qquad y_1 = \frac{8}{4 - \frac{\alpha}{3}}$

$x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 + x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 x_2 x_3 - 2x_2^2 x_3 x_1 - 2x_3^2 x_1 x_2 = 0 \qquad x_3 = -\frac{u_1 x_1 + u_2 x_2}{u_3}$

$\left(\frac{u_1 x_1 + u_2 x_2}{u_3}\right)^2 (x_1^2 + x_2^2) + 2 x_1 x_2 \left(\frac{u_1 x_1 + u_2 x_2}{u_3}\right)^2 + 2 x_1 x_2 (x_1 + x_2) \frac{u_1 x_1 + u_2 x_2}{u_3}$

$(u_1 x_1 + u_2 x_2)^2 (x_1 - x_2)^2 + u_3^2 x_1^2 x_2^2 + 2 x_1 x_2 (x_1 + x_2)(u_1 x_1 + u_2 x_2) u_3 = 0$

$(u_1^2 x_1^2 + 2 u_1 u_2 x_1 x_2 + u_2^2 x_2^2)(x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) + u_3^2 x_1^2 x_2^2 + 2 u_3 x_1 x_2 (u_1 x_1^2 + [u_1 + u_2] x_1 x_2 + u_2 x_2^2) = 0$

$x_1^4 \quad u_1^2$

$x_1^3 x_2 \quad -2u_1^2 + 2u_1 u_2 + 2u_1 u_3$

$x_1^2 x_2^2 \quad u_1^2 + u_2^2 - 4u_1 u_2 + u_3^2 + 2u_3(u_1 + u_2)$

$x_1 x_2^3 \quad -2u_2^2 + 2u_1 u_2 + 2u_2 u_3$

$x_2^4 \quad u_2^2$

$u_3^2 - (u_1^2 + u_2^2 - 2u_1 u_2)$

$u_1^2 u_2^2 - u_1 u_2 (-u_1 + u_2 + u_3)(u_1 - u_2 + u_3)$

$+ \frac{1}{12}\left[(u_1 + u_2 + u_3)^2 - 6u_1 u_2\right]^2$

$48 u_1^2 u_2^2 - 12 u_1 u_2 (u_3^2 - u_1^2 - u_2^2 + 2u_1 u_2)$

$+ (u_1 + u_2 + u_3)^4 - 12 u_1 u_2 (u_1 + u_2 + u_3)^2$

$48 \sum u_1^2 u_2^2 + (u_1 + u_2 + u_3)^4 - 12 u_1 u_2 (2u_3^2 + 4u_1 u_2 + 2u_1 u_3 + 2u_2 u_3)$

$$(u_1+u_2+u_3)^4 - 24u_1u_2u_3(u_1+u_2+u_3) \geq 0$$

$$u_1+u_2+u_3=0 \qquad (u_1+u_2+u_3)^3 - 24u_1u_2u_3 = 0$$

$$\begin{matrix} u_1^2 & \frac{1}{2}(-u_1+u_2+u_3)u_1 & \frac{1}{6}(u_1+u_2+u_3)^2 - u_1u_2 \\ \frac{1}{2}u_1(-u_1+u_2+u_3) & \frac{1}{6}\Sigma^2 - u_1u_2 & \frac{1}{2}u_2(u_1-u_2+u_3) \\ \frac{1}{6}\Sigma^2 - u_1u_2 & \frac{1}{2}u_2(u_1-u_2+u_3) & u_2^2 \end{matrix} \Bigg| \begin{matrix} u_1^2 & \frac{1}{2}u_1\Sigma - u_1^2 & \frac{1}{6}\Sigma^2 - u_1u_2 \\ \frac{1}{2}u_1\Sigma - u_1^2 & \frac{1}{6}\Sigma^2 - u_1u_2 & \frac{1}{2}u_2\Sigma - u_2^2 \\ \frac{1}{6}\Sigma^2 - u_1u_2 & \frac{1}{2}u_2\Sigma - u_2^2 & u_2^2 \end{matrix}$$

$$-\left(\frac{1}{6}\Sigma^2 - u_1u_2\right)\left(\frac{1}{36}\Sigma^4 - \frac{1}{3}\Sigma^2 u_1u_2\right) + \cancel{\tfrac{1}{24}\Sigma^2 u_1u_2} \; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\Sigma^2 - u_1u_2\right)\left(u_3^2 - (u_1-u_2)^2\right)u_1u_2$$

$$-\frac{1}{4}u_1^2u_3^2\left\{(-u_1+u_2+u_3)^2 + (u_1-u_2+u_3)^2\right\}$$

$$2\left[u_1^2+u_2^2+u_3^2 - 2u_1u_2\right]$$

$$\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{216}\Sigma^6 + \frac{1}{36}\Sigma^4 u_1u_2 - \cancel{\frac{1}{3}\Sigma^2 u_1^2u_2^2} + \frac{1}{12}\Sigma^2 u_1u_2\left\{\cancel{u_3^2} - (u_1-u_2)^2\right\}$$

$$-\frac{1}{12}\Sigma^2 u_1u_2\left(u_3^2 - (u_1+u_2)^2\right) - \frac{1}{2}u_1^2u_2^2\left(u_1^2+u_2^2+u_3^2 - 2u_1u_2\right)$$

$-$

Supposta la C^4 irrid., se tutti gli invol. si spezzano – escluso il caso della parte fissa unico e già trattato, tali invol. ~~non~~ possono che comporsi di 2 ∞ parti, tutte variabili, di una stessa schiera Σ, di classe naturalm. divisore di 12, e magg. ≤ 4, l'invol. essendo 4 la classe dell'inv. delle rette che secano quaderne eq.

D'altra parte l'invol. delle $\mathfrak{S}$ deve spezzarsi nell'inv. di queste e che deve comporsi di inv. di 2 oppure 3 gruppi vero e prop. di una certa classe $\nu \leq 4$ e nei fasci di rette che hanno p. centro i p. d. e cusp., contati opportunam. – tutti uno stesso n° di volte, mentre, contati sempl., devono formare un inv. anch'esso di classe ν (perché app. alla sch. Σ), cioè dev. esser n° di ν. Uniche possibilità, le C^4 tricusp., $\nu = 3$, le quali, coi 3 f aventi i centri nelle cusp. contati (come si vede analit.!) 2 volte, ricost. l'inv. di classe 12.

L'eq. di tale C^4, assumendo le cusp. come p. fond. e il p. di curva delle relative tang. per p. unità, è:

$$(1) \qquad x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3) = 0$$

La determ. della inters. colla retta $u_1x_1 + \ldots = 0$ conduce all'eq.

$$(2) \qquad u_1^2x_1^4 - 2u_1(-u_1+u_2+u_3)x_1^3x_2 + \{(u_1+u_2+u_3)^2 - 6u_1u_2\}x_1^2x_2^2 - 2u_2(u_1-u_2+u_3)x_1x_2^3 + u_2^2x_2^4 = 0$$

Annullando l'inv. di 2° grado di questa forma biq. si ha ~~il luogo~~ l'inv. $P = 0$

$$P \equiv (u_1+u_2+u_3)\left((u_1+u_2+u_3)^3 - 24u_1u_2u_3\right) = 0$$

comp. del fascio di rette pel p. un. e di un'altra C^4 inv. tricusp. La C^3 duale di questa, rappres. – e opp. equianarm., potendosi la sua eq. scrivere

$$(-u_1+u_2+u_3)^3 + (u_1-u_2+u_3)^3 + (u_1+u_2-u_3)^3 = 0$$

Annull. invece l'inv. cubico della forma (2) si ha l'eq. che si riduce alla forma

$$Q \equiv (u_1+u_2+u_3)^6 - 36(u_1+u_2+u_3)u_1u_2u_3 + 216u_1^2u_2^2u_3^2 = 0$$

Curva comp. delle due

$$(3) \qquad (u_1+u_2+u_3)^3 = (18 \pm 6\sqrt{5})u_1u_2u_3$$

Se la $(\;)^3 - kk\, u_1u_2u_3 = 0$ si ha l'identità

$$P^3 - Q^2 \equiv 1728\{(u_1+u_2+u_3)^3 - 27u_1u_2u_3\}u_1^3u_2^3u_3^3$$

forme $= 0$ rappres. –

Gli invol. delle rette che segano la C^4 proj. in quad. π forma una I_4 nella sch. Σ i cui 6 elem. doppi sono dati dalle C triple $\left((u_1+\ldots)^3 - 24u_1u_2u_3\right)^3 = 0$ e $u_1^3u_2^3u_3^3 = 0$ che ne assorbono 2 p. ciascuna, e dalle due $C(3)$

$$-\left(\frac{1}{6}\Sigma^2 - u_1u_2\right)\left(\frac{7}{36}\Sigma^4 - \frac{1}{3}\Sigma^2u_1u_2 + u_1^2\cancel{u_2^2} - \cancel{u_1^2u_2^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\Sigma^2 - u_1u_2\right)\left\{u_3^2 - (u_1-u_2)^2\right\} u_1u_2$$

$$-\frac{1}{\cancel{4}}u_1^2u_2^2\left\{(-u_1+u_2+u_3)^2 + (u_1-u_2+u_3)^2\right\}$$

$$2(u_1^2+u_2^2+u_3^2-2u_1u_2)$$

$$\frac{1}{12}$$

$$-\frac{1}{216}\Sigma^6 + \frac{1}{36}\Sigma^3u_1u_2(u_1+u_2+u_3) + \frac{1}{18}\Sigma^3u_1u_2(u_1+u_2+u_3) - \frac{1}{3}\cancel{\Sigma^2}u_1^2u_2^2 - \frac{1}{12}\Sigma^2u_1u_2 + 4u_3u_3 -$$

$$+\frac{1}{12}\Sigma^2u_1u_2\left(u_3^2 - [u_1-u_2]^2\right) - \frac{1}{2}u_1^2u_2^2\cancel{\left(u_3^2-(u_1-u_2)^2\right)} - \frac{1}{2}\cancel{u_1^2u_2^2\left(u_1^2+u_2^2+u_3^2 - 2u_1u_2\right)}$$

$$-u_1^2u_2^2u_3^2$$

$$+\frac{1}{12}\Sigma^2u_1u_2(u_1+u_2+u_3)(u_3-u_1-u_2)$$

$$-\frac{1}{216}\Sigma^6 + \frac{1}{12}\Sigma^3u_1u_2(u_1+u_2+u_3) + \frac{1}{12}\Sigma^3u_1u_2(u_3-u_1-u_2) - u_1^2u_2^2u_3^2$$

$$\frac{1}{216}\Sigma^6 - \frac{1}{6}\Sigma^3u_1u_2u_3 + u_1^2u_2^2u_3^2$$

$$\Sigma^6 - 36\Sigma^3u_1u_2u_3 + 216\,u_1^2u_2^2u_3^2 \qquad \Sigma^3 = (18 \pm 6\sqrt{3})u_1u_2u_3$$

$$\Sigma^3 - 54u_1u_2u_3$$

$$\Sigma^4 - 24\Sigma u_1u_2u_3 = 0$$

eq $\Sigma^{12} - 72\Sigma^9u_1u_2u_3 + 1728\Sigma^6(u_1u_2u_3)^2 - 24^3\Sigma^3(\ \ )^3 = 0$

$\cancel{\Sigma^6(\ \ )^2 - 54\Sigma^3(\ \ )^3 + 729(\ \ )^4}$

aux cnt $\Sigma^3(\ \ )^3 - 27(\ \ )^4 \qquad - \cancel{54} - 8.216 = 1728$

aux $\Sigma^{12} - 72\Sigma^9u_1u_2u_3 + \begin{matrix}1296\\432\end{matrix} \qquad \cancel{-}72.216\,\Sigma^3(\ \ )^3 + 216^2(\ \ )^4$

$$\begin{array}{r} -13824 \\ -1728 \\ \hline 15552 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 46225 \\ 431 \\ \hline 46656 \end{array}$$

$:27 = 1728$

576.24

$$\begin{array}{r} 13824 \\ 3456 \\ \hline 9368 \end{array} \quad 15552$$

Inviluppo delle rette che segano una C^4 piana secondo quaderne proiettive.

Una retta generica appartiene a una di queste quaderne. - Sono dunque inviluppi formanti una schiera, in generale di classe 12, come l'inviluppo delle tangenti.

elem. basi $12^2 = 144$ - le 24 tg di flesso, che contano come 6 ciascuna (dualmente, ~~...~~ 24 cuspidi con tg comune)

Quand'è che questi inviluppi sono riducibili (ossia tale è l'inviluppo generico)?

Come inviluppi di una schiera, non possono tutti spezzarsi che:

1) se hanno una parte fissa comune - oppure

2) se sono tutti composti di due o più parti, di una stessa schiera, di classe inferiore (6, 4, 3, 2).

1) Un'eventuale parte fissa deve essere costituita da rette incontranti la C^4 secondo quaderne di birapporto indeterminato, perciò con 3 intersezioni coincidenti - Unico caso possibile, C^4 con p. triplo, inviluppi residui di classe 6.

elem. basi della schiera residua - le $24 - 3 \cdot 6 = 6$ tg di flesso della C^4 $6 \cdot 6 = 36 = 6^2$

2) Le rette basi della schiera di classe inferiore devono ~~...~~ di nuovo incontrare la C^4 in quaderne di birapp. indeterm., dunque con 3 intersez. coincidenti - dunque tg di flesso, o tg in p. doppi - anzi ~~per~~ almeno qualche p. d., se l'inv. delle tg C^4 deve essere riducibile. E poichè l'invil. delle tg si spezza nell'inv. vero, irrid., e nei fasci aventi centri nei p. d., multipli, occorre che dai p. d. non si possano condurre ulteriori tg alla C^4, dunque 3 cuspidi - E si deve trattare di inviluppi irrid. aventi a comune coll'inv. delle tg alla C^4 le sole 3 tg cuspidali.

el. basi, le sole 3 tg nelle cuspidi - che contano solo per 3 unità ciascuna (dualmente, C^3 con 3 flessi comuni e tg) - impossibile di classe < 3, e 9 elem. comuni possono aversi solo come sopra.

Dualmente, luoghi dei punti da cui si conducono a una C^3 raz. (p. d. ord.) quaderne di tg π: e sono le C^3 aventi a comune con questa ~~le~~ ~~C~~ i 3 flessi e le relative tg (fascio non sizigetico)

$$\mu X_1 x_2 X_3 + \lambda S^3 = 0 \qquad S \equiv x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{matrix} 6\lambda S & \mu x_3 + 6\lambda S & \mu x_2 + 6\lambda S \\ \mu x_3 + 6\lambda S & 6\lambda S & \mu x_1 + 6\lambda S \\ \mu x_2 + 6\lambda S & \mu x_1 + 6\lambda S & 6\lambda S \end{matrix}$$

$$216\lambda^3 S^3 + 2(\mu x_1 + 6\lambda S)(\mu x_2 + 6\lambda S)(\mu x_3 + 6\lambda S) - 6\lambda S\{(\mu x_1 + 6\lambda S)^2 + (\mu x_2 + \dots)^2 + (\mu x_3 + \dots)^2\} = 0$$

$$\cancel{216\lambda^3 S^3} + 2\mu^3 x_1 x_2 x_3 + 2 \cdot S \cdot \cancel{36}\lambda^2 S^2 + 12\lambda S(x_2 x_3 + \dots) + \cancel{2 \cdot 216\lambda^3 S^3}$$
$$- 6\lambda S(x_1^2 + \dots) - 36\lambda^2 \cancel{S^2} \cdot 2S - 3 \cdot \cancel{216\lambda^3} S^3 = 0$$

$$2\mu^3 x_1 x_2 x_3 + 6\lambda S \begin{vmatrix} 1 & x_3 & x_2 \\ 1 & 0 & x_1 \\ 1 & x_1 & 0 \end{vmatrix} \dots$$

$$x_1 x_3 + x_1 x_2 - x_1^2$$

Hessiana

$$\cancel{2}\mu^3 x_1 x_2 x_3 - \cancel{3}\mu^2\lambda S(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3 - 2x_1 x_3) = 0$$

$$\left(\tfrac{1}{2}S^2 - (x_1 - \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3)(x_1 + \varepsilon^2 x_2 - \varepsilon x_3)\right)$$

$$x_2 x_3 + 3\lambda S^2 = x_3 x_1 + 3\lambda S^2 = x_1 x_2 + 3\lambda S^2 = 0$$

p. doppio $(1.1.1)$ $\lambda = -\frac{1}{27}$

$$x_2 x_3 - 6\lambda S(x_1 - x_2 - x_3) - 3\lambda(x_1^2 + \dots - 2x_1 x_2 - \dots) = 0$$

$$x_1 x_2 x_3 + \lambda(x_2^3 + x_3^3) = 0$$

$$\begin{matrix} 0 & x_3 & x_1 \\ x_3 & 6x_2\lambda & x_1 \\ x_2 & x_1 & 6x_3\lambda \end{matrix}$$

$$x_1 x_2 x_3 - 3\lambda(x_2^2 + x_3^2) = 0$$

piani $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = x_2 + \varepsilon x_3 = 0 \\ x_1 = x_2 + \varepsilon^2 x_3 = 0 \end{cases}$

$$\lambda = -\frac{1}{3} \qquad x_1^3 + \dots - \overset{3+3+12}{18}\lambda x_2 x_3 - 4x_1^2 x_2 \dots + x_1 x_2 x_3 = 0$$

$$27 x_1 x_2 x_3 - \tfrac{1}{2}S^3 \pm kS^3 = 0$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \text{ non sill.} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & \end{matrix}$$

Kohn-Loria C^4 n. 56, p. 524 $P^3 - 3Q^2 = 0$ inv. $4^a = 6^a$ classe, equi.. arm

$P = 0$, $Q = 0$, 24 tg flesso comuni, $Q = 0$ p. cont. nel flesso

$\times$ $x_1 x_2 x_3 - \frac{1}{27} S^3 = 0$ p.d. (1.1.1)

(0.1.-1)

$\dagger$ rete delle C^2 polari $a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 - \frac{a_1+a_2+a_3}{9} S^2 = 0$

$x_1(x_2 - x_1) = 0$

punti di $x_1 = 0$, $x_1(a_2 x_3 + a_3 x_2) - \frac{a_1+a_2+a_3}{9} S^2 = 0$

presumibile $a_1 = a_2 = a_3$ $x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 - \frac{1}{3} S^2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2 x_3 - x_3 x_1 - x_1 x_2 = 0$

(è la coppia delle tg nel nodo!)

$x_1 = 0$ $\begin{cases} x_2 x_3 - \frac{1}{3}(x_2 + x_3)^2 = 0 \\ x_2^2 + x_3^2 - x_2 x_3 = 0 \end{cases}$

quaderna di rette che dal punto (1.1.1) vanno le ulteriori intersez delle 2 curve

$a_1 x_2 x_3 + x_2^3 + x_3^2 + \cancel{\lambda x_1^3} = 0$

flessi $\begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 & \varepsilon^2 \end{matrix}$ con $\varepsilon^3 = -1$

$\cancel{a_1(x_2 x_3 + 3x_2^2) + a_2 (x}$

$a_1 x_2 x_3 + a_2(x_1 x_3 + 3x_2^2) + a_3(x_1 x_2 + 3x_3^2) = 0$

$x_1 = -\frac{x_2^3 + x_3^3}{x_2 x_3}$ $a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2(-x_3(x_2^3 + x_3^3) + 3x_2^3 x_3^2) + a_3(-x_2(x_2^3 + x_3^3) + 3x_2 x_3^3) = 0$

$-a_2 x_3^4 + 2a_3 x_3^3 x_2 + a_1 x_3^2 x_2^2 + 2a_2 x_3 x_2^3 - a_3 x_2^4 = 0$

$-x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$

$a_2 a_3$

$a_2 \quad a_3 \quad a_1$

$a_3 \quad a_1 \quad a_2$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3$

~~$x^4 + 2k.1$~~

$x^4 - 2kx^3 - 2x + k = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &\varepsilon x_1 + 3x_2 + 3\varepsilon^2 x_3 = 0 \\ &\varepsilon x_1 + 3\varepsilon^2 x_2 + 3x_3 = 0 \\ &x_1 = -\frac{3}{\varepsilon} x_2 - 3\varepsilon x_3 \\ &x_1 = -3\varepsilon x_2 - \frac{3}{\varepsilon} x_3 \end{aligned}}$$

$\cancel{a_2^3 \quad a_3 a_1 \quad a_2}$

$x_1 x_2 x_3 + x_2^3 + x_3^2 = 0$

$x_2 x_3 - k x_1^2 = 0$

$x_1 = 3x_2 + 3x_3$

$a_1 a_2 a_3 - a_1^3 - a_2^3 - a_3^3$

$x_1 \quad \varepsilon x_2 \quad \varepsilon^2 x_3$

$a_1 a_2 a_3 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) - \frac{1}{216} a_1^3 + \frac{1}{4}(a_2^3 + a_3^3)$

$-a_2 \quad \frac{1}{2} a_3 \quad \frac{1}{6} a_1$

$\frac{1}{2} a_3 \quad \frac{1}{6} a_1 \quad \frac{1}{2} a_2$

$A_0 A_4 - 4 A_1 A_3 + 3 A_2^2$

$\varepsilon = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$

$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{1 + \sqrt{-3}} = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$

$\frac{1}{6} a_1 \quad \frac{1}{2} a_2 \quad -a_3$

$\varepsilon^2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $-\varepsilon = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$

$$x_1x_2x_3 + x_2^3 + x_3^3 + \lambda x_1^3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6\lambda x_1 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 6x_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 6x_3 \end{vmatrix} = (2(6\lambda+2)x_1x_2x_3 - 6\lambda x_1^3 - 6x_2^3 - 6x_3^2 = 0$$

$$(x_1x_2x_3 - 3x_2^3 - 3x_3^3) + \lambda(108x_1x_2x_3 - 3x_1^3) = 0$$

$$x^4 - 2x^3 - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\cancel{x}(x + \frac{1}{x}) = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = y \qquad y^2 - 2 - 2y = 0$$

$$y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \qquad y^2 - 2y - 2 = 0$$

$$y = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$x + \frac{1}{x} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$x^2 - (1 \pm \sqrt{3})x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{3} \pm \sqrt{5 \pm 2\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{-1+\varepsilon}{\varepsilon^2} = \varepsilon - \varepsilon^2 = 1$$

$$(\varepsilon x_1 + 3x_2 + 3\varepsilon^2 x_3)(\varepsilon x_1 + 3\varepsilon^2 x_2 + 3x_3)$$

$$x_1^2 + 3\cancel{x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_3}$$

$$(x_1 + \frac{3}{\varepsilon}x_2 + 3\varepsilon x_3)(x_1 + 3\varepsilon x_2 + \frac{3}{\varepsilon}x_3)$$

$$x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_3 - 9x_2x_3 = 0$$

$$(x_1 - 3x_2 - 3x_3)$$

$$\begin{cases} x_1^3 - \frac{9}{2}x_2^3 - \frac{9}{2}x_3^2 - 27x_1x_2x_3 = 0 \\ x_1x_2x_3 + x_2^3 + x_3^3 - \frac{1}{27}x_1^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 9 & -9/2 \\ 3/2 & -9/2 & 9 \end{vmatrix} = 81 - \frac{81}{4} - \frac{81}{4} - \frac{81}{2} = 0$$

$$x_1x_2x_3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$$

C^2 polare di $(0, 1, \varepsilon)$ con $\varepsilon^3 = 1$

$$x_1x_3 + 3x_2^2 + \varepsilon(x_1x_2 + 3x_3^2) = 0$$

$$x_1(x_3 + \varepsilon x_2) + 3(x_2^2 + \varepsilon x_3^2) = 0$$

$$x_1x_2x_3 - \frac{1}{27}S^3 = 0$$

$(0, 1, -1$ è flesso$)$

$$(x_1x_3 - \frac{1}{9}S^2) - (x_1x_2 - \frac{1}{9}S^2) = 0$$

$$x_1(x_3 - x_2) = 0$$

$$x_2 = x_3 \qquad x_1x_2^2 + 2x_2^3 = 0$$

$$\left(x_1x_2x_3 + x_2^3 + x_3^3 - \frac{1}{27}x_1^3\right)(x_1x_2x_3 + x_2^3 + x_3^3) + \frac{1}{54^2}x_1^6 = \left(x_1x_2x_3 + x_2^3 + x_3^3 - \frac{1}{54}x_1^3\right)^2$$

C^3 con doppia $- \frac{1}{54^2}x_1^6$ = infiniamo delle due C^3

$$x_1x_2x_3\left(x_1x_2x_3 - \frac{1}{27}S^3\right) + \frac{1}{54^2}S^6$$

$$= \left(x_1x_2x_3 - \frac{1}{54}S^3\right)^2$$

Il fascio sizigetico $x_1^3+x_2^3+x_3^3+6\lambda x_1x_2x_3=0$ ha le Hessiane

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-\frac{1+2\lambda^3}{\lambda^2}x_1x_2x_3=0$$

Una terna di rette deve coincidere colla propria Hessiana, onde

$$6\lambda=-\frac{1+2\lambda^3}{\lambda^2}\ ,\quad 8\lambda^3+1=0\qquad \lambda=\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$$

In più, essendovi 4 terne, $\lambda=\infty$.

Per $\lambda=\infty$ si ha la terna $x_1x_2x_3=0$, Hessiana di sé stessa e della $\lambda=0$ che conta doppia, equianarmonica.

Per $\lambda=-\frac{1}{2}$ si ha la $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=0$, che può scriversi

$$(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)=0$$

o anche

$$(x_1+x_2+x_3)(x_1-\varepsilon x_2+\varepsilon^2x_3)(x_1+\varepsilon^2x_2-\varepsilon x_3)=0\ *$$

Tale C^3 è Hessiana della 3 per cui $-3=-\frac{1+2\lambda^3}{\lambda^2}$, ossia $2\lambda^3-3\lambda^2+1=0$

ossia $(\lambda^2-2\lambda+1)(2\lambda+1)=0$: radice ~~doppia~~ semplice $\lambda=-\frac{1}{2}$ e doppia $\lambda=1$, che conduce alla cubica

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+6x_1x_2x_3=0$$

equianarmonica, e che può scriversi

$$(x_1+x_2+x_3)^3+(x_1-\varepsilon x_2+\varepsilon^2x_3)^3+(x_1+\varepsilon^2x_2-\varepsilon x_3)=0$$

I nove flessi sono

0	1	−1	0	1	ε	0	ε	1	
−1	0	1	ε	0	1	1	0	ε	le 3 terne contenute risp. nella 1ª 3ª 2ª retta
1	−1	0	1	ε	0	ε	1	0	

* posto $\varepsilon=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$, segue $\varepsilon^2=\frac{1-3\pm2\sqrt{-3}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, $-\varepsilon+\varepsilon^2=-1$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=0$ hapen H ... ~~$k\neq 0$~~

$(x_1+x_2+\varepsilon x_3)^3+(x_1+\varepsilon x_2+x_3)^3+(\varepsilon x_1+x_2+x_3)^3=0$

$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & 0 \end{vmatrix}$

cubic coeff 1

$\varepsilon x_2+\varepsilon x_3-\varepsilon^2 x_1=0$

$-\varepsilon x_1+x_2+x_3=0$

$(x_1+x_2+x_3)^3+(-\varepsilon x_1+x_2+x_3)^3+(-\varepsilon^2 x_1+x_2+x_3)^3=0$

cubic 3

$x_1x_2x_3 \quad 6(1-\varepsilon-\varepsilon^2$

1 1 0
-1 1 0
-1 1 1

$x_1x_2x_3$
1 0 ε
1 ε^2 0

$3\varepsilon x_2+\varepsilon^2 x_3-x_1$

$(x_1+x_2+x_3)^3+\cancel{(x_1+\varepsilon x_2+\varepsilon^2 x_3)}+\cancel{(x_1+\varepsilon^2 x_2+\varepsilon x_3)}$

$\cancel{(x_1+\varepsilon^2 x_2+\varepsilon x_3)^3}$

$(x_1+\varepsilon x_2+\varepsilon^2 x_3)^3+\cancel{(x_1+\varepsilon^2 x_2-\varepsilon x_3)}$

$(x_1+\varepsilon^2 x_2-\varepsilon x_3)^3$

cubic 1 | 1

$x_1x_2x_3$ | -3

0 1 ε
1 0 ε 1
1 0 ε
ε 0 1
1 ε 0
ε 1 0

$a+b+c \Rightarrow a-b+c=a+b-c$

2 -1 -1
-1 2 -1
-1 -1 2

$(x_1^2+x_2^2+x_3^2-(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3))(x_1+x_2+x_3)$

$x_1x_2x_3$
0 1 ε
1 0 ε

0 1 ε
1 0 ε
1 ε 0

$x_1^3+\dots-2x_1x_2x_3$

$\varepsilon=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$

0 1 ε
ε 0 1
ε 1 0

$\varepsilon x_1+\varepsilon x_2-x_3$

$\varepsilon^2=\frac{1+(-3)+2\sqrt{-3}}{4}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$

$x_1x_2x_3$
0 1 ε
ε 0 1

$x_1x_2x_3$
ε 0 1
1 ε 0

1

$\lambda=-\frac{1}{2} \quad 3=\frac{(\lambda+2)^3}{2\lambda}$ $\quad 2\lambda^3-3\lambda^2+1=0$

$x_2^2x_3 \quad \varepsilon^4\sim\varepsilon^5=-\varepsilon+\varepsilon^2$

2 -3 0 1
$\frac{1}{2}$ 1 -1
2 -2 -1

$x_1+\varepsilon^2 x_2-\varepsilon x_3 \quad x_2+\varepsilon^2 x_3-\varepsilon x_1$

$-\varepsilon+\varepsilon^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=-1$

$\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{1-3+2\sqrt{-3}}{4}$

$2\lambda^2-2\lambda-1=0 \quad \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$x_1+\varepsilon^3 x_2-\varepsilon x_3$

$\varepsilon^3=-1$

ε has been coming $-\varepsilon^3$

Fascio di C^3 aventi a comune 3 flessi e le relative tg

$$x_1x_2x_3 + \lambda S^3 = 0$$ [$S \equiv x_1 + x_2 + x_3$ - le 3 tg di flesso sono le 3 rette fond.; i flessi sono (0.1.-1) e analoghi)

la Hessiana è

$$x_1x_2x_3 - 3\lambda S\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3\right) = 0$$

formano anche un fascio, avente i p. basi (0.1.-1)... allineati, e i tre (0.1.1) ... colle relative tg.

Per $\lambda = -\frac{1}{24}$ la prima C^3 è $(1+2-3)^3 + (1-2+3)^3 + (-1+2+3)^3 = 0$

equianarm. e ha per Hessiana la terna di rette

$$(1+2-3)(1-2+3)(-1+2+3) = 0$$

che è l'unica terna di rette nel fascio delle Hessiane - (Cioè oltre la $x_1x_2x_3 = 0$)

nel primo fascio, una sola C^3 equianarm.

Per $\lambda = -\frac{1}{27}$, C^3 con nodo (1.1.1)

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\lambda x_1x_2x_3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6x_1 & -3x_3 & -3x_2 \\ -3x_3 & 6x_2 & -3x_1 \\ -3x_2 & -3x_1 & 6x_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 & \varepsilon^2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6x_1 & \lambda x_3 & \lambda x_2 \\ \lambda x_3 & 6x_2 & \lambda x_1 \\ \lambda x_2 & \lambda x_1 & 6x_3 \end{vmatrix} = x_1x_2x_3 + 2\lambda^3 x_1x_2x_3 - \lambda^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 0$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - \frac{1+2\lambda^3}{\lambda^2}x_1x_2x_3 = 0$$

$$\frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = -3$$

$$6\lambda_0 = -\frac{1+2\lambda^3}{\lambda^2} \quad ; \text{per } \lambda = 0,\ x_1x_2x_3 = 0$$

λ_0 Hess $\quad 2\lambda^3 + 6\lambda_0\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = 0 \qquad 6\lambda_0 = 1$

radici $\lambda_0 = \frac{1}{6}$, e due ∞

$\lambda_0 = \infty$, $\lambda^2 = 0$

equian. doppio è $x_1x_2x_3 = 0$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1x_2x_3 = 0$$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1$

$2\lambda + 1$

~~$(x_1 + x_2 + x_3)^3 + (x_1$~~

$$(\varepsilon x_1 + x_2 + x_3)^3 + (x_1 + \varepsilon x_2 + x_3)^3 + (x_1 + x_2 + \varepsilon x_3)^3 = 0$$

$$\lambda_0 = \lambda, \quad 8\lambda^3 + 1 = 0 \quad \cancel{\lambda = \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}} \quad \lambda = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$$

~~$x_1x_2x_3 + 6\lambda S^3 = 0$~~

$\alpha = 18 + 6\sqrt{3}$

$$\frac{-512}{(4-\frac{\alpha}{3})^3} + \frac{384}{(4-\frac{\alpha}{3})^2} - 24 + 8 = 0$$

$$16 + 12\left(4-\frac{\alpha}{3}\right) + \left(4-\frac{\alpha}{3}\right)^3 = 0$$

$$16 + 12(-2-2\sqrt{3}) + (-8 - 24\sqrt{3} - 24 \cdot 3 - 24\sqrt{3}) = 0$$

$\cancel{-32 + 24(}$ $$-32 - 48(1+\sqrt{3}) + 8(1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3})$$

$$32 - 24\left(4-\frac{\alpha}{3}\right) + \left(4-\frac{\alpha}{3}\right)^3 = 0$$

$$z^3 - 24z + 32 = 0 \qquad z = -2(1 \pm \sqrt{3})$$

$$-8(1 \pm 3\sqrt{3} + 9 \pm 3\sqrt{3}) + 48(1 \pm \sqrt{3}) + 32 = 0$$

$$4, \; -2(1 \pm \sqrt{3})$$

rette di S_3 secanti una F^4 in quaderne di dato birapporto. Complessi di grado 12, in particolare $P=0$, $Q=0$ di gradi 4, 6

Casi in cui il complesso generico è riducibile. È certo necessario che così avvenga per l'inviluppo relativo alla C^4 sez. piana – eccezionalmente – quindi F^4 autoduale.

R^4 con retta tripla – Compl. lin. speciale parte fisso, da contarsi 6 volte?

S^4 delle tang. a C^3 sghemba – Il compl. $P=0$ si spezza in un compl. lineare (quello della C^3) e uno cubico. – Il complesso delle tang. alla S^4 si spezza in quello cubico delle tang. vere e proprie (∞^1 piani rigati) e nel compl. delle rette appog. alla C^3, contato 3 volte

Sulla Q_4 di S_5 delle rette si ha un fascio di M^6, nel quale è compresa una sez. piano tripla tripla

due M^6_3 di ∞^3 di piani di sist. opposti con sez. iperpiana comune – S^6 svil. da C^4 (S^6 base del fascio) – ciascuna delle M^6 di piani ha una F^4 di Ver. doppia nelle C^6

Bulletin of the Amer. Mathem. Society

Transactions id

Journal of the London Mathem. Society

Proceedings id

American Journal of Mathematics

Mathem. Review

Trattandosi di due R^4 autoduali, vi sono ~~due~~ fasci di complessi; delle rette che segano G_4 in dato birapp., e delle rette da cui le 4 incid. sono π_4 secondo quaderne id

~~due~~ unico fascio di M^6 contenente Q^3 – 2 fasci di M^{24} composti col precedente; in ciascuno una M^6 di piani + l'altro triplo. In ciascuno Q^3 + certa M^6 tripla.

Aperçu général sur les surfaces du 3ème ordre.

Les surfaces du 3ème ordre sont ~~celles que l'on peut~~ d'après leur nom ainsi représentées par une équation du 3ème degré entre les coordonnées cart. $x\,y\,z$ d'un point $f(x\,y\,z)=0$; en coord. homogènes ou bien tétraédriques ~~$f_0 + f_1 + f_2 + f_3 = 0$~~ homogènes, par une éq. homogène du 3ème degré $f(x_1\,x_2\,x_3\,x_4)=0$ le premier membre étant pourtant...

Les propriétés gén. des surfaces alg. d'un ~~degré~~ ordre quelconque n sont naturellement applicables aussi aux surf. du 3ème ~~degré~~ ordre. Mais ~~celles-ci~~ ces ~~dernières~~ surfaces jouissent aussi de beaucoup de propriétés ~~tout à fait~~ particulières ~~intéressantes~~, et c'est notamment ~~d'elles~~ de ~~ces propr. part.~~ celles-ci que j'entends parler. {C'est un sujet assez élémentaire mais pas tout-à-fait élém., et en même temps précisément intéressant} En 1895, lors des premiers pourparlers pour l'Enc. d. math. Wiss, Franz Meyer, rédacteur des vol. de géom., a distribué comme article d'essai = Probeartikel = justement ~~sur~~ ce qu'il pensait que l'on ~~pouvait~~ devait dire sur les surfaces du 3ème ordre; mais ces 18-20 pages sont devenues 90 dans la rédaction définitive.

~~Cela montre l'importance et l'intérêt du sujet~~

La théorie des surf du 3ème ordre remonte à peu près à la moitié du XIXème siècle. beaucoup de propr. sont dues aux trois [illegible] même à leur colla- [illegible] ~~ou aux~~ [illegible] Steiner; les surfaces réglées du 3ème ordre ont été étudiées aussi par Cremona [illegible] Steiner [illegible] ~~lassigues~~, Sturm pour une moitié [illegible] Cremona et de R. Sturm (H. [illegible] 68, Oeuvres III. aussi en allemand, [illegible] la théorie de surf du 3e ordre se trouva être définit. établie dans ses lignes gén. [illegible] : Cremona – Salmon – Reye Encykl. Fr. Meyer [illegible]

[illegible] ~~théorie~~ géométrie des surf. alg., ~~et en part.~~ ~~en particulier~~ ~~aussi~~ pour ~~des~~ ~~s~~ ceproposrenseignements [illegible], il est nécessaire de consid. aussi les élém. imag. Et il y [illegible] deux sortes de ~~propr.~~ propriétés que [illegible] se rapportent à des points, à des droites [illegible], à des coordonnées ou syst de coord [illegible] réelles ou imaginaires. Lorsque je [illegible] surf. d'ordre n ~~[illegible]~~ [illegible] rencontrée par une droite en pos. gén. en n points, [illegible] théorème bien connu d'algèbre, dans lequel (même) les coefficients de l'équation peuvent être supposés imaginaires; Deuxièment, on peut parler de Realitätsfragen = questions de réalité = : alors on se rapporte à un syst. de coord. réel, à des équations à coeff. réels et ~~il faut~~ l'on fait distinction entre les élém. réels et imaginaires. Une surface représentée par une ég. à coeff. réels de degré n est rencontrée par une droite réelle en gén. en n points, réels ou bien imag. parmi lesquels ~~si un~~ ceux qui sont imag. sont 2 à 2 conjugués. ~~Pourtant si n est un nombre impair, p. ex. 3,~~ ~~un au moins~~ de ces points ~~est certainement réel~~. ~~Tandis que~~ Mais une surface ~~du 2^me~~ d'ordre pair ex. du 2^me ordre, ~~peut n'avoir~~ ~~aucun~~ même elle est représ. par une ég. à coeff. réels, peut n'avoir aucun point réel (ex. $x^2+y^2+z^2=-1$). Mais une surface réelle du 3ème ordre ~~est~~ toujours pourtant au moins ~~est~~ une nappe réelle, rencontrée par une droite réelle dans des points dont un au moins est réel, elle a en coord. réelles, elle est rencontrée par chaque plan réel, et aussi par le plan à l'infini dans une courbe avec au moins une branche réelle, et par conséquent elle s'étend toujours à l'infini (comme aussi un plan). Pourtant, même par des modèles, dont il y a les bonnes collections, il n'est pas facile de se procurer une idée de la forme de ces surfaces, d'autant plus qu'il y en a ~~Comme exemple je vais pouvoir considérer dans le plan x_2 la courbe~~

il n'y a aucun intérêt à les supposer réels ou bien sujets à des limitations.
Il y a même des questions que l'on ne saurait traiter sans se rapporter à des élém. ~~indiff.~~ réels ou imag. ~~et moins de se rapporter à des concept. points~~

si quelqu'un aimerait à avoir une idée de la forme que peut avoir une surf. ... je dois lui répondre que cela n'est pas facile ~~de se~~ ~~procu~~

23 espèces de Schläfli

$xyz=1$
(Enrico Civello)

2 p. doppi immag. coniug. B_3
$z=t=x\pm iy=0$
unica retta reale la loro cong. $z=t=0$.
$t=0$ tang. fisso lungo tale retta
$x\pm iy=0$ ulteriori piani tang.
segando le 3 rette $x\pm iy=z-a_i t=0$

$t=\lambda z$

$(x^2+y^2)\lambda z=(1-a_1\lambda)\ldots z^3$

$\begin{vmatrix} \delta & & \\ \lambda & & \\ -(\ )(\ )(\ ) & & \end{vmatrix}=0$

réel – 4 nappes, rattachées

volume constant – lignes de ...

... t-doubles 3 droites

$a_1<a_2<a_3$

$\ldots(z-a_2)(z-a_3)$ ayant l'axe z

... des 5 part. diverg. de New...

...tions ..... On conçoit très bien

la rotation de cette courbe autour

$\ldots = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)$

$\ldots)t = (z-a_1t)(z-a_2t)(z-a_3t)$

Parmi les questions concernant particulièrement les surfaces du 3ème ordre, il y en a 2 ~~fort~~ très intéressantes, et que l'on a rencontrées ~~a~~ tout d'abord dans cette théorie : celle des droites contenues dans la surface, et celle d'un certain pentaèdre, c.a.d d'une certaine figure de 5 plans, avec ses 10 arêtes et 10 sommets, liée à la surface. ~~Mais~~ Ce pentaèdre est lié tout particulièrement le nom de Sylvester. Ce soir je parlerai seulement de la première, et d'autres questions qui s'y ~~se~~ rattachent.

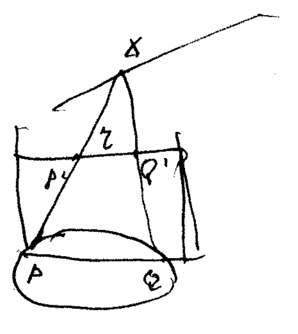
Une droite $x = mz + p$, $y = nz + q$ sera contenue entièrement dans la surface $f(x, y, z) = 0$ si, l'équation que l'on obtient en substituant à x, y les expressions indiquées, c.a.d pour une surface du 3ème ordre

$$A_0 z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3 = 0$$

est identiquement satisfaite, c.a.d. $A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 0$. Ce système de 4 équations entre les 4 inconnues m, n, p, q a toujours ~~une~~ des solutions (au fini, ou à l'infini) généralement en nombre fini. Pour compléter la dém. il faudrait encore quelques autres considérations, sur lesquelles je ne m'arrêterai pas ; ~~et pourtant toute surface~~ du 3ème ordre contient des droites, et en général un nombre fini de droites. Elle peut aussi contenir un nombre infini de droites, et elle est alors une surface réglée du 3ème ordre. Je vais dire avant tout deux mots sur ces surfaces réglées du 3ème ordre, en excluant toutefois les cônes que l'on obtient par projections des courbes planes du 3ème ordre) ; et ensuite je parlerai des surfaces n'ayant qu'un nombre fini des droites, et de la configuration de ces droites.

— droites sur la surf. de rotation.

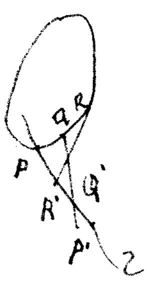
Supposons données une conique γ et une droite r, cette dernière n'étant pas contenue dans le plan de γ ; et une corresp. π homographique entre les deux. Comme 4 points de γ sont projetés de tout point de γ selon des groupes de 4 droites ayant le même rapport anharmonique, on peut appeler aussi ce même ~~ce~~ rapport le rapport anharm. des 4 points de γ ; et définir une corresp. π entre r et γ comme une corresp. dans laquelle des quaternes correspondantes ont toujours le même rapport anharm. Le lieu des droites joignant les points correspondants de r et γ est une surface réglée du 3ème ordre ; et ~~la~~ l'on peut démontrer que, inversement, toute surface réglée du 3ème ordre qui n'est pas un cône peut être engendrée par cette construction.



Chaque plan passant par une des génératrices coupe la surface encore selon une conique; et γ est seulement une quelconque de ces coniques, en sorte que chaque surface admet une infinité de générations de ce type. Un plan passant par r rencontrera γ en deux points P, Q (réels ou imag.); si P', Q' sont les points corresp. de r, ce plan contiendra les <u>deux</u> génératrices PP', QQ'; et l'intersection de celles-ci sera un <u>point double</u> de la surface. Notre surface a pourtant une infinité de points doubles, dont le lieu est une droite; une <u>droite double</u>, intersection de 2 différentes nappes.

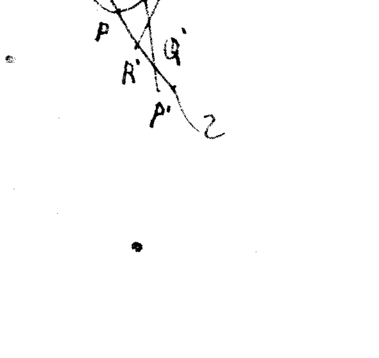
~~La droite r et la conique γ peuvent se rencontrer~~

J'ai ~~su~~ tacitement supposé que r et γ n'aient aucun point ~~en~~ commun. Si elles ont un point commun, et si celui-ci est un point double (p. uni) de la corresp. π, la surface engendrée est du 2nd ordre (en général, un hyperboloïde). Mais s'il n'est pas un point double, c.a.d. si ~~le~~ ce point comme point P de γ a comme point corresp. sur r un point $P' \neq P$, ~~la~~ r est en même temps ~~generatrice~~ directrice de la surface — comme elle rencontre toutes les génér. — et aussi génér. PP'; conséquemment elle-même droite double — chacun de ses points appartenant à 2 génér., l'une variable, l'autre PP' fixe.

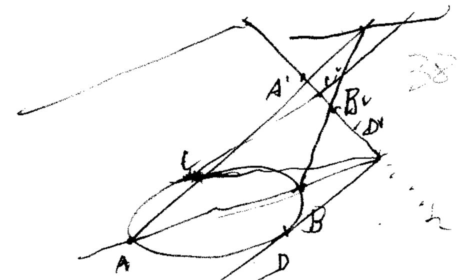


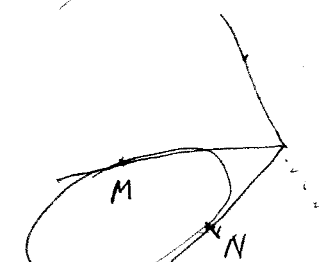
C'est un cas particulier ~~qu'a été considéré~~ qu'on nomme ordinairement surface de Cayley, ~~Charles l'avait déjà~~ ~~considérée~~ ~~le pre~~ ~~deux ans~~ ~~peut-être auparavant~~ C'est une surface assez importante; du point de vue de ses transf. homographiques elle a été aussi aussi fu dite.

Le cas général, où la droite r ne rencontre pas la conique donne lieu, au point de vue de la réalité, à 2 possibilités, entre lesquelles la surf. de Cayley est un cas, pour ainsi dire intermédiaire; c.a.d. le point où r rencontre le plan de γ peut être à l'intérieur ~~ou~~ bien à l'extérieur de γ. ~~Tandis que~~



Dans le premier ~~de ces~~ cas, tout plan réel passant par r rencontre γ en 2 ~~points~~ (différents) points, tous les deux réels, et contient par conséquent deux (aussi différentes) génér. réelles; c.a.d. chaque point réel de la directrice double d appartient à deux différentes génér., toutes les deux réelles. Mais si r rencontre le plan





de γ à l'extérieur de cette conique, il y aura des plans passant par r et rencontrant γ en 2 points réels, ou bien en 1 seul point, ou bien aussi en 2 p imag. Et les deux génér. contenues dans ces plans seront aussi ~~deux~~ réelles et différentes, ou bien elle coïncideront, ou elles seront imaginaires. La directrice double $\underline{d}$ contient alors un segment, fini ou infini, dont chaque point appartient à 2 génér. réelles; celles-ci coïncident aux extrémités de ce segment, et deviennent imag. au-delà: c.a.d. il y a un segment réel de $\underline{d}$ qui appartient à la surface, mais est seulement l'intersection de 2 nappes imag. conjuguées.

Dans ce dernier cas ~~Les~~ on peut représenter la surface par l'éq. (en coord. homogènes réelles)

$$x_1^2x_3 - x_2^2x_4 = 0$$

ou coord. simplement cartés.
$$x^2z = y^2$$
pour z nég., pas d'autres solutions réelles, que $x=0$ $y=0$

La droite double $\underline{d}$ est le $x_1=x_2=0$; la droite $\underline{r}$ est la $x_3=x_4=0$; les 2 génér. passant par un point $(0.\,0.\,x_3'.\,x_4')$ de $\underline{d}$ sont contenues dans le couple de plans $x_1^2x_3' - x_2^2x_4' = 0$, c.a.d. dans les 2 plans passant par d: $x_1\sqrt{x_3'} = \pm x_2\sqrt{x_4'}$, qui sont réels ou imag. selon que x_3' et x_4' ont ou n'ont pas le même signe – et coïncident lorsque l'une d'elles est zéro.

L'équation, aussi en coord. réelles

$$x_1x_2x_3 + x_4(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

$$x_4\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + x_3\frac{x_1}{x_2} - x_4 = 0$$

représente une surface réglée ~~qui a~~ ayant aussi la droite $x_1=x_2=0$ comme droite $\underline{d}$, et dont tous les points appartiennent à 2 génér. réelles (Comme éq. du 2nd degré par rapport à $\frac{x_1}{x_2}$ ~~elle a~~ les premier et les dernier termes ont 2 signes opposés, et les 2 racines sont par conséquent toujours réelles,

Enfin ~~l'éq. d~~ une surface réglée de Cayley peut toujours être représentée par l'éq.

$$x_1x_2x_4 + x_1^2x_3 + x_2^3 = 0$$

la droite double étant toujours $x_1 = x_2 = 0$. Elle est rencontrée par le plan $x_1=0$ en cette droite seulement, comptée 3 fois; c'est le plan joignant la droite $\underline{r}$ et la tang. à γ au point P.

Les couples de plans tangents aux différents points de la droite double $x_1=x_2=0$ forment une involution resp. hyperb, ellipt, parab.

Nous allons maintenant considérer une surface du 3ème ordre non réglée, et déterminer le nombre (fini) des droites qui y sont contenues.

D'après ce que j'ai déjà dit, la surface contient certainement une droite au moins. J'assumerai cette droite comme ~~axe~~ arête $x_3 = x_4 = 0$ du tetraèdre ~~fondam~~ des coordonnées, l'éq de la surface aura alors la forme $x_3 U + x_4 V = 0$, U, V étant des polynomes homogènes du 2ème degré; Un plan quelconque passant par cette droite sera représenté par un éq. $x_4 = \lambda x_3$; et ~~rencontrera~~ coupera encore la surface en une conique, que l'on peut ~~considérer~~ cor représentée par l'éq. que l'on obtient en substituant $x_4 = \lambda x_3$ dans l'éq. de la surface et en divisant celle-ci par x_3. ~~Si dans ce faisceau de coniques il y en a k composées de 2 droites, la surface contiendra 2k droites rencontrant la première $x_3 = x_4 = 0$~~ et A cet effet il faut considérer le (discrim) déterminant $|a_{ik}|$, dont les éléments contiennent le paramètre λ, et le déterminer son degré par rapport à λ. Le coefficient a_{33} de x_3^2, c.a.d. de x_3^3 avant la division par x_3, ~~sera contenu~~ proviendra de termes ~~provenant~~ de l'éq de la surface pouvant contenir x_4^3, et contiendra par conséquent en général λ^3. De même, les coeff a_{13}, a_{23} contiendront λ^2, les autres simplement λ; par conséquent le déterminant $|a_{ik}|$ sera du 5ème degré par rapport à λ, et dans le faisceau $x_3 = \lambda x_4$ il y aura 5 plans rencontrant encore la surface en ~~des~~ un couple de droites. Si nous considérons les 3 droites a, b, c contenues dans un de ces plans, il y aura encore 4 couples, c.a.d. 8 autres droites de la surface rencontrant a, et de même 8 rencontrant b, et 8 rencontrant c; le nombre total sera pourtant $3 + 8 \cdot 3 = 27$. Un examen un peu plus détaillé, que je ne m'arrêterai a faire ici, montre que ~~pour~~ sur une surface générale, plus exactement sur une surface n'ayant aucun point double ~~(comme les points de la droite d des surfaces réglées), c.a.d. sur, c.a.d. aucun point dont le p une surface dont chaque point aucun point tel que pour chaque droite ait un plan tangent non ambigu~~, bien défini, ces 27 droites sont toutes différentes (distinctes); ~~On peut construire des surf~~ et elles construisent l'intersect. complete de la surf donnée avec une surf 9 degré.

Eq. 27° grado

Casi di[?] predoppi — retto se contano più volte.

---

qui pourrait encore contenir x_3, x_4.

1 Nous allons indiquer cette éq par $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ $(i, k = 1, 2, 3)$ et nous allons voir combien de ces coniques se décomposent en 2 droites

Point de la surface comme origine, $f_1 + f_2 + f_3 = 0$
$f_1 = 0$ est l'éq. du plan tangent en ce point, lieu des droites passant par ce point
et dont 2 au moins des inters. avec la surface sont absorbées par ce points
point double = point tel que f_1 soit identiquement zéro; alors ~~chaque droite~~ pour chaque droite qui y passe
l'origine absorbe ~~deux~~ au moins ~~des~~ 2 au moins des intersections avec la surface

~~Parmi ces 27 droites, il on peut~~

On peut démontrer encore que, parmi ces 27 droites, il y a certains groupes de 6, dont 2 ~~quelconques~~ ne sont jamais ~~pas~~ dans un même plan; j'indiquerai par $a_1 a_2 \ldots a_6$ un de ces groupes. Il y a ~~alors~~ alors aussi 6 autres droites, toujours parmi les 27, dont chacune rencontre 5 des 6 droites $\underline{a}$, et non la sixième; j'indiquerai ces droites par $b_1 b_2 \ldots b_6$, $\underline{b_i}$ étant celle qui ne rencontre pas a_i. Ces 12 droites constituent une double sixaine (sixain) (Doppelsechs, bisestupla; il y en en tout 36 doubles-sixaines. Chaque plan $a_i b_k$ ($i \neq k$) contient une troisième ~~droite~~ des 27 droites, que j'indiquerai par c_{ik}, et qui appartient aussi au plan $a_k b_i$. Il y a pourtant 15 droites c_{ik}, ik étant une des combinaisons des nombres $1\ 2 \ldots 6$, à 2 à 2. Et par cela les 27 droites sont épuisées.

On peut vérifier que chacune des ces droites en rencontre 10 parmi les autres.

La droite a_i rencontre les 5 droites b_k ayant $k \neq i$ et les 5 droites $\underline{c}$ dont l'un des indices $= i$

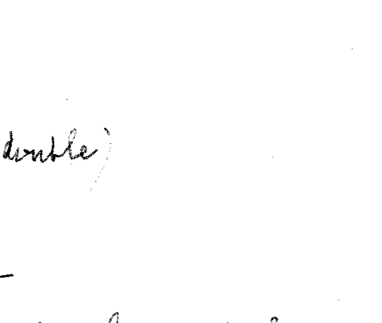
b_i ... a_k ayant $k \neq i$ et les 5 droites c ..

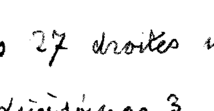
La droite c_{ik} rencontre a_i, a_k, b_i, b_k et les 6 droites $\underline{c}$ dont les indices sont tous les deux $\neq i, k$.

Chaque plan passant par une des 27 droites rencontre encore la surface en une conique, et est un plan bitangent de la surface (tg double) c.a.d. tangent en 2 points: les points où cette droite rencontre cette conique. Toutes ~~les~~ droites de ce plan passant par un de ces deux points ont ~~bien~~ deux de leurs intersections avec la surface coïncidentes – si d'un point quelconque de l'espace on mène le cône tangent à la surface les plans joignant ce point aux 27 droites sont aussi les plans tg de ce cône: leur nombre c.a.d. le nombre 27 des droites, avec [illegible]

Les plans rencontrant la surface en 3 droites sont des plans tritangents. Par chacune des 27 droites il en passe 5; leur nombre est pourtant 5×27 – mais divisé par 3, comme chaque plan résulte ainsi compté 3 fois – c.a.d. 45 plans tritangents – Pour quelqu'un de ces plans (10 au plus – sauf diag de Clebsch) il peut arriver que les 3 droites passent (A=0) par un même point (B=0)

Considérons maintenant un plan tritangent $l_1 m_1 n_1$, et ensuite un autre de ces plans ne passant par aucune des 3 droites nommées ~~de ces plans~~, et dont les 3 droites $l_2 m_2 n_2$ seront ~~soient~~ toutes différentes de $l_1 m_1 n_1$. Chacune de ces dernières droites rencontrera une, et une seulement, des premières; je suppose que l_2 rencontre l_1, ... Chacun des 3 plans (D, E, F) $l_1 l_2$, $m_1 m_2$, $n_1 n_2$ contiendra une troisième droite $l_3\ m_3\ n_3$; et l'on voit





~~tout~~ de suite que ces ~~et~~ trois droites sont aussi ~~dans~~ un même plan $C=0$.

Nous aurons ainsi deux trièdres, que l'on appelle trièdres conjugués (il y en a 120 couples), se rencontrant selon les 9 droites ~~[illegible]~~ considérées. Il déterminent un faisceau de surfaces du $3^{ème}$ ordre

$$(1) \qquad ABC + k\,DEF = 0$$

contenant ~~les~~ ces 9 droites. ~~Dans ce faisceau il y a certainement une~~ ~~sur~~ Prenons sur la surface donnée un point quelconque P n'appartenant à aucune de ces droites ; en déterminant k en sorte que la surface (1) passe par P, celle-ci rencontrera la surface donnée en 9 droites plus encore le point P. Cela suffit pour en déduire qu'elles coïncident, c.a.d. que la surface donnée peut être représentée par l'eq. (1), pour une certaine valeur de k. – c.a.d. encore, en comprenant le facteur k dans un des polynomes D, E, F, par l'éq.

$$(1') \qquad ABC + DEF = 0$$

que l'on peut écrire aussi

$$\begin{vmatrix} A & D & 0 \\ 0 & B & E \\ F & 0 & C \end{vmatrix} = 0$$

Maintenant nous allons transformer encore cette éq., en la multipliant par un autre déterm. du $3^{ème}$ ordre, ayant comme éléments des nombres tout-à-fait arbitraires, pourvu seulement que la valeur du dét. soit différente de zéro. Nous allons multiplier les 2 déterm. par lignes ~~horizontales~~ ; les éléments du produit seront encore des fonctions linéaires homog. des coord.

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

les éléments d'une même ligne $(A_1 B_1 C_1 ; \ldots)$ pouvant être supposés des fonctions linéaires indép., comme ils représentent 3 plans arbitraires passant par les 3 droites $A=D=0$, ... Et cette dernière éq. est le résultat de l'élimination des 3 paramètres homog. $\lambda\ \mu\ \nu$ entre les 3 éq.

$$(3) \qquad \begin{aligned} \lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1 &= 0 \\ \lambda A_2 + \mu B_2 + \nu C_2 &= 0 \\ \lambda A_3 + \mu B_3 + \nu C_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ces équations représ. 3 gerbes de plans, rapportées homographiquement ; la surface donnée est donc le lieu des points d'inters. des ~~ternes~~ groupes des 3 plans corresp. dans les 3 gerbes ; les centres des 3 gerbes sont des points quelconques de la surface.

