Transformations de contact birationnelles dans le plan

Les transf. de contact dans le plan, dans l'espace, et aussi dans des espaces à plusieurs dim. bien qu'envisagées auparavant par d'autres Auteurs en des cas particuliers, ont été considérées ~~premièrement par~~ en toute généralité ~~par~~ et surtout au point de vue géom. par S. Lie dans ses Mémoires de ~~passés de en~~ 1870–72; plus tard il en a développé la théorie dans le 2ème vol. de sa „Theorie der Transformationsgruppen" (1890) et dans la „Geometrie der Berührungstransformationen", rédigée par Scheffers en 1896 comme 1er vol. ~~mais qui n'a pas été suivi par d'autres.~~ [Quelques chapitres du 2ème vol. que l'on a trouvés déjà rédigés à la mort de Lie (1899) ont été publiés dans les MA (59 1904) par Engel.] — Dans le plan, la figure fondamentale est l'ensemble d'un point et d'une droite ~~passant~~ par ce point — droite que l'on peut limiter à l'entourage du point, en sorte ~~tel~~ que l'on appelle ordin. cette figure élément lin. ~~tout~~ On peut ~~dotes~~ représenter analytiquement cet élément ~~est déterminé~~ par 3 coordonnées; les coord. cartés. x, y du 1er ~~terp~~ const. et point, et le ~~direction~~ coefficient angulaire $p = \frac{dy}{dx}$ de la droite. ~~Deux éléments infiniment~~

Un système ∞^1 d'éléments donne ~~bien en général~~ à une courbe lieu des points (xy) de ces éléments et à une enveloppe des droites; et ce sont ~~ce~~ ordinairement deux lieux différents. Le système d'éléments s'appelle une Union („Verein") lorsque ~~ce~~ le lieu des points est au même temps l'enveloppe des droites; c. à d. lorsqu'il s'agit des ∞^1 éléments d'une courbe — chaque élément étant ~~composé~~ constitué par un point de cette courbe et par la tangente en ce point — y compris le cas des éléments d'une droite, c. à d. éléments à point variable et droite fixe — ou bien aussi des ∞^1 éléments appartenant à un point fixe, ce point étant en même temps l'enveloppe des ∞^1 droites. La notion de union comprend pourtant les 2 notions de ligne et de point. La condition analyt. à laquelle ces éléments doivent satisfaire est en tout cas $dy - p\,dx = 0$. ~~Deux éléments infiniment proches du système sont~~ Au point de vue géométrique, on peut dire aussi que 2 éléments infiniment ~~proches du système~~ voisins d'une union sont tels, que le point de l'un appartient à la droite de l'autre, à moins d'une quantité infinitésimale d'ordre supérieur — comme c'est bien le cas pour un point d'une courbe par rapport à la tangente en 1 point ∞ ~~proche~~ voisin.

On dit alors que ces éléments ∞ voisins ~~proches~~ sont en position unie: une union est ainsi un syst. ∞^1 d'éléments dont chacun est en pos. unie avec son ∞ voisin.

On appelle transf. de contact dans le plan toute transformation des éléments:

le lieu des points est au même ~~temps~~ l'enveloppe des droites.

$$x_1 = X(x\,y\,p) \qquad y_1 = Y(x\,y\,p) \qquad p_1 = P(x\,y\,p)$$

telles qu'à chaque union corresponde une union, c. à. d. qu'à des éléments en position unie corresp. des éléments aussi en position unie. Analytiquement, il faut que l'éq. $dy - p\,dx = 0$ soit transformée en elle-même, c. à. d. que l'on aie une relation

$$dy_1 - p_1 dx_1 \equiv \rho(x\,y\,p)(dy - p\,dx)$$

ρ étant une fct. des $x\,y\,p$, non identiquement zéro.

S'il ne s'agit pas d'une transf. pct. étendue, en éliminant p, p_1 entre les 3 équations de la transf. on obtient une éq. (unique):

(α) $$F(x\,y\,x_1\,y_1) = 0$$

représentant pour chaque point x, y ou bien $x_1 y_1$ la courbe qui lui correspond dans l'autre plan.