Inversement, 3 gerbes de plans rapportées homographiquement peuvent toujours se représenter par les éq. (3) – 3 plans corresp. étant obtenus par les mêmes valeurs, ou des valeurs proportionnelles de λ, μ, ν – et elles engendrent la surface donnée (2). C'est une généralisation, une des différentes ~~possibles~~ ~~possibles~~ généralisations de la génération d'une conique par 2 faisceaux projectifs de droites.

C'est la génération des surfaces du 3ème ordre à laquelle on donne ordinairement le nom de Grassmann, et qui comprend ~~de nombreux~~ aussi d'autres ~~cas particuliers~~ très nombreux. Grassmann était un homme très intelligent et il appartenait à une famille qui avait porté toujours intérêt à beaucoup de questions, aussi de philologie, de théologie ; mais lui et sa [illegible] ont été peut-être méconnus pendant sa vie ; il est resté toujours au Gymnase de Stettin. ~~très nombreux~~. Il y a toutefois des surfaces très particulières auxquelles la génération de Grassmann n'est pas applicable : Corrado Segre a montré en 1903 que tel est le cas pour la surface

$$x^2 + y^3 + x\varphi_2(xyz) = 0$$

ayant l'origine comme point double uniplanaire, et l'axe z comme seule droite. Et il y aussi des ~~Et même lorsque cette génération est possible~~ surfaces réelles, qui admettent une génér. du type Grassmann, mais non une génération réelle (les surf. (pas C^3 réelles))

Dans la génération considérée, les paramètres $\lambda : \mu : \nu$ correspondent aux groupes de 3 plans homologues des 3 gerbes, c.à.d. aux points ~~de la~~ d'intersection de ces plans, c.à.d. aux points de la surface donnée ; ~~et peuvent aussi être~~ mais on peut aussi les interprétés comme des coordonnées π dans un plan π. Ce plan résulte alors rapporté ~~homo~~ ~~projectivement~~ homographiquement aux 3 gerbes de plans, et biunivoquement, birationnellement à la surface du 3ème ordre donnée. Pour représenter analytiquement cette dernière correspondance, il suffit de résoudre les 3 éq. (3) par rapport aux coordonnées x_i qui y sont contenues linéairement.

La surf. du 3ème ordre donnée est pourtant une surface rationnelle.

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

les φ étant des polynomes homogènes du 3ème degré en λ, μ, ν. Ces équations nous donnent les coord. d'un point (x) de la surface donnée en fonction des coord. $\lambda : \mu : \nu$ du point corresp. du plan π.

Aux courbes intersections de la surface (2) avec les plans $\Sigma\, a_i x_i = 0$ correspondent dans le plan π les courbes, aussi du 3ème ordre, $\Sigma\, a_i \varphi_i = 0$. Comme les premières n'ont à 2 à 2 que trois points communs, tandis que ces dernières en ont 9, il s'ensuite ~~de~~ que parmi ces 9 points il y en a toujours 6 ayant au moins 2 points correspondants différents, c.a.d. dont le correspondant est indéterminé - indét. sur une ligne de la surface ayant avec un plan un seul point ~~commun~~, c.a.d. sur une droite contenue dans la surface (1). Ce sont 6 droites que l'on peut assumer comme droites a_i de la configuration déjà considérée. Les courbes $\Sigma a_i \varphi_i = 0$ passent donc par 6 points déterminés A_i du plan π.

Cette représentation de la surface (2) sur le plan π est très utile pour étudier les courbes contenues dans la surface nommée, la recherche de ces courbes étant ainsi reconduite à celle des courbes planes correspondantes. L'ordre d'une courbe γ de la surface (2) ~~est le~~ c.a.d. le nombre de ses intersections avec un plan, sera aussi le nombre des intersections de la courbe plane correspondante ~~et~~ C avec les $\Sigma a_i \varphi_i = 0$, en dehors des points A_i - Aux 15 droites c_{ik} sur la surface correspondent dans le plan π le 15 droites $A_i A_k$; aux 6 droites b_i, les coniques ~~passant~~ menées par les points A, excepté le seul A_i.

Il est bien possible que

Maintenant une question de réalité. Les 27 droites d'une surface du 3ème ordre réelle ~~peuvent être~~ soient aussi toutes réelles, les 6 points fondamentaux A_i sont alors aussi tous réels. - Si ces points ne sont pas réels, il y en aura des couples - 1, 2 ou 3 couples - qui sont imaginaires conjugués.

Si 2 seulement des points A_i sont imaginaires, parmi les 27 droites il y en a 15 réelles, et 12 imaginaires, 2 à 2 conjuguées

Si parmi les points A_i deux couples sont imag.-conjugués, il y a 7 droites réelles et 10 couples de droites imag.-conj.

Si les points A_1 et A_2, A_3 et A_4, A_5 et A_6 sont à 2 à 2 imag.-conjugués, seulement les 3 droites c_{12} c_{34} c_{56} sont réelles; les autres, à couples, sont imaginaires

Mais une autre question surgit aussi: Une surface réelle du 3ème ordre étant donnée, est-ce que l'on pourra toujours la représenter par une équation (2) avec des A, B, C réels - et que l'on pourra par conséquent en donner une

représentation réelle, c.a.d. par des fonctions réelles, sur un plan réel ?
Cela n'est pas toujours possible. On voit tout-de-suite que cela ne peut être possible lorsque la surface comprend deux différents nappes réelles (comme p. ex. la surface de rotation ... qui a toutefois 2 points doubles imag-conjugués); évidemment, c'est impossible de donner une représentation réelle d'un ensemble de deux continus réels séparés, n'ayant aucun point réel commun, sur un même continuum unique. C'est une question de topologie; les deux surfaces ont une connexion différente.

Mais, en tout cas, sur une surface réelle du $3^{ème}$ ordre sans points doubles, trois au moins des 27 droites sont réelles.

IV Une surface du $3^{ème}$ ordre ~~ayant~~ a un point double, et ~~…~~ l'on prend ce point comme origine des coordonnées, l'éq. de la surface ~~devient~~.

$$f_2 + f_3 = 0$$

f_2 et f_3 étant des polynomes homogènes du $2^{ème}$ et $3^{ème}$ degré en $x\,y\,z$.
~~La surface est rapp~~ Comme une droite passant par O rencontre la surface en général ~~dan~~ en un seul point différent de O, la surface est rapportée biunivoquement à la gerbe de ces droites, et à un plan quelconque ne passant pas par O, que l'on peut considérer comme une section de cette gerbe.

L'éq. $f_2 = 0$ représente un cône du 2^{nd} degré avec O comme sommet, lieu des droites dont les 3 inters. avec la surface coincident toutes en O. C'est le cône tangent à la surface au point double O. Les droites $f_2 = f_3 = 0$, six en général, appartiennent à la surface.

Le point double O s'appelle point conique si ~~…~~ le cône $f_2 = 0$ n'est pas composé de 2 plans. ~~C~~ Si, au contraire, cela arrive, on l'appelle un point double biplanaire, ou bien uniplanaire. Pour la droite double d d'une surface réglée, tous les points sont biplanaires, ou uniplanaires.

Il y a aussi différentes sortes de points doubles bipl. ou unipl.; p. ex. pour ces plans tangents, qui rencontrent toujours la surface en 3 droites passant par le point double considéré, 2 de ces droites ou bien toutes les ~~…~~ 3 peuvent coincider. Une surface non réglée peut avoir aussi 2, 3, 4 p. doubles.

Schläfli (1863) a donné une classification complète des surfaces du 3ème ordre, ~~compris~~ en relation aux différents cas de points doubles. Il y a à distinguer 23 espèces de surfaces, y compris les 2 espèces de surfaces réglées. Au point de vue de la réalité, certaines de ces espèces donnent lieu à plusieurs sous-espèces,

Sur une courbe alg., les différentes g_n^1 contenues dans une même g_n^r ont des groupes Jacobiens appartenant à une même série $|a_j|$. Et $|a_j| - 2|a| =$ série canonique.
$g_n = |a|$

Sur une surface, soit $|C|$ un syst. lin. de courbes, que je suppose pour simplicité sans points base. Les différents réseaux = syst. lin. ∞^2 contenus dans $|C|$ ont des courbes jacobiennes, lieux des points doubles des courbes du réseau. — Dans le plan, si $\lambda_0 \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 = 0$ est le réseau, la courbe jacobienne a l'éq. Det. Jac. $= 0$ — Et ces courbes jacobiennes appartiennent aussi à un même syst. lin. complet $|C_j|$, covariant de $|C|$.

Évidemment, tous les syst. $\lambda|C| + \mu|C_j|$ ~~sont~~, s'ils existent, sont aussi covariants de $|C|$. Deux parmi ces syst. ont une importance particulière, et l'un deux est même tout-à-fait invariant.

Le système $|C_j - 2C|$ est un système covariant de $|C|$, et ses courbes découpent sur les C ~~la série~~ des groupes canoniques des C: (quoique pas toujours la série can. complète), on l'appelle le syst. adjoint à C $|C'| = |C_j - 2C|$. Le passage de $|C|$ à $|C'|$ s'appelle adjonction.

Ex. Prenons les sections planes d'une surface génér. d'ordre n. Un réseau de ces courbes est découpé par les plans passant par un point fixe P. La courbe Jacob. de ce réseau est découpé par la surf. d'ordre $n-1$, 1ère polaire de P. Pourtant $|C_j|$ est découpé par les surf. d'ordre $n-1$; $|C_j - 2C|$ par les surf. d'ordre $n-3$, qui découpent justement sur les sections planes la série canonique. (dans ce cas, sér. can. complète) — Si la surf. donnée a une courbe de multiplicité k et des points isolés de mult. k', le ~~syst~~ syst adjoint à $|C|$ est découpé par les F^{n-3} (aussi adjointes) ayant ces courbes et ces points comme multiples d'ordre $k-1$ et $k'-2$. En prenant sur la ~~même~~ gén. F^n comme $|C|$ le syst les inters. avec d'autres surf. $F^{n'}$ (précédemment $n'=1$), $|C'|$ sera découpé par les surf d'ordre $n+n'-4$. On peut répéter l'opération d'adjonction, c.a.d. passer à un syst. $|C''|$ adjoint à $|C'|$, ou second adjoint de $|C|$, etc. — Est que l'opération va finir, après un nombre limité d'adjonctions, ou bien se pourra-t-elle continuer indéfiniment? | Sur le plan, et sur les surf. rat., sans doute, elle va finir. Mais sur la surf. gén. d'ordre $\underline{n \geq 4}$, $n + n' - 4 \geq n'$, en sorte que l'op. pourra continuer indéfiniment.

| Cela dépendra de la surf., non du syst. $|C|$ que nous y avons choisi

$C^5 (A^3 g^2)$

<u>Le système $|C_j - 3C| = |C' - C|$ est tout-à-fait invariant sur la surface</u> — sauf éventuellement quelque part fixe qui pourrait y être comprise — [On l'appelle le <u>système canonique</u>; sur une surf. d'ordre n il est découpé par les surf. d'ordre <u>$n-4$</u> ayant aussi les lignes de multiplicité k et les points ~~de~~ isolés de mult. k' de cette surf. comme mult. d'ordre $k-1$ et $k'-2$. — Sur la surface gén. du 4ème ordre $|C'| = |C|$; le syst. canonique est le <u>système zéro</u> — comme la série can. sur les courbes planes du 3ème et sur toutes les courbes elliptiques. ⌋

[S'il existe (p.ex. il n'existe pas sur le plan ou les surf. rat.)

⌋ Ex. F^5 – C doppia

Depuis ~~A partir de~~ 1884, E. Picard à Paris a commencé de recherches sur des intégrales simples attachées à une surface $f(xyz)=0$, ~~de~~ type $\int(Pdx+Qdy)$, à partir d'un point fixe $(x_0 \dots)$ jusqu'à un point variable (xyz), où P, Q sont des fcts. rationnelles de xyz satisfaisant à la condition $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, et dans la ~~dér~~ dérivation il faut tenir compte du fait que P, Q dépendent de x, y explicitement, et aussi comme fcts de z qui est à son tour fct de xy définie par $f=0$. La théorie de ces intégrales, bien connue comme „intégrales de Picard", et à laquelle ont contribué aussi Humbert, Painlevé, Mary, Liouville ... est exposée dans plusieurs Chap. de la Théorie ~~Traité~~ des fcts alg. de 2 var. ind. de Picard - Simart (1er vol. 1897; 2ème vol. en 3 cahiers 1900-04-06) ~~dont le 2me vol.~~ qui contient aussi beaucoup des théories géom. Italiennes, ~~et à la fin~~ même un rapport de C. E. „sur quelques résultats nouveaux dans la théorie des surf. alg." Mais il y a des surfaces sur lesquelles il n'existe ~~y a~~ pas d'intégrales de cette forme, c.à.d. ces expressions se réduisent toutes à des combinaisons algébro-logarithmiques ~~géométriques~~, et ne présentent par conséquent aucun intérêt; p. ex. les surfaces les plus générales d'ordre ~~ordre~~ quelconque n de l'espace S_3; tandis qu'il y a des véritables intégrales de Picard sur les surfaces réglées irrationnelles - ~~et, autre exemple, sur les surfaces représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe de genre $p>0$~~

3 espèces, comme pour les int. Abéliennes

Picard dit expressément dans son introduction qu'on ne pouvait faire un exposé satisf. de ces théories sans faire place aussi aux recherches de N. et à celles récentes de M. C. E. - le dernier cahier du 2nd vol. contient

Vous comprenez certainement que l'existence de véritables intégrales de Picard, c.à.d. d'expressions $\int(Pdx+Qdy)$ ayant des périodes en dehors des périodes logarithmiques, doit dépendre ~~de la connexion~~, comme pour les int. ellipt. et Abel., de la connexion de la V_4 représentant l'ensemble des points réels et imag. de la surface, et plus précisément de sa connexion linéaire, c.à.d. du nombre R_1 des cycles, c.à.d. des chemins fermés indépend. ~~qui~~ ne pouvant être réduits par continuité à un point. - Pour les courbes = V_2 topologiques = il y a un seul indice de connexion, c.à.d. ~~le genre~~ p; pour les surfaces = V_4 top. = il y en a 3, c.à.d. les nombres R_1 R_2 R_3 des cycles indép. à 1. 2. 3 dim; mais comme $R_1 = R_3$, ceux qui vraiment intéressent sont seulement R_1, R_2 (de R_2 je parlerai bientôt).

(Poincaré)

S. Lefschetz, L'analysis situs et la géom. algébrique (Coll. Borel 1923).

Je vais parler maintenant des questions qui ont présenté le plus de difficultés pour aboutir à un résultat complet et tout-à-fait satisfaisant.

Premièrement ~~Avant tout~~, l'extension de la notion de genre. Noether s'en était déjà occupé, même pour les variétés à plusieurs dim; pour les surfaces ~~il avait~~ d'ordre n en S_3 il avait reconnu qu'il fallait considérer les surf. adjointes d'ordre $n-4$, et que le nombre de ces surfaces qui ~~étaient~~ lin. indépendantes était un invariant de la première surf, et était aussi le nombre des intégrales doubles de 1re espèce, c.à.d. partout finies, attachées à la surface. — Mais, tandis que dans le plan, si une C^n a d points doubles, les conditions imposées à une C^{n-3} adjointe, c.à.d. de passer simplement par ces d points, sont ~~toujours~~ d conditions ~~distinctes~~ indépend, se traduisent en d éq dont aucune n'est une conséquence des autres, ~~cela n'a pas~~ il n'est pas toujours ainsi ~~pour~~ dans le cas des surfaces pour les surf. adjointes d'ordre $n-4$. Il faut pourtant considérer un genre ~~géométrique~~ effectif ou géométrique p_g (Noether), et un genre virtuel ou arithmétique p_a (aussi numérique) (Cayley-Zeuthen), qui est aussi un invariant; et $p_a \leq p_g$ — p_a peut même être négatif, tandis que $p_g \geq 0$. Les premiers ex. de surfaces ~~p~~ que l'on a connus pour lesquelles $p_a < p_g$ ce sont les surf. réglées ~~de genre~~ irrationnelles, c.à.d. dont les sections planes sont des courbes de genre $p > 0$; pour ces surfaces $p_g = 0$, $p_a = -p$: inversement, on sait à présent que si $p_a < -1$ il s'agit toujours ~~bien~~ de surf. réglées ~~ou~~ ou ~~qui peuvent~~ birationnellement équivalentes à des surf réglées (p. cons. $p_g = 0$), ~~surf réglées~~ tandis que si $p_a = -1$ ~~il y a aussi~~ d'autres ~~cas sont~~ aussi possibles, pour lesquels ~~aussi~~ $p_g > 0$ — Ex. R_1^4 avec 2 droites doubles $p_a = \binom{1+3}{3} - 2(p+1)$, $1 = 0$, c.à.d. $p_a = -1$

| linéaires par rapport aux coeff de la courbe

$= \binom{n-1}{3} - \dots$

| réduz à $f(x\,y) = 0$

coppie di punti C_p

$p_g = \frac{p(p-1)}{2}$ $p_a = \frac{p(p-3)}{2}$

On appelle surf irrégulières celles pour lq. $p_a < p_g$, et $p_g - p_a = q$ est leur irrégularité : tandis que surf. régulières = ($p_a = p_g$) = irrégularité zéro.

On a soupçonné de bonne heure que les surf irrég ~~pouvaient bien être~~ ou tout au moins qu'il y avait entre elles quelque relation celles, sur lq. existent des $\int$ de Picard; mais la démonstr. complète n'a été donnée que 1904-05 par les géom. It. C. E. S. Ce fut un des moments les plus épiques du développ. de cette théorie. ~~Il y avait une double question~~ Picard et même Poincaré avaient essayé de répondre cette question ... Il y avait une double question

| (1895?)

~~II° vol. Pic.-Sim.~~ Question posée déjà 1884-85 par Pic. Poinc.

Premièrement

à répondre ~~d'abord~~ une question simplement qualitative, c.à.d. si les deux classes de surf ... n'en étaient qu'une seule. On a bien reconnu que c'était ainsi ; et en même temps, que ces surf. jouissaient d'une autre propriété caractéristique : de contenir des systèmes continus de courbes complets et non linéaires - tels que les droites d'une surf. réglée irrat. [Deuxièmement, une question quantitative : ~~classes~~ quelles relations y avait-il entre l'irrég. q ~~et~~, les nombres des $\int$ de Picard de $1^{ère}$ et $2^{ème}$ espèce indép. ?, et le nombre R_1 de Betti ?

] Seconde et différente théorie des C. équiv.

q intégr. indép. de $1^{ère}$ espèce

$2q$ " $2^{ème}$ "

$R_1 = 2q$

Mais ce que je vous ~~dis~~ ai dit en quelques ~~minutes~~ mots, il a fallu bien des années pour y parvenir et le démontrer.

Maintenant que la question du genre et de l'irrég. d'une surface est éclaircie,

Quelles sont ~~maintenant~~ les surf. que l'on peut considérer comme analogues aux courbes de genre p ? Sous quelques regards, ce sont les surf. rég. ~~de genre~~ p ($p_g = p_a = p$) ; pour d'autres questions, ce sont ~~les~~ surf. de irrég. p - de ce dernier point de vue, ~~les~~ toutes les surf rég. d'un genre quelconque ~~sont les analogues~~ des ~~surf~~ courbes rationnelles

= Syst. cont. complets de courbes toujours linéaires ... syst. de tous les C_n.

Réduction des chemins simples o' à des points

Et la notion d'intégrale abélienne, en part. d'int. ab. de $1^{ère}$ espèce peut aussi être généralisée d'une double façon : p intégrales doubles $\int$ $1^{ère}$ esp indép. dans le 1^{er} cas, p int. simples dans ce dernier cas

Le mie ricerche, intese a dimostrare, ~~fin dove~~ per quanto possibile, la irrazionalità di alcune fra queste varietà, sono state essenzialmente dirette a studiarne:

a) I sistemi lineari almeno ∞^2 di superficie regolari aventi tutti i generi $= 1$;

b) L'insieme (gruppo) delle eventuali trasformazioni birazionali; — e a cercare di trovare ~~fra~~ nei sistemi a) e nelle trasformazioni b) - naturalmente, a loro volta, legati fra loro - qualche proprietà che sia diversa da quelle dello spazio S_3, in modo da poterne concludere che si tratta di enti biraz.te distinti.

Naturalmente, conveniva attaccare dapprima le varietà ultime dell'elenco precedente, che presumevo più lontane dalla razionalità, e per le quali era perciò da ritenersi più facile il conseguire un risultato positivo.

Per la M_3^4 generale di S^4 ho infatti riconosciuto che non contiene altri sist. ~~reg~~ lineari almeno ∞^2 di superficie di generi 1, all'infuori del sistema delle sez.ni iperpiane — e non ammette trasf.ni birazionali (la 2a proprietà è conseguenza della prima). Questa varietà, ritengo non sia nemmeno riferibile a una involuz.e di S_3.

La M_3^6 di S_5, varietà 6), è proiettata doppiamente da ognuna delle sue ∞^1 rette. E ogni suo sistema lineare almeno ∞^2 di superficie di generi 1 si riduce, con queste proiezioni, a un sistema di sezioni iperpiane. — Enriques ha dimostrato che questa varietà è riferibile a un'involuz.e di S_3; si tratta di una I_{216} — ma Aprile (Rassegna di matem. e fisica, 1921) ha poi mostrato che si può anche rappresentarla sopra una I_{36}.

Per la ~~varietà~~ varietà 5) $= M_3^8$ di S_6, non sono finora riuscito a assodare la irrazionalità. Essa contiene già infinite congruenze del 1° ordine di curve razionali; perciò le trasf.ni birazionali su di essa si moltiplicano già notevolmente — Da una sua retta (e di queste

4)

(ve ne sono ∞^1) essa si proietta in una M_3^4 di S_4 contenente una rigata cubica normale (e 17 punti doppi fuori di essa); e i piani delle ∞^2 coniche di tale R^3 segano ulteriormente M_3^4 secondo le coniche di 1 congruenza lineare. Essendo R^3 loro 4-secante, la varietà 5) si rappresenta sopra una I_4 di S_3; e propendo a credere **non** possa rappresentarsi sopra una I_2. Per arrivare alla I_2, bisogna avvicinarsi di più alla razionalità.

Anche la varietà 4) contiene congruenze lineari di curve razionali, ed è riferibile a involuzioni di S_3. La 3) contiene 2 congruenze lineari di coniche, nei piani della M_4^6 di Segre ~~che la contiene~~ in cui essa a sua volta è contenuta.

La varietà M_3^6 di S_5 (varietà 6)), quando sia obbligata a contenere **un piano** π, contiene di conseguenza una congruenza lineare di coniche, bisecate dal piano π, e sue intersezioni ulteriori cogli S_3 passanti per π — e infinite altre congruenze lineari di curve razionali, ottenute dalle prime valendosi della proiezione doppia di M_3^6 da una sua retta (contenuta o no in π).

La detta varietà si rappresenta sopra una I_2 di S_3, e anzi in modo molto semplice. Pensando la M_3^6 come complesso cubico di S_3, contenente (in corrispondenza al piano π) una stella di rette P, si consideri una retta generica r del complesso, e il piano Pr, il quale contiene, del complesso, un fascio di centro P e un inviluppo quadrico residuo. Di questo inviluppo, due rette a, a' passano per P. La rappresentazione cercata fa corrispondere alla r, come coppia di I_2, la coppia dei punti ra, ra', da essa congiunti.

Questa M_3^6 ha, nel piano π, **sette** punti doppi, da ognuno dei quali si proietta in una M_3^4 di S_4 con retta doppia (traccia di π) e **ulteriori particolarità**.

Anche la più generale M_3^4 di S_4 con retta doppia è rappresentabile sopra una J_2 di S_3, la retta doppia essendo una bisecante razionale delle ∞^2 coniche contenute nei piani per essa. -

Anch'essa ha un insieme molto complesso di trasf.^m birazionali.
Ho esaminate ripetutamente le singolarità che un sistema lineare di superficie in essa contenute deve avere, perchè la sua sup. generica abbia i generi $=1$; e propendo propio a credere che sempre ci sia una trasf. biraz.^e che ne abbassa l'ordine. - Onde si avrebbe realmente una J_2 di S_3 irrazionale.

semi-razionali

pseudo-razionali

$-\frac{4.11}{2} = -22$ no

$-\frac{3.8}{2} = -12$ no

$-\frac{2.5}{2} = -5$

Ben diverso, naturalmente, è l'altro tipo già noto di varietà V_3 a generi tutti nulli; quelle cioè riferibili a M_3^n di S_4 con retta $(n-2)^{pla}$ - e quindi ∞^2 coniche, nei piani per questa retta.

Per queste varietà è $\Omega_2 = -\frac{(n-6)(3n-17)}{2}$. $(n \geq 4)$

$n^2-7n+12$

$3n^2-35n+102$

$3(n^2-7n+12)-(14n-66)$

Per $\underline{n}=3, 4$ si hanno varietà che rientrano ancora fra le precedenti.

Per $\underline{n}=5$ è $\Omega_2=-1$, onde $\Omega=1$. La retta ~~doppia~~ tripla è infatti una bisecante delle coniche, di genere superficiale uno (piano doppio con C^6 di diramaz.^e); e probabilmente non esistono in questa varietà altre sup. regolari di generi 1, se non isolate.

Per $n=6$ è $\Omega_2=\Omega=0$; e si può presumere non esistano affatto, nella varietà generica, superficie di genere 1.

Per $n>6$, queste varietà assumono un carattere nuovo, cui corrisponde, per così dire, nel campo delle superficie, qualcosa d'intermedio fra le superficie ~~regolari~~ razionali e le rigate irrazionali.

Per le rigate irrazionali, vien meno la relazione fra il carattere $p^{(1)}$

caso speciale $p=1$
nessun massimo p. dim^{s}
sist. lin. genere 1

e la dims. dei sistemi lineari di curve di genere uno (accennate di sopra per le sup. razionali); e anzi, sulle rigate di genere $p > 0$, non esistono ~~curve~~, all'infuori delle generatrici, curve di genere $< p$. Così qui, fuori delle superficie appartenenti alla congruenza di coniche, che sono razionali o riferibili a rigate, presumo vi sia un genere minimo delle superficie contenute nella varietà; genere minimo che potrebbe essere quello $\left(=\frac{(n-3)(n-4)}{2}\right)$ della retta $(n-2)^{pla}$, pensata come superficie (piano doppio) bisecante le coniche.

surf. bisec. sulle rig. irraz. solo generatrici trasitt.

equi' C^2 traiett.

Come specializzazione di queste varietà, ricordo che Marletta ha dimostrato che esse diventano riferibili a una I_2 di S_3 quando vi sia inoltre un piano $(n-3)^{plo}$, passante per la retta $(n-2)^{pla}$. In sostanza (benché egli non lo dica), sulla retta ~~d~~ $(n-2)^{pla}$ pensata come piano doppio, bisecante le coniche, con $C^{2(n-2)}$ di diramazione, questa curva acquista un punto $2(n-3)^{plo}$; e perciò il piano doppio diventa razionale.

Concludendo:

Un primo gruppo di V_3, essenzialmente quelle enumerate a p. 2 e analoghe, quindi tutte quelle riferibili a involuzioni di S_3 (equazioni risolubili in fz. razionale di 3 parametri, anche senza invertibilità univoca), si potrebbero classificare a seconda del carattere Ω (ossia della massima dims del sistema lineare di sup. di genere uno contenuto nella varietà immag. dell'involuzione = dims = $\Omega - 1$)

Un secondo gruppo, quest'ultimo V p. 5-6, a seconda della sup. di minimo genere bisecante le coniche (o curve raz^{e}).

Géométrie sur les surfaces algébriques

La géom. sur les surf. alg. s'est développée ~~à la suite~~ d'après ~~de la g. sur les C. alg.~~, pour ainsi dire, ~~de~~ la géom. sur les C. alg. et en cherchant de maintenir autant que possible l'analogie avec ~~la~~ celle-ci ~~géom. sur les courbes alg.~~ – Mais, tandis que pour certaines questions on a pu progresser aisément, pour d'autres l'extension aux surfaces a présenté ~~vraiment un tel degré de~~ des ~~sérieuses~~ difficultés sérieuses. on trouve environ dans toute la période 1870–90

~~Les~~ Les points de départ de cette théorie ont ~~été multiples~~. Déjà 1868–71 Clebsch, Noether, Cayley, Zeuthen ont étendu aux surfaces, en différentes manières, la notion de genre d'une courbe. Mais c'était justement un des points où ~~le genre~~ l'extension présentait des difficultés graves; ~~pourtant les~~ cas ~~résultats~~ pouvaient avoir ~~obtenus~~ ~~personne~~ ~~ne s'y est~~ ~~d'autres en cette direction~~. Tout-au-moins pour une ~~forme~~ définitive ~~et~~, à laquelle ~~et on n'est pas en tout de suite des continuateurs.~~ ~~formulation satisfaisante~~ compréhension on est parvenu seulement beaucoup plus tard

Bien utiles, au contraire, pour la théorie gén. a été l'étude approfondie de nombreux cas particuliers. C'est cela que l'on peut appeler la méthode expérimentale des mathém.: non pas pour la démonstration, mais pour la découverte des vérités, qui ordin.[+] précède leur dém.; je la crois très suggestive. Il s'agit de plusieurs groupes de recherches, concernant différentes sortes de surfaces: avant tout les recherches de Cremona, Clebsch, Noether sur les surf. rat. et leur représentation sur un plan, en connexion aussi avec les transf. de Cremona dans l'espace; ——— ; des recherches aussi sur les surf. réglées irrationnelles; un Mém. classique de Noether (Math. Ann. 3) „Ueber Flächen .... " .... | Syst. lin. C. planes (Cast. 1891) (~~Noether~~ ~~Clebsch~~ M. Ann. 3 1870) Noether 1878 Sitz. Erlangen

les „plans doubles", c.à.d. les surfaces d'éq. $z^2 = f(xy)$ (...

La détermination des surfaces ~~des~~ ayant comme sections planes ou hyperplanes des courbes rationnelles, elliptiques, hyperell. (Castelnuovo, Enriques, Del Pezzo; Cast. Ann. 1900) pour le cas des courbes rat., aussi E. Picard 1878 (Picard Surf. hyperell. (Humbert, Painlevé)); enfin la dém. donnée par Castelnuovo (1893) (M. A. 44) de la rationalité des inv. planes ... (Dans le cas de 3 paramètres, on sait à présent que la même propriété n'est pas vérifiée; mais nous sommes ici déjà à la frontière des résultats que l'on connait, sans en avoir encore une explication, une compréhension tout-à-fait satisfaisante).

~~A partir de 1884 E. Picard à Paris a commencé des recherches sur des intégrales simples attachées à certaines surfaces, du type~~ $\int (Pdx + Qdy)$, à partir d'un point fixe

MA 48 Annali 1900 – Picard-Simart – Encykl. (1902)–1914 | Severi – Conf. g. n. ~~jusqu'à un per ...~~ Lefschetz
du premier BA

où P, Q sont des fct ration. de $x\,y\,z$, satisfaisant à la condition $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$: et dans la dérivation il faut tenir compte du fait que ~~x, y~~ P, Q ~~sont~~ dépendent de x, y ~~non~~ pas explicitement, et aussi comme fct de z qui est à son tour fct de xy définie par $f = 0$.

La théorie de ces intég., bien connus sous le nom de int. de Picard, a été développée aussi par d'autres mathém. (Humbert), et a été exposée dans le Traité de Picard-Simart (97-906). Mais ~~on a remarqué ces intégrales~~ il y a des surfaces sur lesquelles il n'existent pas ~~sur~~ d'intégrales de cette forme, c. à d. ~~celle~~ ces expressions se réduisent à des express. algéb. logar. ; c'est ainsi p. ex. sur les surfaces les plus gén. d'un ordre quelc. n dans S_3 ; tandis qu'il y a des véritables int. de Picard sur les surf. réglées irration (qui, dans S_3, ont toujours une courbe double), e sur les surfaces représentant les couples non ordonnées des points d'une courbe de genre > 0. Vous comprenez certainement que l'existence de véritables int. de Picard, c. à d. d'expressions $\int$ .. ayant des périodes (ou mieux des modules de périod.) en dehors des pér. log. doit dépendre de la connexion, et plus précist de la connexion linéaire de la V_4 représentant l'ensemble des points réels et imag. de la surfaces, c. à d. ~~de~~ du fait que le premier nombre de Betti R_1 soit > 0 ; mais c'est seulement 1904-05 que cette question a été complètement éclaircie, surtout par les géom. italiens M. M. E. E. S., et mise en rapport avec les diff. caractères de la surface que l'on avait alors appris à connaître.

2e vol. 1900-4-6 – mots teo. ct.
cita semgre.
LE. sur quelq rés. nouv.

] nombre des chemins fermés indép. ne pouvant être réduits par continuité à 1 point.

R_2 ici segreto

$R_3 = R_1$

Lefschetz L'An. sitûs et la g. alg
Borel 1923

Je vais donner maintenant un aperçu sur quelques questions que l'on a pu étudier pour les surfaces sans difficultés, comme elles sont tout-à-fait analogues à des questions sur les courbes

En analogie avec les séries lin. de groupes de points sur une courbe on peut ~~sur~~ considérer sur une surf. alg. $f(xyz) = 0$ le système des courbes inters. avec d'autres surfaces d'un même ordre et constituant un syst. lin.

(1) $\lambda_0 \varphi_0(xyz) + \lambda_1 \varphi_1 + \text{---} + \lambda_r \varphi_r = 0$

C'est ce que l'on appelle un syst. lin. de courbes sur $f=0$. Propriété fond., dans ~~par~~ l'hypothèse, que l'on peut toujours supposer vérifiée, que ~~aucune de ces dernières surf. ne contienne soit pas du type $f F = 0$~~ chaque courbe soit découpée par une surf. seule du système : par r points de $f=0$ en position gén. il passe toujours une et une seule courbe du syst.

Faisons abstraction des parties fixes

notion invar. p. transf. birat.

Les caractères les plus imp. du système sont.

la dimension, c.à.d. r, dans l'hypothèse énoncée.

Le genre, c.a.d. le genre de la courbe gén. du système - qui ~~peut devenir~~ pour des courbes particulières peut devenir plus petit (si elles ont des points doubles), jamais plus grand.

Le degré, c.a.d. le nombre n des points d'inters. variables de deux courbes du système.

La série caractéristique découpée sur la courbe gén. du système par les autres courbes : g_n^{r-1}.

Si nous ~~..~~ posons $x_i = \varphi_i(xyz)$, où z est la fct. de xy définie par $f=0$, et les x_i sont pourtant des fct. de deux paramètres, et nous consid. le x_i comme coord. hom. d'un point en S_r, ces équations représent une surface F de S_r, ordinairement en corresp. birat. avec $f=0$ et sur laquelle les courbes du syst. lin. corresp. à (1) sont découpées par les hyperplans ; La nouvelle surface est une image π du syst. (1) - elle représ. le syst. L'étude des syst. lin. de courbes est ainsi projective.

et la série caract. sur chaque courbe du syst. par les hyperpl. dans chaque hyperpl. $F=0$ est une courbe d'ordre n.

Un exemple très simple et quand-même intéressant si $f=0$ est un plan, et (1) un syst. lin. de courbes planes, en particulier le syst. ∞^5 de toutes les coniques.

$$\lambda_0 x^2 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 xy + \lambda_4 xz + \lambda_5 yz = 0$$

En posant $x_0 = x^2$, $x_1 = y^2$, ... (3 param. homogènes), la F est une surface du 4ème ordre de l'espace S_5, bien connue par les géomètres sous le nom de <u>surface de Veronese</u>. Aux courbes planes d'ordre <u>n</u> corresp. des courbes d'ordre <u>2n</u>, c.a.d. elle contient seulement des courbes d'ordre <u>pair</u>. Elle a des propriétés tout-à-fait particulières et très-intéressantes; sa projection la plus génér. sur S_3 est la surface du même ordre, connue comme <u>surf. de Steiner</u>, avec 1 p. triple e 3 droites doubles passant par ce p.

duale della F^3 con 4 p. δ.

Sur une courbe alg., un groupe G_n définit ~~complètement~~ exacte la série lin. complète qui le contient. – La même propriété subsiste aussi ~~pour un~~, sur une surface, pour une courbe alg. donnée; ~~et~~ elle définit aussi ~~par~~ le syst. ~~complet~~ linéaire Syst sans p base des courbes dans lequel elle est contenue;

~~A peut y avoir Il y a toutefois quelques complications si l'on veut se borner à consi-~~
~~dérer les courbes passant par certains points bases~~

On appelle aussi <u>équivalentes</u> deux courbes appartenant à un même syst. lin. sans p. base (Ex. – plan – F^2).

Pour des courbes données sur une même surface, ou pour les syst. lin. complets auxquels elles appart., on peut définir les ~~opérat. de~~ l'addit., la soustraction (autant que possible), la multiplication par un nombre entier, la division par un nombre entier, autant que possible, ~~et qui~~ laquelle peut être et aussi n'être pas une opér. univoque. – En particulier, l'add. de deux syst. de degrés n_1 n_2 et de genres π_1 π_2 et dont les courbes se rencontrent en <u>i</u> points donne un syst

de degré $n_1 + n_2 + 2i$ et de genre $\pi_1 + \pi_2 + i - 1$.

Courbes et systèmes <u>virtuels</u>.

Une autre question, qui ~~des premiers abord ne paraissait pas~~ très importantes a exigé réellement l'introduction d'une notion tout à fait nouvelle, ~~mais qui a été résolue déjà 1896 par Castelnuovo,~~ est la ~~caractérisa~~ recherche des conditions nécess. et suff. pour la rationalité d'une surface la caractérisation des surf. rationnelles ~~par~~, si possible, par les valeurs de certains inv. -

Pour les courbes, $p = 0$ - Pour les surf., il est certainement nécess $p_a = p_g = 0$.

Mais ces cond. ne sont encore suffisantes. Castelnuovo a heureusement trouvé un exemple (!) d'une surf. assez simple, pour lq $p_a = p_g = 0$, et qui pourtant n'est pas rationnelle.

Il s'agit d'une surf. de $6^{ème}$ ordre, ayant les 6 arêtes d'un tétraèdre comme droites doubles:

$$x_1 x_2 x_3 x_4 f_2(x_1 x_2 x_3 x_4) + \varphi_2(x_1 x_2 x_3, x_1 x_2 x_4, \ldots) = 0$$

Évidemment: $p_g = 0$, car il n'y a pas de surf. du $2^{ème}$ ordre passant par les 6 arêtes.

aussi $p_a = 0$ - car il s'agit, pour les ∞^9 surf. .., de 10 cond. dist.

Les ∞^3 sections planes sont des C_4^6. Le syst. adjoint à celui-ci ~~est~~ découpé par les F^3 passant simplement par les 6 arêtes, c.a.d. ayant les 4 sommets du tétr. comme p. doubles. Ce sont aussi ∞^3 courbes d'ordre $3.6 - 6.2 = 6$ et genre 4.

Chacun des deux systèmes découpe sur l'autre une g_6^3: la série canonique.

Chacun des deux est l'adjoint de l'autre! L'adjonction peut se continuer à l'infini; la surf. n'est pas rationnelle!

~~Le syst. canonique n'existe~~ Comme $p_g = 0$, il n'y a pas de syst. canon.

Mais ce système, virtuel, est $= |C'| - |C| = |C| - |C'|$. Il s'ensuit $|2C| = |2C'|$?. En effet, $|2C'|$ est découpé ~~par les F^2, $|2C'|$~~ par les F^6 ... ~~c.a.d. encore par les~~ F^3; $|2C|$ par les F^3, lq. avec le syst. des 4 plans ....

? c.a.d. les syst. complets $|2C|$ et $|2C'|$ coïncident

Il n'y a pas de syst. canonique: mais le syst. double du syst. canon., $|2C| - |2C|$ ou syst. bicanon (Enriques 1896)

$2|C' - C| =$ existe, et c'est le syst. zéro. Il n'y a pas de F^2 passant par les 6 arêtes; mais il y a une F^4 passant doublement par ces arêtes, l'ensemble des 4 plans du tétraèdre, et qui ne rencontre ultérieurement la F^6.

On appelle bigenre P_2 le nombre des courbes bicon. indép. - On a également un trigenre, etc.

Pour cette F^6, $P_2 = 1$ (une surface F^4 biadjointe, qui dont l'intersect. avec la F^6 se compose seulement des arêtes ; une courbe bicanonique, d'ordre zéro). Elle est caractérisée par $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$ (Enriques 1909)

La condition pour la rationalité d'une surface est $p_a = P_3 = P_2 = 0$

On peut même dire $p_a = P_2 = 0$

F^6 – division non univoque
torsion topologique de Poincaré

Enriques a aussi démontré (1905) que $\overbrace{P_4 = P_6 = 0}^{P_{12} = 0}$ est la condition pour qu'une surface puisse être transformée birat^t en une surface réglée, ration. ou non – c. a. d en une ~~surface~~ cylindre $f(x\,y) = 0$.

Reye

Pour les V_3, les conditions de rationalité ne sont encore connues.

~~Ce~~ Encore un mot sur une question qui ne ~~l'on~~ s'était pas présentée pour les courbes, et qui a donné lieu, pour les surfaces, à quelques complications

Une corresp. birationnelle entre 2 courbes est toujours biunivoque sans exceptions – Ex. Projection d'une C^3 avec p. double sur une droite ~~D~~ – d'une C^3 gauche d'une de ses cordes

Ce n'est pas toujours ainsi ~~par~~ pour une corresp. birat. entre 2 surfaces; (transf. de Cremona) il peut bien arriver qu'à un seul point ~~de~~ d'une des 2 surfaces corresp., une ligne entière (∞ points) sur l'autre. P. ex. si à la surface $f(xyz)=0$ nous appliquons la transf. $x_i = \rho\,\varphi_i(xyz)$, le syst. des courbes découpées par les $\varphi_i(xyz)=0$ sur $f(xyz)=0$ ayant quelque p. base (les $\varphi_i=0$)

~~Section d'une~~ Projection stéréographique d'une F^2; plus généralement d'une surface quelconque de S_r d'un de ses points. – Il y a des cas où deux surf. birat. équiv. ne peuvent absolument être transf. l'une dans l'autre sans qu'il y ait quelque p. fond.

Je me bornerai à considérer ici le cas d'un point simple d'une surface auquel corresp. sur l'autre surf ~~une courbe~~; c. a. d. d'une courbe qui peut être transformée en un point ... Ce sont des courbes – toujours rationnelles – que l'on appelle „courbes exceptionnelles" (Noether: ausgezeichnete Kurven) – ~~Cast. Enriques 1900~~

~~Est-ce qu'une~~ Si une surf contient des courbes except., est-ce qu'on peut la transformer birat^t dans une autre n'ayant plus de ces courbes? Ce serait évidemment une simplification. Cast. Enriques 1900 ont reconnu qu'il y a 2 sortes de ces courbes. Courbes exc. de 1^ère espèce, que l'on peut transformer en 1 point, sans qu'au même temps un point de cette courbe se transforme à son tour en une courbe – en sorte que, après cette transf., il y a réellement une C. exc. de moins; et C. exc. de 2^me esp. – – – (F^2 – plan)

~~Les~~ Des surfaces contenant des C. exc. de 2^me esp. sont les surf. réglées et leurs transformées ?; elles en contiendront toujours. Les droites des surf. réglées ou du plan sont des C. exc. de 2^me esp. – [Ce sont toutes les surfaces pouvant être transf. en des cylindres] ?

Toute autre surf ne peut contenir qu'un nombre fini de C. exc. de 1^ère esp.; et elle peut toujours être transf. en une autre ne contenant aucune courbe ligne exc.

(F^n générale p. $n \geq 4$).

On peut pourtant repartir chaque classe de surf. birat.[+] équivalentes en plusieurs sousclasses, chaque sousclasse se composant de surfaces pouvant être transf. l'une dans l'autre ~~pouvant être transformées l'une donnant lieu à des transf~~ sans qu'aucune courbe except ne vienne perdue ni acquérie. Dans la classe des surf. rationnelles, le plan et la F^2 appartiennent à des sousclasses différentes. — Et comme ~~il y a de~~ une surface a des invariants absolus (p_g, p_a, P_2, le genre de la C canon. $p^{(1)}$ ~~le genre et le dual du sv.~~ ...), elle a aussi des inv. relatifs ....
surfaces appart. à des différentes sousclasses ont des V_4 topol. aussi différentes
Sur la V_4 topologique d'une surf. alg. ~~les~~ tous les courbes alg. de cette surface corresp. des cycles (alg.) continues fermés à 2 dim. ; à une nouvelle C. except corresp. un nouveau cycle.[x] Le nombre R_2 de Betti est un inv. relatif.

Il est lié à l'inv. $I = d - \sigma - 4\pi$ de Zeuthen-Segre par la relation

$$R_2 = I + 4q + 2 \qquad (= \rho_0 + \rho)$$

De ce point de vue, l'inv. abs. R_1 est plus analogue au genre p d'une courbe, que l'inv. R_2. Mais tandis que pour une C plane les pts ~~tous~~ font diminuer p, pour les F^n les points et les lignes multiples font diminuer R_2, mais peuvent dans certains cas rendre plus grand R_1.

Surf.[t] équiv.

ordine invariantivo relativo.

ρ_0, q inv. abs.
ρ, I " rel.
$\rho_0 = R_2 - \rho$

ρ_0 = n° int. doppi 2^a sp.
lin. ind. = n° ccli[?] indip.
incontrante ogni C alg. in n° algebricam.te nullo di p.

Inclu Riemann. du plan (V_4^6 di Segre)
$R_1 = 0$, $\rho_0 = R$ effectif $e = 1 - 1 = 0$
tout cycle à 2 dim. est alg. (ou réductible à alg.)
c.à.d. une surf. de R à 2 dim.

---

[x] Courbes équivalentes au p. de vue des systèmes continus donnent lieu à des cycles V_2 homologues, et inversement.

S_3 doppi F^6 – ultimo – (con Q tg lungo $C^6_4 = M^4_3$ p doppio

tipo M^{2p-2}_3 di S_{p+1}, sez.

M^6_3 con piano = M^4_3 1ª doppia e Q

sezioni con Crem, ma raccio nuovi elem. infl. ledeser

F^6 di S_3 dà $\frac{9.8.7}{6} - 1 = 3.4.7 - 1 = 83$ param.

p. quadruplo 20 condiz

Dato cono tg (Γ^2 doppio) 14 condiz

Questo contenuto semplicem. come fattore anche nel gruppo termini di 5° grado $(20 - 9) = 11$ condiz

invece che C^5 pieno è disponibile C^3

$83 - (20 + 14 + 11) = 38$

cono Γ^9_3 di S_{10} (raz.) – sez con Q sono F^{18} genere 1, curve sez. $p = 10$ (C^{18}_{10} can. di S_9)

sez. con V^3 sono F^{27} genere $1 + 10 + 0 = 11$, ∞^{10} aggiunte, che provo le sez. iperp. di Γ^9_3

sez. F^9 con V^n genere $n + 9\binom{n}{2} - (n-1) = 9\binom{n}{2} + 1$

genere $F^{9n} = \Gamma^9 . V^n$?

$n = 1$	0
2	1
3	11
4	$11 + 28 = 39$
5	$39 + 55 = 94$

$n = -2$, sup. canoniche

94 39 11 1 0

55 28 10 1

27 18 9

$a n^3 + b n^2 + c n + d$

$a + b + c + d = 0$

$8a + 4b + 2c + d = 1$

$27a + 9b + 3c + d = 11$

$64a + 16b + 4c + d = 39$

$7a + 3b + c = 1$

$19a + 5b + c = 10$

$37a + 7b + c = 28$

$12a + 2b = 9$

$18a + 2b = 18$

$6a = 9 \quad a = \frac{3}{2} \quad b = -\frac{9}{2} \quad c = 4$

$d = \cancel{0}$

$\frac{21}{2} - \frac{27}{2} + c = 1$

$c = 1 + 3 = 4$

$p = 9$
$n = 6$ diff. con

$n = -2$

$-\frac{3}{2} . 8 - \frac{9}{2} . 4 - 4 . 2 + 1$

$-12 - 18 - 8 + 1 = 38$

Appunti e vedute concernenti le varietà algebriche a 3 dims. aventi tutti i generi nulli.

Per ~~le~~ superficie, si considera l'invariante relativo ω, il cui valore massimo, per una data classe di sup. biraz.te equivalenti, è il genere lineare virtuale $p^{(1)}$, e in particolare, se $p_g > 0$, è il genere virtuale della curva canonica.

Per le superficie razionali $p^{(1)} = 10$, e $p^{(1)} - 1 = 9$ è la massima dimensione di un sistema lineare di curve ellittiche — e in pari tempo la massima dims. che può avere (in quanto sia effettivo) il sistema differenza $|C - C'|$, dove $|C|$ è un sist. lin. arbitrario sulla superficie, e $|C'|$ il suo aggiunto.

Per le varietà a 3 dims., il carattere analogo a ω è Ω_2, ~~genere~~ aritmetico ~~virtuale~~ virtuale della sup. canonica. Anch'esso è un invariante relativo; ma un suo valore estremo, per una data classe di enti biraz.te identici, costituirà del pari, per la classe, un invariante assoluto. Come tale, conviene prendere il valore assoluto massimo di Ω_2, per enti della classe; lo indico con Ω. (Ω = mass. $|\Omega_2|$).

Allora $\Omega - 1$ è presumibilmente, per la classe, la dimensione massima di un sistema lineare di sup. regolari aventi tutti i generi $= 1$.

Per lo spazio S_3, $\Omega_2 = -35$; e non risulta che per altri enti razionali Ω_2 abbia un valor assoluto maggiore. (Per la quadrica di S_4, $\Omega_2 = -30$). Per gli enti razionali sarebbe quindi $\Omega = 35$. Ora, in S_3, il sistema lineare di tutte le F^4 ha dims. 34; e non risulta vi ~~sia~~ siano sistemi lineari di sup. reg. di genere 1 aventi dims. maggiore.

Ma con qualche eccezione! forse: eccettuando quei sistemi di genere 1 che, indicandone con k la dims, contengano un sist. ∞^{k-1} di sup. razionali.

Es.: sul cono Γ^9 di S_{10} rag., a curve reg. ellittiche, il sistema ∞^{38} delle intersez. con quadriche: = sist. equival. in S_3 a quello delle F^6 con A^4 e C^2 doppia ∞ vicina, = o anche F^8 con A^6 e 2 coniche doppie ∞ vicine in piano generico.

potrebbe per le M_3 razionali essere $\Omega = 39$

$\frac{10 \cdot 13}{2} = 65$

$\frac{8 \cdot 11}{2} - 18 = 26$

$65 - 26 - 1 = 38$

Per tutte le ~~sott.~~ varietà sottoindicate, ~~Ω_2 ha mag.~~ del tipo rispettivo più generale, Ω_2 ~~ha~~ avrebbe appunto il valore assoluto presumibilmente massimo, per la rispettiva classe; le dispongo ~~in~~ secondo l'ordine decrescente del valore ass. di Ω_2, e quindi di Ω:

1) V_3^3 generale di S_4 — $\Omega_2 = -15$, $\Omega = 15$

2) S_3 doppio con F^4 generale di diramaz. $\Omega_2 = -11$, $\Omega = 11$

[illegible]

3) M_3^{12} di S_8, intersez.e della „varietà di Segre" M_4^6 di S_8 con una quadrica — $\Omega_2 = \Omega = 9$

4) M_3^{10} di S_7, intersez. di una quadrica di S_7 con una M_4^5 a curve sez. ellittiche (immagine dell'intersez. di 2 complessi lineari di rette di S_4). — $\Omega_2 = \Omega = 8$

5) M_3^8 di S_6, intersez. generale di 3 quadriche — $\Omega_2 = \Omega = 7$

6) M_3^6 di S_5, " di 1 quadrica e 1 forma cubica — $\Omega_2 = \Omega = 6$

7) M_3^4 generale di S_4 — $\Omega_2 = \Omega = 5$

8) S_3 doppio con F^6 generale di diramazione — $\Omega_2 = \Omega = 4$

È presumibile pertanto che per la classificazione di questi enti l'invariante assoluto Ω abbia importanza fondamentale. Si direbbe che il diminuire di Ω, cioè l'ordine progressivo di cui sopra, corrisponde a un progressivo allontanamento dalla razionalità.
Occorrono anche condiz. in n° 7) per avere la razionalità.

Opportune particolarizzazioni in alcune di queste varietà permettono di riferirle ad altre che le precedono nell'elenco — il che corrisponderebbe appunto ad avvicinarle alla razionalità.

L'S_3 doppio con F^4 di diramazione, qualora la F^4 acquisti un piano tangente lungo una conica, diventa riferibile a una V_3^3 di S_4.

La M_3^6 di S_5, quando contenga due piani, con un solo punto comune (appartenenti dunque, sulla quadrica per essa M_3^6, a uno stesso sistema), è riferibile alla varietà 3). Quando contenga tre piani (sempre di uno stesso sistema della detta quadrica), è riferibile alla varietà 1) più generale. (Il contenere un solo piano, specializza la varietà, senza ridurla a una delle precedenti).

La M_3^4 di S_4 (varietà 7)), quando la si obblighi a contenere una rigata cubica raz.e normale, diventa riferibile alla 5) più generale (e ad altre, obbligandola a contenere una superficie a sezioni razionali di altro tipo). — Un 2° dopp. e 1 quadr. per questa, ale M_3 con piano

L'S_3 doppio con F^6 di diramaz., quando tale F^6 ammetta un quadr. tang. ad essa lungo una C^6 di genere .. diventa rif. a una M_3^4 con p. doppio

varietà le cui superficie sezioni hanno generi = 1, e le cui curve sezioni sono canoniche.
Tipo M_3^{2p-2} di S_{p+1}, le cui sez. con 1 p. S_{p-1} sono C. can. di genere p

Le varietà 6), 5), 4), 3) sono intersez. di quadriche con varietà M_4^{p-1} di S_{p+1} a curve sez. ellittiche (Scorza). È notevole che esse corrisp. a p. punto ai soli 4 tipi di M_4^{p-1} ($p = 4.5.6.7$) che non sono coni.

Prendendo una M_4^{p-1}, sempre a curve sez. ellittiche, che sia S_0-cono, si ha una M_3^{2p-2} contenente una I_2 razionale, dunque riferibile a S_3 doppio. Poichè la M_3 sezione del cono può rappres. su S_3 in modo che alle sue sez. piane corrisp. F^2 o F^3, quindi alle rette di S_3, C^2 o C^3 su M_3, alle rette dell'S_3 doppio corrisp. su M_4 curve di genere 1 o 2; sicchè l'S_3 doppio ha come sup. di diramaz. una F^4 (caso 2) oppure una particolare F^6 (caso 8).

Se poi la M_4^{p-1} è un S_1-cono, la M_3^{2p-2} contiene ∞^2 coniche con 2 p. comuni, ed è razionale.

+ – • —, x, x' =

(1/2)

Majuscule

n^e combinaison

Quelques aperçus sur le développement de la géométrie algébrique en Italie
pendant le dernier siècle

… ma tâche pas simple : parler de choses qui puissent intéresser autant que poss. lorsqu'il faut en même temps donner un peu de propos – pas tout le monde…
seulement petites parties – encadrer au milieu …

La géométrie, qui n'avait fait aucun véritable progrès depuis l'antiquité jusqu'au XVI^ème siècle, et qui ne pouvait même en faire sans être vivifiée par des méthodes nouvelles et plus générales, a été dirigée sur des nouvelles voies premièrement par Desargues, à qui l'on doit le premier usage des Notions, mais qui n'a pas eu des continuateurs immédiats, et surtout par l'introduction de la méthode analyt. ~~La géom. analytique~~, associée avec la découverte, un demi-siècle après, du calc. inf. ~~et avec~~ le merveilleux développement ~~du Calc. inf.~~ de celui-ci ~~et de ses applic.~~ géom., a ~~ont~~ rempli presque entièrement le XVIII^me siècle.

À la fin du XVIII^me siècle, c'est Monge qui par l'unification des méthodes déjà ~~connues~~ pour la représentation, par des dessins, ~~de figures~~ dans l'espace, de travaux à exécuter (bâtiments, machines, forteresses), créa la G. D. La première moitié du XIX^m siècle, ~~on peut bien l'appeler, la période pour ce que concerne la géom., et plus particulièrement la géom. synth.~~, est la période héroïque de la géom. S : elle a été développée ~~est caractérisée~~ en France par Poncelet, et plus tard par Chasles ; en Allemagne par Moebius et v. Staudt ; entre les deux, par Steiner (1796-63), qui était un Suisse, d'une famille de paysans du Canton de Soleure, qui jusqu'à 20 ans avait travaillé à la campagne. Il avait un penchant naturel pour l'enseignement, et s'était épris des méthodes d'éduc. Pestalozzi qui commençaient à se répandre. Il fut quelque temps à l'Inst. P. qu'il y avait à Yverdon, mais n'y trouva pas sa satisfaction ; il alla ensuite en Allem., premièrement à Heid., où il donna des leçons et étudia par lui-même, ensuite à Berlin, où il entra dans le cercle du J. de Crelle, fut aidé aussi par les H., et devint prof. à l'Univ. 1834-63 – génies. C'est surt. par des formes création à lui.
par lui même ; ensuite à Berlin, où il entra dans le cercle de Crelle, et devint prof. Univ. 1834-63 [illegible]

Il était le commencement d'une nouvelle période de géom. synth.

(nécrologie – actes Soc. Helvétique Sc. nat. 56-1874/5)
génies de C. et surt. par ses formes

L'Italie n'avait encore pris part à ce mouvement scientifique.

Les conditions politiques, sa division en plusieurs États, n'y étaient pas favorables. Quelques-uns ~~Les~~ gouvernements ne s'occupaient pas beaucoup de l'instruction et ~~de~~ l'enseign^t univ.

(Pisa 1835)

Des réunions annuelles de savants qui avaient commencé à se tenir 1839-47 en différentes villes étaient ~~presque~~ toujours envisagées avec soupçons par la police.

Après 1850, trois mathématiciens Italiens, et c'étaient ~~encore~~ trois analystes, commencent à être ~~bien~~ connus à l'étranger aussi ; Brioschi, ~~de Milan~~ (1824-98), qui fut le premier Directeur, pendant presque 40 ans, de l'École Polyt. de Milan, et qui a atteint ~~rejoint~~ aussi une haute position politique : après 1870 il fut chargé par le Gouv. Italien de la réorganisation de l'Univ. de Rome et de l'Accademia dei Lincei, dont il fut aussi

1857 ~~le~~ résident pour plusieurs années; Betti (1823-92) à Pisa, Casorati (1835-90) à Pavia
Au congrès internat. des mathém. à Paris 1900 Volterra a tenu une confér. avec le titre:
„Betti, Brioschi, Casorati, 3 Analystes Italiens et 3 manières d'envisager les questions d'analyse"
et je me permets de répéter ici ce qu'il dit: „à leur enseignement, à leurs travaux, au dévouement infatigable avec lequel ils poussaient les élèves et les jeunes savants vers les recherches scientifiques, à l'influence qu'ils ont exercée dans l'organisation des études, aux rapports qu'ils ont établis avec l'étranger (voyage 1858), l'Italie doit d'avoir vu naître une jeune école d'Analystes" Brioschi, fidèle, fidèle à la direction classique - Euler, Jacobi -, n'était pas gêné par des longs calculs: il „voyait" à travers une forêt de calculs comme à travers un cristal. Betti aimait bien plus penser que se dédier à un long travail matériel; il s'était lié ~~beaucoup~~ d'amitié avec Riemann, pendant les longs séjours de celui-ci, déjà malade, à Pisa 1860-65, et il en subit aussi l'influence dans la th. des fcts, dans l'analysis situs, dans la phys. mathém.; de tous les deux on peut dire que, s'ils parlaient de mathém., leur pensée était toujours dirigée vers la physique. Casorati est l'auteur d'un des premiers Traités (1868) de la Th. des fcts. d'une var. complexe, avec une introduction et exposition historique et critique d'un grand intérêt; Klein, dans son cours... pendant l'autre guerre, c.à.d. presque un demi-siècle plus tard, en parle comme „ein gross angelegtes Werk". Il avait assimilé tous les grands travaux d'Abel, Jacobi, Cauchy, Riemann, Weierstrass: si Betti a embrassé les idées de Riemann, Casorati par son traité a attiré sur elles l'attention des géomètres.

La géométrie commence en Italie par Luigi Cremona (1830-1903). C'est à lui que l'on doit d'avoir introduit une nouvelle vie, un nouvel esprit dans la géométrie; aux méthodes synthétiques ~~de Pon. Kit~~ Steiner v. Staudt Chasles il a donné une empreinte de simplicité, de lucidité, de perfection artistique ~~la géométrie sy pure~~. Les géomètres Italiens qui se sont formés entre 1860 et 1900, même s'ils n'ont pas été élèves directs de Cremona, reconnaissent que leur activité, leur inspiration, doivent se rapporter par une ~~en~~ bonne partie à ses œuvres et à son enseignement. On le considère vraiment comme le „père" de la géom. italienne moderne. - Comme géomètre, il fut un autodidacte; Brioschi, ~~dont il fut~~ l'~~élève, et avec lequel il a~~ ~~eut toujours beaucoup de~~ conservé ~~relations~~

~~Né en 1830 (Cremona), tout jeune il prit part à la guerre de 1848-49, et tout particulièrement à la défense de Venise 1849. Comme géomètre, il fut aussi un autodidacte; Brioschi, avec lequel il eut toujours des relations personnelles,~~ avec ~~dont il fut l'élève, et dès le commencement~~ beaucoup sentiment lui donna des conseils, et lui indiqua surtout les œuvres classiques de Chasles - auquel Cremona écrivit plus tard: „Que Dieu bénisse votre G.H. et votre Traité de G.S.". ~~Il devint bientôt~~

~~La période de la véritable activité scientifique de Cremona n'est pas longue: 1858-78 environ. Il débuta notamment par des mémoires sur les courbes gauches du 3ème ordre; au commencement, il fait encore usage de la représentation analytique; mais à partir du mém. 188, Crelle 58 (n. 24),~~ ~~ensuite il devint~~ ~~il est~~ pleinement maître des méthodes synthétiques de Pon. Steiner v. St., Ch., et donna ~~leur~~ à ces méthodes une empreinte ~~tout-à-fait particulière caractérisée par une~~ de ~~la plus~~ grande simplicité ~~et~~ ~~parfaite~~ lucidité, ~~comme~~ de véritable perfection artistique.

il fait une large applic. des géom. de cette géom. qui avaient déjà été données par Seydl.; fait une étude approf. de la polarité nulle - Compl. lin.

parmi ces différentes méthodes

À partir d'environ 1890 l'usage des transf birat qui donnent à la théorie ~~une~~ caractère plus dinamique, l'emploi des courbes hyperspaciales qui offrent une image des série linéaires, l'emporte, et dès lors je ~~Ec~~ crois pouvoir dire que c'est l'Éc. Italienne qui ~~marche en tête~~ prend le devant avec M. Castelnuovo, tandis que C. Segre en faisant un exposé complet dans un cours 1890-91 à Turin, et dans un Mémoire publié 1894 dans les Annali di Matem, en même temps que celui de M. Bertini.

Toutefois, après cela, ~~la notion~~ un autre progrès va s'accomplir et l'usage des transf birat vont ~~semble devoir~~ ~~maintenant~~ même disparaître de la théorie des séries lin. définitivement achevée (~~ou que seulement~~ sauf peut-être incidemment ~~on dira~~ y recourir à quelque fois transf.). Le ~~dernier~~ stade dernier ~~et raisonnant de la théorie est de la construire en partant de la notion~~ ~~s'appuyant seulement sur~~ abstraite et invariante de série lin et sur ~~des~~ des opérations définies sur celles-ci. Évolution analogue à celle de la géom. de Poncelet à V. Staudt

de cette théorie ~~qui avait été abordée par plusieurs savants et par de diff. méthodes~~ est maintenant de s'appuyer seulement sur la notion complètement IF.

(240)

Groupes équivalents - ceux d'une même série lin - deux, à une même g_n^r

$G_n \equiv G_n'$ - prop. réfléchie ($G \equiv G$), symétrique, transitive

une g_n^r complète est formée par la totalité des groupes équiv à l'un d'eux, et est définie par n'importe ~~l~~quel de ses groupes

Somme de 2 groupes (G_{m+n} constitué par leur ensemble) - les sommes de groupes équiv sont équiv

Série complète somme de 2 autres - série double, multiple | Mais pas de ~~division~~! de $2A \equiv 2B$, il n'en suit pas $A \equiv B$ by courbe C^4

Soustraction des séries - Si une série complète g_{m+n} contient partiellement un groupe G_n d'une g_n, elle contient tous ses groupes (Restsatz de Brill) : on dit qu'elle contient cette série. En retranchant G_n de tous les groupes de la g_{m+n} qui le contiennent, on obtient une série résiduelle g_m aussi complète, et indépendante du choix de G_n dans la g_n

notion très important

Groupes virtuels comme différences de groupes donnés, indépendamment de leur existence. – Séries virtuelles (anal. nombres négatifs – servent)

Division (lorsque possible). – pas univoque

Soit maintenant une g_n^1 sur une courbe ~~qui~~ ~~Il existe~~ ~~y a des~~

pour fixer les idées, le g_n^1 découpée sur une C^n plane par les droites d'un faisceau P. Dans le faisceau il y a des droites ~~tangentes~~ à la C^n; leurs ~~points de contact~~ nombre est la classe de la C^n, leurs points de contact sont des points doubles des groupes de la g_n^1, nous disons des pδ de la g_n^1; ils sont découpés par la C^{n-1} 1ère polaire de P, qui est une C. adjointe de la C^n. La classe de la C^n (avec quelques observ. sur lesq. je ne m'arrêterai pas) est $2(n+p-1)$; le groupe des points de contact s'appelle le groupe Jacobien, comme il peut être représenté par un Dét. Jac. = 0.

~~tangentes à la courbe~~. Tous les g_n^1 contenues dans une même g_n^2 les groupes Jacobiens appartiennent à une même série d'ordre $2(n+p-1)$, la série Jacobienne de la g_n^2, qui est liée invariantivement à celle-ci : elle est covariante de la g_n^2, par rapport aux transf. birat sur la courbe.

S'il s'agit d'une courbe plane, et d'une g_n^1 découpée par un faisceau de droites de centre P ~~(ce qui n'est absolument une restriction, sauf dans le cas qu'il n'y ait aucune g_n^2 contenant la g_n^1)~~, le groupe Jacob. est donnée par les tangentes issues de P. Si P est un point de la courbe, {c. a. d. un point fixe de la g_n^1,} la droite tangente en P absorbe 2 des ~~tangentes~~ $2(n+p-1)$ tangentes. Un point fixe de la g_n^1 absorbe 2 points de son groupe Jacobien. – Le groupe Jacob. d'une g_n^1 avec P fixe = 2P + gr. Jacob. de la g_{n-1}^1 résiduelle d'autres courbes liées à la courbe donnée ~~la propriété que 2 faisceaux de C^m et C^n engendrent une C^{m+n}~~

Peut-être Cremona n'est pas toujours et tout-à-fait rigoureux dans les détails de son exposé ; mais les propositions qu'il donne sont exactes ; son mémoire est ~~vraiment~~ très agréable à lire et vraiment suggestif ; la généralité de l'Analyse y est associée aux suggestions de l'intuition géométrique ; il a contribué puissamment à répandre le penchant et le goût pour la géométrie. Cette oeuvre eut un grand succès : ~~déjà~~ ~~comme il est démontré par le fait que~~ 4 ans après (1865) elle fut traduite en allemand.

Heureusement Cremona ne s'est pas arrêté aux exigences d'une critique plus approfondie, qui aurait peut-être prétendu – si l'on voulait quitter la méthode analytique – d'une reconstruction théorie purement synthétique des courbes. Pour une théorie vraiment synthétique de ces courbes, il fallait surmonter notamment 2 difficultés :

1. La définition géom. de „courbe plane alg." Il fallait trouver des considérations géom. tenant lieu, pour ainsi dire, de la théorie gén. des fcts rationnelles entières d'une ou deux variables, et surtout du théorème fond. de l'algèbre : ...

2. ~~Qu'est ce qu'il faut~~ Les théorèmes gén. de l'algèbre n'acquièrent leur pleine validité qu'avec les imaginaires. Mais comment peut-on définir les points imag. d'un plan ? Une théorie purement géom. des éléments imag. avait été donnée par v. Staudt dans ses „Beiträge" 1856-60, mais elle était lourde et compliquée.

Des essais pour surmonter ces difficultés ont été faits plus tard par Ernst Kötter (Grundzüge einer rein geom. Theorie der alg. ebenen Kurven – Berlin 1887), et en Italie par De Paolis (1887-92). Ce sont des constructions intéressantes par leur méthode, mais ~~elles~~ on ne saurait dire qu'elles aient apporté un véritable ~~....~~ contribut au progrès et à la diffusion de ces théories.

imaginaires avait été ~~bien~~ donnée par v. Staudt dans ses „Beiträge" [1] 1856–60 ; mais elle était lourde et compliquée, et n'a pas reçu d'ultérieurs développements

Cremona ~~ne s'est~~ n'a ~~pas arrêté, à ces difficultés je dis~~ heureusement, n'a pas été arrêté par ces difficultés, par ces exigeances d'une critique plus approfondie. § Il considère dès le commencement un plan comme l'ensemble de tous ~~ses~~ points réels et imaginaires ; et il définit une ~~la~~ courbe alg. d'ordre n simplement par la propriété d'être rencontrée par une ligne droite en pos. gén. en n points, indifféremment réels ou imag. Obliger une courbe à passer par un point donné, c'est une cond. simple (ce qu'on exprime ...) ; ~~c'est~~ si l'on veut qu'elle y soit tangente à une droite donnée, c'est une autre cond ; si elle doit y être tangente en même temps à une autre droite, c'est une 3me cond., et cela signifie que ce point sera pour la courbe un point double. ~~Par ces~~ Il parvient ainsi à la théorie gén. de points multiples, au nombre de points $= \frac{n(n+3)}{2}$ par lesquels une C^n est en général déterminée, aux théorèmes de Bezout et aux autres ~~th~~ prop. sur les inters. de deux courbes. Il développe toute la théorie de la polarité, ~~de la Hessienne et~~ et fait usage ~~continuel~~ de la ~~Hessienne d'une~~, ~~de la Cayleyienne d'une courbe donnée~~, la propriété que 2 faisceaux π de C^m et C^n engendrent une C^{m+n} ; et donne aussi ~~les propriétés de la Jacobienne d'un réseau de courbes~~

~~Il donne aussi beaucoup de propositions nouvelles. On peut dire, peut être~~, qu'il n'est pas toujours, peut-être, tout-à-fait rigoureux dans les détails de son exposition ; mais les propositions qu'il donne sont exactes, le mémoire est très agréable à lire, et vraiment „suggestif" ; ~~et est continuellement~~ fournit ~~l'occasion à penser à d'autres problèmes~~ questions ; 7 Cet oeuvre eut un grand succès ; ~~elle~~ il fut traduite en allemand dès 1865

§ La généralité de l'Analyse y est associée aux suggestions de l'intuition géom.

7 il a contribué puissamment à répandre en Italie le penchant pour la géométrie

Je ne donne pas de détails sur la théorie des surfaces.

J'ajoute seulement que, plus tard, des essais ont été faits pour une théorie tout-à-fait synthétiques des courbes et surf. alg., surmontant les 2 diff. dont j'ai parlé

E. Kötter – Grundzüge einer rein geom. Theorie der ebenen alg. Kurven – Berlin 1887

De Paolis – 1887–92 – m. 1892 (Talent)

birat = alg + biunivoq.
p. fond.

Nous allons parler maintenant des transf. bir. (Crem) entre 2 plans.
Dans ~~une~~ transf. homographique entre 2 plans, aux points d'une droite correspondent aussi les points d'une droite ~~, dans l'espace, aux points d'un plan aussi les p. d'un plan~~. Il s'agit maintenant d'une corresp. ~~biunivoque~~ entre 2 plans, telle qu'aux points d'une droite corresp. les points d'une ligne alg. de degré $n > 1$. ~~Il y~~ On en avait déjà rencontré quelques exemples, des cas particuliers ; les „Kreisverw." de Moebius = transf. par rayons réc. ~~; d'autres et par Cremona et Steiner, l'amiral de Jonquières avait aussi 1859 présenté une note à l'Acad. d. Sc. de Paris, qu'il retira ensuite et publia seulement 1864~~. Mais ce fut Cremona qui comprit l'importance et la généralité de la question, et en donne déjà dans son premier Mémoire 1863 la solution complète.

~~Tandis que deux droites dans le plan se rencontrent en un point, deux C^n ont n^2 points communs. Pour rendre la corresp. biunivoque, il faut que de ces n^2 points tous moins un soient fixes, de sorte que...~~

Je vais commencer par le cas le plus simple, $n = 2$, c. à d. que les lignes de l'un plan qui corresp. aux droites de l'autre soient des coniques = transf. quadr. – Il faut que ces ∞^2 coniques aient 3 points en commun ; si ces 3 points sont distincts ... on peut les prendre comme sommets du triangle de référence des coordonnées, et l'on aura le réseau de coniques :

$$\lambda_1 x_2 x_3 + \lambda_2 x_3 x_1 + \lambda_3 x_1 x_2 = 0$$

et la transformation :

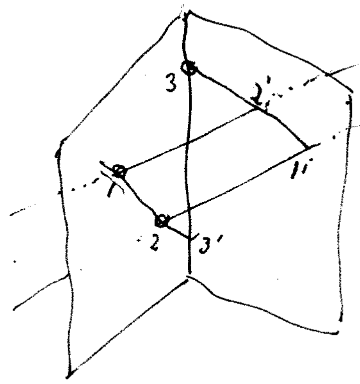
$$y_1 = \rho x_2 x_3 \qquad y_2 = \rho x_3 x_1 \qquad y_3 = \rho x_1 x_2$$

$$y_1 : y_2 : y_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2 = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}$$

~~Et aux lignes droites du plan (x) corresp. aussi les coniques :~~

$$\cancel{\mu_1 y_2 y_3 + \ldots = 0}$$

Remarquons toute de suite qu'à une ligne droite passant par un des points fond. $y_1 + k y_2 = 0$ corresp. la conique $x_2 x_3 + k x_3 x_1 = 0$, composée de la droite fixe $x_3 = 0$ et d'une autre droite $x_2 + k x_1 = 0$ variable avec la première. C.a.d. qu'au point fond. 3 corresp. toute la droite $x_3 = 0$ ($y_1 = y_2 = 0$, $y_3 \neq 0$. D. $x_3 = 0$) … La transf est univoque, mais avec des exceptions (les 3 points fond. dans chacun des 2 plans).



Costruz^e Steiner

si nous avons 2 plans, plan (x) et plan (y), et

~~Dans le cas le plus général~~, si nous posons les coord. homogènes y_i proportionnelles à 3 ~~formes~~ pol. hom. d'ordre n en $x_1 x_2 x_3$:

(1) $$y_i = \rho\, \varphi_i(x_1, x_2 x_3)$$

à tout point (x) correspondra gén^t un point (y) ~~sauf dans le cas except. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 =$~~ ; mais si (y) est donné, ~~en résolvant ces éq. par rapport aux x_i~~ et on le considère comme ~~centre d'un faisceau de droites~~, interSection de 2 droites, les points (x) qui lui corresp. seront donnés par les inters. de deux φ aux droites $\lambda_1 y_1 + \dots = 0$ les courbes $\lambda_1 \varphi_1 + \dots = 0$ c.a.d. l'on aura

$$\cancel{\frac{y_1}{y_3} = \frac{\varphi_1}{\varphi_3} \qquad \frac{y_2}{y_3} = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}}$$

~~on a~~ ordin^t n^2 solutions. Pour ~~abaisser~~ réduire ce degré de la transf inverse il faut que les courbes φ possèdent des points communs, des points-base et qu'on considère seulement les intersections variables de deux φ – les points base s'appellent aussi points fondamentaux. Pour ces points les y_i sont indéterminés: à chacun de ces points corresp. dans le plan (y) une ligne

Comme un point base de mult^é r absorbe r^2 des n^2 int., si une seulement des n^2 inters. doit être variable, nous aurons:

(2) $$\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 + \dots + r^2 \alpha_r + \dots + (n-1)^2 \alpha_{n-1} = n^2 - 1$$

relation qui exprime que le degré du réseau est 1: c.a.d. que le réseau est homaloïde. (Sylvester)

D'autre part, comme les courbes φ doivent être en nombre de ∞^2, il faudrait que ces mêmes conditions équivalent à $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ cond. simples:

(3) $$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3 + \dots + \frac{r(r+1)}{2}\alpha_r + \dots + \frac{(n-1)n}{2}\alpha_{n-1} = \frac{n(n+3)}{2} - 2$$

Ces deux éq., données par Cr., caractérisent les rés. homal. Toute solution de ces éq.

Le nombre n est le même pour les 2 plans ; mais les solutions nombres α ne sont pas nécess. les mêmes dans les 2 plans.

Aux droites du plan (x) corresp. ainsi dans le plan (y) des C^n.

On a aussi :

$$\sum r\alpha_r = 3(n-1)$$

Comme à chaque point-base r^{ple} corresp. dans le plan (y) une C^r on voit que l'ensemble de ces courbes fond. est une $C^{3(n-1)}$ et c'est la Jacobienne du réseau homal. dans le plan (y).

par des nombres entiers positifs (zéro inclus) donne lieu à ~~un réseau~~ un réseau de courbes φ ; et quand ces courbes sont irréd, il suffit de ~~référer~~ rapporter ce réseau homal. au plan réglé pour avoir la ~~plus~~ transf de Cremona la plus générale. ~~La condition d'irréductibilité est essentielle, et elle n'est pas nécessᵗ vérifiée pour toutes solution des 2 éq.~~ — La solution $\alpha_{n-1}=1$, $\alpha_1 = 2(n-1)$, ce sont les transf de Jonquières.

La différence des 2 éq. donne

$$\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + \binom{r}{2}\alpha_r + \cdots + \binom{n-1}{2}\alpha_{n-1} = n^2 - \frac{n(n+3)}{2} + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Si $n > 2$, il y a toujours des points multiples.

En considérant un p. multiple d'ordre r comme équivalent à $\binom{r}{2}$ p. doubles, c'est cela le nombre total des p.d. du réseau — On démontre très simplement qu'une C^n irréd. ne peut avoir plus de $\frac{n-1 \cdot n-2}{2}$ p.d., considérant ... ; et si la C^n a d points doubles, la diff $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$ s'appelle genre de la courbe. Les courbes d'un réseau homaloïde ~~sont~~ toujours de genre zéro (droite, conique, aussi).

On appelle courbe rationnelle toute courbe, plane ou gauche, telle que les coordonnées ~~d'un~~ de ces points s'expriment ~~par des~~ rationnellement en fonction d'un paramètre :

$$x = f(t) \qquad y = \varphi(t) \qquad z = \psi(t)$$

Il peut arriver qu'un même point de la courbe s'obtienne pour plusieurs, disons k valeurs du paramètre — Ex. si f, φ, ψ sont des fonct. ration. de t^2 .. t^n .. Un théorème important de Lüroth (Math. Ann. 9 - 1875) affirme que dans ce cas il existe toujours une fct. rationnelle $u(t)$, ~~qui~~ prenant pour tous les k valeurs de t une même valeur ; et que les x y z peuvent s'exprimer aussi ~~en~~ rationᵗ en fct. de u, en sorte que l'on aie une corresp biunivoque — biunivoque — entre les points de la courbe et les valeurs de u, c.a.d. les points d'une droite.

Une courbe rationnelle peut toujours se ~~référer~~ mettre en corresp. birat. avec une droite.

Les courbes rationnelles sont aussi de genre zero, et inversement.

Deux courbes planes qui se corresp. dans une corresp. de Cremona ont toujours le meme genre.

Le produit de deux transf. quadratiques dans un même plan est toujours une transf de Cremona, mais ~~un~~ n'est pas **en général** une transf quadr.;
~~Clifford~~, Noether, Rosanes ont démontré 1869-71 ~~que~~ Inversement, toute transf de Cremona peut être ~~en~~ obtenue par une suite de transf. quadratiques. Mais ils n'avaient pas considéré tous les cas possibles de points base ~~connexes~~ voisins. Noether lui-même donne quelques perfectionnements (M. Ann. 5, 1872); une exception plus importante fut élevée 1901 par C. Segre, mais celle-ci aussi fut éliminée par G. Castelnuovo. Aujourd'hui il y a aussi d'autres analyses, par lesquelle cette propriété est complètement démontrée. (Enriques-Chisini, Courbes et fonct. alg. d'une variable, Paris 1926).

~~En généralisant de cette~~ Cremona a aussi donné la théorie générale des transf birationnelles entre 2 espaces — 1870-71. Les premiers ex. par Cayley, Noether, Cremona; celui-ci donne une méthode gén. pour la construction des syst. des surf qui remplacent les réseaux hom. d. courbes

Au lieu d'un réseau de ∞^2 courbes planes passant par des points fixes, en sorte que deux d'entre elles aient une seule intersec. variable, il nous faut maintenant un système linéaire ∞^3 de surfaces d'un ordre n:

(1) $$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) + \lambda_4 f_4(x) = 0$$

passant par des courbes et des points isolés fixes, en sorte que 3 d'entre elles avant une seule inters. variable. Alors, en posant:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = f_1 : f_2 : f_3 : f_4$$

on aura défini une transf. birat. entre les 2 espaces (x) et (y); et ces équations pourront aussi être résolues par rapport aux x:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1(y) : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

où les φ sont des fonct. rat. entières des y, d'un même degré, qui peut être aussi bien $= n$ ou $\neq n$.

Aux points d'un plan $\lambda_1 y_1 + \dots = 0$ corresp. évidemment les points d'une surface $\lambda_1 \varphi_1 + \dots = 0$. La question s'entrelace pourtant avec la représentation des surfaces ~~(1)~~ (1) sur un plan, à propos de laquelle les travaux de Cremona se sont aussi rencontrés avec ceux de Clebsch et Noether. Ce sont de surface rationnelles (c.a.d. tellesque les coord. d'un point de ces surfaces s'expriment en fonct. rat. de 2 paramètres), ou homoloïdes - et on appelle aussi homoloïdes les systèmes (1).

Ex- Les surfaces du 2^{nd} degré passant par une conique, et par un autre point en plus. (les $f = 0$ et les $\varphi = 0$ au même temps).

2^{me} Ex. Supposons qu'un espace de points (y) soit référé πment à trois différents espaces de plans superposés, dans l'espace de coordonnées x ; en sorte qu'au point (y) corresp. resp. les 3 plans

$$(2) \qquad \begin{aligned} y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 + y_4 A_4 &= 0 \\ y_1 B_1 + \text{———} &= 0 \\ y_1 C_1 + \text{———} &= 0 \end{aligned}$$

les A, B, C étant des fonct. linéaires homogènes des x (les A indépend., les B aussi, les C aussi). Faisons encore corresp. au point (y) le point intersection de ces 3 plans dans l'espace (x) : (2 p. corresp. x. y satisfont aux 3 eq. (2)):

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = [A_2 B_3 C_4] : [A_3 B_4 C_1] : [A_4 B_1 C_2] : [A_1 B_2 C_3]$$

Ces éq. définissent une trasf. birat. $n = 3$. Aux plans $\lambda_1 y_1 + \dots = 0$ de l'espace (y) corresp. dans l'espace (x) les surf. du $3^{ème}$ ordre:

$$(1') \qquad \lambda_1 [A_2 B_3 C_4] + \text{———} = 0$$

passant toutes par la courbe dont les points satisfont à toutes les éq.

$$\left\| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 \\ B_1 \text{———} \\ C_1 \text{———} \end{matrix} \right\| = 0$$

L'algèbre nous dit que c'est une courbe du $6^{ème}$ ordre et de genre 3. Aux lignes droites de l'espace (y) corresp. des lignes gauches du $3^{ème}$ ordre, rencontrant la C^6 en 8 points.

Aux ~~points (x) corres~~ plans de l'espace (x) corresp. aussi dans l'espace (y) des surfaces du $3^{ème}$ ordre

~~De la considération des transf birat comme généralisation des transf π, on pouvait maintenant passer à la recherche des propr. géom qui sont invariantes par rapport aux transf birat~~ — ~~nous~~ et après aussi on „Programme d'Erlangen" de Klein (1872). Nous verrons bientôt dans quelle direction notamment cela a été fait

En généralisant de cette façon la notion de transf π, Cremona parvenait aussi à donner aux géomètres une variété ~~presque~~ bien plus étendue de méthodes permettant de déduire de nouvelles propriétés des figures transformées ~~d'être~~, à partir de figures géométriques déjà ~~bien~~ connues. On pouvait même être tenté de répéter ~~la~~ à ce propos les mots ~~fragment~~ de Chasles à la fin de son Ap. Hist (1837):

Peut donc qui voudra, dans l'état actuel de la Science, généraliser et créer en géométrie; le génie n'est plus nécessaire pour ajouter une pierre à l'édifice — Chacun peut prendre une vérité quelconque connue, la soumettre aux divers principes généraux de transf, en retirer d'autres vérités différentes ou plus générales; ~~qui~~ celles-ci seront à leur tour susceptibles de pareilles opérations, etc.

Heureusement l'École Italienne a bien réagi ~~par~~ contre cette possible tendance, que d'Ovidio a appelée „tic-tac géométrie", tandis que C. Segre, (1863–1924), un des grands maîtres ~~de notre gen~~ Italiens, a toujours mis en garde ses élèves contre ces productions futiles, conduisant à une dégénération du développement scientifique.

C'était une autre direction qu'il fallait ~~suivre~~ prendre, et que l'on a en effet suivie. Comme la géom. ~~π est l'étude de~~ élémentaire est l'étude des propriétés des figures qui sont invariantes par rapport aux similitudes, et la géom. π ... par rapport aux transf π, il était maintenant le ~~temps~~ moment de passer à la recherche des propriétés ~~de~~ invariantes par rapport aux transf birationnelles — Et c'était ~~aussi ce~~ bien la direction qu'avait signalée Klein dans son „Programme d'Erlangen" (1872) „Vergleichende Betrachtungen ...", d'après lequel chaque branche de géom. est la recherche des propriétés des figures invariantes par rapport à un „groupe" de transf.

La ~~conc~~ notion des transf birat a toutefois reçu une application, une tournure un peu différente. Une courbe plan alg. était donnée:

(1) $$f(xy)=0$$

si nous effectuons une transf rationnelle (univoque rationnelle):

(2) $$X=\varphi(xy) \qquad Y=\psi(xy) \qquad \varphi, \psi \text{ f. rat.}$$

l'élimination de $x\,y$ entre ces 3 ég. conduit à une courbe

$$F(XY)=0$$

qui est en général une transformée birat. de $f=0$ ~~puisque non seulement à un p. (xy) de f=0 corresp. un seul point (XY) de F=0, mais aussi inversement des 3 ég. (1) et (2)~~

La transf. n'est pas birat. pour le plan entier, mais elle est birat par rapport aux 2 courbes... les 3 éq. (1) et (2) ~~sont compatibles~~ sont compatibles, lorsque X, Y satisfont à la F=0, mais n'ont en général qu'une seule solution. Dans la transf. inverse de la (2) à un point (X Y) corresp. en général plusieurs points (x y); mais si le premier app. à la courbe F=0, un seul des (x y), en général appartiendra à la courbe f=0. D'une façon précise, il suffit pour cela que, si l'on considère les k > 1 points (x y) corresp. à un point (X Y) particulier, la courbe f=0 contienne un et un seulement de ces points.

~~La transf. n'est pas birat. pour le plan entier, mais elle est telle par rapport aux 2 courbes f=0 e F=0. Les fonct. φ et ψ peuvent être aussi ration., pas néces. entières.~~ À chaque point de F=0 corresp. dans le plan (x y), k > 1 points, dont 1 est sur f=0, les autres sur une autre C qui ne nous intéresse pas.

On peut aussi considérer une transf ~~semblable~~ analogue à la précéd. entre ~~cette~~ ~~sur~~ la courbe plane f=0 et une C. gauche. Si nous prenons 3 fct. rationnelles de x y, que nous pouvons supposer réduites au même dén.

$$X = \frac{\varphi_1(x y)}{\varphi_0(x y)} \qquad Y = \frac{\varphi_2}{\varphi_0} \qquad Z = \frac{\varphi_3}{\varphi_0}$$

celles-ci seront les éq. paramétriques – 2 param. liés par une éq. alg. – d'une courbe gauche, en général en corresp. ~~algébrique et biunivoque t.a.d.~~ birationnelle – avec la f=0. Et le nombre des inters variables de la courbe f=0 avec les courbes:

$$a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3 + d\varphi_0 = 0$$

est le nombre des inters de cette courbe gauche avec les plans, c.a.d. son ordre.

Maintenant il faut prendre contact avec la géom. à n dimensions. De même qu'une question d'Analyse ~~peut être~~ avec 2 ou 3 variables indép. peut être traduite par la géom. anal. en une question de géom. du plan ou de l'espace, ~~on peut aussi interpréter~~ une question avec n var. peut être interprétée par la géom. à n dim. Ce n'était pas une nouveauté; depuis l'„Ausdehnungslehre" de Grassmann de 1844 (th. de l'extension), depuis la ~~Habilitation conférence~~ leçon tenue par Riemann 1854 pour être nommé privat docent (publiée 1867),

nous nous maintenant
les Mém de...

des questions se rapportant à n dims se rencontrent aussi ~~chez~~ Plücker, Cayley
Jordan; elles s'affirment plus encore dans des travaux de Klein
(G.N.E., Liniengeom) et de Clifford (1878). En 1882 ~~nous avons enfin~~ le 1er ~~Mém. de Géom.~~ Π
à n dims par G. Veronese. Veronese avait été élève de Fiedler à l'Ec. Pol. de Zurich; ensuite il fit son ~~doctorat~~
à Rome chez Cremona, par une thèse 1852–19 sur l'hexagr. myst. de Pascal, qu'il avait déjà commencé à l'occasion d'une
conférence au Sém. de Zurich. En 1880-82 il suivit des cours à Leipzig chez Klein – et il publia dans le Vol. 19 des M. A.
~~le fac~~ un long ~~Mémoire~~ en allemand, plus de 70 pg., ~~le premier de géom Π à n dims~~ „Behandlung...."
~~Comme~~ De même qu'on peut engendrer l'espace ord, à 3 dims, par projection
...., il ~~engen~~ obtient aussi ..... Avec toute l'agilité des méthodes ~~to~~ de Cremona
il ~~donne~~ pose les ~~fondame~~ bases de la géom. Π à n dims, particulièrement pas en
ce qui concerne la génération de courbes et surfaces par des formes Π
(C^2 fasci diretti). Et 1883-88 nombre de questions de géom Π à n dims
viennent d'être étudiées et résolues par Corrado Segre – ufo Brioni

après ~~Cremona~~
1ère ~~période 1880-90~~
Ver. - Segre

espace linéaire à n dims une var. quelc d'éléments en corresp. et ~~univ.~~ biunivoque avec les valeurs (réelles ou compl.) des rapports mutuels de n+1 coord. homog. $x_0 \ldots x_n$

Libro Bertini

Dér. géom. ..

Si nous considérons maintenant encore une courbe plane alg. $f(xy)=0$.
et les groupes de ses points d'inters. avec les courbes du système linéaire ∞^n,
en supposant que chaque groupe soit découpé par 1 seule de ces courbes (....):
(*) $\lambda_0 \varphi_0(xy) + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_n \varphi_n = 0$

et si nous posons:

$$X_i = \frac{\varphi_i(xy)}{\varphi_0(xy)} \qquad i = 1 \cdot 2 \ldots n$$

nous avons une transf. birat. ~~de~~ entre la courbe $f=0$ ~~la courbe~~ et une courbe Γ
de l'espace à n dims]; et aux groupes de points variables découpés sur
$f=0$ par les courbes (*) corresp. les groupes ~~donc~~ des inters. de Γ avec
les S_{n-1} de S_n; et k est l'ordre de cette courbe. – Les caractères de la série lin.
(p. multiples, groupes neutres ... donnent des caract. Π de Γ – Le Γ représente la série lin.

] S_n R_n

d groupes ~~qui~~ formant une „série linéaire" d'ordre k, si k est le nombre des p. var.

Il s'agit donc d'une généralisation des transf de Cremona, puisque
on parle de transf birat. entre 2 courbes, sans particulier regard aux espaces
dans lesquels elles sont contenues] ~~et il sera de même pour des transf~~ birat
entre 2 surfaces, 2 var. à 3 dims, etc.; et l'attention se concentre
sur les séries linéaires de groupes de points, qui sont bien une notion
invariante par rapport aux transf birat des courbes.] Ce n'était pas une
question tout à fait nouvelle, comme je vais dire; mais la géom à n dims

L la courbe est pour ainsi dire déliée, détachée de son espace

9 Programme de Klein.

lui a donné un nouvel élan

l'a pour ainsi dire „projectivisée"; a donné de nouvelles méthodes pour la développer et parvenir à des nouveaux résultats; a permis de passer ensuite, ~~autour~~ ~~de~~ 1895 - 1910, avec le plus grand succès, aux questions sur les surfaces alg., et ensuite à d'autres qui ~~à présent~~ aujourd'hui ne sont pas ~~encore~~ épuisées.

jusqu'à présent { Geom. birat. Geom π S_n

1ère période 1880-92 - Veronese - Segre - Cast. (géom. courbes)

2) 1893 - 1905 - surfaces - Cast. Enr. [Encyklopädie]

les questions s'entrelacent

3) après 1905 - Severi - courbes, surf. - M_k

fonctionnel p. de vue ~~[illegible]~~ algébrique alg. arythm. (1)

Comme je viens de dire, la considération des séries linéaires ~~d'était~~ déjà présentée en d'autres questions sous 3 diff. points de vue:

En nous bornant à considérer sur la courbe $f(xy)=0$ les ∞^1 groupes disons de k points variables G_k découpés par le faisceau:

$$\varphi_1(xy) - t\,\varphi_2(xy) = 0$$

l'on voit que $t = \frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_2(xy)}$ est une fonct. rationnelle du point (xy) de la courbe ~~aussi, si l'on veut, une fonct.~~ ~~algébrique de la x~~ prenant une même valeur t dans tous les points d'un même G_k. Les G_k sont les groupes de niveau de la fonct. $t(xy)$; parmi ces groupes figurent celui des zéros $(\varphi_1=0)$ et celui des pôles $(\varphi_2=0)$ $(t=\infty)$. ~~Les points base du faisceau~~ ~~$\varphi_1=\varphi_2=0$ qui se trouvent sur f : la fonction $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ prend apparemment~~ ~~une forme indeterminée, mais c'est une exception apparente, que l'on peut~~ ~~faire disparaître en déterminant la valeur de la fonction par continuité~~

Ces considérations ~~[illegible]~~ ~~C'est le point de vue qu'adopte peu Riemann dans sa~~ „Theorie der Abelschen Funktionen" (1857), ~~dans laquelle~~ Riemann l'intérêt se y plus encore que sur ces fonctions, se concentre sur leurs intégrales $\int t(xy)\,dx$ - y étant la fct. de x définie par $f(xy)=0$. ~~Ce sont naturellement~~ La x étant une variable complexe, ce sont naturellement des intégrales curvilignes, dont la valeur, pour des limites données, peut dépendre du chemin d'intégration.

une série linéaire découpée sur $f(xy)=0$ par un système $\lambda_0\varphi_0+\lambda_1\varphi_1+\dots+\lambda_r\varphi_r=0$ de r dim. donne lieu à une fct. ration. du point (xy):

$$\lambda_0 = -\frac{\lambda_1\varphi_1+\dots+\lambda_r\varphi_r}{\varphi_0}$$

dépendant de plusieurs param. et avec les pôles $\varphi_0=0$ fixes. Le nombre de param. dont dépend cette fct. est donné par le théor. de RR

On voit pourtant ~~l'opportunité, presque~~ la nécessité, de représenter l'ensemble des points réels et complexes de la courbe $f=0$ par un continuum superficiel. Pour une courbe rationnelle, que l'on peut mettre en correspondance birat. avec l'ensemble des valeurs d'un ~~seul~~ paramètre, c.a.d. d'une var. complexe, ce continuum réel ~~est donné~~, un le plan de Gauss avec un seul point à l'infini, ou bien par la sphère. Pour les courbes de genre $p>0$, il faut aussi une surface réelle dont les points correspondent ~~ent~~ d'une façon biunivoque et continue aux couples de valeurs de $x\,y$ satisfaisant à l'éq. $f(xy)=0$. Ce sont les surfaces de Riemann à plusieurs feuillets superposés avec des coupures, et réunis entre eux par des passages établis d'une façon convenable; et celles ~~et celles longues coupures, et elles~~ aussi qui s'en déduisent par des ~~transf~~ déformations continues (transf. topologiques), c.a.d. en considérant ces surfaces comme des voiles flexibles et extensibles; considération qui diff. de celle dont on se sert dans la geom. non métrique

Pour les courbes de genre 1, la forme la plus simple de la surface de R. est donnée par la considération suivante. Dans la figure bien connue des parallélogrammes des périodes, telle qu'on la rencontre dans la théorie des fonction elliptiques, l'un des ces parallgr. ABCD, y inclus deux cotés voisins DA, AB, et non les 2 autres, leurs opposés et équivalents, ~~est exactement~~ un champ fondamental, dont les points sont exactement en corresp. biunivoque et continue avec ~~les p~~ ceux, réels et imag., d'une courbe de genre 1.

En prenant, pour plus de simplicité, un rectangle – en soudant les cotés opposés et équivalents AB e DC, on a un cylindre – et en soudant les 2 autres cotés opposés, on a un tore (anneau) – qui est bien, pour $p=1$, la forme la plus simple de la surf. de R.

En enflant le tore d'un coté et en le rendant minces de l'autre,

Pagina 60 parte prima

Pagina 60 parte soconda

En enflant le tore d'un coté et en le rendant mince de l'autre, on a, par déformation, une sphère avec une anse (un manchon).

Pour p quelconque, sphère avec p anses, ou gâteau avec p trous.

Vous voyez bien qu'il serait absolument impossible d'établir une corresp. biunivoque et continue, par déformation, entre une sphère et un anneau — ou plus génᵗ entre 2 sphères avec un nombre différent de anses — Le genre est pourtant invariant par rapport à des transf biunivoques et continues, en particulier par rapport à des transf birat?

La conception gén. de R. dans la théorie des fcts d'une var. complexe est de définir ~~les~~ fcts par leurs singularités. — Sur ces surfaces, il s'agit de fcts avec des singularités polaires et log^s — et qui, à cause de la connexion multiple de surfaces, peuvent avoir des périodes corresp. aux cycles non ~~nulles~~ nuls (qui ne peuvent se réduire à points) de la surface. Ce sont les int. abéliennes. Leurs dérivées, n'ayant plus des périodes, et ayant seulement de sing^tés polaires, sont bien des fcts ration. de la surface.

Mais dans le Mém. de R. le caractère algébrique de ces questions reste dans l'ombre. Après R, on est bien revenu à considérer comme fondement les équat. $f(x,y)=0$ et la courbe plane qu'elle représente. Cela a été l'oeuvre de Clebsch, qui apparaît dans ses Mém (Crelle 63-66), et dans les 2 Traités :

Clebsch–Gordan, Th der Abel'schen Fkt. 1866

Clebsch–Lindemann, Vorlesungen üb Geom. I, 1875.

Pagina 60 lato -B

2) D'autre part le vol. 7 des Math. Ann. (1873) contient un Mém. ~~fond.~~ classique de Brill et Noether: „Ueber die alg. Fkt. u. ihre Anwendung in der Geom." où, en prenant comme point de départ un théor. fond. de Noether sur la possibilité de représenter une courbe plane alg. sous la forme $Af+B\varphi=0$, où $f=0$, $\varphi=0$ sont des courbes données, et A, B des fonct. entières (polyn.) indéterminées — évidemment, pour cela, il faut que cette courbe passe par tous les points $f=\varphi=0$ et qu'elle y aie certaines singularités; théor. dont d'autres démonstr. et généralisations ont été données plus tard; M. Severi l'a même étendu au cas de plusieurs variables — on fait [une étude approfondie des séries lin. sur une courbe $F(xy)=0$. En particulier, on découpe ces séries par des syst. de courbes „adjointes" à $F=0$]... et l'on reconnait ~~l'importance~~, si $F=0$ est d'ordre m, l'importance de la série découpée par les adjointes d'ordre $m-3$. — Expos. détaillée ~~dans les~~, avec d'autres dévelop^ts, dans un Mém. de Bertini (Annali di Mat. (2). 22. 1894), dans les „Vorles. üb. alg. Geom." de Severi (1921), et dans le Traité Enriques-Chisini. (III ~~Trattato~~ geom. alg. 1926 éd. franc.)

& par des méth. purement alg.

] c.à.d.

anche Brill-Noether, Die Entwick. der Theorie der alg. Fkt. in älterer u. neuerer Zeit, Jahresber. D.M.V. 3 (1894)

3) En Allemagne aussi on avait envisagé l'étude des mêmes questions par une méth. que l'on peut appeler „algébro-arithmétique" — corresp. ~~à la~~ penchant de certains savants vers une „arithmétisation" des mathém.; d'après des travaux et des cours de Kronecker (Crelle 92 - 1882 - Ueb. eine arithm. Theorie der alg. Grössen)]. Pour éviter les restrictions portées dans les recherches alg. par les singularités des courbes $F=0$, et qui en 1882 étaient nombreuses: (ce sont juste les transf. birat. qui nous ont appris la possibilité de les éviter); et en profitant du fait que la relation entre C. ration. et les C. alg. les plus générales est en certaine façon analogue à celle entre les nombres ration. et les nombres alg., on a cherché d'appliquer à la théorie des fct. alg. les procédés de Kummer sur les nombres alg. ~~qui considèrent~~ ce qui est bien possible, jusqu'à un ~~certain~~ certain point: comme les nombres alg. d'un corps s'expriment par un certain nombre de ~~modules~~ idéaux, de même les fct. alg. d'une classe (c.à.d. sur une même surf. de R) par des modules de fcts. — Mais le „Punktbegriff" est compliqué & Hensel, II C 5, n. 10

& Dedekind-Weber, Theorie der alg. Fktnen einer Veränd. (Crelle, 92, p. 181)
K. Hensel - G. Landsberg, ..., u. ihre Anwendung auf alg. Kurven u. Abel'sche Int. 1902
Hensel, Encykl. II C 5, Arithm. Theorie der alg. Fktnen 1921
p. il collegamento: Noether, Jahresber. DMV 28 (1919), Die Arithm. Theorie der alg. Fktnen einer Ver. in ihren Beziehungen zu den übrigen Theorien u. zu der Zahlkörpertheorie.
Klein, Entwickelung I p. 320-34

~~La période de la véritable activité scientifique de Cremona n'est pas longue ; 1858–78 ; le plus~~

~~Sur la suite de sa mort je reviendrai bientôt~~ ~~de l'activité jusqu'à 1873.~~

A la fin de 1860 il est nommé prof de géom. sup. à l'Univ. de Bologna ; ~~lorsque cette ville venait justement d'être annexée au Piémont~~ ; c'était la chaire que l'on avait instituée 1846 à Paris pour Chasles ~~mais il s'agissait alors seulement de géom.~~ pour la géom. sup. π. ~~En 1866 il passa à l'E. Pol. de Milan, et~~ en) ~~dès~~ il passa 1873 à Rome, comme prof de Math. sup. et Dir. de l'Ec. des Ing., qu'il réorganisa complètement. ~~Ces deux charges il les maintint jusqu'à sa mort~~ et les exerça ;

Après avoir été prof. dans des Gymn., Univ. Bologne, E. Milan, Crem. (à partir de 1878, ~~les~~ accepta d'être transféré

Bien que mêlé à la vie politique, sénateur, ~~plusieurs~~ fois vice-prés. du Sénat et élu ~~..~~ pour 2 ans 1897–98 à en tenir la Prés., pour une courte période aussi Min. de l'Instr., il était toujours au courant des nouveautés scientifiques ; entre 1894–900 il tint plusieurs cours sur la théorie de Lie des gr. de transf. (1903) peu de jours avant de mourir il parle avec un Collègue du Tagebuch de Gauss, qu'on venait de publier dans le 10e vol. de ses Oeuvres, constatant combien de choses G. avait trouvées, sans rien en publier.

~~Il faut aussi rappeler cela, comme ces cours,~~

A Cremona l'on doit aussi l'introduction en Italie de la géom. π dans l'enseign. Univ. de ~~la 1ère année~~, même pour les Ing. ~~Je pense dire~~ Il faut bien rappeler cela, comme ce cours, qui a ~~même d'abondance d'importance~~ ~~graduellement augmenté~~ extension, a atteint peut-être 1890–1900 le sommet de sa parabole, a certainement exercé un effet puissant sur la formation des géomètres italiens (Klein le remarque aussi...) et bien des ingénieurs aussi en ont gardé un souvenir agréable, à cause de sa perfection logique et artistique (Klein, p. 14–15) M. Enriques, à Bologna, dans son cours et dans son Traité (1ère éd. 1898), y a donné une forme presque définitive, d'après v. Staudt en lignes générales, mais avec les perfectionnements didactiques nécessaires. ~~(Calcolo, moins...)~~ – Aujourd'hui ~~de~~ ~~après on commence tout de suite dans la 1ère année le cours de G. π, et l'on~~ on fait un seul cours de géom. anal. et π, dans lequel la géom. π a une part ~~beaucoup~~ bien moindre ; mais ~~il~~ on évite ainsi quelqu'une des cloisons étanches que les étudiants mettent souvent entre les différents cours. – Calcolo in 1° anno ~~étaient développés dans les 2 cours, par des méth. différentes, et cela nuisait à l'organicité de l'enseignt, et à présent~~ on fait un ~~ce cours unique~~ dans toutes nos Univ. ; ~~et la géom. π y a une place toujours moindre~~ Pour éviter autant ~~que possible les~~ cloisons étanches que les ~~étudiants ont souvent~~ du penchant à mettre entre les diff. cours.

~~peut être bien~~

~~cloisons étanches~~

La période de la plus grande activité scientifique de Cr n'est pas longue.
~~Je reviens maintenant à Cremona et à ses oeuvres scientifiques~~

1858-72 Ses oeuvres les plus importantes ~~Il s'agit~~ sont notamment ~~de~~ 2 groupes de mémoires:

1. La théorie géom. des courbes planes et des surfaces algébriques

Introd. a una teor. geom. delle curve piane (1861)

Preliminari di una teoria geom. delle sup. (1866-67), avec un ~~travail~~

qui obtint le prix Steiner de l'Ac. de Berlin 1866 × mém. classique ~~travaux~~ sur les surfaces du 3me ordre et sur d'autres ~~surf. auss~~

2. La théorie des transf. birationnelles du plan et de l'espace { 1862-64 1870

que tout le monde s'accorde à appeller „crémoniennes"

On a dit, bien à raison, que ~~ces~~ de 2 groupes de travaux l'impression ~~marquent la fin~~

dans la géom. la fin d'une période ~~de la géométrie~~ - ce serait de la géom. π, dans un sens un peu ~~plus~~ large ~~que d'habitude~~ et ~~l'autre~~ le second en ouvre une autre, ~~qui est ou~~ dont le développement, ~~est~~ peut-être les généralisations, ~~sont~~ encore en cours. Par ces transf. il a été vraiment un „bahnbrechender Forscher".

~~La théorie des courbes et surf.~~ alg. d'après Cremona est considérée ~~aujourd'hui plutôt~~ comme algèbro-géom. que comme purement ~~géométrique, synthétique~~ — Pour les C ~~et les surf.~~ planes alg. La théorie anal ~~des courbes planes~~ s'était formée et accrue ~~déjà~~ pendant le XVIIIme siècle, et ~~avait~~ d'autres progrès très importants étaient dus à Plücker; le traité de Salmon, dont la 1ère éd. parût en 1852, en donnait déjà une exposition systématique tout-à-fait satis.

Faisant.

Cremona a donné une ~~La~~ théorie de ces courbes ~~d'après Cremona est~~ qu'on pourrait appeler ~~et aussi des surf~~ algébro-géom. plutôt que vraiment ~~synthétique~~. Heureusement il ne s'est pas arrêté aux exigences qu'une critique approfondie aurait pu avancer concernant ~~synthétique~~. Il considère dès le commencement un plan comme l'ensemble de ses points réels et imag.; et définit une C. d'ordre n par la propriété d'être rencontrée par une ligne droite en pos gén. en n points, indifféremment réels ou imag. — Il construit la théorie gén. des points multiples; donne le nombre $\frac{n(n+3)}{2}$ des points par lesquels une C^n est en général déterminée; parvient au théorème de Bézout et aux autres sur les intersect. de 2 courbes. Il développe la théorie de la polarité; les propriété de la Hessienne et

} ~~sur~~ la déf. ~~géom~~ purement géom de la C alg. et ~~sur~~ la théorie des imag

$$(a+b)_j = (a+C_n)_j = a_j + 2C_{\cancel{n}} = |a_j| + 2|b|$$

~~Groupes virtuels comme différences de groupes donnés, indépendamment de leur existence. Séries virtuelles (analog. nombres négatifs).~~ ~~(Severi)~~

Soit maintenant $|a|, |b|$ 2 séries lin. d'ordre m, n sur une même courbe, $a+b$ leur somme, a_j, b_j, $(a+b)_j$ leurs séries Jacobiennes

$$(a+b)_j = (a+C_n)_j = a_j + 2C_n = a_j + 2b = b_j + 2a$$

$$|(a+b)_j| = |a_j + 2b| = |b_j + 2a|$$

d'où l'on déduit la relation fond.

$$|a_j - 2a| = |b_j - 2b|$$

c.à.d la série $|a_j - 2a|$, effective ou virtuelle, dépend seulement de la courbe, et non du choix de la série $|a|$. Elle s'appelle <u>série canonique</u> de la courbe, et est liée invariantivement avec celle ci.

En nous référant à une courbe plane et à la série g_n découpée sur celle-ci par les droites du plan, les g_n^1 qui y ~~sont contenues sont découpées par les droites d'un faisceau P~~, et les groupes Jacobiens de ces g_n^1 par les C^{n-1} polaires des points P, qui sont des C^{n-2} adjointes de la C^n. Il est alors ~~sans~~ clair que cette série Jacobienne contient <u>$2g_n$</u> s'il existe des courbes adjointes d'ordre <u>$n-3$</u> (lesquelles, ajoutées à 2 droites quelconques, forment des C^{n-1} adjointes)

Si la courbe a d p. doubles, et est de genre $p = \frac{n-1 \cdot n-2}{2} - d$ les C^{n-3} adjointes dépendent d'un nombre de param.

$$\geq \frac{(n-3)n}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + p = p-1$$

Il en existe donc certainement si $p \geq 1$ et la série can. est alors d'ordre

$$2(n+p-1) - 2n = 2p-2 \qquad n(n-3) - 2\left(\frac{n-1 \cdot n-2}{2} - p\right) = 2p-2$$

<u>On démontre que si $p > 1$ la série canon. complète a précisément l'ordre $2p-2$ et la dim. $p-1$.</u>

Si $p=1$, c'est la série <u>zero</u> (nulle) – Ex C_1^3.

Pour $p=0$, c.à.d. sur les courbes rationnelles, la série can. est virtuelle, d'ordre -2.

L'invariance de la série can. démontrée par cette voie, entraîne comme ~~par~~ conséquence l'invariance ~~aussi~~ de ses caractères, l'ordre et la dim., et du genre p.

Si une courbe ~~pl.~~ plane d'ordre n est transformée birat^t en une autre d'ordre m, la série déterminée sur la première par ses adjointes d'ordre $n-3$ se transforme

. . . .

]groupes spéciaux...

théorème RR

Les séries lin. contenues dans la série canonique – celle-ci incluse – s'appellent séries spéciales]. La dim. d'une série complète, d'ordre n ~~est $n-p$ est~~ est exactement $n-p+i$, si chaque groupe appartient à $i \geq 0$ ~~∞^i~~ gr. can. indép. | i indice de spécialité

$n-p$, pour les séries non spéciales. – certainement si $n > 2p-2$.

$n-p+1$ pour la série canonique, $i=1$

Envisageons maintenant la courbe hypersp. qui représ. la série canonique d'une C_p donnée

(φ-Kurven)

$y_i = \varphi_i(x)$

Courbes canoniques (non hyperelliptiques) – C^{2p-2} de S_{p-1} — Deux courbes transformables birat^{te} l'une dans l'autre définissent des courbes can. $\overline{\wedge}$.

$p=2$ $p=3$, $p=4$, $p=5$ (cas général)

(Severi, Vorlesungen p. 246) – Se $\varphi(zu)=0$ è un'aggiunta di ord. $n-3$ di $f(zu)=0$, l'integrale $\int \frac{\varphi(zu)}{f'_u}\,dz$ [$f'_u=0$ è la polare del punto ∞ asse u risp. $f=0$] è continuo e finito su tutta la sup. (esame: p. ∞ di $f=0$, e p. comuni $f=f'_u=0$) ed è perciò int. Abeliano 1ª specie (p parametri).

(266-68)

Si $x_1 \ldots x_n$ est un groupe qui varie dans une g_n^1, et t en est le param. et si $w(x)$ est une intégrale abélienne quelconque sur la surface R, la somme $\sum_i w(x_i)$, ~~les~~ l'intégration étant faite à partir d'un point initial commun, peut s'exprimer sous la forme $\int \psi(t)\,dt$, ψ étant une fct. rat.

Si $w(x)$ est une intégrale de 1ère espèce, la somme est constante, sauf variations par multiples des périodes.

Teor. Abel

In 1883 an ~~new~~ other geometer of 1st rank ~~enters in~~ takes the field: Segre, who, in the very big paper presented for his degree, developed thoroughly one of the arguments sketched by Veronese; the theory of quadrics in the n-dim. space, that is of the loci represented by ~~one~~ equating to zero a homog. polyn. of the 2nd deg. involving n+1 variables $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$. He gives a complete project. geom. of quadrics & pencils of quadrics ($f + \lambda \varphi = 0$), with particular applications, for $n=5$, to line-geometry of S_3. (forme ∞^4 ....) ..... Curves, Surfaces, 3-dim manifolds, which are contained in the quadric $r_{12} r_{34} + \dots = 0$ may be considered as systems of rays, ruled surfaces, congruences, complexes, of st. lines. — In the period 1883-87 he studied a great number of ~~quest~~ ~~proj~~ other questions of projective n-dim. geom., solving all thoroughly; concerning many kinds of curves, surfaces, manifolds, ... those of the lower orders, or those which admit certain simple generations. ~~And as~~ In 1888 he was appointed to the professorship of „Higher Geom" at the Univ. of Turin, which he ~~now~~ still detains ~~since 35 years~~; and he became so, just in the moment in which Cremona's scientific activity had completely ceased, the new leader of Ital. geometry, the founder of a new school. He was also able to learn, to make to his own, and to let estimate by his pupils all ~~wa~~ that, for the development of his programme, was to be got from the most important foreign mathematicians (Klein, Noether, Lie; Cayley, Zeuthen, Darboux, ...); and by means of ~~his~~ his 35 years of teaching, about ~~on~~ all most various branches of geometry, diff. and enumerative geom. (abzähl. Geom.) included, he had a very great influence on the development of all geometry in Italy. As his direct pupils, who already became University professors, I shall mention - - Beppo Levi; Severi; Giambelli; Terracini; but he gave also to secondary schools many good teachers, and many other geometers, though they were not his direct pupils, had a great advantage from personal relations with him

Among these, Castelnuovo, a pupil of Veronese (degree 1887) ~~went 1887~~-91 ~~to Turin as assistant professor~~ and Enriques, a pupil of De Paolis (1891). ~~had both much~~ Castelnuovo went 1887-91 to Turin as assistant professor, and had in this period dayly continuous exchanges of ideas with Segre: the geometrical theory of groups of points on a curve had ~~the ge~~ its origin in their personal talks. - Castelnuovo went in 1891 ~~to Rome~~, as extraord. prof., to Rome, where he is now; and he met there with Enriques. - Geometry on surfaces begins with them, about 1893; and, with Severi (degree 1900, Turin), they constituted what may be called the fundamental triangle of ~~geometry~~ the full development of geometry of birational transf. - that is of properties of algebraic ~~surf~~ manifolds, which are invariant with respect ~~to~~ to birational transf.

n-dim. space = S_n (attività math. 1880-90 – v. libro Bertini) { era necess. parlarne / ne abbiate voi l'idee

Analyt. def.: ~~the syst~~ (piano = ... spazio = ...) the system of all groups of $n+1$ homogeneous numbers $x_0\ x_1 \dots x_n$, among which one at least be different from zero.

Synth. def.: A system of figures, of entities, which we shall call points, & which satisfy to certain conditions (2 p. individuano 1 retta; piano .....).

A system of properties, of postulates, which may be sufficient to define & characterize a „projective S_n", & to represent its elements, univocally, by $n+1$ homog. numbers; numbers which we shall call coordinates (π coord.) of the element (point).

[Veronese (1891) - Amodeo - Fano - Enriques - Pieri]

In S_4: 2 points det. a st. line through them; 3 points non bel. to the same st. line ....; 4 points .... a space S_3.

A S_3 & a straight line not contained in it have one common point; 2 generic planes have also one common point; if two planes are contained in the same S_3 they intersect each other in a straight line, & conversely.

In S_n: generally, by projecting a S_k ($0 \le k \le n-1$; S_0 = point; S_1 = st. line; S_2 = plane) from a point outside of it, we obtain a S_{k+1} (from a line, a plane, a S_3, etc.) S_{n-1} = hyperplane. $k+1$ arbitrary points are always contained in a S_k, and generally in one S_k only. They are called then independent points. $n+1$ indep. points ($n=2,3\dots$): they are vertices of a Simplex. A space containing $k+1$ indep. points contains their whole S_k.

A hyperplane S_{n-1} is represented analytically by an equation of the 1th degree $a_0x_0+\dots+a_nx_n=0$. – The a_i's may be considered as projective coordinates of the hyperplane.

2 hyperplanes S_{n-1} interfect each other in a S_{n-2}; ~~all~~ there are ∞^1 S_{n-1} through this S_{n-2}, forming a pencil (or a sheaf); they are repres. by eq.ns $\sum a_i x_i + \lambda \sum b_i x_i = 0$, th. is $\sum (a_i+\lambda b_i) x_i = 0$; the base-$S_{n-2}$ is repres. by the 2 equations $\sum a_i x_i = \sum b_i x_i = 0$.

3 hyperpl. not belonging to the same pencil interfect each other in a S_{n-3}; through this one ∞^2 hyperpl. pass, forming a net. Etc.

In S_n: a S_h and a S_k having no common point are contained in a S_{h+k+1} ($n \geq h+k+1$). – But if they have **one** common point, they are contained in a S_{h+k} —

Generally, if they have ~~a common~~ more than one points, they intersect each other also in a space S_i; they are then contained in a S_{h+k-i} (1 common point, $i=0$; no common point, $i=-1$). – Also: If a S_h and a S_k have a common S_i (no common space of > dim) & are contained in a S_m (not in a space of < dim), $h+k = i+m$.

In S_3 we are accustomed to project points & figures of points & lines ~~points~~ from a point ~~on to~~ a plane.