Une transf. ponctuelle dans le plan:

$$x_1 = X(x\,y) \qquad y_1 = Y(x\,y)$$

(1) est aussi une transf. de contact, mais très-particulière, comme aux unions-points correspondent aussi des points, au lieu de unions tout-à-fait générales.] Dans les entourages de 2 points correspondants, les éléments se corresp. linéairement:

Corresp. ponctuelles étendues

$$dx_1 = \frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy$$

$$dy_1 = \text{———}$$

excepté aux points particuliers où $\frac{D(X\,Y)}{d(x\,y)} = 0$.

Dans la théorie de Lie les fonctions $X\,Y\,P$ sont des fct. analyt. ~~absolument~~ quelconques; ~~assujéties seulement à avoir pour des valeurs générales de $x\,y\,p$ les dérivées dont on a besoin.~~ les transf. de contact ne peuvent pourtant être envisagées que dans une certaine région du plan. Lie a considéré surtout les transf. de contact infin., et leurs applic. à la ~~théorie~~ intégr. des éq. diff.

J'appellerai une transf. de contact birationnelle lorsqu'elle est algébrique et biunivoque, sauf éventuellement pour des éléments exceptionnels, dont la corresp. est indéterminée – c. à. d. lorsque X, Y, P sont des fonctions rationnelles de $x\;y\;p$, telles que l'on puisse aussi en déduire x, y, p comme fct. rat. de $x_1\;y_1\;p_1$. Ces transf. peuvent ~~maintenant~~ être considérées dans toute l'étendue du plan, pourtant ~~univ.~~ biunivoques, sauf pour des él. except.

Telles sont les transf. de Cremona du plan, étendues aux éléments ; et aussi les transf. de Cremona du plan réglé, c. à d. en considérant $x\ y\ x_1\ y_1$ comme coordonnées de 2 droites corresp., celles-ci aussi étendues aux éléments ; et aussi les produits de ~~une~~ 2 ou plusieurs transf. de Cremona ~~appliquées~~ l'une aux points et l'une aux droites, et toujours étendues aux éléments. Ces produits sont des transf. tout-à-fait nouvelles. — Les transf. par polaires réciproques. —

À ces transf. de contact birationnelles ~~ont été l'ob~~ Autonne a consacré 1882–88 deux Mémoires, qui n'ont pas ~~sur~~ été suivis d'autres recherches. J'ai abordé moi-même ce sujet en 1925 ; j'en ai fait l'objet d'une communication au congrès intern. de Bologna en 1928, et de quelques Notes dans les CR de l'Acad. des Lincei 1928–29. Et dans ces derniers mois j'ai repris mes recherches sur ce sujet.

Les 2 questions les plus importantes que l'on peut envisager sont :

1) Caractériser les systèmes ∞^2 de courbes qui correspondent dans une transf ~~birat~~ de contact birat aux points du plan — ou bien aux droites (ce sont toujours les mêmes systèmes ; à ce point de vue, l'ensemble des points et des droites sont équivalents) ;

2) Déterminer possiblement les opérations les plus simples par lesquelles on peut obtenir, comme produits, la totalité des transf de contact birat. Cette question est bien plus difficile que l'autre. Il aurait été très-satisfaisant de pouvoir obtenir toutes ces transf comme produits de transf de Cremona du plan pointillé et du plan réglé, alternées. Mais concernant ce point, je suis parvenu seulement à un résultat négatif : cela n'est pas possible.

Dans mes recherches, j'ai taché de maintenir, autant que possible, l'analogie avec les ~~théorie~~ transf de Cremona. Pour Cremona, la question fondamentale est la détermination des réseaux des courbes correspondant, dans les transf birat, aux droites du plan — c. à d., si la transf est représentée en coord. homogènes par les éq.:

$$y_1 = \chi_1(x_1 x_2 x_3) \qquad y_2 = \chi_2(\quad) \qquad y_3 = \chi_3(\quad)$$