In S_n we may in the same manner project ~~fis~~ from a point on to a S_{n-1}, all figures constituted by points, lines, planes, ... as far as S_{n-2}.

A point may also be projected, more generally, from a S_k on to a S_{n-k-1} (having no common point with S_k). And thus for figures constituted by points, lines, ... S_{n-k-2}.

65

Gruppi Cremoniani continui.

Le trasf. Crem. del piano (e così di S_3 ...) formano un gruppo – nel senso che il prod. di 2 di esse è sempre ancora una trasf. Crem.: e sono pure a 2 a 2 inverse. Ma come tipo di gruppo non fu ancora particolarm.te indagato: ~~non dipende da un~~ contiene schiere continue – ma non è gruppo continuo, nel senso di Lie, nè finito, perchè non dipende da n° finito di parametri; nè ∞, perchè non definibile a $\frac{1}{2}$ eq. differenziali – dubbio se generabile con trasf. infinitesime – striking property, the discontinuity which appears in the variation of the order n of the elements of the group, throughout the range of positive integers.
Contiene però infiniti gruppi continui finiti (dip. da n° fin. parametri)

Enriques (Rend. Lincei, 21 V 1893) ha determ. i tipi di gruppi Crem. continui finiti del piano – Riducibili birazion.te a tre tipi, e loro sottogruppi.

1. Gruppo ∞^8 delle omografie.
2. Gruppo ∞^6 delle trasf. quadratiche che mutano in sè ciascuno di 2 fasci di raggi assegnati – ovverosia il sist. lin. ∞^3 delle C^2 per i 2 punti centri dei fasci (il sist. dei cerchi, mandando i centri nei p. ciclici – e allora il gruppo delle aff.e circolari di rette).
3. Gruppo ∞^{n+5} delle trasf. di Jonquières di ord. n che mutano in sè il sist. lin. ∞^{n+1} delle C^n aventi a comune un assegnato p. $(n-1)^{plo}$ e relative tang. – (mutano in sè pure il fascio di rette col centro in detto p. $(n-1)^{plo}$)

Un sist. lin. ∞^k (in part. $k=0$, curva isolata) è trasf. ~~dalle~~ da ogni operaz. del gruppo in un nuovo sist. ∞^k. Variando con cont.a l'operaz., varia con cont.a tale nuovo sist.; e l'insieme di tutti questi trasformati costituisce un sist. continuo, in gen.e non lineare, di un certo ord. n, ma invariante risp. al gruppo: un corpo. Sarà pure invariante il minimo sist. lin. di ~~ordine~~ C^n contenente detto corpo – e anche il minimo sist. lin. siffatto completo, cioè determ. dai p. basi (e relat. multà)

Gruppi finiti (n° finito operaz.) – piano
Autonne 1885–88
S. Kantor – Preisschr. Neapel 1883/84 publ. 88
Acta 19 – Theorie d. endl. Gr. von
1-deut. Uthaus. Berlin 1895
Wiman, Math. Ann. 48

Di qui p. successivi aggiunti puri: si deve arrivare a un sist. lin. invariante di almeno ∞^1 curve razionali od ellittiche.

In quest'ultimo caso, si ha ugualmente un sist. lin. inv. di C. raz. (se $C^4(A^2B^2)$, le $C^2(AB)$; se le ∞^3 C^3, sono Π^a, onde rete ~~delle~~ rette; p. altri sistemi ricerca più completa).

Nei casi 2° e 3° trova invar. sistemi lineari rappresentativi di una Q di S_3, o risp. di un cono raz. norm. di Γ^n.

a quei gruppi crem. corrisp. sulle Q o Γ^n gruppi Π.

La geom. del piano che ha come gruppo fond. di trasf. un gruppo continuo finito di trasf. crem coincide colla Geom proiettiva sul piano, sulla Q (limitat^te al non scambio dei 2 sist. di gen) o sul cono raz norm Γ^n, o con loro casi particolari (sottogruppi).

Il procedimento non era estendibile allo spazio S_3 ed oltre.

Ancora oggi nulla si sa circa tipi determ^i, cremonianamente biraz. distinti, di sist. lin. di superficie raz. o di genere uno in S_3.

Allora Fano pensa attaccare la questione a rovescio.

In qualq. S_K, ~~un grup~~ per ogni gruppo crem. continuo si possono costruire dei sist. lin. di V_{K-1} invarianti (e anche semplici, cioè tali ....) e questi si rappresentano mediante

7 (simili ai primi)

gruppi proiettivi su M_K di spazi superiori. – È presumibile questi siano più facili a determinare: e di qui, ~~si potrà~~ (trattando anzi i casi di M_K razionali) si risalire ai gruppi crem. continui di S_K.

(R. Palermo. 10 – 1895-96)

Applicato questo concetto anche per $K = 2$ – ~~superfici~~ gruppi Π sopra superficie, e gruppi crem. del piano.

Le sup. con trasf. proi. in se erano già note (Klein. Lie – Enriques). – Rifatta la determ^e in base a questo concetto: considerare il sottogruppo che lascia fisso un p. generico di F, e esaminare come opera sul sist. degli ∞^1 elem. lineari di F che ne escono – certo un gruppo Π – in modo ∞^3 (gruppo primitivo di Lie – casi già noti) – in modo ∞^2 (un fascio di C. invarianti – che sono razionali – cono Γ^n) – in modo ∞^1 con 2 elem. fissi (2 fasci di C. razionali – quadrica) ecc.

6 – gruppi Π del piano

Mahrmann (R. Palermo 32 (1911/2 158) ha determinato anche particolarmente quali sono le sup. che ammettono risp. i tre gruppi totali ∞^8, ∞^6, ∞^{n+5}.

Per $r = 3$ si sono però trovate subito difficoltà notevolmente * ~~Fano ha determ. tutte le~~ maggiori, e per le V_3 dei vari spazi con gruppi proiettivi — e per i gruppi Crem. continui di S_3 — Anche casi ~~enorm~~ molto più numerosi.

Per le V_3 con gruppi Π, Fano ha sgrossata la cosa, e risulta complicata per quelle di S_4. Appare opportuno separare i 2 casi del gruppo integrabile (.....) e gruppo non integrabile, contenente di conseguenza almeno un sottogruppo ∞^3 semplice (simile al gruppo Π forme 1ª specie). Engel Leip. Ber. 1887, p. 89 / Lie III p. 757

~~Su un gruppo continuo Π~~ Se una V_3 (anzi una V_k qualq.) ammette un gruppo continuo integrabile di trasf. Π, questo gruppo lascerà fermo un punto dello spazio ambiente, una retta per questo punto, ecc.; e da esso si può staccare una serie di sottogruppi ~~di dim. de~~ invarianti di dim. decrescenti di un'unità per volta ∮ Il gruppo Π complessivo e questi successivi sottogr. possono supporsi algebrici. — Quindi sgr. invariante ∞^1 algebrico, del quale (E F, Annali, 1897) le traiettorie sono C. raz. — e su queste o 1 solo p. unito, o 2 formanti 2 distinte V^a unisecanti.

La V_3 (V_k) si può rappres. su altra, sulla quale il gruppo trasf. è anche Π, e vi è una cgr. del 1° ordine di rette, invariante,

Ogni gruppo cremoniano integrabile si può trasf. biraz.te in guisa da lasciar fissa una stella di rette.

Un gruppo Π non integrabile contiene invece almeno un sgr. ∞^3 semplice. Tale è ad es. il gruppo Π della C^n raz. norm.

$$x_0 = \xi^n \quad x_1 = \xi^{n-1}\eta \quad \dots \quad x_n = \eta^n$$

Una trasf. del detto gruppo proi. ∞^3 opera Πmente sul parametro $\frac{\xi}{\eta}$ $\begin{cases} \xi' = a\xi + b\eta \\ \eta' = c\xi + d\eta \end{cases}$ con $ad - bc \neq 0$ e può supporsi $= 1$; e viceversa.

---

* Gruppi continui di trasf. quadratiche: Noether, Jahresber. D. M. Ver. 5. 1896. p. 68 (5 casi)

In S_n ~~[illegible]~~ si ha perciò l'omografia:

$$(3) \quad \begin{aligned} x_0' &= \xi'^n = (a\xi + b\eta)^n = a^n x_0 + n a^{n-1} b\, x_1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 x_2 + \dots \\ x_1' &= \xi'^{n-1}\eta' = (a\xi + b\eta)^{n-1}(c\xi + d\eta) = a^{n-1} c\, x_0 + (a^{n-1} d + [n-1] a^{n-2} bc)\, x_1 + \dots \end{aligned}$$

Questa è appunto la sost. lin. che subiscono i coeff. della forma binaria

$$(4) \qquad x_0 \cdot \xi^n + n x_1 \cdot \xi^{n-1}\eta + \binom{n}{2} x_2 \cdot \xi^{n-2}\eta^2 + \dots + x^n \eta^n$$

quando vi si ponga $\begin{cases} \xi = a\xi' + c\eta' \\ \eta = b\xi' + d\eta' \end{cases}$. ~~Pertanto~~ Ora ogni V_{n-1}^{ν} che dall'anzidetto gruppo Π sia trasf. in se si rappres. anal. eguagliando a zero una forma raz. intera nelle x_i che per effetto delle (3) si riproduca a meno di un fatt. costante dipendente dalle sole $a . b . c . \delta$ — L'algebra ci insegna che questo fattore è una pot. del determ. $\underline{a\delta - bc}$ (qui $= 1$), e la forma nelle x_i è un $\underline{\text{invariante}}$ di (4), nel senso della teoria d. forme binarie.

<u>La ricerca delle V_{n-1} che ammettono il gruppo pro. ∞^3 d'una C^n raz. norm. coincide con quella degli invarianti di una forma binaria di grado n.</u>

Due estensioni:

1° ~~Un~~ Il gruppo $\Pi\ \infty^3$ di una C^n raz. norm. è un tipo di gruppo semplice $\Pi\ \infty^3$ in S_n — Ve ne sono altri?

Gli altri lasciano fermi spazi minori — Fano (Mem. Torino 46 – 1896) ha dimostrato che, se vi è un S_k fisso, vi è anche un S_{n-k-1} indip^e dal primo, e entro ciascuno di questi daccapo — Complessi^{te}, spazi indip. di dimens. $h_1\ h_2 \dots h_r$ $(0 \leq h_i \leq n-1)$ tali che

$$\Sigma\,(h_i + 1) = n + 1$$

e ~~entro~~ ogni S_{h_i} una C^{h_i} raz. norm. fissa.

<u>Agli invarianti dell'unica forma binaria di grado n subentrano gli invar. simultanei delle r forme di gradi h_i</u> (se qualche $\underline{h_i}$ nulla, grado zero, unico coeff. da considerarsi come $\underline{\text{invariante}}$).

67

2° Ho parlato delle V_{n-1} invarianti in S_n — e quelle di dimens. inferiore?

Sistemi di invarianti, eguagl. zero, e anche ulteriori relaz. invariantive tra i coeff. della forma (o delle forme) in parola, quali sono ad es. ~~solo equ~~ opportune equaz. fra coeff. di taluni covarianti annullarsi identico di covarianti, ec. Clebsch, Binäre Formen, p. 91, 163.

[Es., in S_4, gruppo C^4 raz. norm., la F^4 doppia delle M_3 piani oscul. mediante proporzionalità fra f e l'Hessiano).

Infine fra queste Varietà si troveremo tutte quelle che ammettono gruppi continui non integrabili di traff. prov^e^

[Commessatti — Rend. Lincei 1920-21 — Rend Ist Lomb 1921]

Prendiamo un covariante della forma (4) di ordine m (variab) e grado l (coeff)

$$\sum_{i=0}^{m} \varphi_i(x_0 x_1 \ldots x_n)\, \xi^{m-i} \eta^{i}$$

(non escluso $m=0$, invariante). Eguagl. zero, rappresenta un sistema ∞^1 di V_{n-1}, d'indice m ($m=0$, V_{n-1} unica), sul quale sist. ∞^1 il G_3 proiettivo opera come su C^n. Viceversa, da ogni sistema ∞^1 di V_{n-1}, d'indice m, invariante per G_3, nasce un covariante di grado l e ord. m. ~~opera come su C^n~~. Ogni V_{n-1} è fissa per un sgr. ∞^2; una di esse si ha eguagl. zero 1° coeff. — $\varphi_0 = 0$ (param. $\frac{\eta}{\xi}=0$). φ_0 è dunque ciò che Lie ha chiamato semiinvariante (inv. p. sottogruppo).

Siccome tutto il sist. ∞^1 nasce da una delle V_{n-1} applicandole G_3, il 1° coeff. φ_0 deve già determ. tutti gli altri. (Cayley, I Mem., Pap. 2, p. 244) ha mostrato che si ne deducono con ripetuta applic. di un processo differ^le^; e ha chiamato φ_0 leading term, source.

$\varphi_0 = 0$ avrà nel relativo punto di C^n ($\eta=0$) una certa multipl^tà^ l, e la stessa ogni V_{n-1} del sistema ∞^1 nel relativo punto P di C^n.

Se tale V_{n-1} è cono di vertice P, covariante conico: e allora, proiettando C^n da P in C^{n-1}, si ha un covariante di f^{n-1}. Viceversa dai covar^ti^ di f^{n-1} nascono tutti quelli conici di f^n.

Il gruppo proiettivo ∞^3 di C^n opera sul sist. lin. delle V_{n-1}^d per C^n come sui punti di uno spazio —

Ansatz p. trovare i covarianti di grado $\underline{d}$.

Limitiamoci per semplicità al caso $d=2$: ossia Q_{n-1} per C^n, in n° di $\binom{n}{2}$ lin. indip.

Queste Q appaiono come i punti di un $S_{n-2,n+1}$ nel quale G_3 opera Πmente. — Un certo n° di S_h^2 fissi tali che $\Sigma(h+1)=\binom{n}{2}$; e in ogni S_h un sistema invariante d'indice h — così tutti i covarianti di grado 2, o quadratici (nei coeff.)

L (nei coeff.!)

Ogni f^n ha covarianti quadratici di ordini h tali che $\Sigma(h+1)=\binom{n}{2}$

f_2 — ~~solo se stesso~~ discrimin. $h=0$ ~~[illegible]~~ (di 2° gr. nei coeff.) ~~$h\neq 0$~~

f_3 — Hessiano $h=2$ $3=\binom{3}{2}$

f_4 — " e j $h=4,0$ $5+1=\binom{4}{2}$

f_5 — " e altro 2° ord. $h=6,2$ $7+3=\binom{5}{2}$

Perchè una Q per C^n contenga le $S^{2(n-1)}$ delle tg occorrono condiz. ulteriori in n° di
$4(n-1)-2n+1=2n-3$
Per la M^3 dei p.ti ^{mi} tg
$6(n-2)-4(n-1)+1=2n-7$
Perciò il sist. lin. ∞^{2n-8} ha per base la $S^{2(n-1)}$ — quello ∞^{2n-12} ha la $M_3^{3(n-2)}$ e così di seguito — quello ∞^2 (n disp.) la $M_{\frac{2n-2}{4}}=M_{\frac{n-1}{2}}$ degli $S_{\frac{n-3}{2}}$ oscul. — Per $\underline{n}$ pari, la Q della polarità contiene anche la $M_{\frac{n}{2}}$ degli $S_{\frac{n-2}{2}}$ oscul.

Vi è sempre l'Hessiano, che dà $h=2n-4$ per n pari, l'inv. quadratico $h=0$

Sono $\frac{n}{2}$ o $\frac{n-1}{2}$ secondo che n pari o dispari; tutti covarianti, tranne, se n pari, l'invariante $\underline{h=0}$.

Si ottengono proiettando dagli S_{n-2i-1} oscul. a C^n $\left(i=1,2,\dots\left\{\begin{smallmatrix}\frac{n-2}{2}\\ \frac{n-1}{2}\end{smallmatrix}\right.\right)$ le Q fondamentali delle polarità risp. alle C^{2i} proiezioni di C^n.

f^n ha una serie di covarianti quadratici nei coeff. e d'ordini $2n-4$ (Hess.), $2n-8$, $\dots\left\{\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$

$$2n-4,\ 2n-8,\ 2n-12,\ \dots\dots\left\{\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right. \qquad \begin{matrix}\frac{n-1}{2}\\ \frac{n}{2}\end{matrix}$$

$$(2n-3)+(2n-7)+(2n-9)+\ \dots\dots\left\{\begin{matrix}7+3\\5+1\end{matrix}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &4\,\frac{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}}{2}-\frac{n-1}{2}=\frac{n-1}{2}(n+1-1)=\binom{n}{2}\\ &4\cdot\frac{\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n}{2}}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n}{2}(n-2+1)=\binom{n}{2}\end{aligned}\right.$$

....

L'annullarsi identico dell'Hessiano vuol dire che f^n è n^{sima} potenza; del covar. $(2,2n-8)$, che f ha un fattore $(n-1)^{plo}$ ..... del cov. quadratico (se $\underline{n}$ disp.) che f ha radice $\left(\frac{n+3}{2}\right)^{pla}$

Ricerz. Gruppi crem. continui di S_3 (EF, Annali, t. 26, 1897)

Ricerca ~~lunga~~ un po' lunga, talvolta minuta, valendosi dei risultati di Lie, ~~e~~ di quelli sui gruppi Π sopra V_3, e altri.

Si presentavano subito, come naturali estensioni dei gruppi crem. tipici del piano, 4 categorie:

gruppi proiettivi – conformi (~~sfere~~ "in sfere") – e "di Jonquières generalizzati", cioè che mutano in sè o una stella di rette o un fascio di piani.

I gruppi ~~im~~primitivi alle 2 prime categorie.

" primitivi alle 2 ultime: fatta eccez. per 3 gruppi ∞^3, semplici, transitivi, nei quali le trasf^{ni} che lasciano fermo un p. generico formano un gruppo oloedric^{te} isomorfo a 1 dei 3 gruppi dei poliedri regolari.

Tali gruppi vengono tutti assegnati.

Fano vi ha collegate ulteriori ricerche, determinando fra altro tutti i tipi ~~di~~ biraz. distinti di gruppi di Jonquières generalizzati (Mem. Torino, 48, 1898) e le loro trasf. infinitesime (R. Lincei, 1898)

Sono 12 gruppi completi, coi loro sottogruppi – (In tutto perciò 12 + 2 (Π, conf.) + 2 (ott. icos.) = 16). (I 3 tipi del piano divengono 16 in S_3).

Si esaminano successiv^{te}:

1. gruppi che trasf. in sè, in pari tempo, un fascio di piani e una stella di rette i cui sostegni non si appart^{no} (composizione di un gruppo ∞^3 con un gruppo crem. della stella).

2. gruppi integrabili = equiv. gruppi Π su coni = si riducono a gruppi con ~~stella~~ invar. stella rette e sist. lin. F^n con p. $(n-1)^{plo}$ e relativo cono tg fisso.

3. gruppi con fascio di p^{ni} invar. – partendo dal gruppo subord^{to} in detti piani: gruppi Π su M_3 con sist. ∞^1 piani, di Q, di coni

4. gruppi con stella invariante, nella quale si può supporre operino primitivamente e proiettivamente.

Cenni di geom.^a proiettiva di S_n

Questioni (relativamente, a quelli di cenni oggi) elementari; ma rappresentano la maggior parte dell'attività geom. in Italia nel decennio 1880-90 (con) densità verso il periodo centrale). — (per lo più, diffusam.^e trattate libro Bertini. ed era indispensabile che fossero trattate e che diventassero sangue del ns sangue, averle sulla p. delle dita, p. valersene in ricerche + elevate + esigente,

1) Sorpasso sulla parte più elementare: spazi minori in S_n, loro intersezioni, forme fondam.^li di spazi, operaz. di Πz e sezione, coord. proiettive (Baker: Principles of geometry I)

2) Corrisp.^ze proiettive (omogr. a S_h, S_h collineations, recipr. a S_h, S_{n-h-1} correlations) fra due S_n, ~~dist. o~~ eventualmente sovrapposti on the same base: estensione delle questioni trattate per $n=2$ e 3 princip.^te da Möbius - Staudt = corrisp. indiv. da $n+2$ coppie di elem. in posiz. generale = rappres. analitica (ρ) inclusi i casi di corrisp. degenere = determ.^e minori nullo, insieme coi minori fino a un certo ordine = che si riducono a corrisp. non degeneri tra forme fond. di dims $< n$ ($n=3$, omogr., fra stella di rette e piano punteggi.)

(Princip.^te Veronese - Segre: anche Bertini, Pincherle, Predella... Parte analitica già anche da Jordan e altri). Comprende anche corrisp. Π tra forme fond. - che sono a loro volta spazi.

Per omogr. fra 2 S_n sovrapposti, la ricerca dei p. uniti (double points) (stesso sist. di coord.) e conseguente classif.^e delle omogr. dall'eq. $\Delta(\rho)=0$ [Segre p. 841) la cui discussione è princip.^te un probl. di divisori elementari secondo Weierstrass (Segre - Lincei - 1884 Predella - Ann. 1889)

Punti uniti (nel campo complesso), nel caso più generale. $n+1$ indipendenti (con relativo „Simplex"; e relativi ma uno o più S_i di $i+1$ fra questi possono essere costituiti da p. tutti uniti ;(e inoltre, casi limiti, per l'avvicinarsi ∞ di taluni elementi) — Casi di un S_h e S_{n-h-1} di punti uniti: sono omogr. rigate — (In ogni caso l certo n° di p. e spazi di punti uniti)

Casi di involutorietà (of period 2). - La figura degli S_{n-1} uniti è Πmente identica a (duale di) quella dei p. uniti.

Reciprocità involutorie non degeneri (p. spazi sovrapp.) per n dispari, due tipi. (teor. Clifford).

3) Enti (luoghi) generati da forme fondam. fundamental configurations of 1, 2, 3 ... dims fra loro Π - è l'estensione ~~del programm~~ dell'indirizzo Steiner - Seydewitz - Reye (Grassmann Cremona per F^3)

Citare, analit.^te, l'esempio della C^3 sgh. : si tratta di estendere

$(p+1, q+1)$
al caso (terminologia analitica) di matrici ~~(m, n)~~, a elem. lineari nelle coord. — e anche ~~[illegible]~~ di grado >), se ci riferiamo a sist. lin. di forme (V_{2-1}).

$p=1, q=n-1$ C^n di S_n con n fasci Π già in Clifford. — Quest. generale già prospettata da Veronese: luogo rappres. dal l'annullarsi di tutti i det. di ordine $p+1$ delle matr. $|A_{ik}|$ $\begin{matrix} i=0,\dots p \\ k=0,\dots q \end{matrix}$, $p \leq q$, onde $q-p+1$ eq. indip. il che richiede $q-p \leq n$ — In particolare Var. luoghi di ∞ rette (fra cui rigate), piani, ... [in seguito Rig. raz. norm....]

Event. anche, se esiste, la Varietà che annulla tutti i minori fino a un certo ordine

Fra queste V^a, notevoli quelle che rappres. ~~le~~ in certo ~~modo che~~ le coppie di p. di 2 spazi S_p, S_q ($z_{ik} = x_i y_k$, essendo le x e y risp. coord. in S_p e S_q). La V^a è di dimens. $p+q$, in uno spazio $[(p+1)(q+1)-1] = [pq+p+q]$; è, si riconosce di ord. $\binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}$. Contiene, per x cost., ∞^p spazi S_q (z_{ik} fz. lin. omog. $k+1$ param. omog.), e simil. ∞^q spazi S_p che ~~sempre~~ ricoprono sempli. cem.te la sup. — Schiere mutuam.e incidenti.

(Segre, Palermo 5, 1891, 192). Nel caso $p=q=1$, si ha la Q di S_3, come immag. delle coppie di elem. di 2 forme di 1a specie. E anche per p, q qualq., 2 generaz. Π — $p=1$, $q=2$, M_3^3 raz. norm. di S_5 — $p=1$, q arbitrario, rette cong. le coppie di p. omologhi di 2 S_q omografici indip. in S_{2q+1}.

Fecondità!

4) Quadriche (eq. quadr. fra $x_0 x_1 \dots x_n$). — (Segre, diss. laurea, come ricerca completa)

In particolare S_h-coni (caratter. $n-h$ ~~+1~~, o di specie $h+1$ — Πz da S_h ....

Determina polarità], che pel cono è degenere (non degenere, nella forma fond. di asse h). — Come un p. della Q sta sul S_{n-1} polare ~~come un~~ (e viceversa), un S_i contenuto in Q è caratterizzato ~~[illegible]~~ dall'essere contenuto nel proprio spazio polare, che, se l'S_i non è unito all'S_h asse, perciò sempre se Q non è cono, è un $[n-i-1]$. Ciò esige $i \le n-i-1$, $i \le \frac{n-1}{2}$: e sifatto effett[ivamente], nel campo completo (nel campo reale, possono mancare p. reali!)] S_i, S_{n-i-1}

Per n dispari, si hanno sulle Q non coni degli $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ distribuiti in 2 sistemi (es. $n=3$: ma c'è poi diff. fra $\frac{n-1}{2}$ disp. e pari).

n pari, unico sist. di $\left[\frac{n-2}{2}\right]$. — Per i coni, basta considerarli come Πz da S_h di ....

Per tali ricerche si rivela utile la Πz stereografica.

Gruppo Π di una Q, in part. Q non cono: geometric[amente] da Segre, ma già noto analitic[amente] a opera di vari; è in particolare la teoria delle sostituz. ortog., cioè delle trasf. lin. della forma Σx_i^2.

Per n disp., Q non cono, le 2 schiere di $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ possono essere lasciate ferme, o scambiate ($n=3$) — È gruppo molto importante; ~~per~~ es. metrica non euclidea (iperbolica, ellittica, nel campo reale, per Q riducibile a forma canonica con n, risp. $n+1$ termini di eg. segno). —

Per Πz stereogr. da un S_{n-1}, un gruppo conforme: per $n>3$, il gr. conforme totale, importante come tipo di gruppo cremoniano.

Gruppo Π di un cono, anche facile a costruirsi; e questi pure importanti come tipi di gruppi cremoniani.

5) Fasci di Quadriche e sist. lin. di dims >. — anche da Segre, a fond.: la ricerca dei coni del fascio (se non tutte le Q tali), e ~~ancora un~~ la classif. di detti fasci, è ancora un problema di divisori elementari. — Poi, sempre Segre (Atti Torino 19 - 1884 - p. 878) i fasci composti di soli coni, pur trascurando quelli p. semplice Πz da uno spazio fisso (es. preso da S_3).

Varietà basi dei fasci = Applicaz[ione] a Varietà Πz. (F^4 conica doppia = M. Ann. 24).

È (ancora Segre, Diss. Laurea) per $n=5$, ampia applicazione alla geom. della retta di S_3 (Klein = Die Liniengeom. ist wie die Geom. auf einer $M_4^{(2)}$ des R_5 = Ueber Linieng. u. metr. G. - Ann. 5, 261), con completa classificazione dei complessi quadratici di rette, cgr. (2,2), che sarebbero V^a basi di un fascio di Q in S_5 e S_4.

Altre applic. geom. retta, studio di congruenze come superficie contenute in una Q non cono di S_5, che se ricontrano i piani dei 2 sistemi rispett. in m, n punti. Fano: ritrovate le cgr. di 2° ordine prive di linea sing. (Kummer) colla classe massima 7 - i vari tipi di cgr. (3,3) di cui si conoscevano esempi staccati (Hirst) - Ann. di Mat. 1893 - e più tardi ancora strumento utile per la determ.ne delle cgr. 3° ord. prive di linea singolare (1894, Atti Torino - 1901, Mem. Torino)

inserire qui „algebraic manifolds"

6) ~~C^n razionale normale di S_n~~ C^n appart. a S_n - è certo normale - e razionale: figura delle più semplici, già ~~conti~~ studiata da Clifford, con proprietà che sono facile estensione di quelle delle C^2 e C^3 sgh.

~~Due generazioni proi~~ ve

rappres. param. $x_i = t^i$, onde equaz.

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{matrix} \right\| = 0$$

Due generaz.ni proiettive -

∞^3 trasf. omogr. in sè, rappres. dalle sostit. lineari del parametro t, e la sola curva che ~~abbia almeno ∞^2~~ ammetta un gr. continuo almeno ∞^2 di trasf. π (Lie).

Polarità risp. ad essa, per n pari o dispari (Cor. di Clifford). - A ogni S_k oscul., l'S_{n-k-1} oscul. nel medesimo punto.

Le $\binom{n}{2}$ quadriche $x_i x_k - x_{i+1} x_{k-1} = 0$ ($i+k = l+m$) passano tutte per la C^n - sono lin. indip. - e determinano un sist. lin. che comprende tutte le Q per essa.

Da queste, per πz, ogni altra C^n razionale. - Fra queste, tutte le C. ~~razionali~~ alg. con ∞ trasf. π (Libro Severi, p. 161).

We will now proceed to determine <u>all the surfaces</u> <u>having as hyperplane sections</u> <u>rational curves</u>. – These surfaces are all rational (Noether). – They were determined firstly by <u>Picard</u> (1878) with some restrictions, which <u>Guccia</u> (1888) showed not to be necessary. The most important part of what follows is owed to <u>Del Pezzo</u>.

~~If we set~~ Suppose to represent the given surf. on a plane: to its ~~ipe~~ hyperplane sections, a lin. syst. of <u>rational</u> curves will correspond. – It may easily be proved that, if the surface in question is <u>normal</u> (and we can refer to this case only), this lin. syst. <u>will be determined by its only base-points</u>, that is will be constituted by <u>all plane curves passing thr. certain points with determinate multiplicities</u>. It can also be proved that these ~~points~~ conditions are all <u>independent</u>.

$$n = m^2 - \Sigma k^2 \qquad r = \frac{m(m+3)}{2} - \Sigma\binom{k+1}{2}$$

da cui

$$n - r = \frac{m(m-3)}{2} - \Sigma\binom{k}{2} = -1$$

onde $r = n+1$. The normal surfaces in question, if we denote by <u>n</u> their order, belong to S_{n+1} (F^n di S_{n+1}).

F^2 quadrica

By projecting this F^n of S_{n+1} from ~~n-2 generic among~~ one of its points C, on to a S_{n-1} ~~points~~, we obtain a F^{n-1} ~~of S_{n-1}~~, containing a straight line, as image of C (inters. of the S_{n-1} with tangent plane of F^n at the point C). Suppose to project F^n, successively, from <u>$n-2$ generic</u> among its points: we shall obtain a Q in S_3 – which will be a <u>cone</u> only if the given F^n is also a cone – and will contain <u>$n-2$</u> lines as images of the centers. ~~This lines~~ As the <u>$n-2$</u> centers were <u>generic</u> points on F^n – each two of them in the same mutual relation – <u>each two</u> of the $n-2$ ~~th.~~ lines on Q will be <u>either skew</u> or <u>incident</u>.

in S_4 e sp. tap. in p^no ~~t~~ generico non incontra la ~~sup~~ F fuori del p. di cont.

In the first case, they will belong, on Q, to the same system; and the other generators of this same system will be projections of str. lines on F^n.

F^n will also be a ruled surface: one of the R^n in S_{n+1} we already studied.

The second case will be only possible if $n-2=2$, that is if $n=4$; the given F^n is also a F^4 in S_5; the generators of Q of both systems are ~~ima~~ projections of conics on F^4; F^4 contains ∞^1 conics thr. every point, & is a F^4 of Veronese.

The only ~~all~~ surfaces having rational curves of hyperpl. sections are ruled surfaces R^n in S_{n+1}, the F^4 of Veronese, & their projections.

The R^n's may be represented on the plane in such a way, that its generators be mapped as str. lines ~~of~~ thr. one point O: their hyperpl. sections also as $C^k(O^{k-1})$.

If a lin. syst. of ~~plane~~ ~~rational~~ rational curves is given, of dim. ≥ 3,

(1) $\Sigma \lambda_i \varphi_i = 0$, the parametric eq. $y_i = \varphi_i(x)$ define a surf. which ~~can be~~ is thus mapped on the plane in such a way that its hyperpl. sections be transformed into (1). — In any other representation of this surface on the plane, the new lin. syst. corresponding to its hyperpl. sections will be equivalent to (1) thr. a Cremona-transf.

Every ~~at least~~ lin. syst. of rat. plane curves ($p=0$) ($r \geq 3$) may be transformed by a Cremona-transf. into a system of $C^k(O^{k-1})$ or into a system of conics.

per le sup. raz. e sez. ell. rifare il rag.^to di prima, essendo ora $\frac{m(m-3)}{2} = \Sigma \binom{k}{2}$, onde $2=n$.

7) Rigate Razionali (Veronese – Segre, Atti Torino, 19. 1884, p. 355).
Se di ordine n normali per S_{n+1} – es. regolo di S_3 – generabili con n fasci proiett. di iperpiani (S_n).

Le sez. iperp. generiche sono direttrici (di ord. n) – ma con iperp. passanti per 1, 2, 3, ... generatrici si possono avere direttrici di ordine $<$. Certo qualche direttrice di ordine $\leq \frac{n}{2}$ – Se n pari, vi può essere una ∞^1 di direttrici di ordine $\frac{n}{2}$ (regolo!); in ogni altro caso una direttrice di ordine $\mu \geq 0$ (e se $=0$, cono) e $\leq \frac{n-1}{2}$; e altre solo dall'ordine $n-\mu$ in su. Ed in S_4, $n=3$, $\mu=1$, con ∞^2 coniche. Generaz. regolo con 2 punteggi. π a sostegni sghembi, R^3 di S_4 con π^a fra punteggiata e C^2 (in piano indip. ...): in generale ogni rig. raz. (anche non normale) ~~per~~ con π^a fra 2 direttrici – ~~ta~~ Naturalmente ~~Con~~ anche con 2 curve, sia pure non raz., in corrisp. biunivoca – stesso genere p – si costruisce analog. una rigata (di genere p): e questa si è rivelata strumento assai utile per lo studio di detta corrisp^{ze} [Segre, Math. Ann. 34. 1889 – Rig. ellittiche non coni, normali per S_{n-1} – Talune di genere p normali p. S_{n-2p+1}: esempi di sup. normali a sezioni non normali

Viceversa, ogni R^n di S_{n+1} è normale e si può così ottenere

in gen. cioè C^m e C^n raz. norm. in S_m e S_n indip. di S_{m+n+1}

π tante C^n raz. norm.

La R^n di S_{n+1} si può proiettare univocamente sopra un piano, da un conveniente S_{n-2} (determ. da μ generatrici e $n-2\mu-1$ altri suoi p.!): le generatrici si πano secondo rette di un fascio A, le sez. iperpiane secondo $C^{n-\mu}$ con $A^{n-\mu-1}$ e ~~altri elem. comuni~~ $n-2\mu-1$ tg fisse ivi (oppure 1 p. sempl. distinto)
Esempio R^3 di S_4 = mi serve per la F.

se vi è un fascio di $C^{n/2}$, $\frac{n}{2}-1$ gen. e 1 punto.

Facili estensioni a varietà ∞^1 raz. di piani, se di ordine n normali per S_{n+2} (Segre, Atti T, 21, 1885, p. 95) e di S_k (norm. per S_{n+k})
~~Anche rigate non razionali (Segre – Math. Ann. 34 1889) – ellittiche non coni, normali per S_{n-1} (sez. non normali) – Talune di genere p normali per [n-2p+1].~~

una di queste = M_3^4 di S_6 = incontrata da G. Ch. G.: ogni suo p. rappres. una classe di 2 sferici consid. come equivalenti (Atti T. 34. 1899.)

8) Altra sup. elementare: la F^4 di S_5 di equaz. parametriche:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = y_1^2 : y_2^2 : y_3^2 : y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2$$

~~alle cui ∞^5 sezioni~~ e che risulta così rappres. birazionalm. sul piano $y_1 : y_2 : y_3$; alle sue ∞^5 sez. con S_4 corrisp. le ∞^5 coniche (onde app. ordine $\underline{\underline{4}}$) = Superficie di Veronese (Mem. Lincei (3) 19. 1884. p. 344) – qualche accenno già in Cayley (Phil. Trans. 158 - 1868 - 75: Papers 6, 191); e poi
On the curves which satisfy giv. cond. n°16
Segre (Atti T 20 - 1885 - 487) — certo normale

Alle ∞^2 rette del piano (2 p. con ogni C^2) linee incontrate da ogni S_4 in 2 punti, onde ∞^2 C^2; per 2 punti di F^4, una – La Varietà contenente i piani delle ∞^2 C^2 contiene altresì gli ∞^2 piani tangenti; è una V_4^3 rappres. dall'eq.

he la F^4 come Var. doppia e ne contiene perciò tutte le corde

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_5 & x_4 \\ x_5 & x_1 & x_3 \\ x_4 & x_3 & x_2 \end{vmatrix} = 0$$

alle rette $y_1 = 0$ del piano, una C^2 nel piano $X_0 = X_4 = X_5 = 0$

e di qui emergono chiare le generazioni Λ.

la F^4 contiene solo curve di ordine pari

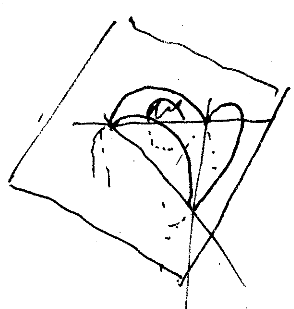
Abbiamo visto la corrisp. fra gli ~~spazi~~ S_4 $\Sigma a_i x_i = 0$ e le coniche-luogo del piano $a_0 y_1^2 + a_1 y_2^2 + a_2 y_3^2 + a_4 y_2 y_3 \cdots = 0$. Agli S_4 per un punto dato (x), le C^2 di un sist. lin. ∞^4, che sono quelle armoniche (coniugate) alla conica che ha le x_i come coeff. dell'eq. inviluppo, cioè alla curva di 2ª classe

cond. $\Sigma a_{11} B_{11} = 0$

$x_0 \eta_1^2 + \cdots + 2 x_3 \eta_2 \eta_3 + \cdots = 0$. Cosicché ai punti di S_5, le ∞^5 coniche-inviluppo. La F^4 (V_4^3) è luogo dei punti per quali tale conica-inviluppo è un p. doppio (una coppia di punti).

Fra le Π_2 della F^4:

da un suo punto, su S_4: la rigata R^3 – da una sua corda per ~~S~~ S_3, la Q.



da una retta generica – la F^4 di Steiner ($\underline{3}$ piani di coniche incid. a quella retta; loro S_4 a 2 a 2 ~~per la retta~~ il piano delle 3 inters. mutue di dette C^2 è comune ai 3 S_4 e contiene la retta).

(Estensione per C piane d'ordine risp. classe m)

9) Per altri enti speciali (Varietà cubiche …) rinviamo ai lavori citati di Segre e Bertini.

Sempre tendenza riportarsi a enti normali del loro ordine, e sfruttarli ampiamente per proiezioni.

Sup. certo razionali (Teor. Noether.)

Un sist. lin. di C^m raz. tra punti multipli [tutti tagli] tali che $\Sigma \binom{k}{2} = \binom{m-1}{2}$. Perciò, se ~~non~~ ha i p. basi semplici (anche i p. semplici inglobati, perchè non danno nulla), ~~grado = n~~ di grado $m^2 - \Sigma k^2 - i = m^2 - 2\Sigma\binom{k}{2} - \Sigma k - i = 3m - 2 - \Sigma k - i$ e dims (condiz. indip.!) $\frac{m(m+3)}{2} - \Sigma\binom{k+1}{2} - i = 3m - 1 - \Sigma k - i$; onde $\underline{\text{dims} = \text{grado} + 1}$. rappres. superf. (semplici!) di ordine n in S_{n+1}.

Una tal sup. da $n-2$ suoi p. generici si Π.tta in Q di S_3 conten. $\underline{n-2}$ rette immag. dei centri di Π_2. – Queste a 2 a 2 devono comportarsi stesso modo (non essendo la prima, non è tale): sghembe se $n \neq 4$, event. incid. se $n = 4$ – onde certo rigate se $n \neq 4$ ….

Superficie a (curve) sezioni dei minimi generi: $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$ o iperell.

Quindi anche, nel caso di sup. razionali: Riduzione a tipi dei sistemi lineari di curve piane di dato genere. Il caso di un sistema che rappresenti una sup. multipla per $p=0, 1$ non può presentarsi

(risultati ~~p la maggior parte~~ degli anni 1887–95 circa: per stabilirli ~~nel modo più semplice~~ ~~si presenta~~ occorre talvolta ~~l'opportunità di~~ far uso di proprietà inerenti alla geom. su una C. alg.)
(con questi si intrecciano ~~...~~)

(riassunto: Enriques, M. Ann. 46, p. 179)

Sezioni di genere $p=0$ (plane sections)

Già Picard (Bull. Soc. Phil. (7) 2. 1878. p. 127 — Crelle 100. 1887. p. 71), ma con restrizioni (sist. lin. C. raz. condiz. tutte indip.) ha dim. che una superficie di S_3 a sez. razionali o è una rigata (raz.) oppure è la sup. del 4° ord. di Steiner. — Poi Guccia (Palermo I p. 168) in seguito riduz. sist. lin. C raz. a tipi, togliendo restrizioni — Noi ragioneremo così (pg. prec.).

Le rigate raz., se di ordine n, sono normali per S_{n+1}; e ne conosciamo la rappres. piana — La F^4 di Steiner è normale per S_5 (F^4 di Veronese)

Qualq. sist. lin. almeno ∞^3 di C. piane ~~raz~~ di genere 0 (raz.) si può ridurre con trasf. biraz. del piano a un sistema di C^n con A^{n-1} e eventuali sg fisse, oppure un altro p. base semplice, o infine a un sist. di coniche. (∞^2 completo, alle rette; ∞^1, a fascio di rette).

Vale anche per dims < — $n=1$, la rete delle rette. (*)

Sezioni di genere $p=1$

Castelnuovo (R. Lincei, 1894) ha dim. che ogni sup. algebrica a sez. ellittiche o è rigata o è razionale. Ciò considerando, per la sup. in S_3, per ogni sez. piana C^n, l'unica C^{n-3} agg. e facendo vedere che, se F non è rigata, questa è a sua volta sez. di una F^{n-3} agg.; e costruendo poi in tal caso, e ½ di C^{n-2} agg alle sez piane, delle F^{n-2} aggiunte, che segano un sistema lineare ∞^n di C^n, a n interf variab, contenente il sist. delle sez piane

---

* Si collega col Teorema di Kronecker (enunc. 1886) - Castelnuovo (Rend. Lincei genn. 1894): Ogni sup. di S_3 contenente ∞^2 sezioni piane riducibili è rigata o è la Sup. di Steiner (se le sez. sono raz., sono ~~tali~~ riduc. tutte le sez con p^{ti} tang).

~~Segue che le F^n non rig. non se~~ a sez. ell. non rigate e perciò razionali sono normali per S_n: sono cioè proiezioni di F^n di S_n.

Ora dette F^n di S_n erano già state determinate da Del Pezzo (Palermo I 1887 p. 241). Per π_2 da $n-3$ suoi punti generici, una tale F^n dà una F^3 di S_3, a sez. ellittiche, e non cono se non è tale la F^n, sulla quale devono esistere $n-3$ rette a 2 a 2 sghembe immag. di quei punti: onde $n-3 \leq 6$, $n \leq 9$.

Le F^n raz. a sez. ell. sono di ordine ≤ 9 – e normali per spazi di dim. $n \leq 9$ – I sist. lin. di C piane ellittiche sono anch'essi di dim. ≤ 9.

Per $n=9$ si ha la F^9 di S_9 rappres. dal sistema di tutte le C^3 piane – Per $3 \leq n \leq 9$ si hanno tutte le successive proiez. π_2 da $9-n$ punti, rappres. dal sist. C^3 con $9-n$ p. basi semplici: in più, per $n=8$, ci corrisp. al fatto che 5 rette sgh. per F^3 gen. possono essere di 2 tipi

$a_1 a_2 a_3 a_4 \left\{ \begin{matrix} a_5 \\ c_{56} \end{matrix} \right.$, un'altra F^8 rappres. dal sistema delle C^4 con 2 p. basi doppi: Le successive π_2 di quest'ultima, ricadono le prec.

Ogni F^n a sez. ell. non rigata è razionale e può rappresentarsi sul piano mediante uno dei sist. seguenti:

1) C^3 con $9-n$ p. basi sempl. ($3 \leq n \leq 9$).

2) C^4 con 2 p. basi doppi ($n=8$)

Ogni sist. lin. di curve piane ellittiche, di dim. ≥ 3 (e anche ≥ 2) può ridursi con trasf. biraz. al sistema ∞^n ($2 \leq n \leq 9$) delle C^3 piane per $9-n$ p. fissi, opp. al sist. ∞^8 delle C^4 con 2 p. doppi fissi.

Fasci: a C^{3k} con 9 p. basi k^{pli}: i vari corrisp. ai vari valori di k sono irriducibili fra loro.

Dati su una C^3 8 punti nei quali l'$\int$ ellittico di 1ª specie abbia valori di somma $\equiv A$, sarà $-A$ il valore che corrisp. al 9° p. base del fascio.

Volendo fasci di C^6 con 9 p. doppi, basterà sia (x valore incognito) $2x + 2A \equiv 0$ e quindi, pur escludendo $x \equiv A$, rimane $x \equiv A + \frac{\omega}{2}$, $A + \frac{\omega'}{2}$, $A + \frac{\omega+\omega'}{2}$. Ecc.

Sezioni iperellittiche di genere $p > 1$ (in particolare sezioni di gen. $p = 2$).

Enriques (R. Lincei, dic. 1893) ha dimostrato che anche (occorre la ragion^e invol. piane) queste superficie, o sono rigate, oppure sono razionali:

Quelle razionali già studiate preced^te da Castelnuovo (Palermo IV. 1890 p. 73). Contengono un fascio raz. di coniche; se in S_3, ~~coniche~~, le F^{n-3} agg. segano ~~gruppi di~~, fuori delle linee multiple, gruppi di $p-1$ coniche (F^4 retta doppia: F^n con retta $(n-2)^{pla}$, $p = n-2$).

Per esse è $n \leq 4p+4$; nel caso estremo $n = 4p+4$ sono normali per S_{3p+5}; le altre si ottengono tutte da queste per proiezioni.

Di queste dà anche la rappres. piana. (Direttrice minima del fascio di C^2, come per le rig. raz.)

Un sist. lin. $\boxed{\text{semplice}}$ (perciò almeno ∞^3) di C. iperell. di genere p può ridursi per trasf. biraz. a uno dei sist. seguenti:

1) C^{p+3} con A^{p+1}, B^2 e eventuali p. bas. sempl.

2) $2^{2p+2-\mu}$ ($\mu = 0, 1, 2, \ldots p$) con $A^{2p-\mu}$ e $p-\mu$ p. doppi ∞ vicini, più eventuali p. sempl.

p. sist. lin. non semplici, perciò anche di dim. ≤ 2, infatti più complessi (Caso + semplice, C^6 8 p. d.)

Sezioni di genere tre.

La complicazione diventava maggiore.

Escluse: 1) rigate 2) sezioni iperell. 3) F^4 di S_3

Castelnuovo (Atti T, 25, 1890, p. 695) aveva determinate quelle razionali: rappres. sul piano con sistemi di C^4, e di C^6 con 7 p. doppi.

– Restavano altre (non razionali): solo 1909–10 da Scorza con proced^ti della geom. sulla sup. alg. (Ann. Mat. (3) – 16, p. 255; 17, p. 281).

Volendo imporre per i sistemi lineari di sup. in S_3 ricerche analoghe a quelle pei sist. lin. di C piane, in particolare per ridurli a ½ trasf. Cremoniane a tipi determinati, non si potevano trarre grandi aiuti dalla teoria delle stesse trasf. Cremoniane di S_3, nella quale, nonostante i classici lavori di Cremona e Noether, restavano ancora insoluti capitali problemi (p. es. la possibilità di comporre dette trasf. con talune fra esse di determinati tipi più semplici); e appariva invece naturale seguire la seconda delle vie di cui sopra pel piano — limitarsi ai sistemi di sup. semplici, cioè tali che il passaggio di una F per ~~g~~ un p. generico non tragga di cons. il suo pass. p. altri p. variabili col primo — e cercare un ausilio nello studio proiettivo delle varietà M_3 rappresentate da detti sistemi.

Enriques (Math. Ann. 46 – p. 179) (Rend. Lincei 1893-94) per i sistemi lineari (semplici) di sup. a intersez. variabili iperellittiche — in particolare di genere 0, 1, 2 — che si riconducono a M_3 di spazi qualunque S_n a curve sez. (con S_{n-2}) ~~d~~ del tipo indicato.

E, più generalmente, classificare dal p. di v. proiettivo dette M_3 a curve sez. iperell., anche se, eventualmente, non tutte rappresentabili in S_3; e, le rappresentabili, stabilire detta rappres.te — Lo studio di dette varietà non poteva non essere legato a quello delle sup. loro sezioni con S_{n-1}, testè compiuto.

Successiv.te anche lo stesso per ~~forme~~ sistemi lineari (semplici) di forme (V_{k-1}) in S_k, ricorrendo alla loro rappresentaz. mediante M_k di S_n.

~~1)~~ Varietà M_3 a curve sezioni razionali.

Le sup. sezioni sono anche a curve sez. razionali; perciò:

1) o quadriche (di S_3) — e allora M_3 è una Q di S_4
2) o rigate di ordine > 2 — e allora M_3 è una ∞^1 raz. di piani
3) o F^4 di Veronese in S_5, o sua Π_2 — e allora un breve ragion.to mostra che la M_3 è un cono, proiettante dette F^4

Le ~~tre~~ varietà M_3 a curve sezioni razionali sono soltanto quadriche di S_4 — ~~varietà~~ sistemi razionali ∞^1 di piani (se di ord. n, normali p. S_{n+2})) — e coni proiettanti una F^4 di Veronese o sue Π_2 (da un punto esterno allo spazio della stessa.)

s – in part.n coni –

Le varietà anzidette, se normali, possono rappres. biraz^te su S_3 mediante successive πz da loro punti – o altrimenti.

I sist. lin. sempl. di sup. di S_3 le cui intersez. variabili sono C. razionali possono trasf. biraz^te in uno dei seg. tipi:

1) sistema delle Q per una conica.

2) sistema ~~detto~~ di Q aventi a comune un punto e rel. p^no/tg

3) sistema di R^n aventi a comune una retta $(n-1)$pla e event^e altri elementi.

Il risultato si estende a spazi superiori – Ci limitiamo a enunciarlo in forma π:

Le varietà M_K di S_r a curve sezioni (con $[r-K+1]$) razionali sono soltanto le Q_K di S_{K+1}, le ∞' razionali di spazi S_{K-1} (~~...~~ te di ordine n, normali per S_{n+K-1}) e i coni proiettanti una F^4 di Veronese o sua πz da un S_{K-3}.

Varietà M_3^n a curve sezioni ellittiche.

~~Possono essere~~ Si hanno i seguenti casi:

a) ∞' ellittica di piani – certo non razionale

b) Varietà cubica V_3^3 di S_4 – della quale, se priva di p. doppi, è dubbio se può rappres. sopra S_3 – con grande probabilità di risposta negativa.

L'écueil et le scandale de la géométrie Italienne? (Cast^ng) ma farò vedere il perchè.

c) Varietà M_3^n non ∞' di piani e di ordine $n > 3$. Queste, Enriques ha dimostrato sono tutte razionali ⌊ e hanno per sezioni le varie F^n di S_n di Del Pezzo: onde $n \leq 9$ – Molte di esse sono necess. coni (Proiettanti dette F^n): così ad es. per $n = 9$.

⌊ normali p. S_{n+1}

Le c) si possono tutte rappres. su S_3 con opportuna π ...a, e danno luogo a sist. lin. rappresentativi formati da Q (inters. ellittiche) o da F^3, con elem. comuni tali che l'inters. variabile sia ell.

I sist. lin. sempl. di sup. di S_3 nei quali l'inters. variabile di 2 sup. è C. ellittica e 3 sup. si intersecano in almeno 4 p. variabili si possono ridurre p. trasf. biraz. a determ. sistemi lineari (che Enriques enumera) di Q o di F^3 o infine un part. sist. di F^4 con p. triplo e 2 rette doppie sghembe

Cito ad es., fra ~~le ...~~ i sist. rappres. di M_3 non coni:

Sistema ∞^8 di tutte le Q — varietà M_3^8 di S_8

Sistema ∞^5 delle F^3 per una C_2^5 – varietà M_3^4 di S_5, intersez. generale di due Q di S_5 [compl. quadr. di rette]

Sistema ∞^6 delle F^3 per una C_0^4 (C^4 di 2ª specie), o sist. ∞^7 delle F^3 per 3 rette mutuam.e sghembe

Per spazi superiori, ci forma π: [Scorza {R. Lincei 1908, p. 10 / Ann. Mat (3) 15. 1908. 217}

Una varietà [M_k^n ~~di S~~ a curve sez. ellittiche può dar luogo soltanto ai seguenti casi:

L normale

∞^1 ellittica di spazi S_{k-1}

Forme cubiche M_k^3 di S_{k+1}

Intersezioni di due forme quadratiche M_k^4 di S_{k+2}

Coni proiettanti F_n di S_n di Del Pezzo da spazi S_{k-3}

Pochi altri casi singoli, per ~~k=6, n~~ $k = 4, 5, 6$; $n = 5, 6$.

Notiamo che per $k = 6$, $n = 5$ si ha, come tipo, la varietà delle rette dello spazio a 4 dim.; per $k = 5, 4$, $n = 5$, il complesso lineare di rette in S_4, e la varietà di rette base di un fascio di compl. lineari [Castelnuovo Ist. Veneto (7) 2. 1891]

Varietà M_3^n a curve sez. iperellittiche (di genere $p \geq 2$)

Due casi: a) ∞^1 di piani di genere p (irreg.)

b) razionale, e contenente un fascio di Q (di S_3).

Sist. lin. semplici di sup. di S_3 le cui intersez. variabili sono C. iperell. (di genere ≥ 2) si possono ridurre trasf. biraz. ~~con rett~~ ai sist. di F^n con retta $(n-2)^{pla}$ e altri elem. basi (su cui non insistiamo).

Altre questioni per M_3, intese ad estendere possibilmente ad esse questioni già trattate per sup., in particolare sup. razionali.

Noether (Math. Ann. 3) aveva dim. che una sup. contenente un fascio raz. di C. razionali è rappres. sul piano — perchè esiste sempre una unisecante del fascio, e allora le coord. di un punto della sup. possono esprimersi med. fz. raz (e univocamente invertibili) di 2 parametri, dei quali uno determina la C del fascio per quel punto, l'altro il punto stesso sulla singola C. del fascio.

Analogamente: Cosa si può dire di una M_3 contenente un fascio di superficie razionali? (Enriques, ~~Math. Ann. 49, p. 1~~ Lincei 4. 1895$_2$. 311).

Si tratta, in sostanza, di vedere da quali irrazionalità può dipendere la risoluz. di un'eq. $f(x\,y\,z)=0$ con fz. razionali invertibili di 2 parametri (quando sia possibile); e cosa occorra conoscere in più perchè tale risoluz. possa avvenire razionalmente (come nel caso preced., quando della C sia noto razion.^{te} un punto).

Enriques, sostanzialmente, osserva che sopra ogni F del fascio è razionalmente noto il sistema delle sez. piane; e quindi, se questo è di genere > 1, il suo aggiunto (puro), e eventualm.^{e} i successivi aggiunti. — La serie, certo, è finita (nella rappres. piana, l'ordine va diminuendo): si deve arrivare a un sist. privo di aggiunto (a parte variabile) (perciò di genere 0 o 1; e se questo è solo un fascio, o comp. med. un fascio, il precedente si compone di curve $p=2$, o iperellittiche. — Perciò, senza introdurre irrazionalità, si può ridursi al caso in cui le F siano sup. a sez. razionali — a sez. ellittiche/ — a sez. iperellittiche $p\geq 2$ — o infine un 4° caso di sist. lin. ∞^3 non semplice (caso q. doppio con C^6 diramaz.).

Questi vari casi sono studiati: ma solo nel 1° caso si trova che la M_3 è certo rappres.^{te} sopra S_3.

Nella > parte degli altri casi, S_3 doppio con una conveniente sup. diramaz.

Principio dei succ. aggiunti molto import. — vedremo per Gr. Crem. continui nel piano — e poi uno dei concetti informatori di tutta la geom. F (e V_K).

/ incluso il piano doppio

Enriques esamina anche i casi in cui la M_3 contenga un sist. lin. ∞^2 o ∞^3 di sup. razionali. Con qualche ulteriore restrizione nel 1° caso, si può allora rappresentare la M_3 sopra un'involuz. di S_3 (il che non implica necessariamente sopra S_3).

Che se poi la M_3 contiene un sist. lin. <u>semplice</u> di Fraz. — ovvero già ha le sup. sez. razionali — allora essa è rappresentabile sopra S_3, oppure sulla V_3^3 di S_4: in questo 2° caso contiene sist. semplici di Fraz. soltanto di grado 3.

Ma la dim.ne esige nozioni di geom. sulle superficie e qualcosa sulla V_3 (<u>Fano</u>, Ann. di Mat., 1915).

Geometry on an algebraic Manifold

I have already ~~given~~ defined ~~what~~ algebraic Manifolds, in particular an ~~algebraic~~ irreducible algebraic manifold of dimension k and of order n $= M_k^n$. I will now always refer to irreducible manifolds in space of an arbitrary dimension ($r \geq k$)

Suppose X_k, Y_k to be two irreducible manifolds of dimension k; ~~and~~ the coord. $x_0\, x, \ldots, y_0\, y, \ldots$ of two generic points of them to be connected by such a system of algebr. equations, that, if the y_i's are given, these equations may be satisfied by α groups of values of the x's; and if the x's are given, by α' groups of values of the y's. – We ~~w~~ shall then have a (α, α') correspondence between the 2 manifolds, which is represented by the given syst. of eq. α, α' are the indices of the corresp.

The corresp. will be univocal or rational (in one sense) if one of the 2 indices is $= 1$ – f.i. a $(\alpha, 1)$ corresp. The y's are then algebraic & univocal, that is rational functions of the x's: from the total system of ~~the~~ all equations of both M_k's and of the corresp., we shall be able to deduce the y's ~~as~~ in terms of the x's as rational fct. of these last ones: but not conversely (if $\alpha > 1$).

If $\alpha = \alpha' = 1$, the corresp. will be biunivocal or birational. ~~It~~ Then must be possible to deduce from above equations the y's ~~as~~ rational fct. of the x's, and conversely. The case of a birational (or Cremona-) corresp. between 2 planes or spaces is evidently comprised in the present definition; and also the representation of any rational surface on a plane.

~~Every~~ Any algebr. M_k^n belonging to S_r, ~~if~~ $r > k+1$ may be projected biunivocally from a generic S_{r-k-2} of S_r on to a S_{k+1}. (any curve on a plane curve, any surface on a surface of S_3 ...)

We will now generalize the definition of a rational curve or surface.

A rational M_k is a M_k a generic point of which has coordinates expressed by rational and rationally invertible fcts of k independent parameters $u_1\, u_2 \dots u_k$ (that is, rational fcts of the u's, so that any point of M_k corresponds to one group only of values of the u's). We may also say: a M_k in a ~~(1,1)~~ birational correspondence with a (linear) space S_k (in which the u's are to be considered as coordinates).

You will remember, the (2nd) condition of the rational invertibility of the mentioned functions is not essential for $k=1,2$; that is a curve (a surface) in a $(1,\alpha)$ correspondence with a line (a plane) is certainly a rational one: | It is no longer so if $k=3$; if $k>3$, the result is still unknown, but probably it is like $k=3$.

| all involutions in S_1 or S_2 are rational.