$\chi_1\, \chi_2\, \chi_3$ étant des fct. rat., et telles que l'on puisse ~~exprimer~~ en déduire l'expression de $x_1\, x_2\, x_3$ par des fct. rat. des y — des réseaux

$$(1) \qquad \lambda_1 \chi_1 + \lambda_2 \chi_2 + \lambda_3 \chi_3 = 0$$

que l'on appelle reseaux homaloïdes. Comme 2 droites dans le plan se rencontrent en un point seulement, il faudrait que la même chose arrive pour 2 des courbes (1). Cela ne paraît pas possible si ces courbes sont d'ordre $n > 1$; mais on fait abstraction des points communs à toutes les courbes (1), qui sont des points exceptionnels, dont le corresp. est indéterminé. Le cas le plus simple est celui de $n=2$, c. à d. de transf. quadratiques. Les courbes (1) sont des coniques, se rencontrant en général en 4 points: on aura une transf. de Cremona lorsque de ces 4 points 3 sont fixes, c. à d. communs à toutes les coniques (1), le 4ème seul pouvant changer d'un couple de coniques à l'autre. En prenant les 3 points fixes comme sommets du triangle des coord., l'éq. (1) pourra s'écrire

$$\lambda_1 x_2 x_3 + \lambda_2 x_3 x_1 + \lambda_3 x_1 x_2 = 0$$

et la transf. de Cremona sera:

$$y_1 : y_2 : y_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2$$

Les sommets du triangle des $x\,(y)$ sont des points exceptionnels, auxquels corresp. tout un côté du triangle des $y\,(x)$.

Pour $n > 2$ les courbes (1) ont toujours des points fixes doubles, ou d'une multiplicité plus grande, comme c'est évident, puisque, correspondant à des droites, elles sont des courbes rationnelles.

Lorsqu'on donne le réseau (1), il suffit donner encore une A^{te} arbitr. entre le réseau (1) et le réseau des droites, pour déterm. compl. la transf.

Je vais passer maintenant aux transf de contact birat. J'ai cherché avant tout de caractériser

Les courbes = unions = corresp aux points seront aussi rationnelles, comme elles doivent corresp aux ∞^1 éléments d'un même point. Et le système ∞^2 de ces courbes est aussi rationnel. J'appellerai ces systèmes systèmes homaloïdes.

Un élément du plan appartient toujours à un point seulement. Et deux points infiniment ~~proches~~ voisins ~~ont~~ sont tels qu'il y a un seul élement ~~commun~~ qui est le seul élément appart. ~~chaque élément appart à un point donné appart aussi à tout~~ appartenant ~~sont des points ∞ proches.~~ au 1er point et au pas uni avec un él. du 2d

Pourtant, un système homaloïde ~~devra~~ doit jouir de ces 2 propriétés :

a) Une courbe du système devra être complètement déterminée lorsqu'on en donne un élément, c. à d. un point et la tangente en ce point. — ~~Cour~~ Dans un réseau de Cremona, une courbe est déterminée par 2 de ses points, en particulier aussi lorsqu'on en donne un point et la tangente en ce point ; maintenant, pour ~~les~~ des systèmes homaloïdes ~~ques~~ par 2 points donnés passent encore, en général, plusieurs courbes du système ; mais par 2 points ∞ proches, c. à d. si l'on donne un point et la tangente en ce point, il n'y en a plus qu'une seule.

b) ~~deux~~ chaque courbe du système doit avoir avec chacune des ∞^1 qui lui sont infiniment ~~proches~~ voisines un seul élément ~~commun~~ variable en position unie avec un élém de celle-ci, c. à d. une seule intersection variable — et, d'après la dualité, une seule tangente commune variable ; les autres étant toujours fixes pour une même $\mathcal{C}$.

Ex. des coniques tangentes à 3 droites fixes.

Les 2 propriétés a) et b) suffisent à caractériser les systèmes homaloïdes

Les courbes planes rationnelles d'ordre n et de classe ν dépendent de $n+\nu+1$ paramètres. Pour en avoir un système ∞^2, il faut les assujétir encore à $n+\nu-1$ conditions. Pour les syst homol ces conditions sont toujours ~~d'avoir~~ d'être tangentes ~~en $n+\nu-1$ pts à des courbes~~ à des unions, données, en $n+\nu-1$ ~~points~~ éléments variables ; les courbes du syst hom. pouvant aussi être tangentes à une même ~~courbe~~ (courbes ou points) (nation) ~~aussi~~ en plusieurs points,

et ~~une courbe pour~~ k contacts avec un point donné signifie que ce point doit être un p. ~~multi~~ fixe de multiplicité k.