Algebraic manifolds of a given dims. k in a $(1,1)$ corresp. between them, may possess quite different projective characters (order, class, ranks, dims of the space to which they belong ....), but they must be considered as equivalent | from the (much more general) point of view of ~~the~~ geometry of birational transformations. They constitute, from this point of view, a class, a corps, and each of them may be considered as a representative of the whole class – f. inst. a M_k of S_{k+1} (a plane curve, a surface of F^3, ...). All properties which are invariant with respect to birational transf of the M_k's my be studied on a particular, arbitrary representative of the class.

| with respect to birational transf.

Geometry on an algebraic M_k is the complex of all properties of this M_k which are invariant with respect to its birational transf. that is to algebraic $(1,1)$ corresp. between it and another (equiv.) M_k.

---- ~~Geometry on~~ We may therefore always consider M_k – if we like – as belonging to ~~the~~ S_{k+1}; as, if the given M_k is rational, we may consider on its place a (linear) S_k. – Geometry on the plane (or on a rational surface) studies properties of plane figures, which keep unaltered with respect to Cremona-transf.

× La relazione di equivalenza si esprime analitic^e, in forma trascendente, a p teor. di Abel per gli $\int$ di 1^a specie:

Se $w_1\, w_2 \dots w_p$ sono p integr. di 1^a sp. indip. di una curva f, la condiz. necess. e suff. per l'equivalenza dei due gruppi $(x_1)(x_2)\cdots(x_p)$ e $(y_1)(y_2)\cdots(y_p)$ è data dalle p congruenze (a meno di periodi): (~~Sofa~~ save for periods)

$$w_h(x_1)+\cdots+w_h(x_p)\equiv w_h(y_1)+\cdots+w_h(y_p) \qquad h=1,2,\dots p.$$

La necessità anche così:

Se $w(x)$ è un quals. integr. di 1^a specie, la somma $\Sigma_i\, w(x_i)$ non si altera per spostamenti ∞simi del gruppo $x_1 \dots x_p$ entro una serie lineare.

Teorema di inversione (103). $h=1,2\dots p$

Sulla C. di genere p, le equaz. $w_h(x_1)+w_h(x_2)+\cdots+w_h(x_p)\equiv C_h$ (a meno di periodi) dove le C_h sono cost. assegn. ad arbitrio, sono soddisfatte per valori generici delle C_h stesse da un unico gruppo $x_1 \dots x_p$. — Le varie soluz. danno G di una serie lin.; ma questa in gen^e è una g_p^0.

Le x_i, come fz. delle C_h, sono fz. Abeliane a $2p$-periodiche.

288 – Quando sopra una C_p vi è una involuz. γ_n^1 di genere q, vi è sempre un sist. regolare di q integr. indip. di 1ª sp. (281 = regolari; cioè a $2q$ periodi).

282 – Non vi può essere un sistema continuo di sist. completi di integr. di 1ª sp. riducibili

288: Quindi: Non un sist. continuo infinito di involuz. irrazionali (Castelnuovo 1893 Humbert)

Una involuzione I_n^r = cioè un sist. alg. ∞^r di G_n, tale che per r punti generici passi un gruppo – se $r > 1$ può essere soltanto:
una serie lin. g_n^r – oppure
composta mediante una $I_{\frac{n}{\mu}}^1$.

290 Per $p=1$ esiste una ∞^a discontinua di I_n^1 ellitt. ~~per $p > 1$ solo~~ Ma una C. alg. può contenere solo un n° finito di involuz. di genere $p > 1$} (De Franchis – Palermo 36 – 1913 – p. 368

293 Però ∞ involuz. ellittiche: se ne contiene più di $p > 1$, ne contiene ∞

---

267 1ª forma teor. Abel

Se $(x_1 \dots x_n)$ è un G_n variabile sulla curva f in una serie razionale γ_n^1, i cui elem. si possono rappres. a ½ parametro t, la somma $w(x_1) + \dots + w(x_n)$ p. ogni integr. Abeliano relativo f può esprimersi a ½ t con funz. raz. e logaritmiche.

Linear systems (series)

We ~~shall~~ now proceed to see which figures of a M_K have a particular interest for ~~the~~ geometry on the M_K.

Consider in S_r a linear system of hypersurfaces (V_{r-1}) $\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0$. A given curve, will be intersected by these hypersurfaces (if they do not contain the whole curve) in groups of points; a surface, in ~~a syst~~ curves; generally a M_K, in a system of M_{K-1} (if $K=1$, curve, M_0 means an alg. manif. of dim. zero, that is a group of (a finite number of) points).
We shall also say these M_{K-1} constitute, on M_K, a linear system (or a lin. series) – Base-elements of the system $\Sigma \lambda_i \varphi_i = 0$ which are contained in M_K, are also base-elements of the lin. syst. of M'_{K-1}'s.
If the $\varphi = 0$ have, with M_K, a partial intersection μ_{K-1} which is fixed ($K=1$, some base-points on the given curve; $K=2$, a fixed curve as their partial intersect. with the surface, etc.), this μ_{K-1} may be considered, or not, as we like, as a common part of ~~M_K~~ all M_{K-1}'s of the lin. syst.

[The most imp. case is $K=1$: some fixed points on a curve, which may be considered, or not considd., as belonging to any group of the whole series].
~~Generally~~, we shall consider them as ~~excluded~~.

Example of a lin. syst on M_K: the system of all its hyper plane sections (no fixed part!) – (ith. on a plane curve, twisted curve, ...

Suppose the lin. syst. $\overset{(1)}{\Sigma} \lambda_i \varphi_i = 0$ to be of dim. d ($\varphi_0, \dots \varphi_d$ lin. ind.).
If no hypersurface of this syst. contains M_K, each M_{K-1} of the lin. syst. ~~of~~ on M_K is the intersection of M_K with only one of these hypersurfaces: as, if two of them had the same intersection ~~the~~ with M_K, in their pencil there would be a hypersurf. through another generic point of M_K, & containing consequently the whole M_K.
The lin. syst of M_{K-1} on M_K is then in a (1,1) corresp. with the syst. $\Sigma \lambda_i \varphi_i = 0$, ~~and~~ has also the dims. d. – Through d generic points of M_K, one & only one M_{K-1} of the ~~syst.~~ passes.
~~Suppose~~, On the contrary, there are in (1) some hypersurf. containing M_K: they will constitute a lin. syst. of a certain dim. $d' < d$. ~~We may then~~

easyly demonstrate, there exists in (1) a smaller

The system (1) may be considered as a space S_d, and the new $\infty^{d'}$-system as a $S_{d'}$, contained in the former one: there are also certainly in S_d spaces $S_{d-d'-1}$ which do not intersect $S_{d'}$, that is in (1) linear systems of dim. $d-d'-1$ in which no hypersurface contains M_k. We may easily demonstrate that such a system of dim. $d-d'-1$ gives of intersections with M_k all the preceding M_{k-1}'s. The ~~system~~ linear syst. of M_{k-1}'s on M_k has the dim. $d-d'-1$.

The first case, in which no hypersurf. of (1) contained M_k, corresponds to $d'=-1$.

Every ~~All~~ lin. syst. of M_{k-1} in M_k may be obtained by means of a lin. syst. of hypersurf. having the same dim.

Please to consider in S_r ~~As the dimension d of~~ the lin. syst. of all hypersurfaces of a given order m: its dim. $d = \binom{m+r}{r} - 1 = \binom{m+r}{m} - 1$.

If $\infty^{d'}$ among them pass through M_k, they determine on M_k a lin. syst. of M_{k-1} having the dim. $d-d'-1$.

As we know d, each of both numbers d' & $d-d'-1$ enables us to determine the other: that is, ~~tt~~ following problems are equivalent: — to determine:

either the dimension (d') of the lin. syst. of all V^m_{r-1} through M_k —

or the dim. ($d-d'-1$) of the lin. syst. of M_{k-1} which the V^m_{r-1} of S_r determine on M_k.

This dim. plus one $= d-d' =$ furnishes the number of linearly independent ~~V^m_{r-1}'s the~~ conditions which are required in order that a V^m_{r-1} passes through M_k = that is the postulation or strength of M_k with respect (for) to the V^m_{r-1}'s.

The concept of a linear system (or series) of M_{k-1} on M_k pertains to geometry on the M_k, as it is invariant with resp. to birational transf. — & even with respect to only rational transf. $(1,\alpha)$ — (in the sense from 1 to α)

Indeed, ~~if~~ suppose to have between X_k & Y_k a corresp. $(1,\alpha)$: the x_h's will be rational fcts. of the y_h's, $x_h = f_i(y)$: therefore a linear system of X_k, determined by the hypersurfaces $\sum \lambda_i \varphi_i(x) = 0$ is transformed into the lin. syst. determined on Y_k by the hypersurfaces $\sum \lambda_i \varphi_i\{f(y)\} = 0$.

~~Conversely~~, Suppose to be given on M_k a ∞^d-lin. syst. of M_{k-1}, determined by the lin syst of hypersurf.

$$(1) \qquad \sum \lambda_i \varphi_i(x) = 0$$

which we may suppose having the same dim^s d. Consider now the equations $y_i = \varphi_i(x)$ as parametric equations of a new algebraic manifold: 3 different cases are possible:

1. The hypersurfaces of the syst. (1), that is the M_{k-1} on M_k, which pass through a generic point of M_k, do not pass consequently ~~for~~ through any other point of M_k varying together with the first one — the linear system of M_{k-1} on M_k will then be called a simple lin. system (Ex., in the plane, the C^3's thr. 0, 1 .... 6 generic points — but not thr. 7 generic points). — ~~As the hypersurfaces of (1) thr. 1 point form a lin. syst. of dim^s $d-1$, need also at least in if and there are among them d linearly independent~~ The condition above mentioned requires $d \geq k$; as, unless, ~~in~~ the linear syst. of ~~the~~ hypersurfaces (1) thr. a generic point of M_k would contain $d < k$ ~~and~~ linearly indep. elements, and they would then intersect M_k at least in a curve, changing with the first points — It is also easy to be shown that, if the given M_k is not rational, this first hypothesis requires also $d > k$. — ~~It is~~ The same hypothesis is, however, generally satisfied if $d > k$: it may be considered, therefore, as the generic case = A ~~lin~~ ∞^d-lin. syst. of M_{k-1} on M_k may be simple only if $d \geq k$; but it is generally so if $d > k$.

2. The ~~M_{k-1}'s of~~ hypersurf. of (1) thr. a generic point of M_k pass consequently (all) through a finite number ~~$\mu-1$~~ of other points of M_k, varying with the first one — This is the generic case if $d = k$ ~~this of ca~~

3. The Hypersurf of (1) thr. a gen. point of M_k pass consequently thr. infinite other points, that is at least thr. a whole curve of M_k, ~~of~~ varying ~~thr~~ with the first point. (it is always so if $d < k$). But this case does not present ~~any~~ interest in the actual question, as it does not lead to any transformation of the given M_k: whilst ~~both~~ others do so, & lead respectively to birational & to $(\mu, 1)$-transf.

1. In this case, the $\underline{d+1}$ eq.

$$y_i = \varphi_i(x) \qquad i = 0, 1, \dots d$$

will represent, as the locus of the point (y) in space S_d, an algebraic manifold, in a $(1,1)$; that is in birational corresp. with the given M_k; in fact, to ~~ever~~ each point (x) of M_k $\underline{\text{one}}$ point (y) only corresponds; and conversely, if (y) is a generic point of the new locus, corresponding to a ~~point~~ generic point (x') of M_k, the equations $\frac{\varphi_0(x)}{y_0} = \frac{\varphi_1(x)}{y_1} = \dots = \frac{\varphi_d(x)}{y_d}$ will give for the x's] ~~the only solution~~ (x'): unless, if we

] no other point on M_k, as

had two solutions $(x'), (x'')$ on M_k, ~~th~~ for a hypersurf. (1) the 2 conditions to pass thr. (x') & (x'') would be equivalent.

The locus of (y) is therefore a $\underline{V_k}$ in a $(1,1)$ corresp. with the given M_k. - ~~To~~ This corresp. changes the given syst. of M_{k-1} on M_k, determined by the hypersurf. (1), into the syst. determined, on V_k, by the hyperplanes $\Sigma\, \lambda_i y_i = 0$.

~~We shall say~~ ~~Every sim M_k~~ If a M_k is given, and on it a ∞^d simple linear syst. of M_{k-1}, we may always construct a second M_k, belonging to S_d ~~M_k~~, birationally equivalent to the first one, ~~on which~~ and the hyperplane sections of which correspond to the ~~given~~ lin. syst. of M_k.

We shall say this second M_k represents the given system of M_{k-1}. I already explained it, in one of the past lectures, for the particular case $k=2$, and M_k being a plane - the syst. of M_{k-1} a syst. of plane curves.

I may say that, in studying geometry on an algebraic ~~surface~~, manifold, ~~I may say~~ it is the fundam. concept of what we may call the Italian or geometrical method, to study a ~~lin. syst~~ (simple) lin. syst. of M_{k-1} on M_k by reducing it to the hyperplanar sections of a new M_k. – It involves necessarily more-dim. methods.

Particularly: for lin. series of groups of points on a curve, a new curve, on which the groups are determined by hyperplanes, etc.

It was stated firstly by Segre in the case of ~~rat~~ lin. syst. of plane curves & rational surfaces; and shortly afterwards applied by himself & Castelnuovo ~~to~~ groups of points on alg. curves – later still, in other cases.

The order n of the M_k thus obtained in S_d ~~is~~ = number of ~~points which~~ ~~[illegible]~~ intersections of the same M_k with a S_{d-k}, that is with k generic (independent) S_{d-1} = ~~(or M_{k-1}) of the linear system we considered~~ number of common points of k indep. M_{k-1} of the lin. system, on the second & also on the first M_k] = We shall call it the grade of the given lin. syst. of M_{k-1} in M_k = number of ~~[illegible]~~ variable intersections of k indep. M_{k-1} of the systems ($k=1$, n° of variable points of every group; $k=2$, on surfaces, n° of variable intersections of two curves of the linear system; etc.)] (fixed points excluded)

Two different M_k's of S_d representing, in the above sense, the same lin. syst. | are in a (1,1) correspondence, changing hyperpl. sections of the one into hyperpl. sections of the others – that is they are homographic ~~identical in a projective se~~ – that is identical from projective point of view. | or lin. syst. birat. equiv.

Projective geometry of this M_k is equivalent to birational geometry of ~~the fo~~ original one, on which the original lin. syst. of M_{k-1} may be fixed.

We may observe that hypothesis 1. only requires that hypersurfaces (1) thr. a generic point of the given M_k do not pass conseq. thr. any other point of M_k varying with the first one. ~~Th~~ But they may pass through other variable points ~~of~~ space S_r (~~to which~~ containing the given M_k) outside of M_k.

Ex. $k=1$, $r=d=2$. Consider a plane curve γ, and in the same plane a net of C^3 thr. 7 given points (some of which may also be on γ). The C^3's through a generic (8th) point will consequently pass through another (9th) point, varying with the first one: but if the first (8th) ~~will~~ ~~is~~ is on γ, the second (9th) will generally not be on γ.

The above process leads in this case to a new plane curve $(d=2)$ in a $(1,1)$ corresp. with γ; but it does not furnish a $(1,1)$ corresp. between both planes.

We still remain at hypothesis 1.

It may happen, that the M_{k-1}'s of the given linear syst. through a particular point $x^{(1)}$ of M_k pass all consequently thr. a finite number $x^{(2)} \dots x^{(s)}$ of other points of M_k. –

As the passages thr. ~~As~~ these s points ~~impo~~ are for the mentioned M_{k-1} quite equivalent conditions, their corresponding points on the new M_k of S_d will lie so that every hyperplane through one of them passes thr. the other too: that is they will be superposed, & furnish a multiple point of order s of the new M_k.

2. Suppose now that, in the given lin. syst. of M_{k-1}'s on M_k, all $M_{k-1}'s$ thr. a generic point of M_k pass consequently thr. $\mu-1$ other points of M_k, varying with the first one.

In this way, we obtain on M_k some groups of points $=\infty^k$ groups G_μ of μ points $=$; a generic point of M_k is contained in one G_μ only $=$ what we call an involution I_μ on M_k. On the contrary of hypothesis 1, we may say now that the given lin. syst. is ~~composed~~ not simple (composed?), and belongs to I_μ: a M_{k-1} (hypersurf.) of it containing a generic point of M_k, contains consequently the whole group of I_μ thr. that ~~first~~ point.

The preceding ~~the~~ equations ~~(??)~~ $y_i = \varphi_i(x)$ represent ~~furnish~~ then ~~for~~ a new M_k, say M_k', in a $(1,1)$ correspondence no more with the given M_k, but with I_μ; while M_k & M_k' are referred by them in a $(\mu, 1)$ corresp. – If k generic M_{k-1} of the given lin. syst. have n variable intersections — that is if n is the grade of the system — these n points will be necessarily constituted by a certain (integral) number of groups of I_μ: n must be consequently a multiplum of μ (μ a divisor of n); and the order of M'_k will be $= \frac{n}{\mu}$.

As any point of M'_k corresponds to / μ different points of the given M_k, we may consider also μ different point superposed there, and let them corresp. to single points of G_μ. We get so to the concept of a multiple M'_k, particularly of a M'_k multiple of the order μ, with μ sheets, which will be in a (1,1) corresp. with the given M_k. — If you consider that M'_k is of order $\frac{n}{\mu}$, with μ sheets, the final result is again a complessive manif. of order n.

/ a group G_μ of I_μ, that is

(like a Riem. surf.)

On the given M_k there ~~will~~ may be some points — in a finite or infinite number; in the last case there will be a curve, surface, ... as their locus — which are double points of groups G_μ. To them, as many points of M'_k will correspond, on which 2 sheets (at least) ~~of~~ among the μ's, are connected. We shall have so branch-points, ~~of~~ branch-curves etc.

A very particular case ~~of~~ are the double planes, we already spoke of.

These multiple M'_k have shown themself as very intuitive representatives of lin. systems belonging to involutions I_μ: they had a particular efficience on the farther development of the present theory. — Though double planes were already known, I think the general concept of the multiple manifold is an Italian conc.

This case may present itself also if $k=1$, that is on a curve: we will have then on the curve a involution I_μ of groups G_μ (∞^1 groups G_μ, a generic point of the curve being contained in one G_μ only)

You get a very simple example of it, if you consider ~~the~~, in S_3, the intersection of a cone say of order l with a ~~arbitrary~~ generic surface of order μ. Every generator of the cone ~~th~~ will contain μ points of this curve, the groups G_μ on the single generators forming a I_μ. — The ∞^2 planes through the vertex of the cone intersect the Curve (which is of order $l \cdot \mu$) in groups of $l \cdot \mu$ points, each of them resulting by a set of l groups G_μ. — The above process may be reduced in this case to project the curve in question from the vertex of the cone: its projection is a curve of order l — a plane section of the cone — to be considered as multiple of order μ.

(branch-points = intersections with generators which are tangent to $C^{l \cdot \mu}$).

If, on a given M_K, we consider two linear systems, ~~of~~ Γ_1 and Γ_2, of M_{K-1} (of dimensions $\geq K$), ~~one~~ the first of which is wholly contained in the other, the M_K' representing Γ_1 in the fixed sense will be a projection of that which represents Γ_2.

This property means, more exactly, that the first M_K' is projectively identical to a convenient projection of the second one. In other words, it is understood, ~~not to confu.~~ that two projective M_K's may be considered as identical.

Algebraic Manifolds

(Def. by Segre, suggested to him by works of Kronecker)
The syst. of all points of S_n the coord. of which satisfy a certain number of alg. eq. (polynomials $= 0$); equations which may ~~contain~~ involve also some arbitrary parameters (Es. Coord. of a point of a curve as given functions of a parameter!) — $f_i(x_0 x_1 \dots x_n \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_k) = 0 \quad i = 1, 2, \dots$
(the parameters being also homogeneous).

2 particular advantages of this def.:

1. The intersection of ~~2~~ any number of algeb. manifolds, if it does exist, is also an alg. manifold.

2. Every projection of an alg. manif. from a S_k on to a S_{n-k-1} is an alg. manif. — It is sufficient to prove it for $k = 0$; and, ~~if to~~ project the given manifold from the $[i]$-point of coord. on to the space $x_i = 0$, is equivalent with considering x_i as a parameter.
(In coord. ortog., trovare una curva $f(xyz) = \varphi(xyz) = 0$ ortog.te sul piano xy equivale a considerare nelle 2 eq. la z come parametro).

Es. in S_3 eq.ni di 3 quadriche aventi a comune una retta a 4 punti.

The given manifold may be constituted by the system of ~~system of 2 or m~~ a finite number of manifolds; and algebra gives them methods (Kronecker, Molk) to get for each of them a separated syst. of equations, ~~Each of this~~ in such a way that no one ~~each~~ of these manifolds ~~them~~ be ~~no longer~~ costituted by 2 or more single manifolds, and each of this parts be the locus of points depending on a certain finite number k of parameters (but k may vary from one part to another). This single part is then an irreducible manifold of dimension $k = M_k$ ~~Finite~~ — [If equations do not contain any parameter, k is the ~~number~~ greatest number of coord. to which we may attribute arbitrary values, the others remaining consequently determined in a finite numbers of manners.]

$k = 1$ curve
$k = 2$ surface
$k = n-1$, hypersurf.

Esempi di ordine

If we consider the syst. which is constit. by the eq. of M_k and by k generic linear equations (representing a S_{r-k}), it will be possible, through eliminations, to deduce from them one equation involving one (not homog. — or 2 homog.) coord. only. — The (constant) degree of this eq. gives the order of the M_k.

The order of an irreducible M_k in S_n is the (constant) number of ~~k~~ its ~~po~~ intersections with a generic S_{n-k}. If a S_{n-k} has with an irreduc. M_k ~~an~~ a greater number of common points than its order, they intersect each other in an algebr. manifold comprehending a part of dimension ≥ 1.

~~If~~ A generic S_{n-k+i} in S_n $(i \geq 0)$ intersects M_k in a M_i of the same order as M_k (a generic S_i, in a M_{i+k-n}).

The concepts of multiple point, multiple curve, etc. may be generalized. A M_k^r having a multiple point of order r is a locus of straight lines through this point (cone - vertex). The M_k^r may also be ~~compo~~ constituted by planes through a straight line (S_1-cone), etc.

We shall say that M_k^r belongs to space S_n when it is contained in S_n and in no hyperplane of it. – ~~We shall say M_k^r~~

By projecting a M_k^r from spaces which do not intersect it we have M_k^r ~~bel~~ (of the same order) contained in spaces of less dimensions. – But if we project M_k^r from one of this points, or from a space intersecting it, ~~t~~ the projection will have a lower order ($r-s$ if the projection is made from a mult. point of order s); (dims $< k$?).

(Es. C^3 piane) We shall say that a M_k^r belonging to S_n is normal, if it cannot be obtained as a projection of a M_k^r (of the same order) belonging to a higher space as S_n. – If it cans, we shall call it normal for (a convenient) $S_{n'}$ $(n' > n)$.

An irreducible curve of order n (M_k^n) is in any case normal for not a higher space than S_n; as through $n+1$ of its points a S_n certainly passes, which must contain the whole curve.

An irreducible surface (M_k) of order n is normal for a space having a dimension $\leq n+1$ (resp. $\leq n+k-1$).

An irreducible M_k^n belonging to S_{n+k-1} is in any case a normal one

Easy ~~est~~ generalizations lead to the concepts of the tangent to a curve (osculator plane, osculating S_3, S_4 ....) at a given point.
Tangent plane to a surface, ... tang. S_k to a M_k !!

From this moment we will only refer to <u>algebraic curves</u> and <u>linear systems</u> = we shall say <u>linear series</u> = of groups of points on them – that are groups of intersections of the given curve with a lin. syst. of hypersurfaces – abstracting, generally, from base-points belonging to the given curve.

We shall denote by <u>n</u> the number of points constituting a single group of the series – the <u>order</u> of the series – and by <u>r</u> its <u>dimensions</u>, that is the dimension of the lin. syst. of hypersurfaces which determines the series, provided that no hypersurf. of it contains the whole curve = and write g_n^r.

r generic points of the curve are contained in one group only of g_n^r. – (if simple, we may represent it by means of a C^n of S_r)

A g_n^r may be <u>composed</u> by an involution I_μ, <u>n</u> being (if we abstract from eventual fixed points) a multiplum of μ – (cfr. exampl. above).
The g_n^r may be <u>represented</u> in the known sense by a curve C^n of S_r (that is a new curve birationally referred to the former one, on which ....) – If g_n^r is composed by a I_μ, we get a $C^{\frac{n}{\mu}}$, but ~~multiple~~ <u>to be considered as multiple</u> of the order μ.

A g_n^1 is a <u>rational involution</u> I_n. Conversely, it may be easily shown that a <u>rational involution</u> I_n is a g_n^1.

On a plane curve <u>$f(x,y)=0$</u>, a pencil of curves $\varphi(xy)+\lambda\psi(xy)=0$ determines (abstracting ....) a <u>g_n^1</u>. In all points of a single G_n the rational funct. $-\frac{\varphi(xy)}{\psi(xy)}=\lambda$ will assume the same value <u>λ</u> (in the eventual fixed points of g_n^1 ~~being~~ that funct. will be indeterminate!).

If you consider $f(xy)=0$ as defining a Riem-surfaces, $-\frac{\varphi}{\psi}$ (x,y being connected by $f=0$) will be the most general <u>rational fct. on this surface</u> (~~se~~ se i 2 termini della fraz. avessero grado diverso, sarebbe da computare il punto ∞ come multiplo di ord. differenza), and the single G_n will furnish the groups of points of level of that fct.

You see the connection between both theories = groups of points on alg. Curves & their linear series = & Riemann's theory of alg. fct., that is of ration. fcts. on a given Riemann-surface. — A g_n^r appears as the syst. of points of level of a lin. syst. of rational fcts. $\frac{\lambda_1 \varphi_1 + \text{———}}{\varphi_0}$ having the same poles.

Geometria sopra una C. alg.

La geom. sopra una V^a alg., in part. sopra una C. alg. o varietà alg.^{e} ∞^1, studia le prop.^{e} di questa V^a invariabili p. trasf. biraz. (alg. e biunivoche) della V^a stessa (ci. sul piano, cioè sopra una sup. raz., sarebbero le trasf. Cremon.) – ~~Sulla~~ Sulla C. alg. essa conduce a considerare serie lineari di gruppi di punti (segati sulle C^e piane, di S_3, iperspaziali da sist. lin. di forme alg.), e anche involuz. ∞^1 non lineari, serie algebriche di gruppi di p. in genere.

Iniziata da Riemann, come studio delle fz. razionali dell'ente alg. (e loro integrali) – i gruppi segati dal fascio $f_1 + \lambda f_2 = 0$ (su una C. piana) sono i gr. di livello $(-\lambda)$ della fz. raz. $\frac{f_1}{f_2}$ – nella sua „Theorie der Ab. Fkt." (1857), fu continuata, secondo l'ind.^{zo} trascendentale, da Weierstrass ~~mentre~~ (nelle sue lezioni – e Werke, vol IV) mentre ~~[illegible]~~ importanti contributi, in tale ind.^{zo} e nell'Anal. Situs ad esso collegata, hanno portato Klein, Poincaré, Picard – ~~Clebsch~~ In Riemann rimaneva però nell'ombra l'interesse alg. dei problemi; le stesse funz. alg. o raz. dell'ente, comparivano solo dopo ~~i loro~~ i loro $\int$ = $\int$ diff.^{e} alg. = definiti direttam.^{e} a singolarità – Clebsch vi diede forma più alg. e geometrica, giovandosi della teoria analitica delle C. piane alg. (Ueber die Anwendungen d. Ab. Fkten in d. Geom., Crelle 63. 1864 = Clebsch-Gordan, Th. d. Ab. Fkt., 1866 = Clebsch-Lindemann, Vorles. ü. Geom. I. 1875): v. anche la 1^a lezione di Klein in „Evanston colloquium" (1893). – A suo $\frac{1}{2}$ anche contatto colle trasf. Crem., e di qui trasf. biraz. sulle curva. valendosi princ. D. alg. & geom. p. of view & connect with g. c.

La stessa teoria venne poi esposta con metodo uniforme e dim.^{ni} puramente alg. da Brill e Noether nella classica Memoria dei Math. Ann. 7, che studia le serie lin. sopra una C. piana, appoggiandosi sopra un importante teor. di Noether – ~~[illegible]~~ sulla possib.^{a} di rappres., in certi casi, ~~[illegible]~~ una C. piana ~~possa espr. rappres.~~ sotto la forma $Af + B\varphi = 0$, dove $f = 0$, $\varphi = 0$ sono C. date e A, B convenienti polinomi – teorema del quale sono state date varie dim.^{ni}. Severi (Atti Ist. V. 1908) vi ha dato anche una portata più vasta, per curve $f = 0$, $\varphi = 0$ aventi nei p. comuni contatti del tutto arbitrari, e lo ha esteso altresì a più ~~a~~ forme con un n.° qualq. di variabili (1902-05). – Esposiz. di detto metodo alg.-geom. ~~metodo~~ in Bertini (Ann. di Mat. (2) - 22 - 1894) – e libro Severi

Un altro ind^zo, che può chiamarsi algebrico-aritmetico, corrisp^te alla tendenza alla aritmetizzazione della matem^a (colla quale alcuni - a torto? - credono ragg. maggior rigore) trae origine da lavori e lezioni di Kronecker - e Dedekind-Weber

(Crelle 92 - 1882) e fu coltivata in Germ. da Hensel, Landsberg, e loro scolari. Ivi, ~~la classe di~~ il sistema delle fz. raz. di un ente alg., cioè una classe di fz alg., appare come un corpo di fz. (raz.).

si propongono di evitare le restrizioni portate alla trattaz^e algebrica dalle ipotesi sulle singolarità delle C^e - nel 1882 ancora molte - e, in base alla consid. che le Cp stanno alle Craz., all'incirca, come i num^i alg. a quelli raz., si propongono di trasportare alla teoria delle fz. alg. i proced. che avevano condotto Kummer alla teoria dei num^i ideali e quindi alla trattaz. della teoria num^i alg. mediante gli "ideali" (= sistemi, moduli, di numeri: qui di funz.)

Un altro metodo, più geometrico (o sintetico) è quello di Brill-Noether, ~~trae~~ e costituisce un ind^zo più propriam^e italiano, trae origine da ricerche del Segre, principalm^e degli anni 1885-90 sulla geom^a di iperspaziale, in partic. sulle rigate e V^a ∞^1 di Spazi. - Rappresentando le serie lineari g_n^r con curve C^n di S_r, costruendo, quando possibile, per serie g_k^1 su di queste le varietà di spazi (S_{k-1}?) determ^e dai loro gruppi, studiando corrisp^ze fra 2 curve a $\frac{1}{2}$ rigate..., vide si potevano ritrovare prop^a già note (es. Restsatz) senza i ragion^ti alg. o fzali degli altri metodi. - Castelnuovo (Atti Tor. 24 - 1888/89) affrontava la ~~cof~~ questione più di proposito, con trattaz. sistematica, e nuovi risultati. - In questa trattaz. ha parte importante il princ. di corrisp^za (detto di Chasles) per le corrisp. alg. fra 2 enti razionali (come già per Cremona): è esso che sostituisce il teor. fond. dell'algebra - È più gen^e l'uso di formole di geom. numerativa di sost. teor. fond. Noether.

già Noether nella Mem. sulle C alg, serie g_n^3

Corso 1890-91 - Esposiz. riassuntiva di Segre (Ann. di M. (2). 22. 1894 a seguito Bertini). - Fu più volte oggetto di corsi universitari, che vi portarono complem. e perfez^ti: e altri ~~se~~ ne portò altresì la geom. sulla sup. alg., svoltasi a seguito dal 1890 (circa) 93 in poi. - ~~Il~~ libro di Severi (ital., litogr. 1908; tedesco 1921: ma stampa iniziata prima della guerra)

Both had in many moments the character of collective researches - Segre, Castelnuovo: 1887-91 in Turin - Castelnuovo Enr (1896-900) afterwards Severi for surfaces - (incz 1904-05) Energies of investigators are summed. their discoveries follow each other rapidly.

La teoria è ~~suo~~ svolta secondo i vari ind^zi - escluso quello aritm^o - Ogni metodo ha i suoi pregi: ha le questioni in cui riesce più luminoso degli altri, quasi penetra più a fondo.

sist. covarianti! fondamento: le operaz. sulle serie ~~e teoria traff. parte quasi~~ [corsi lezioni 13/14 18/19 ~~a linea~~]

Forse si va formando adesso una teoria invariantiva, succ. di tutte le precedenti ~~Enriques~~ mi unisco, non si faceva che di enti di corrisp. invar. [Lincei 1919 - Ist. Chisini III] H Conv. J. Tor. e Staz. notizie storiche libro V, § 19.

Rapida ricostruz. didattica Severi Ist. ~~Lo~~ Ven. 79 - 1919-20 p. 929 - e anche

Enr. III §18 – p. 141 – ~~qui no~~ genere secondo il rango di Weierstrass – qui no, non potendo sottacere sviluppi preced.

85

110

Appendice (post. guerra): diverse questioni sui pti. ∞ di curve – ~~quando~~ condiz. perchè una C. piana riducibile posta come caso limite di una C. irriducibile; con applicaz. alla dimn. alg-geom. del teor. di esistenza di Riemann –: in S_r $(r \geq 3)$ famiglie di C. alg. di specie irrid. non contenuti in altri + ampie pure irriducibili di curve dello stesso ordine; ...

Varietà algebriche

Insieme dei p. le cui coord. a un nº qualq. di date eq. alg. (polinomi = 0) nelle quali possano anche comparire param.ti razion.i ~~arbitrari~~ indeterm. (Segre)

Intersez. di 2 o + var. alg. – Proiezioni.

La varietà così definita può anche comporsi di più parti, anche di dimni diverse – ma con proced.ti inerenti alla teoria dell'eliminaz. si riesce a separarle, cioè rappres. separat.te le varie parti

In S_r, le V_{r-1} con 1 sola eq.; le altre con $r+1$ al più.

Una M_k di S_r, se $k < r-1$, si può proiettare biunivocamente (rappres. biraz.te) su una M_k di S_{k+1}, a ½ di un S_{r-k-2} generico (v. sopra)

In S_3 per C non bastano sempre 3 eq. Vahlen Crelle 108 1891 p. 346 Es. + semplice R_0^5 con unica 4-secante (la R_0^5 gen.e) su nessuna Q, ma ∞^3 F^3

Viceversa:

Def. Severi (nº 28) (p. curva). Var. alg. M_k in S_r il luogo dei punti le cui coord. sono fz. razionali di un punto mobile sopra una V_k di S_{k+1} (il punto della 1ª fz. raz. del punto della 2ª) – Riduc. la 1ª quando lo è la 2ª.

Varietà razionali (omaloidi):

(funzioni raz. di k param. indip., con corrisp. biunivoca – 2ª condiz. superflua per k = 1, 2: non per k = 3). (Lüroth, Math. Ann. 9. p. 163; Castelnuovo, ib. 44. 1894)

Se (x), (y) sono punti generici di 2 varietà alg. X, Y, e si considera l'insieme delle coppie (x)(y) come un insieme di elementi, una Vª alg. di tali elem. dà origine a una corrisp. alg. fra le due Vª = definita da un pto. di eq. alg. fra le coord. dei 2 punti (x)(y), fra le quali sono comprese le eq. delle 2 Varª

Severi p. 162-3 le coord. dei 2 p. legate da 1 pto. di eq. alg. siché, date le y, si abbiano per le x, dei gruppi di valori, e vicev.

Caso della corrisp^za alg. (α, α'): le singole coord. di $(\underline{X})$ vengono ad essere fz. alg. ad α valori delle coord. di (y) — (Segre p. 9).

Corrisp^za univoca in un senso, quando in quel senso è razionale .....

Biunivoca, o birazionale — ~~può essere tale per due M_K di spazi a egual n° dimens, senza essere biraz. per es. ... Es. 2 curve piane~~

M_K razionale = riferibile biraz^te a un S_K.

Varietà alg. (es. Curve ...) in corrisp^za biraz fra loro — pur potendo avere caratteri proiettivi (ordine, classe, dims spazio cui appartengono, ..) diversi, formano un corpo-classe di cui una qualq. fra esse può prendersi come rappresentante. — In particolare, per una classe di M_K, una M_K di S_{K+1} (C piana, F di S_3, ...).

Qui la def. di Geom. sulla Var^tà

Suppongo noto anche il concetto di elemento di una M_K (ciclo, ramo, lineare o no, ...) (Segre p. 12) = quella regione circostante un p., nella quale le coord. di un punto di M_K si poss. espr. med. un med. gruppo di serie di potenze intere di k parametri: l'intorno di un p. comunque singolare è un insieme di siffatti elementi — Per trasf biraz un elem si muta in elem: ma elem^ti con una stessa origine possono diventare staccati.

~~Sciolte~~ Con trasf. biraz. si tende a sciogliere le singolarità, decomponendole in elementi.

(Severi, n. 17, 18). Ogni C. piana, con sing^tà arbitrarie (purchè non ~~c~~ contenga parti doppie), può a ½ di una trasf. Crem. del piano mutarsi in altra C. a soli p. mult. ordinari (a tg dist.)

vol. Bertini ...
" Enr. Chisini } (p. 135)

Ogni C ~~piana~~ alg. ha fra le sue trasf. birazionali delle C. piane con soli p. doppi ordinari — o anche una C. dello spazio S_3 (o anche S_r; $r \geq 3$) priva di p. multipli.

Lo studio, ~~poi~~ dal p. di vista della geom. sulla curva, può dunque ricondursi a questi casi.

Sistemi (serie) lineari – V^a immagini.

Data una M_K di S_r, il sist. lineare di forme (V_{r-1}): $\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0$ sega su di essa un sistema di M_{K-1}, che diremo formare un sistema o serie lineare (di gruppi di p. su una C, di linee su F, ...); convenendo che un'eventuale M_{K-1} base sulle M_K possa a piacere computarsi, o no, come parte comune delle M_{K-1} del sistema.

Es.: sezioni M_K con iperp. di S_r.

Sia il sist. lineare di dims $\underline{d}$ ($i = 0, 1, \dots d$, colle φ lin. ind.). Se nessuna forma di esso contiene M_K, ciascuna delle M_{K-1} del sist lin è segata da una sola forma del sistema; onde il sist. lin. M_{K-1} è pure di dims ~~*~~ d. – Se no, le forme del sistema contenenti M_K formano, entro il sist. lin. ∞^d proposto, un sistema lin. $\infty^{d'}$ $(d' < d)$; e si potrà in ∞ modi procurarsi un sist. lin. $\infty^{d-d'-1}$ cont. nel prec., di cui nessuna forma contenga M_K, e che su questa seghi lo stesso sist. lin. di M_{K-1}: onde quest'ultimo $\infty^{d-d'-1}$.

Equivalenza dei 2 problemi: dims. ~~del sistema~~ lin. formato dalle ~~..~~ V_{r-1} per M_K = ~~postulazione di M_K risp. alle forme V_{r-1}~~ = dimensione del sist lin di M_{K-1} che tutte le V_{r-1} segano su M_K = H

n° di tali M_{K-1} lin. indip. dà la postulaz.^{e} di M_K risp. alle V_{r-1} (strength of M_K for V_{r-1}?)

Se $\underline{d}$ è la dims del sistema, $\underline{d}$ punti generici di M_K indiv. una M_{K-1} del sistema per essi $(K = 1, 2, \dots)$.

La nozione di sistema o serie lineare è proprio di pertinenza della geom. su una V^e alg. Trasformando razionalmente $(1, \alpha)$ (non occorre birazt^e) la M_K med. le formule $x_i = f_i(x')$ un sist. lineare su di essa si muta in sist. lin. sulle V^a trasf.

Viceversa, data su M_K un sist. lin. ∞^d di M_{K-1}, segato da $\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0$, di egual dims (1)

si consideri la varietà rappr. dalle eq. ~~[illegible]~~ $y_i = \varphi_i(x)$, ui corrisp. raz. con M_K; al sist. lin. proposto corrisp. sulla nuova Var^a quello segato dagli iperpiani —— Se avviene che il passaggio di una V_{r-1} ~~del~~ (e perciò M_{K-1}) del sist. (1) per un p. generico di M_K non porti di conseg. il passaggio p. altri punti variabili col primo = sistema semplice, onde occorre sia almeno ∞^K; e se M_K non è omaloide, almeno ∞^{K+1} = la corrisp. fra le di M_{k-1} appaiono, dal p. di v. della geom. astratta, come i punti di un S_d: soddisf. a tutte le prop.e di individuazione e intersez. di spazi (lineari) minori in S_d.

(es. nel piano)

La nuova V.a serve per ~~il sist.~~ lo studio del sist. lin. di M_{k-1}, e viceversa questo per lo studio della V.a – La G. Π della nuova varietà si specchia nella geom. di M_k in relaz. al sist. dato di M_{k-1}, cioè quando p. di essa si fissi detto sistema (Segre n° 29 p. 24) – Gli elem. del sist. lin.

Questo è il concetto fondam. che sta a base del metodo geometrico italiano p. lo studio geom. sulle C. – e serie lineari. (I)
Se $d=2$, serie lin. ∞^2, la nuova C è ancora piana: trasf. birazion. fra le 2, che non è necess. tale per i loro piani (Es. $\overline{\text{Ta le}}$ φ sono coniche).
Severi p. 135 –
di 2 pg. prima

(ciò anche per $k=1$: serie lin. composte med. I_μ). (esempi)

(I) Se due diverse M_k di S_d rappres. entrambe nel senso accennato uno stesso sist. lin., esse risultano riferite Πmente tra loro.
(Enr. III 33)

2 varietà sarà birazionale (~~Dims~~ sistema $\geq k$, risp $\geq k+1$ è cond. necess. non suff; però in questi casi generalmente soddisfatte). Diremo allora che la nuova varietà rappresenta il proposto sistema lin. di M_{k-1} sulle M_k (prescindendo dalle eventuali sue parti fisse).

Es. curva di S_d in corrisp. biunivoca con altra, data, e che rappresenta una serie lin. assegnata su questa. L'ordine di quella C. è l'ordine di tale serie, astraendo dagli eventuali p. fissi: lo spazio cui app. ha la dim. della serie proposta.

Se invece sulle M_k avviene che tutte le M_{k-1} del sist. proposto passanti per un p. generico passino di cons. per un n° finito, $\mu-1$, di altri p. variabili col primo (e così sarà generalm. se $d=k$) ~~xxx~~, i p. di M_k vengono ~~a distribuirsi in ∞^k gruppi~~ a raggrupparsi a μ a μ in particolari gruppi, tali che un p. generico individua il gr. che lo contiene. Involuz. I_μ: sist. lin. composto mediante la I_μ; e la ~~nuova~~ corrispde fra M_k e la nuova Varietà è $(\mu, 1)$. — Viceversa, data ad arbitrio in M_k una I_μ, si possono costruire serie o sist. lineari comp. med. questa involuzione: rappresentando i gruppi della I_μ med. i punti di una nuova varietà, in corrisp $(\mu, 1)$ colla 1a; e prendendo di un sist lin in quest ultima il corrisp. nella 1a.

Supp. per un momento questo non sia per un p. generico di M_k (onde corrisp. biraz....): ma vi sia un particolare G_μ per cui ciò avvenga – Questi μ punti presentano per una M_{k-1} del sist. condiz.ni tutte equivalenti; hanno p. corrisp. un unico punto μplo (Segre p. 18). (Severi p. 79-80)

Se ciò avviene sempre – onde I_μ – si può la nuova Var.a pensare come luogo di punti tutti μpli, onde varietà μple (di ordine $\frac{n}{\mu}$, se è n il grado del sistema di M_{k-1}) in corrisp biraz con M_k.

Cousid.^{e} delle V^a multiple utilissima e suggestiva. (Starke suggestive Wirkung).
(ricordiamo i piani doppi).

Questa costruzione si può anche pres. in forma geometrica. Riferire πmente le forme del sistema lin. $\Sigma\lambda_i\varphi_i(X)=0$, (1) supp. ∞^d, al sistema degli iperpiani di S_d. – Un punto di M_k stacca un sist. lin ∞^{d-1}, cui corrisponde .... e un punto centro: la nuova V^a è luogo di questi ultimi punti. – Se il sistema lin. di M_{k-1} segato da (1) su M_k è semplice, si ha una nuova var. M_k in corrisp. biraz. colla prima – Se è composto ~~di~~ med. una I_μ, ai punti di uno stesso gruppo di I_μ corrisp. in S_d un med punto; onde Var^a μ^{ple}. (Il caso che il sist. di M_{k-1} appartenga a una cgr. di linee o altre, non trova qui applicazione).

Se un sistema lineare è contenuto in un altro, la varietà immag del primo è proiez. della V^a immag del 2° (Segre p. 25)

La cosa va intesa nel senso che la 1^a delle 2 varietà è proiett^e identica a una conveniente πz della 2^a. Figure πmente identiche non si considerano come distinte.

In particolare p. Curve (Severi p. 93 ~~87~~): Se fra 2 curve C, C' vi è una corr. biraz. tale ~~Oppure~~ che ai gruppi dez. ip. di C' corrisp. gruppi di C contenuti (totalm.^{e} o parz.^{e}) in sez. iperp. di C, sarà C' omog. a una πz di C – se contenuti totalm.^{e}, πz da spazio non incontrante C

(Enriques III p. 39-40). Una C^n di uno sp. quals. che non sia normale si può ottenere come πz di C^n normale ben definita, a meno di trasf. π (Illustraz. ibid. per C^4).

Serie lineari – Somma ecc.

serie ∞^1 =
gruppi di livello costante
per una fz. raz. del p. sulla curva – $R(x,z)$ ove x, z legati da $f(x,z)=0$ – coll'avvertenza che se la g_n^1 ha p. fissi, questi sono punti di indeterm.e della R.
(Enriques III p. 9-10)
Come una g_n^1 su C (es. C piana) può essere segata da 2 diversi fasci (g_2^1 su C^3 da fascio rette e C^2), si può avere 1 stessa fz def. sulla curva da ~~Direste~~ espress. diverse ove $\varphi_1\psi_0-\varphi_0\psi_1 \equiv 0 \pmod f$ – (ibid. p. 13)
E la g_n^r appare come la serie dei gr. di livello di un sist. lin di fz raz. aventi i med. poli $\frac{\lambda_1\varphi_1+\cdots}{\varphi_0}$ (ibid. p. 30)

Da questo momento ci limitiamo agli enti algebrici ∞^1 ($K=1$) o curve; e su di essi serie lineari di gruppi di punti.

Per lo studio delle serie lineari sull'ente ∞^1 $= g_n^r$ col metodo geometrico è fondamentale la considerazione, per ogni serie lin. di dimensione $r \geq 2$, della Curva, eventualmente multipla, che la rappresenta: di ordine n, se la g_n^r è priva di elem. fissi, in S_r.

Chiameremo involuzione sull'ente ∞^1 una serie alg. ∞^1 di gr. di punti, tale che un punto generico appartenga a un suo gruppo. – Tali involuz. non sono necess. razionali; es. notissimo sulle C ellittiche, dove possono essere anche ellittiche date da qualq. corrisp. di 2^a specie ciclica $Z' \equiv Z + \alpha \pmod{2\omega,\ 2\omega'}$ dove Z è l'int. ell. di 1^a specie, e α un sotto-multiplo di un periodo. – Una g_n^1 si può caratterizzare curve su un cono o rigata!
come involuzione razionale. (Segre p 31) (Severi p 62)

Invero: d. corrisp. $(1,n)$ fra retta e curva, perciò coord. d sulla retta è fz. raz. del punto sulla curva

Se una g_n^r (priva di elem. fissi) è composta con una I_μ, la curva che la rappres. è di ord. $\frac{n}{\mu}$, multipla secondo μ

I caratteri e le sing.^{a} della serie lin. (a prescindere dai p. fissi) si rispecchiano nei caratteri e sing.^{a} della C immag – e viceversa

(Segre p. 29)

A un gruppo della g_n^2 dotato di punti (non fissi) multipli secondo a, b, .. corrisp. un S_{r-1} avente colla C immag contatti a-punto, b-punto, … – ai gr. con p. r^{pli}, $(r+1)^{pli}$, gli S_{r-1} oscul. o iperosculatori (stazionari).

μ punti dell'ente i quali, a un gr. di g_n^r, presentino solo h ~~cond~~ condiz. $(h<\mu<r)$, stanno in ∞^{r-h} gruppi d. serie: avranno p. immg. punti di un S_{h-1} μ-secante – Questioni importanti di spazi secanti (geom. numerativa).

Le formole di Plücker, Cayley, Veronese che legano caratteri proiett. d. C^n piane, di S_3, S_2 si possono considerare come relaz. fra i caratteri di serie lin. g_n^2, g_n^3, g_n^2

Quindi interpretazione invariantiva di fatti proiettivi

Sempre $n \geq r$ – Se $n = r$, (i G_n sono solo ∞^n) ente razionale = (2 serie sempl. rappres. da C^n di S_n) ~~le C^n raz. sono normali in S_n~~

I gruppi di una g_n^r che cont. un punto assegnato (non fisso)

~~danno~~ formano g_n^{r-1} – ~~per~~ con tale p. come fisso – Prescindendone g_{n-1}^{r-1}

(interpretaz. come Π_2 C^n di S_r).

I gruppi che contengono s ($\leq r$) punti assegnati formano, prescindendo da questi, una $g_{n-s}^{r'}$ ove $r' \geq r - s$

Due G_n (A, B) app. a una med. g_n^r si dicono equivalenti. $A \equiv B$ (Severi n° 23)

(si possono sempre prendere come totalità degli zeri e poli di una fz. raz. dell'ente). – ~~Due gr. equiv. a un terzo...~~

~~Le due serie lin~~ Importante il concetto di serie lineare completa

cioè non contenuta in altra dello stesso ordine e di > dim = dire che la C. rappres.^{te} è normale.

Se no, parziale – Su C. raz. una g_n completa è g_n^n: onde ogni C^n raz. è Π_2 C^n di S_n.

L'importanza di tale concetto appare anzitutto dal teorema:

Da una serie lin. g_n^r (in particolare da una $g_n^0 = G_n$) è determ. in modo unico la g_n completa in cui è contenuta.

Si tratta, in fatti, di far vedere che, se due serie lin. g_n^r, $g_n^{r'}$ su una stessa C. hanno un gr. comune, esiste una più ampia g_n che le contiene entrambe.

1) Castelnuovo sopra C. piane (v. Enr. III p. 41). 7 – Bertini

2) Segre (n° 54) rappres. le 2 serie date con linee, event.^{te} multiple, in S_r, $S_{r'}$, fa loro indip. (dunque anche r, $r' = 1$; se uno $= 0$, teor. evid.), in corr. biunivoca: onde rigata delle coppie di p. omol. – (si può fare la dim.^{e} di p. 63, p. il caso non vi siano p. fissi) = nuova C. in corrisp. (1.1) colle preced. e che rappres. la nuova serie...

3) Severi (p. 68) seguendo una via indicata da Enriques (F, 1901) per la quest. analoga sulle superficie. – Supposte le due serie segate dai sist. lin. di forme

$$\Sigma \lambda_i f_i = 0 \quad (i = 0, 1, \dots r) \qquad \Sigma \mu_k \varphi_k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots r')$$

e che $f_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$ seghino il G_n comune, si considera il sistema

$$\varepsilon f_0 \varphi_0 + \varphi_0 (\Sigma \lambda_i f_i) + f_0 (\Sigma \mu_k \varphi_k) = 0$$

e si ricavasse che, oltre agli elem. comuni a tutte le $f_i = 0$, a quelli comuni alle $\varphi_k = 0$, e al C_n comune alle due g_n, sega una g_n che soddisfa a quanto richiesto.

4) (Enr. III p. 38) - La parte essenziale di questo enunciato è la prop. transitiva della relaz. di equivalenza: $A \equiv B$, $B \equiv C$. $\supset$. $B \equiv C$. Se si prendono 2 fz. raz. dell'ente aventi A come gr. dei poli, e risp. B, C come zeri, la loro comb. lin. $\lambda t + \mu \tau$ ~~definisce una~~ ha come gruppi di livello quelli di una g_n^2.

$g_n^1 \frac{t}{\tau}$ taglierebbe l'insiem. apparente nei p. di A.

L'unicità serie compl. implica [p. 39] una C^n sp. qualq. non norm. e la C^n norm. ben def. a meno trasf. Π.

Es. delle C^4.

I gruppi di una serie completa che contengono uno o + punti assegnati, quando si prescinda da questi ultimi, fissi, formano di nuovo una serie completa. (residua della 1ª risp. al gruppo di p. staccato).

Serie lin. somma di 2 date (complete)

Da $A \equiv B$, $A' \equiv B'$, segue
$$A + B \equiv A + B' \equiv A' + B'$$

Serie somma è la serie completa che contiene tutti i gruppi del tipo $A + B$ (riconosciuti equivalenti). (ord. $m+n$)

Serie somma di più altre - serie multipla* (Es. C. piane, ricordando devono essere complete). - tutti concetti invarianti p. trasf. biraz., perciò di pertinenza.

Nel campo funzionale, e alg.-aritm., questa operazione di somma è sostituita da un prodotto.

Però da $2A \equiv 2B$ non segue $A \equiv B$.

Es. su C^3, 2 tang. da 1 suo punto. Le relaz. di equivalenza fra gr. di punti gode delle propr. congr. numeri risp. a un modulo

da $2 \equiv 6$, mod. 4 non $1 \equiv 3$

di questo tipo è la condiz. equivalenza sulle for periods a ½ teor. di Abel. (Enr. III p. 42)

Differenza. Se nella serie compl. $|C|$ si sono effett. gruppi che contengono il gruppo A, sicchè esista serie residua, sarà
$$|C| \equiv |A| + |B|$$
e allora $|B|$ si definisce come la serie diff.

I resti di un gruppo risp. a una serie lineare completa sono anche resti risp. ogni gr. equivalente al primo

È una parte del teor. noto come Restsatz di Noether.

Premesso che (Severi p. 120) le aggiunte di ~~una C~~ dato ordine di una C. piana segano sopra questa, fuori dei p. multipli, una serie lin. completa (dimo. basata sul teor. fond. di N.), si può dire che il Restsatz è l'applic. del teorema di cui sopra a quest'ultima serie completa (p. 123).

* Castelnuovo, Palermo 1893

The fundamental property of linear series, giving the definition of the „canonical" series:

$$|A_j| - |2A| = |K|$$

is also important, as it may be generalized & applied to surfaces and manifolds of an arbitrary dimension. In the same manner as, on alg. curves, every g^1 has an Jacobian group, on alg. surfaces a generic ~~every~~ net (∞^2 lin. syst.) of curves has an Jacobian curve, the locus of (variable) ~~the~~ double points of curves of the net: and Jacobian curves of all nets contained in a given lin. syst. of curves belong to a determinate complete system, the Jacobian system of the given syst.

The lin. syst. $|A_j| - |3A|$ – safe for some details, I ~~shall~~ cannot explain now – is connected with the given surface in an invariant manner; and ~~we~~ is called the „canonical system" of the surf. in question. And so on.

In fact, this def. of the „canonical" syst. or series was given firstly by Enriques for surfaces (Fondamenti 1901), and afterwards applied by Severi to curves (1902 u. Vorlesungen). Excepting the concept of Jacob. series, the idea already in Castelnuovo 1891.

The formula $V = 2(n+p-1)$, giving the number of the double points of a g_n^1 on a C_p, may be extended to the number of ~~points~~ multiple points of order $r+1$ of a g_n^r (firstly $r=1$); by means of a recurring reasoning, from r to $r+1$. The general formula ($V = N_r$) is [Segre - Annali 1894]:

(1) $N_r = (r+1)(n+rp-r) = (r+1)n + \binom{r+1}{2}(2p-2)$

If there are points of greater multiplicity than $r+1$, they must be considered among the N_r with a convenient multiplicity.

The last formula may also receive some projective applications, in order to determine, for a given curve, the ~~number~~ orders of all M_k's constituted by the osculating S_{k-1}; the number of osculating hyperplanes ~~th~~ a given point; the number of hyperosculating hyperplanes.

~~The same, purely numerical formula, may also be obtained,~~

~~in the same manner~~ at, for $r=2$, by means of the Jacob. series, ~~as a consequence of a~~

You will remember that, for $r = 2$, the concept of the Jacobian series enabled us to write the functional relation

$$|A_J| - |2A| = |K|$$

~~from of whi~~ having the formula $V = 2(n+p-1)$ as a numerical immed. conseq. — We may do the same also for an arbitrary value of r, as you may see firstly in the book of Severi, but in a more simple way in a paper of Enriques (Lincei 1919) and in the 3rd volume of Enriques-Chisini.

Suppose to consider a g_n^s, $s \geq r$; all series g_n^r contained in it; and for each g_n^r the group A_r of its N_r mult. points of order $(r+1)$ $[A_1 = A_J]$. All these groups A_r are also equivalent, ~~and~~ determine a complete series $|A_r|$, which is also, for all values of r, a covariant series of the given series. We have then:

$$|(A+B)_r| = |A_r + (r+1)B| = |B_r + (r+1)A|$$

δ provided it exists,

Therefore the difference $|A_r| - |(r+1)A|$, δ does not depend on the given series; it is again an „absolutely invariant" series but it is not a new invariant;

$$|A_r| - (r+1)|A| = \binom{r+1}{2}|K|$$

From ~~this~~ relation, ~~we~~ the formula (1) follows as a numerical consequence.

It is certainly a merit of the Ital. geom. school to have ascended from numerical to functional relations — The numerical relations were already known, though from a diff. point of view: on a plane curve, linear series are determined by lin. syst. of pl. curves; points of a given multipl. means therefore a curve having with the former one a certain contact: no wonder that in Cayley's paper: „On the curves . . . ." (Ph. Trans. 158, 1867, n. 74 e seq.), and also in a paper of De Jong. (Crelle 66 – 1868) these & more general formulae be contained.

Italians have also solved more general numeric problems ~~as~~ the preceding: but I cannot speak now about them.

altra applicaz. di Castelnuovo (Ricerche, 1889: Sui multipli di una serie lineare ... Palermo 7, 1893).

Genere massimo di una C^n irriducibile app. a S_r.

Nel 2° lav. cit. studia i 2 problemi, connessi, della postulazione di una C_p^n rispetto alle forme d'dato ordine, e della dim. delle serie lin. che tali forme segano su quelle C_p^n $\quad$ K mass. intero $< \frac{n-1}{r-1}$

Per la serie $[k]$, di ordine kn, segata dalle V^k, riesce, per certi valori di k $\left(K < \frac{n-1}{r-1}\right)$ a stabilire un ~~minimo~~ limi. inf. della dim. $r_0 \geq \rho(K, r)$ — D'altra parte, quando $kn > 2p-2$, e perciò la serie è non speciale,

$r_0 \leq kn - p$; segue

$kn - p \geq \rho(K, r)$ $\qquad$ $p \leq kn - \rho(K, r)$

e tenendo conto $K < \frac{n-1}{r-1}$ si riesce a trovare per p un limi. sup.

fz. di n, r soltanto e effett.te raggiunto:

$$p \leq \chi\left\{n - r - \frac{\chi-1}{2}(r-1)\right\} = \chi(n-1) - \binom{\chi+1}{2}(r-1)$$

dove χ è il minimo intero non infer. a $\frac{n-r}{r-1}$ $\left[\frac{n-r}{r-1} \leq \chi < \frac{n-1}{r-1}\right]$.

Per $r = 2$, $\chi = n-2$, mass $= (n-2)(n-1) - \binom{n-1}{2} = \binom{n-1}{2}$

$r = 3$, $\chi = \frac{n-3}{2}$ o $\frac{n-2}{2}$

$$\begin{cases} \frac{n-3 . n-1}{2} - \frac{n-1 . n-3}{4} = \frac{n-1 . n-3}{4} \\ \frac{n-2 . n-1}{2} - \frac{n . n-2}{4} = \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Le curve ~~di genere~~ C^n di S_r di genere massimo sono di 3 tipi:

1) $n < 2r$, $r = n, n-1, n-2, \ldots \frac{n+2}{2}$ o $\frac{n+1}{2}$ curve normali non speciali C^n_{n-r} di S_r $(p = n-r)$ $(\chi = 1)$ $\quad$ $n - r = p$

2) $n = 2r$, $\chi = 2$, genere mass. $r+1$ sono le curve canoniche di S_r, C^{2r}_{r+1} = Cast.vo dimostra che (se $r > 2$) ~~A~~ stanno su $\binom{r-1}{2}$ quadriche lin. ind. (es. $r = 3, 4, \ldots$) — Quando contengono una g_3^1, i gruppi di questa sono allineati, e le cong. formano una R^{r-1} raz. norm. comune a tutte quelle Q.

3) $n > 2r$ = curve speciali, normali, non canoniche — queste stanno (se $r > 2$) sempre sopra una R^{r-1} raz. norm., oppure, se n pari, $r = 5$, sopra una F^4 di Veronese.

(estens. teor. Noether, C^n di S_3 genere mass. sopra Q.

Dalla formola di Schubert, scritta un po' diversamente, si può far seguire altra importante applic. di Castelnuovo (Lincei 15. 1906, p. 357): criterio numerativo se una ∞' algebrica di G_m si compone di gruppi equivalenti — il criterio essendo dato dal n° dei p. doppi.

Riprendiamo la formola che dà il n° dei gruppi G_{r+1} comuni a una g_n^r e una I_m di genere p:

$$z = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}(p - m\pi)$$

Si può far figurare, in luogo del genere π di I_m, il n° y dei p. doppi [legato a questo dalla form. di Zeuthen $y = 2(p-1) - 2m(\pi-1) = 2(m+p-1) - 2m\pi$: in Schubert è anzi questo carattere che entra per primo]

$p - m\pi = \frac{1}{2}y - (m-1)$

$$z = \binom{m-1}{r}n - \frac{1}{2}\binom{m-2}{r-1}y$$

e questo vale anche se la I_m è sostituita da una γ_m^1 d'indice μ, purchè la C^n si pensi μ^{pla}, cioè si ponga $n\mu$ in luogo di n.

Ora (Severi n° 75), data una tale γ_m^1, prendendo $m-1$ suoi punti di un gruppo, e in più altri p p. generici della curva (non 1'm^{simo}) si ha un G_{m-1+p} che definirà una g_{m-1+p}^{m-1} completa non speciale, la quale non conterrà (parz.te) la γ_m^1 — ~~la contenga~~ [a parte]

Il resto della g_{m-1+p} risp. ai primi $m-1$ punti è un semplice G_p (non una g_p^1) che non contiene l'm^{simo}.

Allora il n° dei gruppi di γ_m^1 che stanno (parz.) nella g_{m-1+p}^{r}

$(m = r+1)$

$$z = \mu(m+p-1) - \frac{1}{2}y$$

onde

$$y = 2\mu(m+p-1) - 2z$$

Quindi (poichè $z \geq 0$): $y \leq 2\mu(m+p-1)$. Il segno di eguaglianza si ha sempre e solo quando la γ_m^1 si compone di gruppi equivalenti — ossia $z=0$ sempre e solo quando gr. equiv.

Sopra una C_p una γ_m^1 irrid. d'indice μ ha al mass. $2\mu(m+p-1)$ p. doppi; e tale mass. è ragg. sempre e solo .....

Di qui ~~Severi~~ si ritrova un risultato di Severi, che ha ufficio importante in talune ricerche sulle sup.:

Se la γ_m^1 è tale che l'insieme dei μ gruppi contenenti un p. generico (compreso tale punto, contato μ volte) al variare di P si mantiene equiv. a sè stesso, altrettanto avverrà dei gruppi di γ_m^1.

$f=0$ a plane ~~curve~~ C^n of genus p, g^1_2 and by

If you denote by $\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots p-1)$ the linear syst. of ~~the~~ its Adjoint-C^{n-3}'s, the parametric equations

$$y_0 : y_1 : \dots : y_{p-1} = \varphi_0(x) : \varphi_1(x) \dots : \varphi_{p-1}(x)$$

will define a Curve C_p^{2p-2} in S_{p-1} which represents in the well-known sense the canonical g_{2p-2}^{p-1} of $f=0$: ∫ Germans called it the „Curve of the φ's"; Italians, „canonical curve of genus p". ∫ that is....

As on a curve of genus p the canonical series is the only g_{2p-2}^{p-1}, all ~~#~~ canonical curves of genus p being in a $(1,1)$-corresp. with each other are projectively identical.

Is it possible that the canonical g_{2p-2}^{p-1} may be composed with an involution I_μ? The canonical curve will then be constituted, in fact, by a curve of order $\frac{2p-2}{\mu}$, belonging to S_{p-1}, to be counted μ times: it follows $\frac{2p-2}{\mu} \geq p-1$; therefore $\mu = 2$, and the curve of ord. $\frac{2p-2}{\mu} = p-1$ must then be a rational normal curve, the Involut. I_μ consequently a rational I_2, that is a g_2^1. — And conversely, if on a curve ~~the~~ of genus $p>1$ there is a g_2^1, the system of all groups of $p-1$ pairs of this g_2^1 will constitute a g_{2p-2}^{p-1}, also the canonical series. ∫ If $p=2$, the g_2^1 itself is the can. series.

To say the curve contains a g_2^1, means there is, on the corresponding Riemann's Surface, a ~~rat. fct~~ ~~bivalent~~ 2-valued rational fct. y, with 2 poles ~~2 zeros~~ which will be connected to the independent variable x by an eq. involving y at the 2nd degree:

$$y^2 + Ay + B = 0$$

where A, B are rat. fcts. of x (only): therefore, on the mentioned surf, all rat. fcts. will be rat fcts. of x and of the square root of a polynomial involving x. ~~#~~ They are hyperelliptic curves (resp. surfaces) them.

~~A can~~ A canonical curve C^{2p-2} in S_{p-1} is always a ~~simple~~ simple curve, excepting the only hyperelliptic case, in which it is a double rational normal curve of order $p-1$; on this curve there are $v = 2(n+p-1) = 2p+2$ branch-points.

∫ Again, all special series, being contained in the canonical g_{2p-2}^{p-1}, will also be composed with the g_2^1. (Verific. per C^m con A^{m-2})

Clifford's theorem: For every special series g_n^r it is $n \geq 2r$ may be completed as follows:

~~It is $n = 2r$~~ A special series g_n^r for which $n = 2r$ may be only either the canonical series, or any special series on a hyperelliptic curve. For all other special series, $n > 2r$.

Result of yesterday. On a plane C_p^m the adj'. C^{m-3} cut out exactly a g_{2p-2}^{p-1} having no fixed points – and that is the canonical series.

As, for any special series g_n^r we have

$$n \geq 2r$$

and if the series is complete $\quad r \geq n-p \,, \quad r \geq n-p+1$

we deduce, summing, $r \leq p-1$; &, summing the 1st with the 2nd mult. by 2, $n \leq 2p-2$, for special complete, & a fortiori also not complete series.

In any special g_n^r it is $n \leq 2p-2$, $r \leq p-1$. Among special series, the canonical one has the most great order & dim.

You may already, from this moment, understand, ~~how~~ why spec. series may be all contained in the can. series.

Genere dell'ente algebrico.

È nota la definiz. per C^n piane irriducibili, che supp. con d soli p. doppi, d ordin., r cusp.

$$p = \binom{n-1}{2} - (d+r)$$

Si tratta di dare, in base alle consid. di serie lin. sull'ente, una def. dalla quale emerga immediata la prop. "invariantiva di questo carattere", e che comprenda la prec.

Formola della classe

$$\nu = n(n-1) - 2d - 3r \; *$$

Segue

$$\nu - 2p = 2(n-1) - r \quad \text{ossia} \quad (\nu+r) - 2n = 2p-2$$

~~$\nu+r = 2(n+p-1)$~~

dove il 1° termine $(\nu+r)$ è il n° degli elem. doppi della g_n^1 segata su C^n dalle rette di un fascio generico. — Indicando $\nu+r$ ora con ν.

$$\nu - 2n = 2p - 2$$

n° elem. multipli doppi di una g_n^1 in genere (Severi p. 96-7) — Tali elem. sono detti invarianti alla g_n^1, purchè non si tenga conto delle event. sovrapposiz. risultanti da p. d'incontro di varii in una stessa origine.

Si può dimostrare che, sopra un dato ente alg. ∞^1, la differenza fra il n° dei punti doppi di una serie lin. ∞^1, e il doppio dell'ordine di questa, non muta al mutare della serie. Evidentᵗᵉ essa è allora un carattere inv. p. trasf. biraz.

Dim. Segre (n° 33) mediante ~~corrisp. fra~~ consid. di una g_n^1 (ν el. d.) e una g_m^1 (μ el. d.), ~~consid.~~ come enti razionali (forme di 1ª specie, ranges), e, nella 1ª di es., corrisp. nella quale sono omologhi due G_n ~~tali~~ che contengano risp. 2 p. di uno stesso gr. di g_m^1 — (G_n : n punti, che individ. altrett. gruppi di g_m^1, in ciascuno dei quali altri $m-1$ p.) : corrisp. simm. d'indici $n(m-1)$, con $2n(m-1)$ el. uniti, che provengono dai μ el. d. di g_m^1 e dalle d coppie comuni alle 2 serie, queste ultime da contarsi 2 volte; onde:

$$\left.\begin{aligned}2n(m-1) &= \mu + 2d\\ 2m(n-1) &= \nu + 2d\end{aligned}\right\} \; \nu - 2n = \mu - 2m$$

Da ciò la def. del genere $p = \frac{\nu}{2} - n + 1$ (ν certo pari! v. sopra)

e la formola $\nu = 2(n+p-1)$ — Se vi sono punti di varia multiplicità ν_i, $\Sigma(\nu_i - 1) = 2(n+p-1)$ *

Enti razionali $\nu = 2(n-1)$ (Jacobiano), onde $p = 0$

Segre osserva (p. 44, nota) che il concetto di questa dimᵉ si ritrova, sostanzᵗᵉ,

---

* Così, fra le tg a una C. piana per un punto dato, se vi è una tg di flesso, questa ne assorbe 2 del caso generale.

in molte delle vecchie dim^{ni} dell'inv. genere p. Noether Brioschi: nel senso che c'è, gen^{te}, un certo ente sul quale si comparerano 2 serie lineari ∞^1, come sopra.

Nelle dim^e di Cremona, questo ente è la rigata; e le 2 serie lin. sono ~~ottenute~~ cost: ~~p~~ conducendo le tg a C^m, $C^{m'}$ dai singoli p. della retta inters. loro piani, e gruppi di gener. per p. di contatto — ordini (= classi delle curve) ~~$2(n+p-1)$~~, ~~$2(m+p-1)$~~, se non vi sono cuspidi, $m(m-1)-2d$, $m(m-1)-2d$,

n° elem. doppi = flessi = $3m(m-2)-6d$, ... e m, n inters.

$$\cancel{2m(m-1)-4d-[3m(m-2)-6d]=\dots}$$
$$3m(m-2)-6d+m-[2m(m-1)-4d]=\dots$$
$$m^2-3m-2d=\dots..$$

~~Un'altra defini. ancora del genere~~ Alla stessa def. del genere si può arrivare anche con consid.^{ni} che penetrano più a fondo nella questione (Severi, Cap. IV, in base a Enriques (F, Atti T 1901) e lui stesso (Palermo 17. 1902. 82) = nota a piè pg.).

— dunque dalla teoria sup. salvo il concetto di serie Jacob., il resto già in Castelnuovo Lincei 1891_2 p. 299 applicabile anche nell'estensione a V^{te} di + dim^{ni}

Concetto che ha poi trovato, a opera di Severi, larga applicaz. per le curve, es. nella teoria d. corrisp. Sostituire a relazioni puramente numerative, come la $v-2n=\mu-2m=2p-2$ relazioni funzionali ~~di cui quella è~~, che penetrano dunque più a fondo, e di cui quelle sono la applicaz. numerativa, dunque immed. conseguenza. Dimostrare che certi gr. di punti, ottenuti da altri, in ~~2~~ modi diversi, p. somma e sottraz., sono equiv.: essi si comparranno allora di = n° di punti....

δ serie det. da G_ν, meno doppio serie data = serie can.

Il gruppo ~~degli~~ dei ν elem. doppi (in gen^e multipli, opportun^{te} contati) v. Severi p. 103 di una g_n^1 si chiama Gr. Jacobiano di questa (caso ente raz.)

Severi ~~dimostra~~:

1 - Che i gruppi Jacobiani delle varie g_n^1 contenute in una med. g_n^2 sono fra loro equivalenti. Appartengono dunque a una ~~ben definita~~ serie completa perfett^{te} individ. dalla g_n^2, e che si chiama la sua ~~Jacobiana~~ serie Jacobiana.

con soli p. mult. ord., p. sempl.^{a},

Possiamo verificarlo per la g_n^2 segata su una C^n piana dalle rette, osservando che i gr. Jacobiani delle sue ∞^2 g_n^1 sono segati — fuori dei p. multipli — dalla rete delle 1^e polari: la serie Jacobiana perciò dal sist. lin. delle C^{n-1} aggiunte.

Il legame fra la g_n^2 e la sua serie Jacobiana è tale che fin d'ora poss. dire che quest'ultima è una serie covariante della prima.

2. (Teor. fond. delle serie Jacobiane). Se $|A|$ e $|B|$ sono due serie lineari sopra una stessa C, si ha:

$$|(A+B)_j| \equiv |A_j + 2B| \equiv |2A + B_j|$$

cioè la serie Jacob. della somma di 2 serie date è anche somma della Jacob. di una delle 2, e della serie doppia dell'altra.

~~Qu~~ Fra le serie ∞^1 cont. in $|A+B|$ vi sono quelle composte di una serie ∞^1 entro A con un gruppo B fisso in più ? ~~Lo vedremo subito per gli enti alg. (alcune e Jacobiane) — E anche~~ (Riferiamoci ora a una C^{m+n} piana con B^m_{agg}, dove $|A|$ sia la g_n^1 segata dalle rette per B; il gruppo B quello degli m punti sovrapposti. — Per una g'_{m+n} ~~qu~~ generica della g_{m+n}^2, il gr. Jacobiano è segato, fuori dei p. multipli, dalla 1^a polare .... Quando il centro del fascio si porta in B, $2m$ delle tang. da esso vengono a coincidere, a 2 a 2, colle m tg in B stesso .... (Severi p. 98).

Si può anche scrivere

$$|A_j - 2A| = |B_j - 2B|$$

almeno nell'ipotesi che la serie così rappres. (in 2 modi diversi) esiste effett. e In ogni caso se ~~esiste~~ questa serie esiste, essa ha caratt. invariantivo — è legata invar.te all'ente. Se l'ente si trasf. biraz. in altro, la serie $|A_j - 2A|$ (*) sul primo .... ~~è la così detta serie canonica~~

L'applicaz. numerativa di questa (o delle prec.) dà appunto $\underline{\nu - 2n = \mu - 2m}$.

~~esiste effettivamente~~ ~~Ora, presa come $|A|$ una g_n^2 semplice~~,

Ora, riferendosi a una C^n piana (semplice) con soli p. d. ord., e presa come $|A|$ la serie cui appartengono i gruppi segati dalle ∞^2 rette, sappiamo che $|A_j|$ contiene i gruppi ~~X~~ segati dalle agg. C^{n-1}; perciò la C piana, $|A_j - 2A|$, se esiste, contiene i gruppi eventuali ~~dalle agg.~~ ~~serie~~ segati dalle agg. di ordine $n-3$. Se esiste l'una, esiste l'altra, e coincide colla prima. — In realtà la $|A_j - 2A|$ completa è proprio segata ecc. e la A_j proprio ecc. (potendo quest'ultima avere p. fissi Enr. III p. 61).

Infatti tenendo ferma la def. del genere $p = \frac{\nu}{2} - n + 1$ (a $1/2$ una qualq. serie ∞^1) possiamo ora ~~verificare che~~ riferire il nostro ente a C^m piana con soli $\underline{d}$ p. d. ord. verificando che per questa è $p = \binom{m-1}{2} - d$, e che per essa ~~ove~~ le agg. d'ord. $m-3$ dipendono da almeno $\underline{p-1}$ param. — Ne esistono dunque certo se $p \geq 1$ (ma se ~~fosse~~ $p = 1$, ~~è~~ di ordine $\underline{zero}$: il che vuol dire $A_j = 2A$).

(*) Sotto questa forma il ris. si estende alle sup. e V^a sup. — Sulle sup. è il sist. $|C_j - 3C|$, se esiste, che ha caratt. inv. sull'ente.

Ecco il risultato più completo:

Ad ogni ente di genere $p \geq 1$ è legata in modo invariabile una serie lin. di ordine $2p-2$ e dim almeno (anzi, precisamente) $p-1$, tale che, per ogni serie $|A|$ dell'ente, essa costituisce la diff $|A_j - 2A|$ (ossia, sommata a $|2A|$, dà la Jacobiana $|A_j|$) = serie canonica = e invariante per trasf. biraz. dell'ente (notizie storiche, Enr. III p. 61-2)

vedere Severi p. 246 e seg.
Se $\varphi_i(x,y)=0$ sono agg. di ord. $n-3$ di $f=0$, lin. indip., saranno $\int \frac{\varphi_i(xy)}{f'_y}dx$ p. integr. ab. lin. ind.
Si tratta di esaminare come i detti $\int$ si comportano nei poli di $\frac{\varphi_i}{f'_y}$ e nei p. all'∞ di $f=0$, e far vedere che vi rimangono finiti.

La formola numerativa

$$v = 2(n+p-1)$$

riferita alla g^1_n segata sopra una C^n dagli iperp. di un fascio ~~di~~ generico, dà il $n°$ degli iperp. del fascio tangenti alla C^n, ossia l'ordine della rigata ~~delle~~ sviluppabile delle tang alla C^n. — Se però la C^n ha p. sing. (~~a cuspi~~ orig. di rami non lineari: cusp. e casi part.), gli iperp. del fascio per questi punti contano fra i v, con appos. multpl., e la rigata delle tang è di ordine inferiore.

sotto
(I) $r=2$, gruppo dei flessi
$3(n-2)-3 = 3(n-3)$ Enr III p. 68

Con un proced. ricorrente (Segre n° 42) si ha il numero dei punti $(r+1)^{pli}$ di una g^r_n:

$$N_r = (r+1)(n+rp-r) = (r+1)n + \binom{r+1}{2}(2p-2)$$

Se però c'è un elemento che sia K^{plo} $(K \leq r+1)$ per più che ∞^{r-k} gruppi, esso va computato fra gli N_r con una certa multplà: sul che non insistiamo. di multiplicità maggiore che $\binom{r}{2}$ | basta così

(a pg. seg.)
*

Corrisp. proprietà geom°-funzionale, come p. $r=1$ a $\frac{1}{2}$ serie Jacobiana, in Severi n° 73 — ma occorrono consid. più elevate, sulle corrispze. Enriques (Lincei 28 - 1919, - p. 370) ha osservato che, se entro una g^s_n $(s \geq r)$ si prendono tutte le g^r_n, i ~~gruppi~~ rispettivi gruppi di punti $(r+1)^{pli}$ stanno anche in una serie lin. $|A_r|$ — mentre $A_1 \equiv A_j$, anche questa covariante. Si trova
$$|(A+B)_r| = |A_r + (r+1)B|$$
$$= |(r+1)A + B_r|$$
quindi
$$|A_r - (r+1)A| = \text{cost} = \binom{r+1}{2} \text{serie can.}$$
ma non ancora serie inv. basti
che conduce alla relaz. numerativa di sopra. (I)
+

Questa formola dà in particolare ~~l'ordine della varietà formata dagli S_r oscul.~~ a una C^n, ~~appart. a uno spazio~~ per una C^n di S_r il n° degli S_{r-1} osculat. stazionari; e per una C^n di sp. sup. S_r, l'ordine della varietà degli ∞^1 S_r osculatori ($r=1$, rigata delle tangenti). — Sotto tale forma in Veronese m. Ann. 19

È un caso particolare di una formola di De Jonquières (Crelle 66 p. 289 1866) che dà il n° dei gruppi di una g^r_n aventi un p. K_1^{plo}, uno K_i^{plo}, ... ove $\Sigma(K_i - 1) = r$. — In realtà, egli parla di C. piane di un sist. lin. che devono avere con una curva data contatti di ordine assegnato — Suppone

Severi p. 189

V. anche Cayley: On the curves which satisfy given cond., Ph. Tr. 158, 1867 n. 74 e seg.

dapprima quest'ult. C. raz. - cioè n° mass. p. doppi, e cuspidi — esaminando poi la diminuz. nel n° delle soluz. portata da un aumento nel n° p. doppi fino al massimo

Più generale ancora (Severi p. 190) è il problema di trovare il n° (supp. finito) ~~il n°~~ dei gruppi di g_n^r che hanno un p. ν_1^{plo}, uno ν_2^{plo}, ... uno ν_t^{plo}, ammettendo ciò equivalga solo a $\sum \nu_i - q$ cond. distinte.

Non ancora risoluto in tutta la sua generalità; per impor. tanti casi da Severi e Giambelli, anche Tonstuori – mentre alcuni casi già Brill-Noether, F. Meyer, ..

* (pg. prec)

\+ Principio euristico di Enriques: Le serie lin. che si possono def. sopra una qualsiasi C_p come covarianti raz. di serie date (una o +) si possono formare combinando per somma e sottraz. le dette serie colla serie canonica.

Da facili considerazioni sulle curve piane C^m e loro agg. risulta: (Segre §15)

1) che ~~le~~ il sist. di tutte le aggiunte di ordine $\geq m-2$, diciamo $m-2+\alpha$, con $\alpha > 0$, segano sulla C^m fuori p. mult., una serie lin. di ord. $n = m\alpha + 2p - 2$ e dimens $r \geq m\alpha + p - 2$, perciò $r \geq n-p$ (il segno > è dovuto al fatto che non sappiamo a priori se le cond. imp. dai p. mult. siano indip.)

2) il sist. di tutte le agg. di ord. $m-3$ sega una serie di ord. $n = 2p-2$ e dimens $r \geq p-1$. Per questa $r \geq n-p+1$, $r > n-p$.

Queste disuguaglianze ($r \geq n-p$ nel 1° caso, $r > n-p$ nel 2°) valgono 2
anche per serie ~~minori~~ residue di G_x arbitrari contenute nelle prec., ~~e a fortiori per le serie~~ 1
~~complete in cui queste ultime~~ sono cont. – perciò per ogni serie completa: 3

Per ogni g_n^r completa sopra un ente alg. di genere p si ha $r \geq n-p$; e se, riferito l'ente a una C^m piana, la serie può staccarsi ~~con una~~ risp. essa con un sist. lin. di C^{m-3} agg. ((~~basta anche~~ oppure ciò avvenga per una serie parziale dello stesso ord. entro la 1ª)), è certo $r > n-p$

~~not~~ canonical or in the canonical

Una curva C_p^n è normale per uno spazio di dimens $\geq n-p$. ($p=0$, per S_n; $p=1$, non potendo p. S_n senza raz., p. S_{n-1}). – Per una C^4 normale di S_2 è $p \geq n-2$.

for the complete g_n^r containing a given G_n, if only $r>0$, it cannot be $r > n-p$, unless the n points of G_n are in a special position.

~~Vedremo~~ Una g_n^r ~~ex~~ per cui $r > n-p$ si compone di gruppi che presentano certe particolarità = ~~spec~~ particolari legami fra i punti di un tal gruppo, che non sussistono per n p. presi genericamente (almeno se $n > p$).

Chiameremo gruppo speciale un gruppo G_n individuante una g_n^r completa per cui $r > n-p$; e serie speciale una serie di gruppi speciali, cioè le serie complete per cui $r > n-p$ e le minori ~~dello stesso ord~~ in queste contenute.

Invece serie non speciale è una serie tale che per la g_n^r completa che la contiene ha precis. $r = n-p$

Definizioni di carattere inv. risp. trasf. biraz.

In corrisp. anche curve C_p^n speciali o non spec. secondo che sono normali per uno sp. di dim. $> o = n-p$.

Importa stabilire:

§) Che {le serie (i gruppi) speciali sopra un ente alg. sono precisamente - tutte e soltanto - quelle che, riferito l'ente a C^m piana, si possono ivi staccare con agg. di ordine $m-3$: cioè la serie già chiamata canonica e quelle in essa contenute, se $p > 1$; mentre per $p=0$ e $p=1$ le g_n complete sono necess. g_n^n, risp. g_n^{n-1}, dunque non speciali — Ogni gruppo speciale si compone dunque di $2p-2$ p. al massimo: ogni serie speciale ha l'ordine $\le 2p-2$ (e dim. $\le p-1$).

Ne seguirà: Sulla C^m le agg. di ordine $m-2+\alpha$ con $\alpha > 0$ segano dunque una serie (di ord. $> 2p-2$, perciò) non speciale: onde $r = m\alpha + p - 2$.

Col metodo alg-geom: Severi, Cap. V, ~~deducendola~~ mettendo a base il teor. fond. $Af + B\varphi$, che richiede lunga e minuziosa dimostraz.

(Segre § 13, 17).

Col metodo geom.-iperspaziale si costruisce una formola enumerativa dovuta a Schubert, la quale, fra altro, dà modo, quando sopra una C_p^n di S_r si abbia una g_m^1 i cui gruppi stiano in spazi inf. ad S_r, di calcolare l'ordine della V^a di tali spazi; e far vedere che, quando $r > n-p$, i gruppi della g_m^1 stanno in spazi di dim $\le m-2$ (il che è una proprietà); e i gruppi di una g_m^s in spazi di dim $\le m-s-1$ (Castelnuovo, Ricerche, 1890). — Poiché questo, se vale per una C_p^n, vale per tutte le pro Π_r, varrà per tutte le C. speciali.

In particolare, se c'è g_2^1, i 2 punti sono sovrapposti; quindi C iperell. non può essere speciale senza essere multipla.

Segre § 13 dimostra la formola di Schubert, col proced. stesso di Schubert, ~~Severi~~ facendo uso del solo principio di corrisp. sull'ente raz. ~~Severi~~ Severi (n° 74) ne dà altra dim^e più semplice, ma che richiede la preventiva esposiz^e della teoria d. corrisp. sopra una C. qualq. – Enriques (Lincei 28. 1919, p. 370) con proced. molto semplice, di carattere ricorrente, atto a metterne in evidenza l'interpretaz^a funzionale, invariantiva (ma non facile a svolgere qui – meglio signif. proiettivo): e di qui anche signif. inv.)

non tengo conto di qualche > generalità

Si abbia una C_p^n di S_r, e su questa una I_m di genere π, i cui gruppi generici app. a spazi S_k; onde $k \leq r$.

Se $\underline{k \leq r-1}$, sia ν l'ordine della V^a ∞^1 di S_k così ottenuti: in part. se $k = r-1$ il n^ro S_{r-1} per un punto generico (classe delle ∞^1 d. S_{r-1}).

E poiché, per $m \geq k+1$ punti ~~è~~ di un S_k è condiz. semplice che $\underline{k+1}$ fra essi stiano in S_{k-1} (per p. di un piano, che 3 pian. all...), è prevedibile che fra i gruppi di I_m ve ne sia un n° finito $\underline{z}$ nei quali $\underline{k+1}$ fra gli $\underline{m}$ p. stiano in S_{k-1}.

Relaz. fra detti caratteri, valida anche nel caso estremo $\underline{k = r}$, purché vi si faccia $\nu = 0$: (è la (4) di Segre, p. 61):

su C_p^n di S_r

I_m, genus π; groups G_m in spaces S_k.

$$\nu = \begin{cases} (k < r-1) \text{ order of } M_{k+1} \ (\infty^1 \text{ of } S_k\text{'s}) \\ (k = r-1) \text{ number of } S_k \text{ th. 1 p.} \\ (k = r) \ \nu = 0 \end{cases}$$

$z =$

$$z = \binom{m-1}{k}(n-k) - \binom{m}{k+1}\nu - \binom{m-2}{k-1}(p - m\pi) \quad *$$

Nel caso $k = r$, $\nu = 0$, ~~riferendosi~~ z è il n° dei gruppi di I_m nei quali $\underline{r+1}$ p. stanno in un S_{r-1}, iperpiano: perciò, riferendosi alla g_n^r rappres. della C^n, il n° (supp. finito) dei gruppi di $\underline{r+1}$ p. che stanno in uno stesso gr. di I_m e in uno stesso gruppo di g_n^r = n° G_{r+1} comuni g_n^r e $I_{m(>r)}$ gen. π

$$z = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}(p - m\pi) \qquad (7 \text{ di Segre})$$

Per $\pi = 0$, n° G_{r+1} comuni a g_n^r e g_m^1.

A noi interessa ~~più il caso $k < r$~~, e in special modo il caso che $\underline{\text{la}}$ $\underline{I_m \text{ si componga di punti generalm}^e \text{ indip.}}$ (assunto): onde $\underline{k = m-1} \leq r$ ~~$(m \leq r)$~~)

$$z = n - m + 1 - \nu - p + m\pi \quad ;$$

e nel ~~qu~~ caso delle I_m raz. ($\pi = 0$)

$$\nu = n - p - (m-1) - z$$

ordine della Var^à formata dagli S_{m-1} determ. dai gruppi di g_m^1 su C_p^n di S_r – essendo z il n° dei gruppi di detta g_m^1 che stanno in S_{m-2} | molte interpret. π:

Es., per g_2^1, e se la curva non ha p. doppi che assorbano i 2 di una coppia, ord. rigata = $n - p - 1$).

---

* La I_m può anche essere sostituita da una ∞^1 di G_m d'indice μ; purché la C^n si pensi come μ^{pla}, e $\underline{n}$ ne indichi l'ordine moltipl. per μ.

Ora l'anzidetta ∞^1 di S_{m-1} ha dim. m, ordine ν, app. a S_r; onde $r \leq \nu + m - 1$. Anche nel caso estremo $\underline{m-1=r}$, dovendosi porre $\nu = 0$, si ha l'eguaglianza.

E poiché $\nu + m - 1 = n - p - r$, segue $n - p - r \geq r$ e a fortiori $n - p \geq r$.

Se dunque $\underline{r > n-p}$, è impossibile che i gruppi ~~della~~ generici della g_m^1 si comp. di punti indip.: ~~E poiché que~~ staranno al più in S_{m-2} — E questo, dimostrato per una C_p^n di uno spazio di dim. $> n-p$, vale per le sue Πr; cioè per le C_p^n normali per uno spazio così fatto, cioè p. tutte le C. speciali.

<u>Sopra una curva speciale, i gruppi di punti di una g_m^1 app. a spazi di dim. $\leq m-2$</u> (gruppi g_3^1, all.)

Più generalmente: <u>Sopra una C. speciale, i gruppi di una g_m^s app. a spazi di dim. $\leq m-s-1$</u> (Cast., Ricerche, n° 14).

Fissando $s-1$ p. generici, si stacca dalla g_m^s una g_{m-s+1}^1 cui è appl. il teor. prec. .... (segue n° 71).

In particolare, applic. ~~per~~ alla g_n^r rappres. dalle C_p^n ~~[illegible]~~, i cui gruppi app. a S_{r-1}, sarà

$$r-1 \leq n-r-1 \text{ , onde } n \geq 2r$$

<u>p. ogni serie speciale</u> (Clifford).

Ora noi abb. riconosciuto che la serie canonica $= A_j - 2A$ è di ordine $2p-2$ e dim. $\geq p-1$. Essendo p. essa $r > n-p$, è speciale; perciò sua dim. sarà <u>precisamente</u> $\underline{p-1}$, <u>né avrà p. fissi</u> ~~Se avesse x p. fissi, e dim. $p-1+y$, astraendo dai p. fissi, si dovrebbe ancora avere serie spec.; onde $2p-2-x \geq p-1+y$ ecc.~~

Si conclude pure facilmente:

<u>Sull'ente di genere p, non esistono altre g_{2p-2}^{p-1}, oltre la serie can.</u>

<u>Per ogni serie speciale diversa dalla canonica è $n < 2p-2$;</u> $r < p-1$ ~~e $n > 2r$ (complem.° al teor. di Clifford)~~

Sull'ente ~~iperell.~~ di genere 2 la serie canonica è una g_2^1. Sull'ente iperell. di genere $p > 2$, che contiene pure una g_2^1, ogni serie spec., compresa la can., è composta colla g_2^1: è questo il solo caso in cui la serie can. è <u>composta</u>.

d $A_j - 2A$ è esattam. la serie segata su C^m pur dalle C^{m-3} agg.

~~per~~ Una g_n^r compl. ove $n > 2p-2$ è certo <u>non</u> spec., onde $r = n-p$.

Per g_n^{n-p} non spec. completa assegnata, <u>n-p</u> punti generici indiv. un gruppo e quindi i rim. <u>p</u>.

~~Appl.~~ Riferendosi C^m piana gen., $p = \binom{m-1}{2}$ alla $g_{m^2}^{m^2-\binom{m-1}{2}}$ certo non spec. su essa segata dal sist. di tutte le C^m, si ha che le C^m per $m^2 - \binom{m-1}{2} = \frac{m(m+3)}{2} - 1$ p. gen. passano di cons. p. altri $\binom{m-1}{2}$.

paradosso Eulero-Cramer

Schnittpunktsätze teoria di <u>avviamento</u> alla presente – Enc. III p. 145

Le sole ~~Le uniche~~ serie speciali per cui $n = 2r$ sono la serie canonica (ai. sp. caso) e le serie speciali complete sull'ente iperell. — In ogni altro caso, per le serie speciali è $n > 2r$ (Complem.° al teor. di Clifford).

L'ente di genere p non iperell. si può rappres., a $1/1$ sua C. canonica, sopra una Curva canonica C^{2p-2} di S_{p-1}. La geom. (delle trasf. biraz.) sull'ente equivale alla geom. proi. su questa C^{2p-2} = Una corrisp. biraz. fra 2 curve canoniche — natural.^{te} stesso genere — è sempre una π^a (ripendice πmente i dilleum. di iperp. dei 2 spazi).

Per l'ente iperell., la C. canonica è C^{p-1} raz. norm. doppia (con $2p+2$ p. di diramaz.). Unico caso in cui è multipla.

La C. canonica si trova indicata come „Curva delle φ":

$$y_0 : y_1 : \dots : y_{p-1} = \varphi_0(x) : \varphi_1(x) \dots \varphi_{p-1}(x).$$

essendo $\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0$ il sist. lin. delle agg. di ord. $m-3$ a una C^m piana rappres.^{va} dell'ente.

(Segre § 19)

Per una g_n^r sopra C^{2p-2} can. ~~sarà~~ i gruppi staranno in spazi di dim $\leq n-r-1$. Se la serie g_n^r (che può supp. completa) è non speciale, $n-r=p$, questo nulla dice; ma se è speciale $r > n-p$, (e si supp. $r > 0$ (vera serie, non gr. unico), $n-r-1 < p-1$ ~~si hanno n punti, $n > p$, in spazi di dim $< p-1$~~ lo spazio degli n punti sarà certo di dim $< n-1$, e $\leq p-2$: il che è vera proprietà. I gruppi di una serie lin. spec. almeno ∞^1, d'ord. n, sono veramente speciali, nel senso che un gr. di n punti generici dell'ente non sta in tal serie. Per starvi, deve imporre ai gr. can. condizioni non tutte distinte.

$r > n-p$

at most $n-r-1$

" $\begin{cases} p-2 \\ n-2 \end{cases}$

Risulta pure che ogni gruppo speciale, sulla C^{2p-2} can., sta in uno spazio di dim $\leq p-2$; dunque entro almeno un gruppo canonico, e perciò ogni serie speciale è contenuta nella serie canonica (segabile su C^m piana med. C^{m-3} agg.). — Un esame più dettagliato mostra che se il gr. spec. cont. sta non solo in S_{p-2}, ma anche in $S_{p-3}, S_{p-4}, \dots$ vale a dire in $\infty^1, \infty^2, \dots$ gr. canonici, tanto + alta, in relaz. alle diff $n-p$, risulta dim. serie compl... Riemann, per $n > p$, onde $i=0$, e $1/1$ rappr. fz. raz. con I ab. 2^a specie ($n-p+1$ cost.) poi Roch - Crelle 64 (1864). con maggior precisione, il teorema di Riemann-Roch.

Ente iperell.?

Se si chiama indice di specialità i di un gruppo G_n il n° dei gruppi canonici (curve φ) lin. indip. che lo contengono = gruppo non speciale, $i = 0$ = ~~ogni~~ la serie lin. completa cui appartiene un G_n d'indice specialità (index of speciality) i sopra una C_p ha dim $= n-p+i$. — Si può anche dire $n-(p-i)$, essendo

$p-i$ = n° condiz. imposte da G_n a un gr. canonico = strength of a set of the series for a canonical set — La fz. razionale ~~da~~ avente in un dato G_n il ~~suo~~ gruppo dei poli dipende da $n-p+i+1$ cost., compresa una additiva. (non fuori).

$n-(n-p+i)-1 = p-i-1$

sulle C^{2p-2} can. tali gruppi appartengono precisamente a spazi S_{p-i-1}, dovendo per essi passare ∞^{i-1} spazi S_{p-2}.

Questi S_{p-2} segano sulle C^{2p-2}, a ~~partire~~ prescindere, dai p. fissi, la g^{i-1}_{2p-2-n} residua della primitiva g^{n-p+i}_n risp. alla serie canonica. – Segue il teor. di reciprocità (Brill-Noether-Klein):

Se due gruppi G_n, $G^1_{n'}$, $n+n'=2p-2$ sono mutuam. residui risp. alla serie canonica, e individ. serie speciali complete g^r_n, $g^{r'}_{n'}$, si ha $n-n' = 2(r-r')$

enunciato [illegible] e Segre

Enriques III° § 14 p. 108 (piano....)

2 risultati Castelnuovo

[illegible]

~~Curve~~ Massimo genere C^n_p di S_2 =

2) n° p. doppi $g^1_n = 2(n+p-1)$ – 2 generalizz.: ∞^1 di G_n, non razionale e per ogni ~~gruppo~~ punto μ gruppi: $d \le 2\mu(n+p-1)$ – e limite raggiunto sempre e solo quando i gruppi sono equiv.

Criterio numerativo dell'equivalenza di un sist. cont. ∞^1 di G_n

Libro Severi n° 78

ib. § 18 p. 161 [illegible]

Libro Severi:

1) – Correspondences on algebraic curves – Cap. VI particularly § 3 – the generalized princ. of corresp. Cayley-Brill-Hurwitz-Severi – particularly Severi succeeded in substituting ~~to~~ purely numerical formulae by relations of equivalence between groups of points & operations on them, as for the def. of the can. series.

2) for a corresp. (α, β), on a curve, the following concept is most important: . . . . .

On a curve having generic moduls, only correspondences having valence exist.

3) Cap. VII – X – Analytical – functional – method, & its connection with geom. theories (for you particularly interesting).

Corrisp^ze sulle C algebriche - Moduli
(Segre § 21 - Severi Cap. VI).

Schwarz (Crelle 87 - 1875 - p. 139) ha mostrato pel primo che una C di genere $p > 1$ non può ammettere una serie continua di trasf. biraz. (invece sì per $p = 0$, $p = 1$; casi ben noti).

Klein (1882) ha poi dim. che dette curve non possono ammettere nemmeno una ∞^a discontinua .... solo n° finito.

Ora altre dimostrazⁿⁱ - una Segre - Severi. Sia P un punto di Weierstrass (p^{plo} per la serie canonica), e m il più piccolo ord. di una fz. raz. che abbia in P il suo unico polo = vi sarà un'unica g_m^1 priva di p. fissi e con P^m per gruppo. Se i vari punti multipli (ν_i^{pli}) di detta g_m^1 si ha $\Sigma(\nu_i - 1) = 2(m+p-1)$; e poichè $m \leq p$, $p > m-1$, segue $\Sigma(\nu_i - 1) > 4(m-1)$. D'altra parte i punti multipli sono tutti di multᵗᵃ $\leq m$, perciò almeno 4 distinti.

Una trasf. biraz. sulla C deve mutare P in uno dei p. di W. (n° finito), la g_m^1 in consimile; ~~e fa 2 la~~ i p. multipli dell'una .... ; onde la Π^a fra le 2 g_m^1 non può dar luogo che a un n° finito di casi (essendovi sempre almeno 2 quaderne omologhe necessarie). Facendo vedere ancora che, nota questa Π^a, si ha pure un n° finito di corrispᶻᵉ, il teor. è dimostrato. - In tale caso, ogni corrisp. biraz. è necess. periodica (1)

Questa corrispᶻᵃ (Severi n° 52) ha al più $2p+2$ p. uniti - Tanto sono per $p = 0$, $p = 1$ corrisp. 1ª specie, e g_2^1 sulle curve iperell.

Negli altri casi al più $2p$.

Moduli della curva di genere p = Il loro n° è il n° dei parametri da cui dipende la C_p, considerando come identiche 2 curve trasformabili birazᵗᵉ una nell'altra. = Corrisp. agli invarianti delle trasf. Π = L'eguaglianza loro deve dare, sufficienzᵗᵉ, la condizione di trasformabilità: (può ancora lasciar luogo a un n° finito di classi diverse).

---

(1) Castelnuovo (Scritti D'Ovidio 1918 p. 164): Una C che possegga una ∞^1 continua di corrisp. alg. di cui un indice sia α ha il genere $\leq \binom{\alpha+1}{2}$; e se il massimo è raggiunto, può riferirsi a $C^{\alpha+2}$ piana priva p. mult. (Π_2 da p. arbitrario!) Si suppone gli ∞^2 gruppi G_α così ottenuti non siano comp. med. una I.

L'ente razionale non ha moduli — L'ente ellittico ne ha uno — L'ente di genere p generale dipende da $3p-3$ ~~par~~ moduli

Si può anche dire, per p qualunque, $3p-3+\rho$ moduli, essendo ρ l'ordine d'infinità (≥ 0) del sistema delle trasformaz. biraz. dell'ente in sè stesso.

La determinaz.^{e} del detto numero di moduli è, in sostanza, un problema di computo di costanti.

Segre (n°89) riferendosi alla g^1_m considerata nella dim.^{e} del teorema di Schwarz: la quale g^1_m, oltre al punto m^{plo}, assorbente $m-1$ doppi, avrà ~~genere~~ nel caso più generale $2(m+p-1)-(m-1) = m+2p-1$ altri elem. doppi distinti. In tutto, $m+2p$ gruppi con elem. multipli, e $m+2p-3$ birapporti — Viceversa, dati ad arbitrio tali birapporti, pel teorema di esistenza di Riemann, esistono corrisp.^{ti} enti di genere p, distribuiti in un n° finito di classi di enti equivalenti — ~~Nel caso più~~ Se l'ente è generale, di gen. p, sarà $m=p$ (il punto P di Weierstrass sarà solo p^{plo} per una g^1_p): onde $3p-3$

Severi (n°56) considera sull'ente le g^2_n di un ordine $n > 2p-2$, perchè certo non speciali. Vi sono, in tutto, ∞^p g_n^{n-p} complete; e, entro ognuna, $3(n-p-2)$ serie g^2_n: in tutto $\infty^{3(n-2)-2p}$ serie g^2_n. Queste conducono a rappres. l'ente per C^n_p piana, dipendente da $3n+p-1$ parametri; e $3n+p-9$, se consideriamo come identiche due tali, fra loro omografiche. — E solo un n° finito di g^2_n può dar luogo a una stessa fra queste. Onde n° moduli:

$$(3n+p-9)-[3(n-2)-2p] = 3p-3$$

In Segre (n°90) si trova ancora dimostrato che un ente di genere p contenente una ed una sola I_2 di genere π dipende da $2p-\pi-1$ moduli.

per $\pi=0$, ente iperell. genere >1, $2p-1$, come noto

Il contenere una I_2 costituisce una particolarità tanto maggiore, quanto più grande ~~...~~ è il genere π di essa.

Identità biraz. di 2 curve di genere p con 2 sistemi di p integr. normali di 1^a sp. aventi una stessa tabella di periodi normali.

Identità per il caso di Var.^{tà} di Jacobi biraz.^{e} identiche — Severi l. cit.

Corrisp.ze algebriche fra 2 curve (dist. o coincid.).

La teoria delle corrisp. alg. fra 2 curve si è svolta a seguito e per estensione di quella per enti raz., e perciò del princ. di corrisp.ze che porta il nome di Chasles. — La formula che dà il n.° degli elementi uniti di una corrisp. (α, α') a valenza γ sopra una C^n, ~~ed~~ porta il nome di Cayley - Brill e fu data per la 1.a volta da Cayley (C R 62. 1866 p 586 e Lond. Proc. 1. 1866. p. 1), mentre Brill per primo ne diede dim.e completa con altri complem. teorie (Math. Ann. 6. 1873. 33; 7. 1874. 607), sempre per $\gamma \geq 0$

Altri notevoli contributi da Hurwitz (Ann. 28. 1887. 561 — lavori 20 — Letteratura, Severi p. 183-84, Segre § 12. lavori ivi citati.

A Severi (Mem. T (2) 54. 1903 p. 1, lav. 22) spetta il merito di aver dato al princ. d'corr. di Cayley - Brill - Hurwitz signif. geom - funzionale, mediante relaz. di equivalenza fra gruppi di punti, delle quali la formola predetta segue come applic. numerativa (e così anche vedremo p. la formola di Zeuthen) — mentre più tardi (Math. Ann. 74. 1913. 515, lav. 59) egli dimostrò altresì che sopra una C. a moduli generali ~~non~~ esistono soltanto corrisp. „a valenza"

A lui pure (e Hurwitz, da altro p. d. v. trascend.) è dovuta la costr.ne di corrisp. linearm.e legate.

$\delta = \gamma/2 \int$ abel. e σ
γ posit., con l'eq. fra x, y, grado $\beta+\gamma$, $\alpha+\gamma$
γ neg., in ∞ modi con 2 eq.

Corrisp. (α, α') = sist. di eq. alg. fra le coord. di due p. $(x), (x')$, tali che per valori assegnati delle coord. di x', punto di C', s'abbiano α gruppi di valori delle coord. di x, e ~~viceversa~~ ....

Caso part.: può avvenire che i gruppi di α p. di C', corrisp. ai sing. p. di C, siano equiv. (es. Con 2 curve piane: a ogni p. di C le intersez. sua tg con C') = ~~Si dice~~ Se ciò avviene in un senso, avviene anche nell'altro senso (es. citato: p. di contatto di C colle tg uscenti dai sing. p. di C') = si dice a valenza zero.

~~Date le~~ Le due C possono supporsi piane, con soli p. d. ord., $f(x)=0$, $\varphi(y)=0$; allora abbiamo, nell'es. citato, la eq. $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0$ che, dato (x) su f, determina i corr. (y) su φ e viceversa. — In generale, una $\Phi(x_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 y_3) = 0$

Su una C. algebrica una serie raz. di gruppi di punti è sempre contenuta totalm.te in 1 ser. lin. (cioè di comp. di gruppi equiv.) — Esplicit.e Enriques - Tor. 10 - 1895 - p. 30).

Se la serie è ∞^1, ~~mettendo~~ riferendola a una punteggiata .... Se la serie è ∞^k, rif. S_k, alle rette di S_k per un punto corrisp. serie ∞^1 di gr. equiv. ... (Severi p. 165) (Memoria impt. sul teor. Abel v. Severi p. 271)

Altra prop.^a importante:

In una corrisp. $(\alpha\alpha')$ fra 2 curve C, C', a gruppi equivalenti dell'una, corrisp. gruppi pure equivalenti sull'altra.

Dim.^e per gradi: prima corrisp. $(1, \alpha')$, allora, essendo il punto di C^E fz. raz. del punto di C^* a gruppi equiv. su C corrisp. … su C' — Poi, nel senso inverso — e poi caso generale (l'ente alg. H formato dalle ∞ coppie di elem. omologhi è tale che fra C e esso intercede $(1, \alpha')$; fra esso e C' una $(\alpha, 1)$)

Punti di diramazione (su C, C'), quelli per cui almeno due degli α', risp. α omologhi coincidono (in un p., che è multiplo p. la corrisp. — in gen.^e soli doppi).

Dapprima $(1, \alpha')$ con soli p. d. — A g'_n, $g'_{\alpha' n}$, i cui p. doppi possono avere 2 provenienze: dal gruppo Jacob. di g'_n, e dai p. d. della $\gamma^1_{\alpha'}$, corrisp. ai p. di C.

Ora fra C si ha: $J \equiv K + 2G$, su C' analog., per la $g'_{\alpha' n}$, gr. Jacob. $= J'$ (trasf. di J) $+ D'$ ~~gr. Jacob.~~ $J' + D'$ (~~trasf.~~ gr. elem. doppi ~~gr. p. diram.~~) $\equiv K^* + 2G'$;

trasformando la prima $J' \equiv K' + 2G'$; segue

$$K^* \equiv K' + D'$$

Se fra C e C' si ha corrisp. $(1, \alpha')$, un gr. canonico di K' è equiv. al trasformato d'un gruppo can. di C aum. del gruppo degli elem. doppi della corrisp.

Viceversa un gruppo canon. di C' si muta in un gruppo equiv. alla somma ~~equiv.~~ di un gruppo canon. di C contato α' volte e del gruppo elem. di diramaz.

Di qui, a $\frac{1}{2}$ ente H, al caso generale:

Se fra 2 curve C, C' si ha corr. (α, α'), il gruppo trasf. di un gruppo canonico di C, aument. del gruppo degli elem. doppi ~~diramaz.~~ d. corrisp. esistenti su C', è equiv. alla somma di un gruppo α^{plo} di un gruppo can. su C' e del gruppo elem. di diramaz. su C' stesso. (2 gr. equiv. su C').

(Severi, Ist. Lomb. (2). 36. 1903. 495 ~~21~~ lav. 21: casi $(1, \alpha')$ Castelnuovo, Painlevé, Humbert).

Enriques III 92-3

Applicaz. numerative:

$$\alpha'(2p-2) + y = \alpha(2p'-2) + y'$$

Esistono su talune C corrisp.^{ze} prive di valenza

(Severi n° 72) Sopra una curva di genere $p > 1$ una corrisp. $(1,1)$ che non nasca da una g_2^1 è sempre senza valenze.

p. es. se nasce da una I_2 non razionale.

Più generalmente: Sopra una curva di genere $p > 1$ una involuzione irrazionale I_ν definisce una corrisp. simmetrica $(\nu-1, \nu-1)$ priva di valenza.

Riattaccando le sue ricerche a quelle di Hurwitz sulla rappres. trascendente delle corrisp.^{ze} (a ½ integrali Abeliani di 1ª specie), Severi ha ancora stabilito (Math. Ann. 74 - 1913 - p. 515):

Sopra una curva a moduli generali, di genere qualq. p, non esistono che corrisp.^{ze} a valenza.

L'esistenza sopra una C_p di corrisp.^{ze} non a valenza implica dunque una particolarizzazione dei moduli. — Sono corrisp.^{ze} singolari — le altre ordinarie.

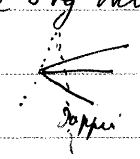
Sulle C. ellittiche, le corrisp. univoche di 1ª specie sono a valenza $+1$ ($A + A'$ sono gruppi di una g_2^1); quelle di 2ª specie sono a valenza -1 ($A' - A^* \equiv B' - B$).

Invece le ulteriori corrisp.^{ze} sulle curve armoniche e equianarm. (modulo spec.) sono singolari (Trattaz. geom. in Segre, Atti Torino 24 1889).

Al risultato predicato Severi è giunto facendo vedere che:

Nel piano (e quindi in ogni sup. reg.) ogni corrisp. sulla curva generica di un sistema lineare almeno ∞^2 è dotata di valenza.

Si può avere infatti (eq.) un fascio di C^3 ~~arm.~~ tutte arm. o equianarm. (flesso con relativa tang., e le altre 3 tg dal flesso, con relativi p. di cont. — fascio det.° da 2 terne di rette:



ossia la ben nota formola di Zeuthen (~~Math.~~ Ann. 3 - 1871 - 150):

$$y - y' = 2\alpha(p'-1) - 2\alpha'(p-1)$$

che ha cronologicamente preceduto di gran lunga la i teor. di [illegible]

che per il caso di elem. comunque multipli per la corrisp. è stata

estesa da Halphen (Bull. Soc. Math. 5 1876. 7):

$$\Sigma(\nu-1) - \Sigma(\nu'-1) = \ldots$$

estesa la somma $\Sigma(\nu-1)$ agli elem. multipli su C'....

Dalla formola di Zeuthen un notevole risultato di Weber (Crelle 76. 1873. 345).

Nel caso corrisp. $(1, \alpha')$ fra C di egual genere:

$$y = 2(p-1) - 2\alpha'(p-1)$$

da cui $p-1 \geq \alpha'(p-1)$, perciò, se $p > 1$, e viceversa, $\alpha' \leq 1$, ossia $= 1$.

Una corrisp. alg. fra 2 curve di eg. genere > 1, se è univoca in un senso, lo è pure nell'altro (ossia è birazionale)

n° elem. doppi di una I_μ di genere π: fra C e la I_μ si ha una corrisp. $(\mu, 1)$, di cui si cercano su I_μ gli elem. di diramaz. $y' = 2\mu(\pi-1) - 2(p-1)$

$(o\ \Sigma(\nu-1))$ $\quad y' = 2(p-1) - 2\mu(\pi-1)$ (segue p. 43)

segue $\pi \leq p$; ~~anzi~~ se $p > 1$, $\pi < p$.

Corrisp.za sopra una Curva - Corrisp. inverse - ~~prodotto~~ (ni dato ord.)

Somma $S+T$, facendo corrisp. a ogni p. l'insieme di quelli che gli sono omol. in S e in T: anche per $+$ corrisp., event.e coincidenti. - (commut.)

Relaz. $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots \equiv \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \ldots$ ove A_i; B_i, gr. punti, λ, μ n.i interi pos., neg. - Vi si può dare signif. in ogni caso, immag. trasport. i termini.... Gruppi virtuali di punti, fra loro equiv.

Corrisp. (α, β) su una C. Variando a, il gruppo Y dei β omologhi varia, ~~non var~~ ma in gen. non in una serie lin. (di ord. β): ma può avvenire che il gruppo $Y + \gamma a$, γ pos. neg. o nullo (cs. prec.), vari in una serie lin. di ord. $\beta+\gamma$ - si dice a valenza γ. - Non è escluso che γ possa essere negativo, e che il simbolo $Y + \gamma a$ non indichi un gr. effettivo.

Sull'ente raz., valenza arbitraria. - Ma se $p > 0$ non può una corrisp.za avere 2 diverse valenze (non è detto che una l'abbia sempre; ma non di $+$)

perchè da $\begin{cases} Y + \gamma a \equiv Y' + \gamma_m a' \\ Y + \gamma_0 a \equiv Y' + \gamma_0 a' \end{cases}$ seguirebbe $(\gamma - \gamma_0)a \equiv (\gamma - \gamma_0)a'$ il che si riconosce possibile (per a, a' arbitrari) solo sulle C raz.

La somma di 2 o più corrisp. ha per p. uniti precis. tutti gli eventuali p. uniti d'ognuna d'esse.

Si dimostra facilmente (n° 66):
La somma di 2 corrisp. a valenze γ_1, γ_2 ha la val. $\gamma_1 + \gamma_2$
Il prodotto " $-\gamma_1\gamma_2$

Su ogni curva esistono corrisp.ze a valenza arbitraria (pos, neg, nulla).
Infatti la corrisp. (involutoria, e che diremo elementare) in cui, data una g_n^1, si fanno corrisp. a ogni p. i suoi $n-1$ coniug., è a valenza $+1$. Sommando γ (o δ) fra queste.....
Moltiplicando la somma per una corrisp. elementare.....
Sommando 2 corrisp. di valenze γ e $-\gamma$.....

La corrisp.ze inversa di una corrisp. a valenza ha la stessa valenza della prima.
Evid.e p. corrisp. involutorie, perciò le elementari, loro somme, di qui altri casi ... ma occorre il teor. seguente (n° 67)

In una corrisp. a valenza zero, il gruppo dei p. uniti è equivalente alla somma dei due gruppi che corrisp. a un p. generico nella corrisp. data e nella sua inversa.
$U \equiv X + Y$. In sostanza, su una C. piana, i gruppi equiv. a X, Y sono segati da 2 ttt. lin. – e il gruppo U da una curva del sistema somma (come pel princ. Chasles).

Caso generale. In una corrisp. a valenza γ (pos, neg, nulla), il gruppo U dei p. uniti è equivalente alla somma dei seguenti gruppi: 1) i gruppi Y, X corrisp. a un elem. generico a nella corrisp. data e nella sua inversa 2) il punto stesso a contato 2γ volte 3) un gruppo can. contato γ volte.

$$U \equiv X + Y + 2\gamma a + \gamma K$$

da cui la relaz. numerica

$$u = \alpha + \alpha' + 2\gamma + \gamma(2p-2) \equiv \alpha + \alpha' + 2\gamma p$$

Per la corrisp.za elementare data da una g_n^1 la prop.e risulta da cose precedenti – U è il gruppo Jacobiano; $X+a$, $Y+a$ sono G_n; γ vale 1; e appunto $J \equiv 2.\, G_n + K$

Di qui si passa a una Σ di corrisp. elementari — poi a una corrisp. a valenza negativa (che sommata a una del tipo preced.: ne dà una a valenza zero), poi a quelle a val. positiva (id.)

n° dei p. uniti di una corrisp.za prodotto di più altre (p. 178).

Più corrisp. $T_1\, T_2 \ldots T_k$ (anche non a valenza) sopra una C si dicono dipendenti quando esistano k n.i interi, pos, neg, ma non tutti nulli λ_i, tali che, indicando con Y_i il gruppo dei p. corrisp. ad a in T_i, al variare di a il gruppo (event.te virtuale) $\Sigma \lambda_i Y_i$ si muova in una serie lineare (una dipend.te dalle altre) se no, indipend.

Se le T_i sono a valenza, $\Sigma_i \lambda_i T_i$ ha val. zero.

Ogni corrisp. a valenza dipende dall'identità, perchè $Y + \gamma a$ si muove in serie lin. (dipendenza è estensione del concetto di valenza)
Due corrisp. a valenza sono sempre dipendenti.
Se le corrisp. $T_1 \ldots T_k$ sono dipendenti secondo i num.i $\lambda_1 \ldots \lambda_k$, le loro inverse sono pure dipend., cogli stessi numeri.

Prima per λ tutte positive. L'ipotesi equivale a dire che la corrisp. $\Sigma \lambda_i T_i$ ha valenza zero; perciò anche la sua inversa, che è $\Sigma \lambda_i T_i^{-1}$; dunque — di qui, gradatamente, p. gli altri casi.

Nelle stesse ipotesi, se al punto a corrisp. rispett. nelle T_i e T_i^{-1} i gruppi Y_i, X_i, e si indica con U_i il gruppo dei p. uniti di T_i, si ha:

$$\Sigma \lambda_i U_i \equiv \Sigma \lambda_i (X_i + Y_i)$$

Da ciò la formola numerativa

$$\Sigma \lambda_i u_i = \Sigma \lambda_i (\alpha_i + \beta_i)$$

Se T_1 è l'identità, la corrisp. $\lambda_2 T_2 + \ldots + \lambda_k T_k$ ha valenza λ_1; perciò:

$$\sum_2^k \lambda_i U_i \equiv \sum_2^k \lambda_i (X_i + Y_i) + \lambda_1 K + 2\lambda_1 a$$

$$\sum_2^k \lambda_i u_i = \sum_2^k \lambda_i (\alpha_i + \beta_i) + 2\lambda_1 p$$

relaz. che serve a determ. il n° dei p. uniti di una fra queste corrisp., ~~Se le corrisp. T_i sono dipendenti, sicchè $\Sigma \lambda_i Y_i$ si muove in una serie lin., rappresentando tale serie con una curva, la corrisp. $\Sigma \lambda_i T_i$ sarà a valenza zero~~ quando si conoscano quelli delle altre (Segre, n° 49; Cayley, Phil. Tr. 158 – 1868 – p. 149).

Sopra una C. alg. il n° delle corrisp. indip. ha un limite superiore (Severi p. 184).

Dimostraz. algebrico-geom. del teor. di esistenza di Riemann.
(Severi p. 334 e sg.)

Se per una fz. algebrica da costruirsi $u(z)$ a n valori si assegnano sopra una retta r (piano o sfera delle z) i $2\{n+p-1\}$ p. di diramaz. (semplici), e i corrisp. scambi fra coppie di quegli n valori, questi ultimi soddisfacenti alle 2 condizioni della complessiva transitività, e che il loro prodotto eguagli l'identità, esiste sempre una corrisp. fz. $u(z)$, di genere p, definita a meno di trasf. biraz.

Dimostraz. classica di Riemann, fondata sul problema (principio) di Dirichlet — Qui dimostrazione di Severi.

La dim. comincia col ~~è data~~ costruire una C^{n+p} piana con punto p^{plo} e di genere p, ~~e~~ con altri $\binom{n-1}{2}+(n-2)p$ punti doppi; la quale dal detto punto p^{plo} si proietti sulla assegnata retta n^{pla} coi relativi $2(n+p-1)$ p. di diramazione.

Le C^{n+p} piane irriducibile con un punto p^{plo} assegnato A e $\binom{n-1}{2}+(n-2)p$ ulteriori punti doppi variabili, distinti fra loro e da A, formano un sistema precisamente $\infty^{3(n+p)-1}$; e vi è un determ. sistema $\infty^{3(n+p)-1}$ di tali curve, gen. te irriducibili, che contiene tutte le C^{n+p} spezzate in C^{p+2} con A^p e $n-2$ rette generiche del piano. — Scegliamo una generica fra tali C^{n+p} irrid., D; e ad essa ~~ss~~ conduciamo da A le $2(n+p-1)$ tangenti. Imponendo alle anzidette C^{n+p} queste rette come tang., staccheremo dal sist. preced. uno o più sistemi irrid. di dim. $\geq n+p+1$; e fra i quali Severi dimostra esservi certo un sistema irrid., contenente D, di dim. precisam. $n+p+1$. Il gruppo delle $2(n+p-1)$ tang. da A deve dunque dipendere precisam. da un eg. n. di condiz. — vale a dire è composto di rette che possono essere affatto qualq. nel fascio A. — Esiste dunque una C^{n+p} quale a noi occorre: ne esistono anzi ∞^{n+p+1}, con punto p^{plo} assegnato.

Si tratta ora di far vedere che si poss. assegn. ad arbitrio (colle 2 cond. di sopra) gli scambi fra gli n rami $u_1\ u_2 \ldots u_n$ ~~[illegible]~~ determinati da cammini chiusi che girano intorno ai singoli p. di diramaz. assegnati. Chiamiamo questi:

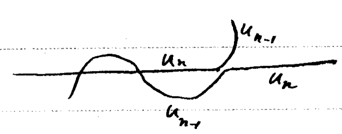
$$E_1\ E_2 \ldots\ldots E_{2p+2}\ ;\ A_1\ B_1\ ;\ A_2\ B_2 \ldots\ldots A_{n-2}\ B_{n-2}$$

Possiamo ridurci al caso in cui gli scambi prescritti siano i seguenti:

i cammini chiusi int. ai punti E scambino tutti una med. coppia di rami u_1, u_2; e quelli di $A_i B_i$ scambino u_{i+1} e u_{i+2}. Perchè, in base al procedim.° di Lüroth-Clebsch, costruita una fz. $u(z)$ p. questa speciale combinazione di scambi, ~~te..~~ basterà variare opportun.te le „Schleifen" perchè la $u(z)$ risulti invece diramata ~~secondo~~ in un qualsiasi altro modo assegnato.

Ora per $n=2$ la $C^{n+p} \equiv C^{p+2}$ è iperell., coi soli $2p+2$ punti di diramaz. E, che danno luogo a cammini scambianti i soli 2 rami u_1 e u_2. Perciò una qualq. delle ∞^{p+3} curve C^{p+2} con A^p e tang alle $2p+2$ rette AE dà una soluzione. Il teorema è così dimostrato (per $n=2$).

Di qui si risale a $n>2$ per induzione completa: supponendo dim.° il teorema per il valore $n-1$ e per i punti E e le coppie $A_i B_i$, ove $i \le n-3$, e facendo vedere ne segue il caso successivo. — La relativa C^{n+p} si fa ~~seguire~~ derivare per continuità da una spezzata in C^{n+p-1} (caso preced.) più una retta generica
a, una delle cui intersez.^{0} si considera come p. doppio virtuale e inefficiente, allo scopo di stabilire la connessione fra le 2 parti. Il ramo u_{n-1} (risp. u_n) è ~~dato da~~ quello che, partendo da vicino ad O, si mantiene vicino alla C^{n+p-1} (risp. alla retta a)



Curve corrisp.ti ai medesimi $2(n+p-1)$ p. di diramaz. coi medesimi scambi, sono fra loro biraz.te identiche.

Alla data retta n^{pla} col gruppo assegnato di $2(n+p-1)$ p. di diramaz corrisp. un n.° finito di classi di curve biraz.te equival.

Appendice F. Ricerche sui sist. di curve piane di dato ordine e genere, e che event.te soddisfanno a certe condiz. ulteriori — Loro dim. effettiva, irriducibilità, ...

Si tratta qui appunto di costruire un sist. di curve piane di dato ord. e genere soddisfacenti a condiz. assegnate.

Geom. sopra una sup. alg.

Letteratura: (Solo i lavori riassuntivi):

Cast.-Enriques: Sur quelques récents résultats dans la th. des surf. alg. (M. Ann. 48. 1897)

id. Die algebr. Flächen vom Gesichtspkte der bir. Transf. aus Encykl. III C 6. b (1914) – con numerose citazioni:

Severi = Die ~~[illegible]~~ Geom. auf einer alg. Fl. – Rep. Pascal, Kap. 33.

Picard et Simart = Th. des fonct. algébr. de 2 var. indép. (1897-1906): nell'ultimo fascicolo anche una Nota riassuntiva Cast.-Enr.

Baker = On some recent advances in the theory of alg. surfaces Proc. Math. Soc. (1.2) 12 - 1912, p. 1

ma anche fornendo alle nuove idee

3) ricerche Clebsch-Noether-Cayley-Zeuthen sul genere sup. 1870-71 sup. separat. ell. nel mem. 4) le propr. delle sup. a sez. p=0, 1, iper. ell., p=3, ...

Superf. alg – quando non sia detto il contrario, irriducibile.

La „geom. sopra una sup. alg." o „ente alg. ∞^2" si è svolta a seguito di quella sulla „curva alg" o „ente alg. ∞^1" e avendo altresì come punto di partenza le ricerche di Cremona, Clebsch, Noether sulle sup. raz. e loro rappres. piana e ricerche successive: in part. 1) il teor. di Noether sulle sup. contenenti un fascio di C. raz., 2) la ~~la~~ condiz. dei piani doppi razionali. Teoria in cui lo studio approfondito di singoli esempi ha spesso fornito buon filo conduttore. Colle sup. razionali, anche le rigate non razionali; ~~e in seguito~~ 5) dal 1893, anche la razionalità delle involuz. piane (Castelnuovo); il fatto di aver riconosciuto essere razionali gli enti ∞^2 costituiti da tali involuz.

Ne hanno poste le basi e conseg. risultati già fondamentali gli studi Clebsch (C. Rend. 67 - 1868 - p. 1238)* e Noether (M. Ann. 2 - 8), mentre un altro punto (genere aritm.) trae origine da Cayley (Ann. 3, p. 526) e Zeuthen (Ann. 4, p. 21). – Lo sviluppo algebrico-geom. è opera principalmente della powerful Scuola Italiana (Castelnuovo - Enriques - Severi dal 1893 in poi; due periodi eroici: 1895-900 e 904-08); mentre in Francia, specialmente a opera di Picard, è stato svilupp. l'indirizzo trascendente (corrisp. a quello di Riemann p. le curve), più particolarmente per gli „integrali ai diff. totali" completi o „int. semplici", ai quali è rimasto il nome di „Int. di Picard" (trattaz. riassuntiva in Picard-Simart). – sicché anche qui, come per 1 variabile, la teoria degli I. ha piuttosto preceduta quella di fz. alg. ~~[illegible]~~ È pure opera princip. italiana il legame fra i 2 indirizzi (1904-05: identità delle sup. irreg. e sup. con integr. di Picard: relaz. quantitative fra irreg. e n° integr. 1ª e 2ª sp.)

Indirizzo aritmetico, a opera di Hensel, Landsberg, H. W. E. Jung (Jahresb. D. M. Ver. - 18. 1909. 267) Teor. R.Roch ~~Jung~~ (Crelle 138, 1910, p. 77). (Encykl. II C 6 Arithm. Theorie der alg. Fktnen zweier unabh. Veränderlichen 1921)

L'estensione dalle curve alle superficie ha presentato fino da principio delle complicazioni:

1) Nell'estensione del concetto di genere. – ~~In~~ una C^n piana i p. multipli ~~presentano~~ costituiscono p. le C^{n-3} agg. condizioni tutte indip.^te;

---

* Stranamente, sembra non vedere che 2 sup. reciproche sono in corrisp. biunivoca, e perciò sempre stesso genere

$\binom{n-1}{3} - \binom{n}{3} = -\binom{n-1}{2}$

e il genere è il n° C^{n-3} lin. ind. – Per sup. in S_3 (limitandoci al caso di C^a doppia), e n° finito p. tripli per F e p. della curva)

δ ord d, gen Π

questa curva non impone sempre alle F^{n-4} agg. (che sostituiscono le C^{n-3}) condiz. distinte. Perciò da un lato si deve considerare il n° delle F^{n-4} agg. lin. ind. effett.te (actual number) esistenti (≥ 0), ed

geometrical

è il così detto genere geom. (geometrical) p_g, già consid.° da Clebsch e Noether;

(il 1° ne enunciò, il 2° dim. l'inv.)

dall'altro quello che si potrebbe chiamare il ~~loro~~ numero virtuale di dette F^{n-4} agg. lin. indip.

$$p_a = \binom{n-1}{3} - (n-4)d + 2t + \Pi - 1$$

arithmetical

consid. da Cayley e di cui Zeuthen aveva dim.^{a} l'invarianza ~~Pos~~ (con calcoli piuttosto lunghi, ~~dal~~ tipo di quelli che servono per genere C piana. Possono essere diversi, e precis. $p_a \leq p_g$; e p_a anche negativo – Es. la

two skew lines

rigata ellittica R^4, la quale ammette $\binom{l+3}{3} - 2(l+1)$ aggiunte di ordine $l \geq 2$ lin. ind.; e per $l=0$ detto n° vale -1 (mentre $p_g = 0$)

Si hanno anche casi di $p_a < 0$ $(=-1)$ e $p_g > 0$!

~~Si dicono~~ Le superficie per cui $p_a < p_g$ si chiamano irregolari, e $p_g - p_a$ è la loro irregolarità; ~~queste~~ esse soltanto contengono integrali di Picard – Ne sono esempi le rigate non razionali, cioè di genere (come enti ∞^1 di rette) $p > 0$; p. esse $p_g = 0$, $p_a = -p$:

representing the aggregates of the pairs of points

e le superficie che rappres. le coppie di punti (non ordinate) di una C^a alg. di genere $p > 0$ $\left(p_g = \binom{p}{2}\right.$ $\left.p_a = \frac{p(p-3)}{2} > p_g - p\right)$. Le une e le altre hanno servito molto per dirigere le ricerche sulle sup. irreg.

analogue

L'analogo, nel campo delle sup., delle curve di genere p è costituito, per certi (in respects) riguardi, dalle sup. regolari di genere p ($p_g = p_a = p$), per altri dalle sup. di irregolarità p. Sotto il 2° rig., tutte le sup. regolari sono analoghe delle C. razionali – Es. fill. continuo di C_n o curve

C'è 2 ~~c~~ diverse specie integ. Abeliani

semplici, tutte sup. di irreg.^{a} > 0, qualunque ne siano i 2 generi – irreg. p, p semplici di 1^a sp. distinti.

doppi, tutte sup. di gen. geom. $p > 0$, p ~~doppi~~ dist. di 1^a sp. qualq. ne sia il gen. aritm. e quindi la irreg.^{e}

Ciò che io spiego in poche parole, occorse molto tempo p. capirlo.

2) Mentre le curve di genere zero sono razionali, cioè rappres.^{te} biraz. sulla retta, e viceversa, per le superficie l'avere entrambi i generi nulli $p_g = p_a = 0$ non basta ancora per concluderne la razionalità = rappres.^{a} biraz. sul piano. (occorre (condiz. ulteriore) – Es. la F^6 passante dopp.^{te} per i 6 spigoli di un tetraedro, e avente p. tripli nei 4 vertici. Per essa, evid.^{te} $p_g = 0$: di più, perchè una F^l contenga i 6 spigoli, occorr. (se $l \geq 3$) $4 + 6(l-1) = 6l - 2$ condiz.; onde $p_a = 10 - 10 = 0$. Eppure detta F^6 non è razionale

E per le M_3 le cose si complicano ulterior.^{te}: le condiz. di rappresentabilità su S_3, in forma univer.^{va}, non sono ancora note.

~~2 bis) Mentre era noto (Lüroth) che un'involuzione~~

3) Una corrisp. biraz. fra 2 curve si può sempre considerare biunivoca senza eccezione (purchè si considerino distinti i punti materialmente sovrapposti, ma origini di rami diversi): così nella π_2 di una C^n piana con A^{n-1} da questo p. sopra una retta, ad A corrisp. ~~tanti punti di~~ in gen. $n-1$ p. distinti — questo, sia pure con analoga interpretazione per i punti con più intorni distinti, non avviene più per le F: su ognuna delle 2 vi possono essere punti fondam^li a ciascuno dei q. corr. una curva fond^e; e sono valur^te p. per cui nelle equaz. ~~della~~ trasf. $\rho y_i = f_i(x)$ sono nulle tutte le f_i. — E già se ne presentano nelle trasf. Cremoniane del piano (esclude le π).

another capital source of diff

which may ~~be~~ transform to a curve

Di questo fatto si può approfitt. per ridurre p. e linee sing. a sing^à meno elevate — o far scomparire dette sing^e — Ogni sup. si può trasf. biraz. in una priva di qualsiasi sing^à (p. e linee multiple) di uno spazio ad almeno 5 dim^s (Varii: B. Levi, Atti Torino, 33, 1897, 66; Annali (2) 26. 1897. 219; Severi, R. Lincei, 23 dic. 1914). — Proiettando quest'ultima in S_4 da un S_{n-5} generico, si ha una F dotata di soli event' p. doppi impropri; in S_3 da S_{n-4} generico, che incontrerà ∞^1 corde, e secondo rette n° finito piani trisecanti, secondo una F con C^a doppia e n° finito p. tripli per F (gen^te ~~per~~ anzi triplanari) e tripli pure per la C. doppia. (sing^e ordinarie). Volendo, potremo sempre riferirci a una F dell'uno o dell'altro tipo.

Albanese

$3(n-2) - (3[n-5]+3) = 6$ cond.

Ma anche prese 2 sup. prive di p. e linee multiple, e biraz^te equivalenti, vi possono essere | punti semplici dell'una cui corrisp. una curva = C^a eccezionale (ausgezeichnet, Noether Ann. 8) = es. già nelle trasf. crem. del piano. E di qui complicazioni! — Già Noether (ib.) ha osservato che se F^n di S_3 ha solo C^a doppia, e se vi sono F^{n-4} per detta C^a doppia, queste contengono altresì ~~eg.~~, di conseg^za, ogni curva eccez. di F^n: Es. la $F^6 \equiv Q.V_3^3$ generale di S_4 si ritta da un suo p. in S_3 secondo F^5 con conica doppia, e una retta nel suo piano, immag. centro di π_2: quella retta è eccez^e; e la unica aggiunta di 1° ord, il piano della C^e doppia, contiene anche la retta suaccennata.

| (appunto: trasf. Crem. 2 piani)

Si può, con trasf. biraz., liberare una sup. dalle sue curve eccez^e? Dopo ris. parziali, Risultato defin° (Cast-Enr. „Questioni", 1900) = Curve eccez. di 1^a e 2^a specie, secondo che si possono o no trasf. in un punto, senza che a sua volta un p. di essa si muti in nuova C^a eccez. = 1° caso, gen^te, nelle $\pi_2$ioni:

capable to be transformed by a birat. transf. to a simple point.

7 onde distinguiamo:
1. sup. contenenti solo n° finito C eccez di 1ª specie, non segue ... a 2a ...
2) per queste è possibile .....

p. es. dalla accennata F^5 alla F^6 – Così nella rappres. piana di F^3 gen. per le 6 rette a_i. – 2° caso, nella π_2 stereogr. di una Q. E nel piano, ogni retta è linea eccez. di 2ª sp. – 7 Sulle sup. che contengono curve ecc. di 2ª sp. non è possibile, a ½ trasf. biraz., far scomparire ogni C^a eccez.: queste sono precisamente le sup. riferibili a rigate, raz. o no, cioè a cilindri ($f(x\,y)=0$).
Le altre sup. (non riferibili a rig.) contengono solo n° finito di C. eccez. di 1ª specie), e possono rendersene prive.

which do not intersect

Ma questo risultato può conseguirsi solo con procedimento che presuppone teoria già progredita.

Insieme colle classi di enti ∞^2 biraz^{te} equivalenti, e coi loro invarianti (invar^{ti} assoluti: p_g, p_a, ...), ci converrà considerare anche sottoclassi, costit. da ~~enti~~ sup. che possano trasf.^{si} l'una nell'altra senza che si introducano o scompaiano curve eccez^{li}, cioè senza che vi siano sulle F p. fond. semplici. E per queste sottoclassi, avremo invarianti relativi: es., per F non riferib. a rigate, il n° delle C. eccez. (di 1ª sp.).

qui la trasf in sup prive di p. mult ~~ecc~~

Veduta ~~rifiuta~~ cui si è giunti gradatamente: solo 1900-01 (Enr. F)

Oggetto di studio della geom. su una sup. alg. Princip^{te} i sist. di curve, e più partic^{te} i sistemi lineari; con questi le rispettive serie caratteristiche – Anche le involuzioni

Sist. lin. su una F di S_r ($r\geq 3$) è il sistema delle C intersez^{ni} colle forme (V_{r-1}) del sist. lin.

$$\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_K f_K = 0.$$

Se parte fissa, si può computarla (reckon) o no. – ~~generally not~~

Se una stessa C è segata da più d'una e perciò da ∞ forme, si può estrarre un sist. lin. di minor dims., ~~...~~ tale che ogni C sia segata da una sua forma – Così sia – Allora sistema ∞^K, e serie caratt. g^{K-1}. (cut upon every curve by the others)

of freedom, dim., multiplicity k
characteristic series

$k=1$, fascio; $k=2$, rete; ...

pencil, net, web
fascio

Per k p. generici di F passa una e una sola curva ~~della rete~~ sist.; e, se $k\geq 1$, è prop^a caratteristica dei sist. lineari, in quanto la curva gen^{ca} del sistema, o almeno la sua parte variabile, sia irriducibile.

(1) Per $k=1$ no (generatrici rigata). – si chiama egual^{te} fascio

The defin. of the canonical series on an alg. curve by means of an arbitrary linear series & its Jacobian series $|A_j - 2A| = |K|$ may be generalized to surfaces – We want only to change the coeff. 2 into 3.

~~For a~~ Suppose a net of irreducible curves to be given on a surface: the locus of the p. of the surface which are double p. for a curve of the net is generally a curve, which we may call the Jacobian curve of the net. (In a plane, this curve is represented by equating to zero the Jacob. det. of the net).

The Jacobian curves of all nets which are contained in a lin. system $|C|$ belong also all to a lin. system. (Enriques, Rendiconti, 1901). If $|C|$ ~~is~~ is virtually without base-points, we shall call Jacobian system of $|C|$, or the complete ~~the~~ lin. system, which contains the mentioned Jacobian curves of all nets of $|C|$, and it also virtually without base-points. – If $|C|$ has any ~~point~~ base-point of virtual multiplicity $i \geq 0$, its Jacobian system ~~will~~ is ~~also~~ intended to have there the virt. mult. $3i-1$. – We shall denote it by $|C_j|$

If $|C|, |D|$ are lin. syst. on F, both virtually without base-points, it may be demonstrated that

$$|(C+D)_j| = |C_j + 3D| = |3C + D_j|.$$

Therefore

$$|C_j - 3C| = |D_j - 3D|$$

that is the lin. syst. $|C_j - 3C|$, if it exists on F, does not depend on the ~~p~~ particular system $|C|$ – virtually deprived of base-points. we considered. Suppose F to be ~~set~~ contained in S_3 and to have only ordinary singularities: if $|C|$ is the ~~syst~~ complete system containing (solely) its plane sections, C_j ~~cont~~ is the (complete) system ~~of~~ constituted by the intersections of F^n with its adjoint F^{n-1} (the double curve excepted); therefore $|C_j - 3C|$, if it exists, will be constituted by the inters. of F^n with its adjoint F^{n-4}; and conversely.

This last system, if it exists, is ~~also~~ therefore connected with F in an invariant manner; ~~But~~ it has an inv. character with respect to birational transf. of F which ~~may~~ neither introduce nor remove ~~also introduce some~~ let disappear any exceptional curves, ~~or let disappear some others~~,

With respect to bir. transf. which may introduce or ~~let disapp.~~ remove such curves, its character is only invariant ~~safe~~ for exceptional curves. More exactly, the system $|C_j - 3C|$, if it exists on F, ~~must still be~~ may have some exceptional curves as fixed parts; leaving these eventual curves ~~at~~ the side, the residual system $|K|$ will be connected with F in an absolutely invariant manner. We shall call it the canonical system of F. All its characters will furnish absolute invariants of F.

(Enriques - 1896)

Ex. - Inters. Q e V^4 in $S_4 = F^8$. Pr. da un suo punto, F^7 con conica tripla; vi è una retta ecces.^{te}, imm. del centro di Pr., che è l'altra interf. di F^7 col piano di γ - Le F^3 agg. hanno γ^2; si spezzano nel piano di γ, che sega 2, e in ~~...~~ Q per γ, che segano sist. canonico. — Le stesse consid. possono applic. alle $F^6 \equiv QV^3$ e sua Pr. In quello caso $C_j \equiv 3C$, a meno di C. eccez. - e si ha una curva canonica (sist. ∞^0) di ord. zero.

The curves of the syst. $|C'| = |C_j - 2C|$, if they exist, are called adjoint curves of $|C|$: they constitute then a complete lin. syst., the adjoint system of $|C|$; ~~which has~~ in every base-point of $|C|$ having the virtual multiplicity i has for $|C'|$ the virtual multipl. $i-1$. - If F is contained in S_3 e has only ord. sing., and $|C|$ is the ~~...~~ compl. lin. syst. cons. ~~totally~~ its plane sec., $|C'|$ will be cut out by adj. F^{n-3}

nel piano

C^n $C_j\, 3(n-1)$ C^{n-3}

k $3k-1$ $k-1$

If you consider in $|C|$ a generic net, and a generic C of this net, say C_0, the curves of that net will ~~intersect~~ determine on C the groups of a g_n^1 - if we ~~denoting~~ by n the grade of $|C|$ - and every double point of this g_n^1 will be a point of contact of C_0 & another curve of the net, therefore a double point for a curve of the pencil $C_0 C_1$, that is a point of the Jacobian curve of the net - and conversely. ~~As the~~ The curves of $|C_j|$ determine therefore on a generic curve of $|C|$ the Jacobian series of its characteristic series g_n

It follows that the ~~C~~ adjoint C' will ~~also~~ determine on the ~~C~~ original curves C groups of the series Jacobian of $g_n - 2g_n^1$'s = that is canonical groups. The adjoint curves of $|C|$ ~~determine on~~ intersect a generic C in ~~A~~ canonical groups. But that does not mean they determine on them the complete canonical series: they always do so on regular surfaces, but not on irregular ones.

Sistemi riducibili (a curva gen^{te} riducibile) come nel piano:

1) parte fissa, più parte variabile irrid., che descrive anche un sist. lin. ∞^K.

2) parte variabile composta di $i \geq K$ curve, variabili entro un fascio, raz. o no: più event^{te} parti fisse. (1).

Inoltre: La parte variabile di una C di un sist. lin non può contenere p. mult. variab., fuori C^a mult di F.

Nei punti di F appart. a una stessa C^a del sistema, la fz. raz. dell'ente $f = \frac{\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_K f_K}{f_0}$ assume un valore cost. $(-\lambda_0)$. Le C ne sono curve di livello. Le event^{li} parti fisse, linee di indeterminaz^e

Sistema lin. semplice quando le sue C per un p. generico ....

se per altri $\mu-1$ $(\mu > 1)$, il sist. è composto; e si ha una Involuzione I_μ, i cui singoli gruppi impongono alle C una condizione. – Immg. di I_μ è una nuova sup.: tra la 1^a è quest. corrisp. $(\mu, 1)$.

Viceversa, ogni trasf. semplic^{te} razionale di F definisce su F una I, e ai sist. lin. di C sulla trasf. corrisp. su F sist. lin. app. ad I.

Le I sono pure oggetto di studio della geom. sulle sup. alg.

Un sist. semplice, irrid. di dims ≥ 3 conduce a rappres. F su una sup. di S_r, le cui sezioni iperp. sono le immg. delle C del sist. dato – Se questo non è semplice, sopra una Φ^μ. Su questa, curva di diramaz^e (luogo dei punti per cui 2 (almeno) dei μ omol. coincidono).

In trasf. biraz., a sist. lin. corrisp sistemi lineari; e gen^{te} a sistemi irrid., sist. irrid. – Ma occorrono convenzioni circa i p. basi e le eventuali parti fisse; tali da dare al sistema lineare carattere preciso, invariante

Un sist. lin. si dice contenuto in un altro quando ogni sua curva, event. insieme a 1 C. residua, cost. una C. di quest'altro.

Un sist. lin. privo di p. basi si dice contenuto totalmente in un altro quando 1 sua C. generica cost. di per sè, senza agg. di altre, una C. di quest'altro (con che le due C. generiche saranno dello stesso ordine).

Ma se il 1° ha un punto base, a questo, in una trasf. bir., può

sulla 1^a F
corr. su una nuova F ~~...~~ una C., in part. una C eccez.; e se vi sono C dello stesso ordine e di un sist. lin. più ampio senza quel p. base, a queste corrisp. sulla nuova F curve di ordine maggiore = primitive + eccez. — (Es. rappres. piana R^3 di S_4: alle C^2 per un punto, le C^3 sez. ip.; alle C^2 generiche, C^4; se diciamo che il sist. C^2 per 1 p. è cont. totalmente nel sist. di tutte le C^2 piane, e se questa locuz. vogliamo abbia caratt. inv. ....),

meglio ancora: ~~rappres.~~ Q o $\frac{1}{2}$ π_2 stereogr. non conviene — c'è complicaz. per il p. comune 2 gen.

Per avere def. di carattere invariantivo, bisogna considerare il punto, anche semplice, come equivalente a una linea, la sua eventuale trasf., intendendo:

δ (da questo p. di v.)

Curva stesso ord. non per il p.
Curva per 1 punto + punto = togliere la condiz. di passaggio
Curva generica − punto = curva per il punto.
Curva per il punto − punto = Curva pass. dopp. per il punto
(Es. sez. iperp. di R^3 − direttr. rett. = sist. coppie di gener.)

~~Sulla Q: $C^2 + 2$gen~~ $= C^4$
Su R^3: C^3 sez. ip. $+ d = C^4$

Pertanto, se il sistema ha qualche p. base, con certe moltipl.; nel dare il sistema devo intendere 1 di queste 3 cose:

δ volendo che sia ben definito quali altri sistemi event.e lo contengano totalmente:

assigned

1) il p. base è dato come tale colla sua multipl.a effettiva — allora un sistema nel quale esso sia contenuto totalmente s'intende avere ivi stessa multiplicità (se no occorrerebbe l'agg. del punto, una o + volte). — e se in una trasf. biraz. il punto si muta in linea, se ne prescinde.

2) il p. base è dato come virtualmente inesistente: ~~...~~ non se ne tiene conto in order to decidere se 1 sist. è contenuto o no totalmente in un altro: in sostanza, il sistema è quello dato più il punto, colla dovuta mult.à = e nelle trasf. biraz. la C. eventuale trasf. del punto va agg. = n° di volte.

assigned base-points.

3) caso intermedio: il p. base s'intende assegnato, ma con multipl.a virtuale > 0 e < effettiva .....

Concetto di multipl.à virtuale per sistemi C piane già in G. Jung, Ann. di Mat (2) 15, p. 277: 16, p. 29
p. fz. raz. sull'ente, Eg, encicl. p. 683.

sist. completo -
sist. non compl. { effettivi · virtuali = quelli del sist. compl. in cui è cont. }
es. C^3 piane A^2 serie caratt.

sist. completo -
~~per sist. non compl., grado e gen. virtuale quelli del sist. compl...~~
essenz. se hp. base multi. virt. inefft. ~~essenz.~~ grado e gen. effett. minori
...

Chiameremo sist. lin. completo un sist. non cont. totalmente in altro di > dims. = ed è concetto invariante.

Ogni sist. lin. $\boxed{\text{dato}}$ su F, di dims ≥ 0, o è completo o è cont. totalmente in un sist. lin. compl. ben definito - Risultato gradatam.^e ottenuto da Enriques: infine F (1901). Per q = 0 bisogna fissare i p. basi effettivi, che sulla C non sono, a priori, dist.

Caratteri del sist. lineare ~~(p. ora irrid.)~~, ~~tutti~~ invarianti. - (Se irriduc.)
dimensione - e (se irrid.) genere effettivo π - grado effettivo n. (fascio, $n=0$).
grado

Se vi sono p. basi con mult.^à virtuale $\neq$ eff., anche genere e grado virtuali {C.E, 684}

Es. Per ~~ogni~~ punti basi, ^{plici} semplici per F, e virtualm.^e inefft. (come nel piano)

$$\pi' = \pi + \Sigma \binom{i}{2} \qquad n' = n + \Sigma i^2$$

Concetto serie caratt.^e

~~Es~~ Se mult.^à virtuali $\gtrless$ eff., formole + complesse.

~~Con ciò restano def. genere e grado anche p. sist. riducibili con comp. eccez.~~

Per sist. riducibili qualunque, dal concetto di somma.

Il sist. lin. completo contenente un dato ha stesso suo genere e grado (virtuali)

I sist. compl. si chiamano anche normali, avendo per immag.

Sup. normali. ~~Ogni sup. di~~ (grado = ordine, genere C. sezioni).

Ogni sup. di ordine n di uno spazio di dims ≥ 3 o è normale,
o è π_z di altra F^n, normale, di spazio sup., ...mente definita

Curve equivalenti (app. a uno stesso sist. lin.). $A \equiv B$ ^{curve totali}
segano su ogni altra C della F gruppi equivalenti.* - Viceversa?

Se due C. di una F staccano gruppi eq. sulle C di 1 fascio, raz. o irraz.,
sono equiv. o diff. per curve totali o parziali del fascio. (Severi - lav. 32, 36 - 1905-06)

dopo somma e sottraz.

Se ∞ sulle C di un sistema continuo ∞^1 di indice ν, si può
solo dire che $\nu A \equiv \nu B$: il che non implica $A \equiv B$ (∞ lavoro 55 - 1911).

* Su questa C, detti gruppi sono segati da sist. lin. di forme.

Operazioni sui sistemi lineari.

Dati sopra F 2 sist. lin. $|C_1|$ e $|C_2|$, ~~risulta ben definito il sistema lin.^e contenente totalmente la C generica $C_1 + C_2$.~~ si dim. che le curve $C_1 + C_2$ app. a un det. sist. lin. minimo, che si può rendere completo. Sistema somma $|C_1 + C_2|$ (denoted by)

Implicito, se mult.^a virtuali s_1, s_2, qui $s_1 + s_2$.

In particolare sist. doppio, ... k^{plo}.

Se $r_1 + r_2 \geq 3$, il sist. somma si può rappresentare, gen.^te, con una F sulla quale i sist. $|C_1|$ e $|C_2|$ sono segati da sist. lin. d'iper.

Se una C_1 e una C_2 gen. hanno $\underline{i}$ p. comuni, grado e genere del sist. somma sono

$$n = n_1 + n_2 + 2i \qquad \pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1$$

la 2^a form. essendo quella ~~già~~ data da Noether (Acta 8-1886-161) e altri per il genere di una C. riducibile

Così si può anche definire grado e genere di ogni sist. riducibile.

v. Baker p. 20
If we have any single C, complete or not, say B, it is possible to take a system $|A|$ of irreducible C of order so great that the sum system $|A+B|$ consists of irred. C. Then the grade and the genus of B are defined by the relations above given: the result so obtained is the same whatever syst. $|A|$ be taken.

Dati $|C|$ e ~~[illegible]~~ una C_1, di cui questo contenuto parz.^te in quella (C_1 + una C_2 = c. totale di $|C|$), avviene altrettanto per ogni curva di $|C_1|$ e resta def. il sistema compl. differenza $|C_2| = |C| - |C_1|$, tale che $|C_1| + |C_2| = |C|$. — Mult.^à virtuali $\underline{s - s_1}$ (≥ 0).

Grado del sistema differenza: stesse notaz. $n_2 = n - n_1 - 2i = n + n_1 - 2(n_1 + i)$, dove $\underline{n_1 + i}$ è n° p. comuni a una $C = C_1 + C_2$ e una C_1 (onde stessa formola della somma, col −)

punto = diff. 2 curve $= n + (n-1) - 2n = -1$
~~$n + \pi = 2(\ldots)$~~

Grado (virtuale) di una curva isolata = p. semplice, o curva eccez. 1^a specie, $\underline{-1}$.

Restsatz. Se di due sist. lin. completi su F, $|C|$ e $|C_1|$, il 1° contiene parzialmente una curva del 2°, ne contiene ogni altra curva, ed è def. un sist. compl. $|C_2|$ tale che $|C| = |C_1| + |C_2|$.

$|C_1|$, $|C_2|$ mutuam.^e residui.

(CE 689) Si dimostra che su una F di S_3 con sola C doppia e p. tripli .... le sup. aggiunte di dato ordine p. la curva d.^a segano, fuori di queste, sist. lin. completi.

Da ciò il modo di eseguire effett.^e sulle date sup. le operazioni di somma e sottraz. di sist. lin. (completi).

C. equivalenti, v. prec.

For linear systems $|C|$, $|D|$ which are virtually without base-points the equation

$$|C_j - 3C| = |D_j - 3D|$$

may also be written in the form

$$|C' - C| = |D' - D| \qquad \text{or} \qquad |(C+D)'| = |C + D'| = |C' + D|$$

(supposing that all these systems exist). It is the so-called fundamental theorem of adjunction. The last form ~~It allows to generalize~~ ~~extend the~~ subsists also for lin. systems having base-points with virtual multiplicities > 0, ~~(and allows to extend the definition of adjoint curves to reducible systems)~~. The system $|C' - C|$, if it exists, is the same as $|C_j - 3C|$, ~~the~~ & coincides therefore with the canonical system $|K|$, save for except. curves.

The connection between C and C' has also an invariant character save for exceptional curves.

Es. sulla Q di S_3 le C^6 sez con F^3 hanno per agg. le sez. piane. Med. π_2 stereogr., le prime danno $C^6(A^3B^3)$, le seconde $C^2(AB)$. Le aggiunte, di ord. $n-3$, delle $C^6(A^3B^3)$, sono le $C^3(A^2B^2)$, composte della retta eccez. AB, corrisp. a un punto di Q, + le dette C^2.

If we introduce any exceptional curve, the system $|C_1|$, corresponding to $|C|$, will have as a (complete) adjoint syst. the sum of the syst. $|C_1'|$ corresponding to $|C'|$, and of the new exceptional curves which correspond to points of the former surface which are not base-points of $|C|$.

From an historical point of view, the adjoint curves C' were considered before the Jacobian syst. $|C_j|$. They were already considered in Enriques' Memoirs 1893 & 1896; but their introduction was rather complex, as their property ~~of~~ - intersecting the C's in canonical groups ~~it~~ may in certain cases suffice to define them, but not always.

segue ✗ Segue ancora: sopra una F (e sue trasf.), ogni sist. lin. è contenuto nel proprio agg. ...

A definition of the numerical genus of a surface, from which its invariance w. resp. to bir. transf. may be put into evidence without more, was given by Ital. geometers by means of considerations concerning the two fundam. linear series on ~~a~~ a generic curve of a lin. syst.: the ~~caratteri~~ characteristic series, cut out by the above syst. itself, & the canonical series, cut out, at least partially, by the adjoint system. Both defin. proceed from ~~the concern~~ the property of these series to be or not to be complete.

1) A complete lin. syst. of plane curves has also a complete ~~lin~~ character. series – but on not rational surfaces it is not always so: that is a normal surface may have hyperplane sections which are not normal. (Viceversa ....) – Es. R^4 ellittica di S_3 –

On a given surface, the deficiency of completeness of the characteristic series of a complete lin. system has a maximum. We may define this maximum q ~~q as the~~ – which has doubtless inv. character – as the irregularity of the surface, & $p_a = p_g - q$. (Castelnuovo 1897 – perf. Severi).

2) On the plane & rat. surfaces, the adjoint syst. $|C'|$ of a given lin. syst. $|C|$ cuts out on ~~a~~ ~~the~~ a generic C the complete canon. series: but it is not always so on other surfaces.

Suppose F^n to be contained in S_3 & to have only ordi. singularities; and $|C|$ to be the complete lin. syst. containing totally the plane sections. Then: I) the complete ~~canon~~ adjoint syst. $|C'|$ will be cut out by adjoint F^{n-3} (that is by F^{n-3} thr. the double curve; II) the complete canonical series on the plane C's will be cut out by their adjoint C^{n-3}'s. – The question is therefore if the adj. F^{n-3}'s of F cut out on a generic plane section all its adjoint C^{n-3}'s, or if they do not – The result (Enriques 1896 partially – Severi 1908) is that ~~they do ...~~ the eventual deficiency of completeness of the canonical series of C is, for all lin. systems on F, always the same: this constant value furnishes another definition of the irregularity q, & consequently of p_a.

As, ~~the adjoin~~ a generic C is contained in ∞^{p_g-1} curves C' (as many as the canonical curves are), & the series cut out by $|C'|$ on the C has the dims. $\pi - 1 - (p_g - p_a)$, the dims. of $|C'|$ will be

$$\pi - 1 - (p_g - p_a) + (p_g - 1) + 1 = p_a + \pi - 1$$

On regular surfaces, $= p_g + \pi - 1$.

lez. 34

110

Severi (Rend. Ist. Lomb. 1905) ha anche introdotto il concetto di curva virtuale di una sup. alg., $A-B$, quando il sist. compl. $|B|$ non è contenuto in $|A|$. Queste, risp. alle curve effettive e relative operaz. di somma e sottraz., adempiono ufficio analogo a quello dei num. negativi in aritmetica. = Così è resa possibile in ogni caso la sottrazione –

Grado di una C. virtuale.

Criterio suff. perchè la diff. $A-B$ tra C. effettive sia anch'essa effettiva.

Curve equivalenti.

Qui la def. sist. canonico a ½ Jacobiano?? – ~~Forse no ma dir [illegible]~~.

h – Ma

Nel piano, il sist. lin. aggiunto puro a un sist. dato di genere $p \geq 1$ è un sistema covariante ad esso, col legame invariantivo di segare sulla C gen.ca del 1° la g canonica completa.

Ciò si trasporta a ogni F raz. – E su una F^n raz. di S_3 con sola C doppia ...... il sist agg [illegible] piano viene segato dalle F^{n-3} agg., cioè per C doppia (F^4 retta doppia; F^5 3 rette d. per 1 p. ...); invece tali F^{n-3} segano su ogni p.no generico .... Sono perciò covarianti anche i sistemi segati da F^i agg. ove $i > n-3$, perchè somme .....

Si tratta ora di estendere questo a F non raz – Ma per tali F possono esistere anche F agg. di ordine $n-4$, o minore: questo conduce a altri sist. covarianti, e fra essi è risultato (Clebsch-Noether) che quello segato dalle F^{n-4} agg. – e sarebbe $|C'-C|$ – liberato dalle eventuali C. eccez. di 1a sp., parti fisse, è addirittura invariante, cioè indip. dal sist. di partenza. È il così detto sistema canonico. – Se F^n ha linee k^{ple} ord. e punti h^{pli} pure ord. isolati, occorrono le F^{n-4} con dette linee $(k-1)^{ple}$ e p. $(h-2)^{pli}$...

Enriques è riuscito, anche qui p. stadi successivi, a introdurre con precisione il concetto di sist. aggiunto (adjoint) a un sistema dato – coi dovuti riguardi agli eventuali p. basi e C. eccez. – e facendone risultare il legame invariantivo col primo.

1) Sopra una F si consid. un sist. lin $|C|$ di dim. $r \geq 1$, privo di p. basi eff. e di C. fond. ~~eff.~~, e non contenente più di ∞^{r-2} C. spezzate. (Escluso quindi, nel caso ~~F con p. mult. isol.~~ rig., le sez. piane o iperp.) – Allora le curve che su una C gen. segano gr. canonici – basta tale condiz. – appart. a un sist. lin. compl. ben def. $|C'|$ virtualm. privo p. basi che si dice aggiunto a $|C|$. – Per due tali, si ha il teorema fond. dell'aggiunzione

Enriques I 1896: in complesso dim. laboriosa.

(1) $$|C+D'| = |C'+D| = (C+D)'$$

2) A mezzo di questa relaz. (permanenza delle propr. formali) si può definire l'agg. di ogni altro sist. $|E|$ virtualm. privo p. basi

così si evita l'inconveniente delle C. subagg. che si sono dovute trascinare avanti p. qualche tempo.

$$|E'| = |E + C' - C|$$

dimostrandone l'indipendenza da $|C|$ (privo p. basi). Se $|E|$ ha in un p. molt. virtuale s, p. l'aggiunto $s-1$.

Il legame così stab. fra $|C|$ e $|C'|$ ha carattere invariantivo risp. a trasf. biraz. di F che non introducano nuove curve eccez.

Ma se si introducono di tali curve, chiamando $|C_1|$ e $|C_1'|$ i sistemi trasf. di C e C', per avere l'aggiunto di $|C_1|$, $|C_1'|$ ~~non è~~, in conformità della data def., bisogna ancora agg. a $|C'|$, come parti fisse, le quelle fra le dette C. eccez. che sono trasf. di punti non basi per C. ~~dette curve eccez.~~ [Es., sopra una Q di S_3 le $|C^6|$ sez. con F^3 hanno per sist. agg. quello delle sez. piane – Tra stereogr.: $C^6(A^3B^3)$ e $C^2(AB)$; e il sist. agg. al primo (C^{n-3} agg.) è quello delle C^2 più retta AB – Viceversa, C^4 e C^1 piane ...]

(enunciato Questioni p. 10

Le (1), e perciò anche quest'altra:

$$|C' - C| = |D' - D|$$

hanno caratt. invariantivo relativo per sistemi privi di p. basi; – e assoluto solo a meno di curve eccezion.

Segue ancora: sopra una F (e sue trasf.), o ogni sist. lin. virt. privo p. basi è contenuto nel proprio aggiunto, opp. nessuno. – L'operazione di aggiunzione consiste nel sommare al sist. proposto il sistema $|C' - C|$ – E essa può ripetersi più volte – successivi aggiunti.

in the 1st case, the characteristic series of any lin. system is special, namely contained in the canonical series

F^n gen. di S_3 ($n \geq 4$) – Sez. piane $|C|$. Jacob., da F^{n-1} – $|C'|$ da F^{n-3} $(C'-C)$ da F^{n-4}

~~Es. F^5 generale S_3~~

Se detto sistema $|C' - C|$ esiste, incluso $C' = C$, l'operazione, che è vera somma, event.te somma con zero, può ripetersi indefinitam.: serie illimitata di succ. aggiunti.

Se $C' - C$ è solo virtuale, il rag.to non va più: e allora ~~Se $|C'-C|$ è solo virtuale~~, l'operaz. di aggiunzione può avere limite. Non intendo che l'abbia sempre limite; ma può averlo. ~~resta una sottrazione, e si comprende che debba avere limite~~

CE, Questioni, 1901, hanno dimostrato che questo 1° fatto è

110-Bis-A

Diverso è invece il comportamento dell'altro tipo più noto di V^a a gen. nulli – rappres. su M_3^n con retta $(n-2)^{pla}$

Queste hanno $\Omega_2 = -\frac{(n-6)(3n-17)}{2}$, naturalmente per $n=3$, $n=4$ si hanno ~~di nuovo~~ anche V^a già venute fra le prec.

Per $n=5$, è $\Omega_2 = -1$, e il carattere Ω sarebbe un caso; la retta doppia è una bisec. [illegible] delle C^2, di genere uno; e forse non

Per $n=6$, $\Omega_2 = 0$, $\Omega = -1$; si ~~prob.~~ si può ~~propos~~ pensare non esistere aff. sup. reg. di gen. 1 – prob. non esistono più che sup. di genere uno isolate reg.

Per $n > 6$, la Var. appare realmente un carattere nuovo, ~~che~~ si corrisp., ~~si potrebbe~~ per così dire, a qualcosa di intermedio fra le sup. raz. e le rig. irraz. Naturalmente, come per le rig. irraz. cessa la relaz. fra il carattere ω e i gen. lin. di curve di gen. 1; e ancora sulle rig. di genere $p \geq$ non esistono, all'infuori delle gen., curve di gen. $< p$; così qui, fuori delle ~~curve canoniche~~ superficie appart. alla cgr. di canoniche, raz. e rig. a R, vi sarà prob. un genere minimo delle ~~sup.~~ altre sup.; e sarà forse ad es. il genere $n-3 . n-4$ delle ~~sup.~~ rette $(n-2)^{pl}$ così come sup. bisec. le C^2. ? – analoga anche esse in certo modo al vertice di un cono.

Marletta ha [illegible] della $(n-2)^{pla}$ – per $(n-3)^{pla}$ perché la $C^{2(n-2)}$ di diramaz. del piano doppio viene a avere p. $2(n-3)^{ple}$

V_3^n con rette $(n-2)^{ple}$

nei singoli punti, S_1-cono tang. Γ^{n-2}, sviluppabile ∞ d'indice 2; inviluppo di $\Gamma^{2(n-2)}$ dei piani per d ~~le punti coppie di rette~~ che contengono C^2 tg a d.

Γ^{n-2} segano V_3 secondo ~~coni~~ 1 sup. $F^{n(n-2)}$, ∞^1 di coniche, di genere $\frac{n-3 \cdot n-4}{2}$

~~le C^2 tang a $\underline{d}$ hanno i piani in un Γ^2~~

I piani delle C^2 riducibili formano Γ^{3n-4}

$\underline{d}$ come sup. bisecante le C^2 costituisce un piano doppio con $C^{2(n-2)}$ di diramaz. $\quad 2p+2 = 2n-4$

genere (rete di rette doppie, rappres. C_{n-3} = tutte le C^{n-4} che segano la serie canonica, alle cotte il sist. aggiunto doppio = sist. canonico C^{n-5} doppie) $\frac{n-4 \cdot n-}{2}$

$\frac{1}{2}(n^2-7n+12) \qquad - \frac{1}{2}(3n^2-35n+102)$

$= \frac{(n-5)(3n-17)}{2}$

Per la V_3^3 di S_4, $\Omega_2 = -15$, mentre $14 (= \Omega - 1)$ è la dim. del sist. delle F_4^6 segate dalle quadriche.

δ_3 doppie F_4^6 di gen. 1 $\Omega_2 = -11$

Per la M_3^8 di S_6, intersez. gen. di 3 q., $\Omega_2 = -7$ mentre 6 è la dim. del sist. delle reg. sp., che sono di gen. 1.

Per la M_3^6 di S_5, ... , $\Omega_2 = -6$ e sarebbe $\Omega = 6$

Per la M_3^4 gen. di S_4, è $\Omega_2 = -5$.

S_3 doppi F_4^6 è presumi... la classif. delle ~~...~~ che, per ~~...~~ M_3 a generi tutti nulli, questo carat. Ω = mass. val. ass. di Ω_2

o almeno di alcuni fra i tutti quelli ...

110-Bis-C

per una data classe di enti birag. identi, debba avere imp. fond. — ~~Si direbbe~~ che il dim. di Ω indica „allontanam.° dalle razion.

Opport. Particolarizzazioni introdotte in alcune di q. V^a, permettono ~~...~~ di riferirle ad altre che le precedono nell'elenco di cui sopra, avvicinandole, per cap. dim., alla razion.; $A_2 x_0^2 + 2 B x_0 + C = 0$ $B^2 - AC = 0$

Es. Obblig. un M_3^4 di S_4 a contenere un R^3 raz. norm., la si rende birag. identica alla M_3^8 gen. di S_6, int. di 3 q.

Obblig. la M_3^6 di S_3, inters. . . . , a contenere 3 piani di una stessa sist. di quelle Q (e la particolarizz. ben tenue!) la si rende birag. equiv. alla V_3^3 generale di S_4.

2 piani – 3 piani – invece 1 piano

110 Bis - D

Società Piemontese di Archeologia e Belle Arti

TORINO - Via Napione, 2 - TORINO

Le mie ricerche dopo quel vas. sono state estese. Dirette a studiare:

Torino, 19 marzo 1928 - (anno VI)

Ricerche finalmente per le M_3^4 gen. di S_4 ... (sezione Enr.)
e att. finalm. M_3^6 (compl. cub. gen.)

EGREGIO CONSOCIO,

Enriques - aprile.

La S. V. è vivamente pregata di intervenire con la famiglia alla Conferenza con proiezioni, che dal Chiar.mo Dottor GOFFREDO BENDINELLI, *Prof. di Archeologia nella R. Università di Torino, sarà tenuta* sabato 24 marzo *alle ore 21, nel Salone dell'Istituto Margherita di Savoia (corso Galileo Ferraris, 25), sul tema:*

Non ancora per la M_3^8 di S_6 .... e nemmeno per la M_3^6 di S_5 conten. ~~un~~ piano. Queste contengono più ∞

Lo stato presente della Questione etrusca

cgr. del l'ord. di C. raz. — La 1ª h. ... da l pr. retta arb. (e contenenti) in M_3^4 di S_4 cont. R^3 (1 p. d.) e i piani ~~...~~ di R^3 ... segu. altre M^4 ulteriormente di 1 cgr. lin., ove R^3 è 4-plo ... viene la V. n rappres. su I_4 di S_3

IL SEGRETARIO — IL PRESIDENTE

ATTILIO BONINO — **EUGENIO OLIVERO**

La M_3^6 con piano è rappr. doppia su S_3 pel pr. tal pr. alle coniche di un cgr. lin., biplan dal pr. stesso. Si rappres. perciò doppia su I_2 di S_3 (in modo molto sempl.: la cong. I_2 forma appr. un compl. cub. cont. stelle di rette)

Il presente biglietto dovrà essere esibito all'ingresso.

Le T2 di quelle coniche delle rette di M_3^6 conducono a nuove cgr. lin. di C. raz.

110 Bis - E

Società Piemontese di Archeologia e Belle Arti

TORINO - Via Napione, 2 - TORINO

quest M_3^6 h, nel piano, ~~∃ p. d.~~, di 1 questi li Πk a
un part M_7^4 di S_4, con rett dopp, e altr part^a —

Torino, 19 marzo 1928 - (anno VI)

Anche la + gener M_7^4 di S_4 con V^4 d. è rappres. tri su
un I_2 di S_3 (la rett dopp attendo un bisec. rag. delle ∞^2 e $^2 f$ =
fin dopp con C^4 limit). ~~La non~~ inag. di quest per me è ass.
fuori dubbio: per ess ritrov fin $\Omega = 5$ ~~...~~ la M_3^4 gen. *
Quest vuol dire che l'inv. Ω. non è assai pross a un class.

EGREGIO CONSOCIO,

La S. V. è vivamente pregata di intervenire con la famiglia alla Conferenza con proiezioni, che dal Chiar.mo Dottor GOFFREDO BENDINELLI, *Prof. di Archeologia nella R. Università di Torino, sarà tenuta* sabato 31 marzo *alle ore 21, nel Salone dell'Istituto Margherita di Savoia (corso Galileo Ferraris, 25), sul tema:*

L'arte degli Etruschi.

IL SEGRETARIO
ATTILIO BONINO

IL PRESIDENTE
EUGENIO OLIVERO

Il presente biglietto dovrà essere esibito all'ingresso.

* diff. comp. fra F^4 gen. di S_3 e F cos. p. dopp.

110 Bis F   ∧ per una classe di sup. biraz. ω →

Per le superficie, si cons. l'inv. relativo ω, ~~il quale~~ il cui valore massimo è il genere virtuale lineare $p^{(1)}$, e in part. se $p_g > 0$, è il genere (virt.) delle C. can.

per le sup. razionali, vale $\underline{10}$, ~~cioè il numero~~ è $p^{(1)} - 1 = 9$ è ~~massimo delle C. ell. lin. ivi~~ ~~la dim. ...~~ ~~supera cioè di un'unità~~ la mass. dim. di un sist. lin. di C. ellittiche, e in pari tempo la mass. dim. che può avere (in quanto sia effettivo) il sist. differenza $|C - C'|$ dove $|C|$ è un sist. lin. arb. e $|C'|$ il suo agg. Mi pare anzi che, prendendo come $|C|$ il sist. ~~delle~~ sez. iperp. di una sup. raz., la dim. di $|C - C'|$ sia $\underline{\omega - 1}$.

Per le varietà a 3 dim., ~~il~~ carattere analogo a $\underline{\omega}$ è Ω_2, genere aritm. virtuale della sup. canonica; invariante relativo — ma anche qui un valore estremo di Ω_2, p. es. il suo valore assoluto massimo per una classe di enti biraz. identici, costituisce un inv. assoluto (di quella specie) di quella classe (Ω).

E $\underline{\Omega - 1}$ sarà presumibilmente per quelle var. la massima dim. di un sist. lin. di sup. aventi tutti i generi uno.

Es. Per S_3, $\Omega_2 = -35$ (come per le sup. raz. il mass. è $p^{(1)}$), $\Omega = 35$, e $\Omega - 1 = 34$ è ~~la~~ dim. del sist. lin. di tutte le F^4, che è prob. la dim. mass. per i sist. lin. di sup. di gen. 1 (e per un sist. $|\Gamma - \Gamma'|$, dove Γ' è l'agg. di Γ). Sulle quadr. di S_4 $\Omega_2 = -30$; ma il val. assoluto è soggetto di aumentare per trasf. biraz.

sup. rigate — Impos[s]. mancano su tutte C ecc. — opera agg. ha termine

caratteristico per le sup. riferibili a rigate (o a cilindri), incluse naturalm.e le sup. razionali. — Per esse è pure caratt.° di contenere sistemi di curve almeno ∞^1 di gen. virt. π e grado virtuale $> 2\pi-2$ (o dim. $> \pi$: in ogni caso, serie caratt.e non speciale) — Mentre il contrario se C contenuto in C'.

114

Il sist. $|C'-C|$, se esiste, è inv. relativo. — Liberato dalle event. curve eccez. parti fisse (rimanendo le event. parti fisse non eccez.) diventa inv. assoluto, e si chiama sistema canonico $|K|$; eventualmente, se $C' \equiv C$ a meno c. eccez. (F^4 gen., F^5 con C doppia, ... di ogni $|C|$), si ha un'unica C. canonica (sist. ∞^0) di ordine zero = gruppi caratt. Sono gruppi canonici = non si può dire ~~grup~~ serie caratt. = serie canonica potendo essere incompleta.

I caratteri del sist. canonico sono naturalm.e invar. ass. di F.

Se esistono vere C. canoniche, esse segano su C generica sup. gruppi differenze .... Noether 1896, Catt. 1891 CR Ist. Lomb. quindi gruppi caratt. speciali.

Il sistema canonico di una F è l'anal. della g canonica su una curva ($p \geq 1$: $p=1$, ord. zero).

È anche suscett. di una definiz. analoga a quella della g can. a $\frac{1}{2}$ serie Jacobiana.

Le reti contenute in $|C|$, se almeno ∞^2, hanno curve Jacobiane, luogo dei p. doppi di loro curve. Se $|C|$ ha dim. > 2, le varie sue reti hanno Jacob. app. a un med. sist. lin. compl. ($|$Jacobiano$=|C_j|$ = sulle F di S_3, per il sist. lin. delle sez. piane, sono segate dalle 1e polari). E si ha ~~(a meno di C. eccez.)~~

/ se definisi con parte riguardo ai p. base di $|C|$ — virtualm.e privo, se tale C

$$|C'| = |\underbrace{C_j - 2C}_{\text{covar.}}| \qquad |K| = |\underbrace{C_j - 3C}_{\text{inv. a meno C. ecc.}}| \text{ meno ancora le event. curve eccez.}$$

(Enriques, F, 1901).

Invarianti secondo Enriques.

1) Un primo invariante è il n° delle C. can. lin. ind. = p_g = gen. geometrico = ~~n° eff~~ ~~ge~~ n° F^{n-4} agg. ind. e effett. esistenti. — $p_g = 0$ quando non c'è sist. canonico, cioè $|C'|$ non contiene $|C|$ (sup. raz., rigate, ...) — Se $|C'|$ coincide con $|C|$ a meno parti fisse, sist. canonico ∞^0, $p_g = 1$; una C. canonica, che può avere ord. > 0 o anche $= 0$ (v. sopra).

2) genere (virtuale) del sist. canonico = genere lineare di $F = p^{(1)}$ — Se $p_g = 1$, C. can. ordine zero, si assume pure $= 1$.

3) grado (virtuale) del detto sist., che vale però $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$. Il sistema agg. a $|K|$, sopra F priva C. eccez., è $|2K|$, e deve sega~~re~~ gruppi canonici: ~~onde~~ $2p^{(2)} = 2p^{(1)} - 2$.

4) le dimensioni, e, meglio, il n° di curve lin. indip. dei successivi multipli del sist. canonico $|2K|$, $|3K|$, ... sist. bicanonico, ... i-canonico, ... che, ove manchino C. eccez., sono anche $|2C'-2C|$, $|3C'-3C|$, ... Ma può

posto supporre senza C. eccez.

avvenire che, pur non esistendo $|K|$ — nemmeno ∞^0 curve C di ordine zero — cioè $|C'|$ non contenendo $|C|$, un qualche suo multiplo $|iC'|$ contenga $|iC|$, e esista perciò il sist. i-canonico. — onde

n° curve i-can. lin. ind. = i-genere = P_i — $(P_1 = P_g)$. se esiste i-can esistono pure 2i-can. ecc.

Poichè C' ha per agg. $C' + |C' - C| = 2C' - C$, ecc., l'i^{mo} agg è $iC' - (i-1)C$, dire che esiste il sist i-canonico è dire che l'i^{mo} agg. di C contiene C stesso. — Perciò, le successive agg. formano serie limitata, (esiste la sup.)

Primo es. trovato (1895–96) (Enr. lin. Castelnuovo) — F^6 pass. dopp. spig. tetraedro. — Non esiste sist. canonico (nessuna Q per 6 spig.); onde $p_g = 0$. Ma le 4 facce del tetr. formano F^4 ..., e perciò p. sez. piane si ha $|2C'| = |2C|$, una C. bican. di ord. zero, $P_2 = 1$. — I suoi sist. lin. si distrib. a a coppie, mutuam^e aggiunti; ognuno 2° agg. di se stesso.

Studiata ulter^te da Fano, che ne ha incontrata una trasf. biraz. F^{10} di S_5 come immag. di una cgr. di rette (3, 7) — Mem. Torino, 1901 cgr. la cui duale già incontrata da Reye (Geom. d. Lage, 3ª ediz, vol 3°), pg. 148), partendo da un sist. lin. ∞^3 di Q (privo p. base) = cgr. rette principali =

Ulteriori ricerche di Fano su detta sup. (R. Palermo, 29. 1910), in part. modo sulle sue trasf. biraz. — e su casi particolari, fra cui quelli di degeneraz. tetraedro di F^6.

l'n-esimo agg. di C contiene C stesso, e perciò tutte le P sono zero.

$x_1x_2x_3x_4 f(x_1, x_2, x_3, x_4) + \varphi(x_2x_3x_4, x_1x_3x_4, \ldots) = 0$

~~$\varphi(x_2x_3x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_4, x_1x_2x_3)$~~

~~$f(x_1, x_2, x_3, x_4) + x_1x_2x_3x_4\, \varphi\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}\right) = 0$~~

f, φ quadr. (homogeneous quadr. funct.)

tetraedr. presente, p. di vis. sist. lin.

Sulle F riferib. a rigate, dovendo la serie dei successivi agg. di un sist. lin. essere finita, non può nessuno dei detti agg. essere $\equiv C$ o contenerlo: onde tutte $P_i = 0$ — e viceversa. ~~Anche si trova che il~~ primo P_i non nullo deve essere P_1, P_2, P_3, P_4 o P_6; ciò implica in ogni caso $P_{12} > 0$: e pertanto $P_{12} = 0$ caratterizza le sup. rif. a rig. (Enriques, R. Palermo, 20, 1905, p. ~~...~~): con contributi De Franchis, ibid p. 49: Castelnuovo p. 55)

va dopo
dopo le Frazional.

b, oltre la rig. ell., altri casi

Si trova anzi che, se $p_a < -1$, sempre altro sono nulle ~~le~~ p_g e tutte le P — Invece se $p_a = -1$, sono possibili ~~...~~ (sup. ell., sup. iperell.); e in ciascuno di questi, come pure se $p_a = 0$, si

formole generale per P_i, coll'intesa che se dà valore neg., sia $P_i = 0$

F^6

$|C|$ = plane sect. $|C'| = F^3$ thr. 6 edges

$|2C|$ = quadrics $|2C'| = F^6$, 6 edg. as 2^{ble} lines

= 4 pl. of tetrah. + quad

$p_g = 0$ $P_2 = 1$

1 ~~...~~ bican. ordre 0

aggiunz. ∞, non raz.

1ª agg. $C + C' - C$

" $C + \underbrace{2(C' - C)}_{0} = C$ ~~...~~

prima b, poi a

5) Genere numerico, quello cons. già da Cayley-Zeuthen come n° virtuale delle F^{n-4} agg. ~~le~~ a una data F_n di S_3, lin. ind. – La Scuola Italiana è riuscita a darne altre definiz.i, tali che ne risulti immediat.te evidente il carattere invariantivo p. trasf. biraz: ma ciò solo a fatica, per stadi successivi: – considerando, sulla C gen. di un sist. lin., le 2 serie fondam.: caratt. e canonica.

a) Castelnuovo (Sist. lin., 1897 p. 58) ~~ha stabilito~~ partendo dall'osservazione che le rigate di genere p, non coni, a curve sezioni non speciali, sono normali p. S_{n-2p+1}, sicchè il sistema delle sez. iperp.ni ha serie caratt. ridotta g_n^{n-2p}, con difetto di completezza p, ha dimostrato che, sopra una data superficie, il difetto di completezza della serie caratt. di un sistema lin. non può superare un certo massimo, e che vi sono sulla sup. sistemi lin. p. quali tale mass. è ragg. – Questo massimo ha evident.te caratt. inv. Lo si può definire come irregolarità q della superf., e il già noto caratt. p_a risulta $= p_g - q$: – Quindi superficie regolari quelle per cui $q = 0$, ossia $p_a = p_g$. – Dim.e più semplice Severi 1903, lav. 23

~~Ci riferiamo a F^n di S_3 le cui sez. piane siano curve C. Le C^{n-3} agg. C^n piana segano g canonica complete. – Ma le F^{n-3} agg. F, che segano $|C'|$, possono non segare tutte le dette C^{n-3}~~

δ perciò definito p. via invar.

b) Le curve C' del sist lin agg a un sist. $|C|$ irrid. segano sulle C gruppi can. – Supposti segnino la serie ~~gruppi~~ canonica completa (piano, sup. raz., e tutte le sup. reg.), di dimens. $\pi - 1$, e poichè ogni C è contenuta in $\infty^{p_g - 1}$ curve C' (essa, più le canon.), la dim.e ~~di~~ r' di $|C'|$ sarà $r' = p_g + \pi - 1$. Se invece le $|C'|$ non segano la serie can. completa, sarà $r' < p_g + \pi - 1$: in ogni caso $r' \leq p_g + \pi - 1$.

§ Se $|C'|$ sega su $|C|$ una serie incompl., si possono cons. quelle segate su $|C|$ stesso dai sist. $|C' + C|$, $|C' + 2C|$, ... agg. ai successivi multipli di $|C|$. La somma dei difetti di completezza di tutte queste serie è ancora q (Enriques I 1896); perciò $r' \geq p_a + \pi - 1$ (2 diseg. senso inverso), e nuova def. di q come valore mass. (effett.e raggiunto) del difetto di completezza della serie lin. segata sui singoli $|C|$ dai relativi $|C'|$.

b') Severi (lav. 49 - 1908), riprendendo per via geometrica – a ½ serie caratt.a di un sistema continuo, anche non lineare – una questione già trattata p. via trascendente da Picard (Crelle 1905) – ha dimostrato dim ≥ 2 ?

che per ~~ogni~~ sistema agg. a un sist. $|C|$ di grado > 0 la diseguagl. $r' \geq p_a + \pi - 1$ può essere sostituita coll'eguagl. $r' = p_a + \pi - 1$ — ossia il sist. agg. è regolare. Perciò dei sopraindicati difetti di completezza di somma $= q$ è il primo che vale q, gli altri zero.

Onde altra definiz. della irreg^a q = difetto di completezza della serie di gruppi canonici segata sopra un sist. lin. $|C|$ dal sist. aggiunto.

This result may be looked upon as furnishing a geom. definition of the irregularity

Una sup. di S_3 dotata di sole sing^a ordinarie è regolare o irreg. secondo che le F^{m-3} agg segano o no sopra un piano non tg tutte le C^{m-3} agg a questo tg piano

Es. Cono cubico — Inters. con Q: genere 4 — Le aggiunte sono segate dai piani pel vertice: segano sulle C_4^6 ∞^2 grup. can. = difetto 1,

R^4ell. — Inters. con Q: genere $1+1+4-1=5$ — Le agg. sono segate dalle Q per le 2 rette d^e: sono ∞^3: difetto 1.

c) altra def. ancora Severi (Lav. 18 = 1902) — Per una rete di curve sulla sup. (soggetta a qualche restriz^e) di genere p e contenente χ curve cuspidate, la diff. $\frac{\chi}{24} - p$ non muta cambiando la rete. Questa diff. è pertanto un carattere della sup., che si prova coincidere col genere num. p_a delle sup.

d) meglio di tutto a $\frac{1}{2}$ considerazione dei sistemi continui di curve, non contenuti in un sist. lin. — ~~come in appresso~~

Mediante i sopraindicati invarianti Castelnuovo (1896) è riuscito a caratterizzare le sup. razionali.

Queste sono infatti caratterizzate dalla coesistenza di queste 2 prop.

1. Serie ~~il~~limitata dei succ. agg. a un sistema lin. — fatto che caratterizza tutte le F rif. a rigate —: onde tutte le $P_i = 0$

2. Serie caratteristica di un sist. lin. ~~completo~~ sempre anch'essa completa — il che esclude le rigate — onde $q = 0$; e, essendo già $p_g = 0$, anche $p_a = 0$.

(caratterizz. le sup. rig. ed)

Si avverte poi che $p_a = P_2 = 0$ implica pure $p_g = 0$, e ne segue l'annullarsi di tutte le altre P. Perciò:

Le sup. razionali sono caratterizzate da $p_a = P_2 = 0$

Anche la razionalità delle involuz. piane è stata dimo-

113

Lincei 2 - 1893_2 p. 209 — facendo vedere che la sup. immag. delle J gode delle 2 propr.^{a} enunciate: in particolare

strata da Castelnuovo (Math. Ann. 44 - 1894) considerando, sulla sup. immag. dell'involuzione, il sist. lin. delle C contenente (totalmente) le immag. delle rette nel piano; facendo vedere che tale sistema, se di genere π, è di ~~grado~~ dim^e > π, e ha la serie dei succ. agg. illimitata, ~~...~~

S Cantor. - trasf. biraz. cicliche nel piano - ultimo lavoro Napoli 1892 ancora lacune, lasciava desiderio miglior trattaz.

→ qui le F riferibili a rigate: $P_{12}=0$

all $P_i=0$
anzi, se $p_a<-1$, senz'altro...
se $p_a=-1, 0$, possono alcuni $P_i \neq 0$, e allora sup. non rif. rig. (ell., raz.) ma...

Insieme ai precedenti invarianti assoluti, anche invarianti relativi (tali, finchè non si introducano o tolgano C. eccez.). ~~Per~~ Applicati a sup. prive di curve eccez. danno caratteri che sono inv. assoluti della classe; e permettono di estendere la consid. di detto carattere a sup. con $p_g=0$, in partic. rifer. a rigate, sulle quali cade la def. dell'inv. in discorso.

Ricordiamo che il sistema canonico è $|C'-C|$ liberato dalle event. C. eccez. che ne fossero parti fisse. Calcoliamo di $|C'-C|$ genere virtuale ω_1 e grado virtuale ω_2, in funz. degli analoghi caratteri di C e C', supposti virtualm.^{e} privi di p. basi:

$$\pi' = \pi + \omega_1 + \{2\pi - 2 - n\} - 1 \quad \text{ossia} \quad \omega_1 = \pi' - 3(\pi-1) + n$$

$$n' = n + \omega_2 + \{4\pi - 4 - 2n\} \quad \text{"} \quad \omega_2 = n' - 4(\pi-1) + n$$

con $\omega_2 = \omega_1 - 1$
segue $n' = \pi + \pi' - 2$

Sono inv. relativi; facendo comparire una nuova C. eccez. (che si aggiunge al $C'-C$: grado -1, genere 0, 0 p. comuni) entrambi diminuiscono di 1; facendola scomp., aumentano di 1.

Pertanto, su F non riferibile a rigata, con e curve ecc. di 1^a specie, saranno ω_1+e, ω_2+e invar. assoluti, e precisamente $= p^{(1)}, p^{(2)}$, genere risp. grado del sist. canonico.

La relazione $p^{(2)}=p^{(1)}-1$ dà $\omega_2=\omega_1-1$, che si riconosce anzi vera in ogni caso, anche per superficie riferib. a rigate.

Per superficie riferibili a rigate, si riconosce del pari che ω_1 ha, per ogni classe di sup. biraz.^{te} equivalenti, un massimo. Per le sup. raz., tale massimo è il valore di ω_1 pel piano (C^4 piane: $0 - 3.2 + 16 = 10$) cioè 10.

In altri termini, ~~rappres. un piano~~ rappres. una sup. raz. sul piano, il n.^{o} delle C. eccez. che scompaiono (si mutano in punti) è non inferiore ($\geq$)

al n° di quelle che si introducono (Q: 2 contro 1; F^3 generale, 6 contro zero). Si può dire che <u>il genere lineare di una F raz. è eguale a questo massimo 10</u> (inv. assoluto).

Anche: ω_1 ~~è~~ $-2C$ il n° delle curve $|C^* - O'|$ lin. indip, ove C sia un sistema virtualm.[te] privo di p. basi — 10 nel piano, 9 sulle Q, 4 sulla F^3 gen., ecc.

Per la classe delle Rig. di genere $p > 0$ il massimo di ω_1, inv. assoluto, vale $\underline{-8(p-1)}$.

<u>Altro invariante relativo</u>, quello di <u>Zeuthen</u> (Ann. 4. 1871. 1) - <u>Segre</u> (Atti Tor. 31. 1896. 485): per un fascio raz. irriducibile, di genere π, con σ p. basi, δ curve dotate di punto δ°, $\underline{I = \delta - \sigma - 4\pi}$, indip dalla scelta del fascio (δ, σ da valutarsi opport.[te]) — Aumenta di 1 coll'introduz. nuova C, eccez.

<u>Relazione</u> $\omega_1 + I = 12 p_a + 9$, già in <u>Noether</u>, Ann. 8, p. 526, 1875 (con $p^{(1)}$, e ipotesi $p_g > 0$)

Estensione I a fasci irrazionali (Cast. Enr., Questioni).

Qualche ricerca anche per <u>corrisp.[ze] algebr. non biraz.[i] fra due F.</u>

(estensione di quanto si conosce) Qualcosa <u>Enriques</u> (Ricerche 1893) poi <u>Severi</u> (lav. 21 — Ist. Lomb. 1903).

Corrisp. $(1, n)$ fra F e F^*, cioè biraz. tra F n^{pla} e F^*; su F vi ~~è~~ può essere <u>una curva di diramazione</u>, o di <u>passaggio</u> Δ fra gli n strati, luogo dei punti a cui corrisp. G_n con almeno un punto doppio. A questa, su F^*, una curva Δ^* luogo delle coincidenze (di questi p. doppi).

Se per F si ha $p_g > 0$, alle sue C. canoniche corrisp. ~~che~~ curve che, sommate con Δ^*, danno C. can. di F^* — Di qui relazioni fra i caratteri delle due sup. (Cast. Enr., Encicl., n° 15).

Però l'involuz. che F^* che corrisp. biraz.[te] al sistema dei punti di F <u>potrebbe avere solo un n° finito di p. doppi</u> (onde, su F, solo n° finito p. di diramaz.). Caso che si è presentato per le F regolari di genere uno, e per le F iperellittiche — <u>Godeaux</u> (Lincei, 23, 1914, p. 535) ha dimostr.[to] che tali I_n sono generate da gruppi finiti biraz. di ord. <u>n</u>.

Dalle corrisp. $(1, n)$ si passa a quelle <u>(m, n)</u>, applicando il concetto di <u>Segre</u> (Introduz.[e]) di ricorrere all'ente ∞^2 delle coppie di punti omol., il quale ente è in corrisp. $(n, 1)$ colla 1^a e $(m, 1)$ colla 2^a sup.

Base del sistema delle curve di una F.

Altro gruppo di risultati importanti di Severi: qui pure guidato dallo studio di alcuni casi particolari (Lavoro 22, 1903; F con 2 fasci unisecantisi, e altro es.).

Curve algebric.te legate, quando una comb. lin. a coeff. int. positivi di alcune fra esse e un'analoga comb. delle altre appart. a un med. sist. alg irriducibile — La condiz. perchè ciò avvenga, p. k curve di ordini m_i e mutue intersez. in n° n_{il}, è l'annullarsi di tutti i det. di ord. k della matrice (a k orizz., $k+1$ vert.) $|n_{il}\ m_i|$. — (Lav. 22 – Math. Ann. 62/1906) algebraically connected; vanish; {rows, columns}

~~Per due curve~~ alg. legate e ~~$n_{11} = n_{22} = n_{12} > 0$, due loro convenienti equimultipli app. a uno stesso sist. continuo~~ In partic. se 2 C ~~stesso ord.~~ sono alg. legate, e hanno stesso ord. e sarà $\lambda A \equiv \lambda B$, e $n_{11} = n_{22} = n_{12}$

se 2 C sono alg legate e $n_{11} = n_{22} = n_{12} > 0$, due loro conv. equim. ...

Il n° delle curve algebric. indip. esistenti sopra una F non può crescere oltre ogni limite (Es. F^n generali di S_3: 2 curve qualq. sono algebr. legate; sopra una Q, 2 gener. di opp. sistemi e una 3ª curva qualq.)

Sopra ogni F esiste un n° finito ρ di curve $C_1\ C_2 \dots C_\rho$, fra loro indip., ma tali che ogni altra curva è legata algebr. ad esse (si ricava da esse con operaz. di somma, sottraz. e divis.e per n° intero) — Perciò ogni sist. continuo su F si ricava da $\{C_1\}$, $\{C_2\}$, ... con analoghe operazioni.

Le curve $C_1 \dots C_\rho$ si dice formano su F una base, e ρ è il numero base. Questo numero è un invar. relativo di F; aum. di 1 per ogni nuova c. eccez. introdotta (1 nel piano, 2 sulle Q, 7 sulle F^3 gen., ...).
ma la determin.e effettiva del n° ρ per data F è problema gen.te difficile, risoluto solo per F particolari.

La condiz. necess. e suff. perchè ρ curve $C_1 \dots C_\rho$ formino una base è che il determ. $|n_{il}|$ sia $\neq 0$. — Esistenza base dimostr. per altra via da Poincaré {CR – 149 – 1909 – 1026; Ann. Ec. N. (3). 27 – 1910 p. 55

Ulteriori ricerche intese a comporre possibilm.te le curve di una F, da altre, con sole operaz. di somma e sottraz., esclusa divis. (Lav. 50 – 1908 Ann. Sc. N. Sup.

La base si chiama intermediaria quando è tale che, posto $\lambda C \equiv \sum_i \lambda_i C_i$, il num. λ sia divisore di tutte le λ_i. Ciò avviene sempre e solo quando il determ. della base ha valor assoluto minimo. Questo minimo è un divisore ~~del ogni~~ determ. di ogni altra base; e anzi il quoz. è quadrato perf. in terms of

Base minima, quando in più $\lambda = 1$; ossia compos.iz per sole somma e sottraz.

Si può da $\lambda C \equiv \sum \varepsilon_i \lambda_i C_i$ passare a $C \equiv \sum \varepsilon_i C_i$? – Non sempre; perchè curve di sist. algebrici ~~(event.te lineari~~ distinti possono eventualm.e avere qualche sist. multiplo comune: allora sulla F la divisione non è ~~sempre~~ operaz. univoca. P. es. sulla F^6 avente come doppi i 6 spig. di un tetraedro ($p_a = p_g = 0$, $P_1 = 1$) i piani e le F^3 agg. (aventi i 4 vertici del tetr. per p. doppi) segano 2 sistemi di sestiche, anche algebric.te distinti. Ma questi 2 sist. hanno lo stesso sist. lin. doppio: il sistema di 2 F^3 agg. dà una F^6 coi 6 spigoli doppi, che colla F^6 prop. determina fascio segante C^{12} fissa: e nel fascio vi è una sup. spezzata nel tetraedro e Q residua. (D'altronde, dei 2 sistemi di C^6, ciascuno è agg. dell'altro; onde $C + D' = C' + D = 2C = 2D$)

Quando però la divisione sia operaz. univoca (e lo è per molte classi di sup.; p. es. tutte quelle a C canonica di ord. zero, sia regolari che irreg.), allora da $\lambda C \equiv \sum_i \varepsilon_i \lambda C_i$. D. $C \equiv \sum \varepsilon_i C_i$; e una base intermediaria è allora anche minima. — Lo stesso passaggio è pure legit. se $\sigma > 1$ ma è primo con λ.

Severi dimostra che, sopra una data F, il n° dei sist. distinti che si possono ottenere dividendo per un intero un sist. alg. di curve non sorpassa un certo massimo σ. Allora con $\rho + \sigma - 1$ curve (in part. ancora ρ, se $\sigma = 1$) si può formare base minima: ossia da $\rho + \sigma - 1$ sist. continui convenienti, si possono ottenere tutti gli altri per somma e sottraz.ne — (Per $\rho = 1$, possono event.te occorrerne $\sigma + 1$)

?

A ogni base intermed. (Severi, lav. 54, R. Palermo 30. 1910. 269) viene coordinata una „forma quadratica fond" a ρ variabili $\sum n_{ik} \lambda_i \lambda_k$, tale che la determ.ne delle C di grado > 0 sopra una data F si riduce al probl. aritmetico di rappres. il detto grado med. forma quadr. a ~~ρ variabili~~ dati coeff. interi e ρ variabili.

Si può parlare di forma quadr. fond. delle F perchè le forme relative alle diverse basi intermed. sono equivalenti fra loro, c/o ~~tra~~ sostituz. unimodulari (classe unica).

Teorema di Riemann-Roch
(già Noether, C. Rend. 103 – 1886 – p. 734 p. sup. regolari)

Nella geom. sulle C. alg. il teor. di Riemann-Roch dà la dim^e della serie lin. completa determ. da una C_n; dim^e $= n-p+i$ dove i, indice di specialità, è = n° dei gruppi canonici lin. ind. contenenti C_n. – L'indice di special^à tende ad aumentare della dim^e. linearly indep.

Così sulle F possiamo proporci ~~calcolare~~ assegnare possib^te la dim^e r di un sist. lin. completo med^te π, n, e event^t altri elem. (fra cui inv. ass. di F).

Nel piano, e quindi sulle F raz, essendo completi solo i sist. a serie caratt. complete, si ha $r=n-\pi+1$, se serie caratt. non speciale: e più gen^te, in ogni caso, $r=n-\pi+1+\sigma$, dove $\sigma\geq 0$ è l'indice di spec^à della serie caratt^a = sovrabbondanza = n° cond. fra punti basi che sono conseg. delle altre (es. F^4 gen. con p. triplo, C^4 per 12 p. su C^3). superabundance

Noether (CR, 103, 1886) ha dato per sup. reg. $p_a=p_g=p$ e sist. irrid. la relazione $r\geq p+n-\pi+1-i$, dove i = indice di specialità = n° curve canoniche lin. ind. che contengono una C. Dunque i tende a diminuire, non aumentare la dim^e. Es. sist. canonico, ove $r=p-1$, $n=\pi-1$, $i=1$ (*) index of specialty

Per le superficie irregolari è p_a che va sostituito a p.

(pel sist agg. $r'\geq p_a+\pi-1$; essendo $\begin{cases} n'=\pi+\pi'-2 \\ \pi-1=n'-\pi'+1\end{cases}$, segue $r'\geq p_a+n'-\pi'+1$, essendo qui certo $i=0$)

Introducendo qui pure la sovrabbondanza $\sigma\geq 0$:

$$r=p_a+n-\pi+1-i+\sigma \qquad \text{(teor. R-Roch)}$$

caratt. virtuali?

(Castelnuovo P. 1897). – Se $i>0$, si possono trovare i caratteri del sist residuo risp. al canonico.

Se vi sono curve fond. di genere >0, è certo $\sigma>0$ (F^4 p. triplo)

altra forma R-Roch Severi (Lav 33, Atti Tor. 1905) anche per sist. riducibili, purchè $p_a+n-\pi+1-i\geq 0$.

Il teorema si estende a sistemi riducibili.

Sistemi regolari, secondo Castelnuovo, quelli per cui $i=\sigma=0$, $r=p_a+n-\pi+1$.

Sopra F di S_3 a sing^à ordinarie sono tali i multipli convenientem^te elevati delle ~~sezioni~~ sezioni piane anche le agg. di ord. abb. elevato. – Tale pure (Severi, Lav. 49, 1908: v. sopra) il sist. aggiunto a una C irrid. atta a definire un sist. continuo di grado >0.

La specialità si può present. p. sist. solo con caratteri fino a certi massimi

la sovrabbondanza senza limiti.

(*) Le curve canoniche segano su una C gruppi della serie differenza canonica – meno caratt; quante più sono le curve can. lin. indip. che contengono C come parte, tanto minore è la dim^e di quella 1^a serie, e quindi della sua residua ~~risp. caratteristica~~ risp. canonica, cioè della serie caratt^a; quindi ciò tende a diminuire la dim^e di $|C|$. – Presumibile cambiamento del senso dell'influenza di i secondo la parità della dim^e. V

+

Sistemi continui di curve.

Serie caratt. completa = caso (C) privo di p. basi, C generica irrid., priva p. multipli = di effeuder poi...
|E| irrid., privo p. basi, cont. pass. (C), e sega su C generica serie lin. completa — residuo (D) = insieme di sist. lin — se C, D hanno k p. com., si considerano le E con k p. doppi: esso, o una sua parte irrid., coincide col sistema delle C+D. — Allora la serie caratt. di (C) completa è segata su una C gen. dalle E per pei punti di 1 gruppo (CD), quindi (poiché tali E form. sist. lin.) dalle E ∞ vicine alla C+D condit., le quali, avendo k p. doppi ∞ vicini ai precedenti, appartengono al sist. — e viceversa.

Sopra una C alg. di $p>0$ i G_n formano una ∞^n non lineare. Si distrib. (se $n>2p-2$) in una ∞^p, anche non lineare, di g_n^{n-p} (Es. sulle curve ell., una ∞^1 riferibile alla C stessa).

Del pari, vi sono sup. sulle quali esistono sistemi continui di curve di dato ordine e genere (virtuale), completi (non cont. enti totalm.^e in altri di > dim.), alg e non lineari — Es. il sist. delle gener. di una R non raz; anche il sistema delle interf. di una tale R colle V^k per una o più generatrici.

Sia $\{C\}$ un tale sist. ∞^r ($r\geq 1$), alg, completo (C. sopra), e non lineare; n, π caratt. virtuali. Chiameremo serie caratteristica la g_n^{r-1} segata sulla C generica dalle ∞^{r-1} sue ∞ vicine: concetto rivelatosi molto fecondo, introdotto da Severi (Atti T. 39, 1904 e poi Palermo 20, 1905, p. 93, lav. 24 e 30) — Per i sist. lin. la defin.^e si riduce a quella nota.[1]

Il sist. ∞^1 nelle vicinanze di una C generica può considerarsi come lineare....

Detta definizione può anche modificarsi (differ.^za fra le serie che su C segano due sistemi lin. $|C+\Delta|$ e $|\Delta|$), rendendola indip.^te dall'esistenza di un sist. continuo, lin. o no, cui app.^ga C. — Inoltre: serie caratt.^a + serie segata su C dalle curve can. di F = serie can. su C (come per i sist. lin.)

The limiting positions of the intersections of any curve of the system with another, when the latter tends to coincidence with the former, constitute a characteristic set.

$\int$ per gli ulteriori progr. S. geom. sulle sup. (p. 463 ?? F. sotto)

??

Enriques prima (Acc. Bologna X.mbre 904), Severi poi (lav. 30), coll'uso di un importante princ. di continuità di Enriques (Una C alg. variab. in un sist. continuo non può spezzarsi senza ~~non può~~ acquistare nuovi p. doppi), dimostr.^no: La serie caratt.^e di un sist. continuo completo sopra una F è sempre completa. X

Una C individua il sistema ~~lin~~ continuo compl. in cui è contenuta totalmente * — Il sist. lin. completo |C| è contenuto nel sist. continuo $\{C\}$. Perciò se su una F esiste un $\{C\}$ compl. non lineare, i |C| lineari

---

* La questione degli event.^i p. basi, p. arrivare al sist. completo, è un po' diversa dal caso dei sist. lin. — Per questi, un p. multiplo della Curve generica è certamente p. base (salvo event.^te considerarlo virtualm.^e inesist.^e) — In un sistema continuo, possono anche essere p. multipli variabili. — In tal caso, occorre dunque che degli eventuali p. multipli della C assegnata, sia dato quali s'intendono variabili (ossia su tutte le C, ma variabili), e quali basi (salvo poi virtualm.^e inesistenti ossia non sulla C generica). Cambiando di ciò, cambierà in gen. $\{C\}$. — Severi, Lincei 1916, p. 461.

(1) Per i sist. ∞^2 di C piane delle trasf. biraz. di contatto la serie caratt. è una g_1^1.

vi esso cont. avranno serie caratt. incomplete; e vicev., se una $|C|$ ha serie caratt. incompl., vi sarà un sist. continuo $\{C\}$, più ampio, a serie car. compl., contenente $|C|$.

Di qui l'idea che il contenere sist. continui completi non lineari fosse proprio prop.ª caratteristica delle sup. irregolari. Invero:

Castelnuovo (Soc. Società, 1896. Alcuni ris...): sono irreg. le F contenenti un fascio irraz.

Enriques (Palermo 13. 1899. p. 95): {sopra F reg. ogni serie cont. di C è cont. totalmente in un sist. lin. - ossia} È ~~pure~~ irreg. ogni F contenente un sist. continuo di C. non contenuto in un sist. lineare.x — E viceversa (presumibile, perchè ~~poichè~~ non si conoscevano altri esempi di F irreg.):

x Data serie cont, vi esse ∞^1, serie g_m^1 di questa, sist. lin. che le contengono; e, se sup. reg., ~~tutte le C~~ si costruisce un sist. lin. che deve contenere le C tutte

Enriques (Acc. Bologna, 9, 1904, p. 5): Sopra ogni F irreg. esistono sist. alg. continui di curve non contenuti in sist. lineari.

Perciò: Coincidenza completa delle 2 classi: sup. irregolari, e sup. contenenti sist. continui non contenuti in sist. lin. — Vedremo anche che sono le F con $\int$ di Picard: pref. $\int$ di 1ª specie indip., in n° eguale alla irreg.^{e}) (*)

Per conseg.^{e} Il sistema completo definito da una data C o sist. continuo di C è lineare o no secondo che F è regolare o irregolare (p. questo caso, V. avvertenza p. basi). — In quest'ultimo caso, un sistema lineare regolare, perciò di dim.^{e} $\underline{p_a+n-\pi+1}$ è contenuto totalm.^{e} in un sistema continuo di dim.^{e} $\underline{p_g+n-\pi+1}$; che contiene perciò $\infty^{\underline{p_g-p_a}}$ sistemi lineari a 2 a 2 non equivalenti.

È qui che si vede l'analogia delle F irreg. di irreg.^{e} $\underline{q}$ colle C. alg. di genere q (∞^q serie lin. compl. g_n^{n-q} p. $n > 2q-2$). — E sup. regolari colle C. razionali: ogni sist. continuo completo di curve è lin. = l'insieme di tutti i G_n è g_n^n

Consid. un sistema continuo compl. di dim.^{e} $p_g+n-\pi+1$: imponendo a una C $p_a+n-\pi+1$ condiz. lin. dist. (p. es. passaggio p. altrett. punti generici) stacchiamo un sist. $\infty^{p_g-p_a}$, di cui 2 qualq. non equival.^{i} — Se C, C_1, C_2 sono 3 fra queste, vi è pure una $C+C_1-C_2$; onde l'operaz. $+C_1-C_2$ muta uno nell'altro i vari sistemi lineari entro $\{C\}$: questi appaiono come punti di una $M_{p_g-p_a}$, con un gruppo transit.^{o} $\infty^{p_g-p_a}$ di trasf. biraz.

Così dette Varietà di Picard, rappres.^{bili} con fz. Abeliane di p_g-p_a var. ind. a $2(p_g-p_a)$ periodi.

(*) In part.: Ogni sup. ~~[illegible]~~ irreg. $p_g=0$, quindi $p_a<0$, contiene un fascio irraz.^{e} (Enriques, Palermo, 20, 1905; p. 1). Anzi, se $p_a<-1$, vi è un fascio di C. raz.; onde sup. rif. a rigata; mentre per $p_a=-1$ vi sono anche le sup. ellittiche, con un fascio ellittico, e un fascio raz. di C. ell. (n interf.)

Vi è pure un fascio irraz. ogniqualvolta $p_g \geq 2(p_a+2)$ = Castelnuovo, Pal. 20. 1905. p. 55.

Rosenblatt, stesse ipotesi; sup. rif. a rigata, oppure fascio di C. ellittiche, con $p^{(1)} = 1$.

La consideraz.ne dei sistemi continui di linee sulle F conduce a qualche altro criterio di equival.za (sempre p. linee di un sist. lin.).

1. (Severi, lav. 36, 1906) — Perchè le curve di un sist. continuo $\{A\}$ siano equivalenti, è necess. e suff. che, per un valore di k dato, intero $k \geq 1$, le curve kA seghino gr. equiv. sopra una C, fissata entro un sist. continuo di grado > 0.

2. (lav. 55, 1911) Se invece A, B segnano gruppi equiv. sulle curve di un sist. continuo ∞^1 Σ, esiste un intero k tale che kA e kB sono equivalenti, oppure differiscono per C. fond. di Σ (e k è precis.e l'indice del sistema)

3. Un sist. continuo d'indice ν, tale che la curva riducibile formata dalle ν curve p. un p. generico, al variare di questo punto, rimanga equiv. a sè stessa, si compone a sua volta di C. equiv. (Severi, lav. 32)

La consid. di questa forma è esemplare (Severi lav. 54 cit) per lo studio delle F con un gruppo ∞ discontinuo di trasf. biraz — caso che non ha l'analogo p. le curve. Per le F regolari,* il gruppo suddetto G risulta isomorfo a un gruppo di sostit. unimodulari della detta forma

which allow birat. transf. into themselves

Le sup. in parola hanno abbondante letteratura di casi particolari: Painlevé, Humbert, Rosenblatt, Snyder, Fano, ...

Teorema di Enriques: Le dette superficie: (Lincei (5) 15. 1906_2 p 661):
o contengono un fascio di curve ellittiche — oppure
hanno tutti i generi eguali a uno ($p_a = P_2 = 1$ — anche $p_g = 1$, $p^{(1)} = 1$).

Nel 1° caso esiste effett.te un gruppo biraz. discontinuo, purchè sulla F esistano 2 curve K_1, K_2 ~~unisecanti~~ incontranti le C ell. del fascio in gruppi A_n, B_n di egual n° di punti, tali che due loro equimultipli non siano mai equivalenti: si ha infatti allora sulle singole C del fascio la trasf. non period. $z' = z + \Sigma a - \Sigma b$ essendo a, b i valori dell'integr. di 1ª sp. nei punti A e B.

Del 2° tipo ha dato un 1° esempio Fano (Ist. Lomb. 1906), del quale Severi ha poi assodato che si tratta di una F non contenente C. ell., perciò certo non del 1° tipo — La più generale F^4 di S_3 contenente C_2^6, quindi 2 reti ~~confi~~ di tali C^6, mutuam.te residue risp. F^3: Le due reti sono di grado 2, onde 2 I_2, i cui prodotti alternati generano il gruppo.
— Si hanno casi analoghi anche per F^4 contenenti C_2^{2n}.

---

* Restriz. superflua = Godeaux, Lincei (5). 21. 1912_1, p. 398.

Integrali semplici

Dovuti essenzte a ~~Picard~~, 1885 e seg. (libro Picard - Simart).

Un integr. siffatto può diventare infinito nei punti di certe curve della sup. Cons. il continuo reale ∞^2 immag. di una di queste curve (sup. di Riem.), e un suo punto con ciclo lin. che lo circonda. Se il valore dell'$\int$ preso lungo detto ciclo è nullo, la curva è polare per l'int.; in caso diverso, logaritmica, e il valore di quell'integr. ($\neq 0$, ma costante per ogni p. della curva) costituisce un periodo logaritmico — L'integrale si dice:

di 1a Specie, se in ogni punto (p. qualq. cammino d'integr.) ha valore finito. —
Se ha in più i periodi tutti nulli, si riduce a una cost.

di 2a Specie, se ha solo curve polari (cioè se vale zero per ogni ciclo lineare avvolg. a un punto) — Se avesse in più i periodi nulli, si ridurrebbe a fz. raz.

di 3a Specie, se vi sono curve logaritmiche. distinti, se nessuna comb. lin. è fz. raz.

Detta classific.e è invariante risp. trasf. birazionali.

Un integr. semplice della sup. $f=0$ determina sopra ogni Caly di questa, ~~in part. su ogni sezione~~ $y=\bar{y}$ un $\int$ Abeliano, in generale della stessa specie. Ma non si può, viceversa, da un $\int$ abeliano di tale curva risalire a un $\int$ sempl. sulla sup. — I periodi di questo $\int$ Abel.°, p. es. se di 2a sp., | variano nel variare della seg., cioè di y; e sono le soluz. di un'eq. diff. lin. di ord. $2p$, se p è il genere della C., a coeff. polinomi in y || — Quest'eq. diff. lin. ha importanza fond. nella teoria di Picard degli $\int$ semplici: ~~permettendo di vedere se la sup. ha integr. semplici di 2a specie, in partic. di 1a~~, e ~~eventualm.e costruirli~~. ~~If that diff. eq. is invar. by a convenient walk of y it is poss. to change each age~~ gives rise to ...

| Supp. la curva di genere p

|| p. sing. p.ti di cont. con piani $y=$ cost.

Ma integrali così fatti, che non siano semplici cost. o risp. fz. raz. sulla sup., non esistono sopra ogni sup.; p. es. non sulle Fn generali del loro ordine in S_3.

Per la effettiva costruz. dei differ. che conducono a $\int$ di 1a sp. — se esistono — Picard ha dato i primi risultati, riconducendosi alla ricerca di certi 3 polinomi, di gradi limitati, soddisf. a un'eq. a derivate parziali.

I 146

Ma era desiderabile determ. razionalm.^{e} le fz. P e Q, analogamente a quanto avviene per gli $\int$ Abeliani di una C^m piana a mezzo $C^{m-3}_{agg.}$, e $\int$ doppi 1^a sp. F^h.

Severi (lav. 57 – C. Rend. 152 – 1911 – p. 1079) si vale della seg. propr.^{e}: Le condiz. perchè un $\int$ Abeliano di 1^a o 2^a specie $\int A(xyz)dx$, determ.^{e} raz.^{te} sulla C alg $f(xyz)=0$, ove y sia consid. come parametro, abbia i periodi indip. da y, è che l'integ. stesso non divenga mai di 3^a specie per valori partic. di y stesso. – Di qui, riesce nell'intento, a mezzo di certe agg. di ordine $n-2$ della F^n, supp. dotata di sole sing.^{e} ordinarie; facendo variare tali agg., come compatibile colle condiz. necessarie, si hanno tutti i diff. di 1^a specie.

Per gli integr. semplici di 2^a sp. è fond. la propr.^{e} (analoga $\int$ Abeliani) che il n^o di quelli distinti è eguale a quello dei periodi (che perciò possono assegnarsi a piacere $\int$, restando l'int. definito a meno d'una fz. raz. additiva), ed eguale pure a $p_1 - 1$ (p_1 = conness. lin.).

Ciò già Picard, 1897 –

Severi (lav. 25-26: Math. Ann. 61 – 1905 – p. 20) ha introd. il concetto molto importante di funz. razion. residua di un $\int$ di 2^a specie lungo una sua C^a polare – Caso più interess. e semplice, di un $\int$ che diventa ∞ di 1^o ordine solo lungo un'unica C. irrid.^{e} priva di p. mult.; e ogni altro $\int$ può ridursi a questo caso med. sottraz. di una conv. fz. raz.

Se $F=0$ è la sup., con sole sing.^{e} ordin., I dare sopra una sez. y = cost un $\int$ abeliano di 2^a sp., con un certo residuo in ogni punto ~~dove~~ comune alla detta sez. e alla C. Questo residuo diviene una fz. raz. $\varphi(xyz)$ del punto (x, y, z) sopra C; ed è questa la fz. residua raz. di I sulla sua C polare. – La determ.^{e} dei poli e degli zeri di φ su C mostra che la posiz. dei poli e di parte degli zeri è indip. dall'integr. I considerato. Ciò che varia da $\int$ a $\int$ è soltanto un gruppo di zeri, che sopra C costituisce un gruppo della serie caratt.^{a}; e ciò permette di collegare l'esistenza su F di $\int$ semplici di 2^a sp. con propr.^{à} geom. di F medesima

If the polar curve be a curve of a lin. syst. these points cannot be a set of the charact. series determined by on the polar curve thereby, unless the $\int$ is reducible to a rat. fct.
This explains why the caract. series of a lin. syst. may be incomplete

δ I

Integrali semplici e doppi relativi a una sup.

Anche le classiche teorie di Riemann e Clebsch sugli $\int$ di diff. algebrici di una variabile si possono estendere alle sup., ottenendo ivi pure $\int$ di diff. alg. con carattere invariante risp. trasf. birazionali

Come i punti comunque complessi di una C. alg. si possono rappres. coi p. reali di un continuo ∞^2, sup. di Riemann, così, dal punto di vista dell'An. situs una sup. alg. $f(xyz)=0$ costituisce un continuo reale ∞^4, i cui punti rappres. in modo biunivoco i p. compl. della sup. – Alle C. alg. sulla $f=0$ corrispondono continui ∞^2 entro quello ∞^4, assimilabili a sup. di Riemann.

Come per le sup. di Riemann, l'interesse principale si concentra sui così detti cicli, o continui chiusi a 1, 2, 3 dimensioni, non riducibili per ~~continuità~~ deformaz. a un punto); e sul n° dei cicli (a 1, 2, 3 dimens) indipendenti, cioè tali che ogni altro possa ridursi a una somma di multipli dei primi, presi in senso determ°, senza che ciò avvenga per uno dei primi risp. ai rimanenti. Questo n°, aumentato di un'unità, dà la connessione (lineare p_1, bidimens p_2, tridimens p_3) del continuo ∞^4; si ha però $p_1 = p_3$ (Teor. di Betti), e rimangono perciò solo 2 distinte. 1. lineare, p. continui a 2 dimens

Ricerche princip. francesi: Picard e la connes. bidimens anche da Poincaré, Liouv. (6). 2. 1906. p. 177.

Ai cicli lineari e bidimens corrisp. rispett. su F due tipi di integrali, semplici, o curvilinei, o di diff. totali, e doppi o di area ~~semplici e doppi~~; che estendono rispett. la teoria degli $\int$ abeliani ~~rispett.~~ e corrisp.za alle 2 possibili estensioni del concetto di genere p di una C. alg.: sup. di irregolarità p, per gli $\int$ semplici e superf. di genere geom. p p. gli int. doppi. Specie

Integrali doppi risalgono a Noether (Math. Ann. 2 – 1870) – del tipo $V = \iint F(xyz)\,dx\,dy$, essendo F funz. raz. delle 3 var., legate a loro

V pattb

volta dalla relaz. $f(xyz)=0$. L'integrale si intende esteso a un continuo a 2 dim, pensandovi x, y, z fz. di 2 param. reali. — Poincaré ha dim. che l'integrale non si altera deformando con continuità il campo d'integraz., purchè ne rimanga invariato il contorno, e si evitino i p. singolari di F (Acta 2, 1883, p. 97).

I, 49

Il valore di V per un ciclo a 2 dim costituisce un periodo;

fz. defin. a meno mult. period
Picard II p. 333

Invece Picard dal 1884 (C. Rend., Liouville, Picard-Simart) ha considerati gli integrali semplici, o ai diff. totali
$$J = \int (P dx + Q dy)$$

of complete, total diff.

dove P e Q sono fz. raz. di x, y, z, soddisfacenti alla condiz. di integrabilità $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (intendendosi, nella derivaz., considerata z come fz. di x, y definita da $f(xyz)=0$), esteso a un cammino lineare da un p fisso $(x_0 y_0 z_0)$ a un p. variabile (xyz) — Non si altera per deformaz. continua del cammino di $\int$ne tenendo fermi gli estremi e evitando p. sing. di P e Q. — Esteso a un ciclo lineare dà un periodo. perciò J è sopra $f=0$ una fz. di x, y, z (del punto) definita a meno di multipli dei periodi, compresi event.te quelli cosidetti polari, cioè provenienti da cammini non riducibili a un punto senza attraversare qualche p. singolare di J.

[which may be owed to singular points or to cycles which cannot be reduced to points.

Integrali doppi: Rappres.no la più semplice e naturale estensione degli $\int$ abeliani, e si lasciano anche esaurire più rapid.te.

Kinds

Divisione in 3 specie, con criteri analoghi $\int$ abeliani.

L'$\int$ doppio si dice di 1a specie, quando per qualq. campo di integrazione ha valore finito. Hanno forma analoga a quelli Abeliani, e cioè:

everywhere finite I 177

$$U = \iint \frac{P(xyz)}{f'_z} dx\, dy$$

dove, ritenuto n l'ord. della sup. $f=0$, $P(xyz)$ è un polinomio agg. a f, d'ordine $n-4$; e $f'_z = \frac{\partial f}{\partial z}$. — Vi sono perciò p_g integrali di 1ª Specie indipendenti (cioè tali che per ½ di essi ogni altro si compagna linearmente). Questo concetto ha carattere invariante risp. a trasf. biraz. della sup. (Noether l. cit. – libro Picard-Simart) unaltered

Severi ha dimostrato recent.te (Lincei 31. 1922₂. p. 416) che, analog.te a quanto avviene p. integr. Abel., un integrale doppio di 1ª Specie che abbia tutti i periodi nulli è una costante.

L'int. doppio U si dice di 2ª Specie ~~quando è nullo il suo valore esteso a un qualsiasi ciclo a 2 dim. riducibile per continuità a un punto, cioè il residuo risp. tale punto~~

Si chiama residuo dell'int. doppio U ~~il suo valor~~ in un punto P il suo valore per un ~~ciclo~~ campo ∞² piccolissimo racchiudente il p. P e non riducibile a un punto o una linea senza attrav. P. – Detto residuo è sempre nullo ogni qualvolta P non è p. sing. della fz. $R(xyz)$; in caso diverso, può esserlo o no. L'int. dopp. U si dice di 2ª Specie quando sono nulli tutti i suoi residui (sole sing.ᵗà polari): definiz. di carattere inv. risp. trasf. biraz, e che ingloba gli int. di 1ª specie. (numerosi lavori Picard dal 1897 = libro Picard-Simart). I 52 possessing algebraical infinities

Fra gli ∫ abel. di 2ª Specie si dicono distinti o indip. due o più, quando nessuna loro comb. lin. è una fz. raz. $R(xy) = \int \frac{dR}{dx}dx$ –

Così qui quando nessuna comb. lineare è del tipo

$$\iint\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)dx\,dy \quad \ldots \quad M, N \text{ fz. razionali } (xyz)$$

Picard dimostra che, per sottraz. di un ∫ di questo tipo, qualq. ∫ di 2ª Specie può ridursi alla forma $\iint \frac{P(xyz)}{f'_z}dx\,dy$, dove P è polin. agg. a f, di grado limitato. Ne deduce che la sup. ha un n° finito ρ_0 di integr. doppi di 2ª Specie distinti (nel senso precisato). Questo numero ρ_0 è un inv. assoluto della sup. E a Picard riuscì anche (1903-05) di stabilire una importantissima relaz. fra ρ_0 e il n° base ρ, da lui incontrato a proposito ∫ semplici di 3ª specie, e altri caratteri. A tale relaz. può darsi la forma:

$$\rho_0 = I + 4(p_g - p_a) - \rho + 2$$

dove I è l'invar. relativo di Zeuthen-Segre (2 inv. relativi...)

E $\rho_0 + \rho - 1$ è il n° dei periodi distinti di un ∫ doppio di 2ª Specie, corrisp. a cicli al finito. $| = I + 4q + 1$

Per superficie regolari $\rho_0 + \rho = I + 2$

Quando la sup. acquista un p. d., non cambia I e perciò nemmeno $\rho_0 + \rho$ — Se ρ aumenta di 1 (nuova curva infin.^{ma} di grado -2), deve diminuire ρ_0. — Sulle sup. razionali (o riferibili a rigate) ρ_0 è nullo, non può dunque diminuire; perciò ρ deve ~~ri~~rimanere invariato. (Es. Q, F^3, ...): due sistemi $|C|$ e $|C| + d$, dapprima distinti, ora coincidono; meglio, la diff. virtuale di 2 sist. di = grado e genere, dapprima distinti, si riduce a $\underline{d}$.

Enriques (Acc. Bologna. 9. 1904. p. 5) viceversa
F irregolare . D. ammette $\int$ sempl. 1ª Specie.
(~~partendo~~ infatti dalla prop.ᵗᵃ caratt.ᵃ delle F irreg. di contenere sistemi continui non contenuti in sistemi lin. $\exists$ + risultato di Humbert)

Perciò F con $\int$ sempl. 1ª e 2ª sp. = F irreg. = F con sistemi cont. C non cont. in sist. lin

Ora anche legame quantitativo fra irreg.ª e n° $\int$ di 1ª e 2ª sp. distinti.
Severi (Atti Tor. 40. 1905 p. 288) — anzitutto trasf. in eguaglianza una preced. disuguagl.

Se vi sono q integr. 1ª sp., r di 2ª. D. $r - q = p_g - p_a$

E ritenuto che già

$$q \leq p_g - p_a \,.\; D. \;\; r \leq 2(p_g - p_a)$$

Rimaneva a trasf. in ~~guaglianze~~ eguaglianze anche queste due. Ciò fecero Castelnuovo (C. Rend. 140. 1905. p. 220: Lincei 14. 1905. p. 545-93-655) e Severi (Ann. di Mat. (3). 12 (1905) p. 55).

uso varietà Picard teor. Abel

In base al teor. Enriques: sist. cont. completo ha serie caratt. compl. e alla Vª di Picard legata alla sup. — oppure (Severi) sul lemma:
„ si abbia su C. alg. serie alg. ∞^1 indice ν di G_n, tale che l'insieme
„ dei ν gruppi per un p. generico si muova in serie lin., i G_n sono pure
„ equivalenti" — Di qui teor. Abel sulle F e $q \geq p_g - p_a$ (*)

quindi $\begin{cases} q = p_g - p_a \\ r = 2p_1 - 1 = 2(p_g - p_a) \end{cases}$ n° integr. 1ª sp. $= \frac{1}{2}$ n° periodi

Altra dim.ᵉ Poincaré, Ec. Norm. 27. 1910. p. 3

(*) Le somme dei valori di ognuno dei q int. sempl. di 1ª sp. nei punti comuni alle coppie di curve di un sist. continuo compl. formato da $\infty^{p_g - p_a}$ sist. lin dovranno, pel teor. di Abel, ~~assumere~~ essere suscett. di assumere $\infty^{p_g - p_a}$ gruppi distinti di valori: il che non ~~[illegible]~~ se fosse $p_g - p_a \geq q$.

Un complesso di lavori molto importanti di Castelnuovo-Enriques-
Severi furono quelli intesi a ~~assegnare~~ caratterizzare dal punto di vista geometrico ~~i numeri degli~~ le superficie sui cui esistono
integrali semplici ~~distinti~~ di 1ª e 2ª specie; e in particolare esprimere i num. di detti integr., distinti, ~~mediante di una~~ mediante ~~loro~~
caratteri geometrici ~~di questa~~ delle sup. — principalmente, si presumeva, la irregolarità;
come avviene p. le curve, degli $\int$ abeliani e $\frac{1}{2}$ genere.

Il gruppo più importante di lavori è del 1904-05.

~~Un primo risultato~~ nelle ricerche sulle ~~le~~ superficie iperell. così dette di Picard era risultato
che per queste era $p_g = 1$, $p_a = -1$, irreg.ª 2, e vi erano sulle esse
2 integr. semplici distinti di 1ª specie. — Anche altri esempi ~~avevano~~
facevano credere doversi essere un legame fra irreg.ª e esistenza integr.
semplici di 1ª specie.

Humbert (C. R. 117 - 1893 - 361; Liouv. (4). 10. 1894. 190) ha dimostr. che
esistenza sist. continuo non conten. in lineare . I. esistono $\int$ sempl. di 1ª specie.

Enriques (Palermo. 13. 1899. 95) mostrò ancora
it . I. la sup. è irregolare.

Enriques 1901 affrontò la questione inversa (Ann. Toulouse (2). 3 p. 77)

F contiene q integr. semplici di 1ª sp. a ~~con~~ $2q$ periodi (ciò si credeva allora ipotesi restrittiva, ma non è tale)

I. esistono su F sist. continui non contenuti in lineari

I. onde F irregolare

Severi 1904 (lav. 24, atti Tor. 39. 1904. p. 490) semplificò la dimostrazione, aggiungendo che
I. irregolarità $\geq q$.

Fra Giugno e Xmbre 1904 Enriques-Severi stabilivano in modo completo il
legame qualitativo fra sup. irreg. e sup. contenenti $\int$ semplici di 1ª specie, assodando
che queste 2 famiglie di sup. coincidono: ~~l~~ ciascuna delle 2 propr. implica l'altra.

Severi (Lincei 13. 1904. p. 253 = Math. Ann. 61. 1905. p. 27) mostrò che
Se F possiede $\int$ sempl. di 1ª sp. I. è irregolare

Dunque, se vi sono q integr. sempl. dist. di 1ª sp., r di 2ª,[1] si ha $r - q \leq p_g - p_a$

Il ragionam.to di Severi poggia sullo ~~fatto~~ studio della fz. residua di un integr. di 2ª specie, ~~e sulla proprietà~~ nel caso di un'unica C. polare, e sulla proprietà che questa
C. determina sopra F un sist. lin. completo a serie caratt.ca incompleta, perciò
contenuto in un più ampio sist. continuo non lineare.

[1] including those of the 1st kind, but excluding rat. functions

For Abelian int. of 2nd kind there is the part. case of the „elementary" integral, having only 1 pole of 1th order

~~An Pi~~ In a quite anal. ways, among the int of Picard of the 2nd kind on a surface, there are integrals becoming infinite of the 1st order only along an irreducible curve, having no mult. point = ~~Any~~ elem. = Any integral of 2nd kind may be reduced to this case – or to an $\int$ of 1th kind – by substracting from it rat. functions (47).

Suppose $F=0$ to be a surface in S_3 having only ord. sing. and I an elem. int of 2nd kind on it, C its polar curve. On any plane section $y=$ cost. I will furnish ~~a certain num~~ an Abel. Int of 2nd kind, having a certain number of poles of 1th order intersect. with determinate residua. These residua, varying with y, may be considered as a function – a rat. fct – of the point (xyz) on C: what Severi calls the rational residual functions of I on its polar curve C.

Severi proceeds to determine the groups of poles and zeros of φ on C. He shows that ~~by varying~~ the poles are only the points at infinity of C & the points of contact of C with planes $y=$ cost.: they do not change therefore, if the int. I changes. Among the zeros, some are also independent ~~from~~ of the part. int. I; but the others vary with I, and constitute a group of the characteristic series of C.

The integral I may also be a rat. funct. on the surface (like an Ab. int. of 2nd kind ...): in this last case the characteristic group I mentioned is the base-group of the pencil $I=$ cost. – consequently a group of the caracteristic series of the lin. syst. $|C|$.

Conversely, if I is a true int., not a rat. fct., the mentioned characteristic group ~~cannot~~ is not cut out by a curve of $|C|$. There are also on C char. groups which do not belong to the charact. series of the linear syst. $|C|$: this last series is also not complete, consequently F an irreg. surf.

As the deficiency of completeness of the charact. series of $|C|$ cannot be greater than $p_g - p_a$, we have so an upper limit for the numbers of ~~linearly~~ th independent integrals of 2nd kind - integrals of 1st kind & rat. functions excluded $s \leq p_g - p_a$.

Shortly afterwards, Enriques succeeded in demonstrating conversely, that any irreg. surface contains compact systems which are not linear - & consequently contains also $\int$ of Picard
The qualitative result was by this way obtained

Irreg. surf = surf. containing complete syst. of curves which are not lineare = surf. on which $\int$ of Picard exist.

A few weeks, by Cast. & Severi also a quantitative connection:
On a surfaces of irreg. q there are q linearly independent Int. of Picard of 1st kind, & $2q$ indep. $\int$ of 2nd kind, (the former ones including), but rat. fct. excluded

(Severi, by means of what he called the theorem of Abel on surfaces.

Teorema di Abel (a $\frac{c}{r}$ integrali semplici).

Si è cercato, in più modi, di estendere alle F la condizione di equivalenza di due C_n sopra una curva, data, in forma trasc., dal teor. di Abel

Severi (Ann. d. Mat. [3], 12, 1905, p. 55) (lav. 32) ha data una condiz. di equivalenza fra 2 curve, a $\frac{c}{r}$ integr. semplici: (in terms of the everythere finite))

I Condiz. necess. e suff. affinchè le curve C di un sist. continuo sopra F appartno a un med. sist. lineare è che la somma dei valori che ogni integr. semplice di 1ª sp. prende nei punti comuni ~~alle~~ a due C non uniti per variaz. continua delle 2 curve.

Altra forma del teor. di Abel (Severi, lav. 35: Palermo, 21, 1906, p. 280):

IIa Quando nei gruppi ove 2 curve D_1 D_2 di un med. sist. continuo sopra F segano una C fissa, individuante un sist. continuo di grado > 0, gli integr. semplici di 1ª sp. danno somme eguali, a meno di multipli dei periodi, due equimultipli conven. di D_1 D_2 appartno a un med sist lineare.

Invece che supporre che le 2 curve D_1 D_2 appartno a un med sist. continuo, basta l'ipotesi abbiano eg. ordine, eg. grado virtuale, e si seghino in un nº di punti eguale al grado virtuale:

II b Se gli integr. sempl. di 1ª specie di F danno somme congrue nei punti dove le suddette curve D_1 D_2 tagliano una 3ª curva C, fissata entro un sist. continuo di grado > 0, due equimultipli convenienti di D_1 D_2 sono equivalenti.

Per giungere a tali teoremi occorre la riduz. a forma normale degli $\int$ di Picard. (per gli integr. di 1ª specie, periodo 0 lungo $q-1$ dei cicli del 1º gruppo, e 1 pel rimanente – per quelli di 2ª sp., un'unica C. polare semplice, e periodi 0 lungo tutti i cicli del 1º gruppo).

Altra forma del teor., per dare la condiz. perchè una involuz. I_n sia regolare:

Condiz. necess. e suff. a ciò è che, al variare con contin. di un gruppo dell'involuz., restino costanti le somme dei valori di ognuno dei q integr. sempl. di 1ª specie nei punti del gruppo.

Integrali semplici di 3ª specie.

Devono avere almeno 2 curve logaritmiche. A ogni C logaritm. corrisponde un periodo, e la somma di questi periodi moltipl. per convenienti numi interi è = 0.

La questione più importante è la seguente: Se, assegnate ad arbitrio sopra F due o più C. alg., si possa costruire un ∫ di 3ª specie le cui C. logaritm. siano fra quelle date.

curves of logarithmic infinity

In sostanza, queste curve logaritmiche devono essere algebricᵗᵉ legate (p. es. due, ma di uno stesso sist. algebrico).

Teorema di Picard (Ann. Ec. Norm. S. (3). 18. 1901. p. 397).

Sulla F si possono assegnare ρ curve irriducibili $C_1 \dots C_\rho$ tali che non esista un ∫ di 3ª sp. avente queste sole come curve logaritmiche; ma, data comunque una $(\rho+1)^{ma}$ curva, esiste sempre un integrale di 3ª sp. avente le sue curve logaritm. esclusivᵗᵉ fra le $\rho+1$ suddette.

ρ è il nº base di Severi, che appunto di qui ha dedotta la sua teoria della base.

Fra gli integr. di 3ª specie, vi sono le così dette combinazioni algebrico-logaritmiche $\Sigma A_k \log R_k(xyz) + P(xyz)$, dove le A sono cost., e le R, P fz. razionali.

∫ rational functions and logarithms of rat. funct.

Severi (lav. 29, Math. Ann. 62 1906 213) ha dimostrato (questione più volte posta da Picard): Alle sup. regolari spetta la prop. caratteristica che gli integrali semplici si riducono a combinazioni algebr.-logaritmiche. — Questo teorema risolve in altro modo la questione qualitativa della coincidenza della classe delle F irreg. con quelle delle F dotate di ∫ semplici trascendenti di 1ª e 2ª specie.