Les ~~courbes~~ unionsfixes, auxquelles les courbes d'un système ~~homoloïde~~ doivent être tangentes, en $n+\nu-1$ points en tout, ne peuvent pas toutefois, être données arbitrairement. Et ce n'est pas même facile de voir et d'exprimer d'une façon tout-à-fait générale les conditions auxquelles ces courbes fixes doivent satisfaire.

b) oui, a) no

J'en vais donner un exemple.

Ce sont de représentations, dont je vais parler bientôt, qui permettent d'exprimer ces propriétés sous une forme plus simple

Par rapport aux ~~Les~~ ~~Dans~~ les transf de contact birat, le système ∞^2 des points du plan et le système des droites ~~doivent~~ ~~sont~~ aussi deux système homoloïdes particuliers ($\nu=1, n=0$; $n=1, \nu=0$) ($n+\nu-1=0$).

Dans une transf de contact birat, à un système homoloïde correspond toujours un système hom. La transf ~~[illegible]~~ est complètement déterminée si l'on donne arbitrairement 2 systh homoloïdes correspondants, et la correspondance birat entre ceux-ci comme comme systèmes rationnels à 2 dim. Si φ et φ' sont 2 courbes correspondantes, pour chaque élément $\underline{\underline{e}}$ de φ ~~de~~ il y a une seule courbe

une position unie

φ_0 du système ~~dont~~ ∞^2 voisine ~~proche~~ à φ dont un élément soit en position unie avec $\underline{e}$, en dehors d'éléments fixes de φ; la courbe correspondante φ_0', complètement déterminée, aura aussi un seul élément qui soit en position unie avec un élément $\underline{e}'$ de φ', abstraction faite aussi d'éléments fixes de φ'; et la correspondance entre les 2 plans comme systèmes ∞^3 d'éléments est ainsi tout-à-fait déterminée.

Le système ∞^3 des éléments d'un plan peut être à son tour représenté birationnellement sur les points de l'espace à 3 dim, ou d'une autre variété rationnelle à 3 dim. Aux ~~syst~~ ~~courbes~~ unions du plan (courbes, droites, points) correspondront des ~~courbes~~ de l'espace — ~~pas~~ des courbes particulières, pas quelconques —; et aux systèmes homoloïdes des congruences du 1er ordre de ces courbes; aux ~~cor~~ unions de contact des syst. homl, des directrices de ces congruences

Ces représentations peuvent être utiles dans les recherches sur les syst. hom. du plan.

Une représentation sur l'espace à 3 dim [1] a déjà été donnée par Lie; et c'est justement une représ. birat., ~~que~~ bien que cela n'avait pour lui aucune importance. En indiquant par $x\ y\ z$ les coord. cartésiennes dans l'espace, et par ξ, η, p les coord. d'un élément du plan, je pose:

[1] (même 2, mais je me bornerai à parler d'une seule)

$$x = \xi \qquad y = \tfrac{1}{2} p \qquad z = \eta - \tfrac{1}{2} p \xi$$

d'où:

$$\xi = x \qquad \eta = z + xy \qquad p = 2y$$

L'équation de la position unie $d\eta - p\,d\xi = 0$ devient

$dz + x\,dy + y\,dx - 2y\,dx = dz + x\,dy - y\,dx = 0$. Aux unions dans le plan correspondent dans l'espace les courbes intégrales de cette éq. de Pfaff; ce sont, avant tout, ~~dont~~ des courbes les tangentes, en chaque point donné, sont dans un même plan. Parmi ces lignes il y a ∞^3 lignes droites; les droites $\begin{matrix} x = mz + p \\ y = nz + q \end{matrix}$ pour lesquelles $mq - np = 1$, c. à d. les droites d'un complexe linéaire; ~~par~~ chaque point, sans exception, ~~passent~~ appart. à ∞^1 de ces droites, formant un faisceau. Il s'agit donc des ~~lignes~~ courbes dont toutes les tangentes appartiennent à ce compl. lin., et que l'on appelle tout court les courbes du complexe. Ce sont des courbes ayant des propriétés bien connues, simples, et au même temps intéressantes; E. Picard s'en est aussi occupé.

$$dz + (mz + p)\,n\,dz - (nz + q)\,m\,dz = 0$$

$$\text{dist}\ z r . \text{tg}\ z z = \text{cost}$$

Non seulement les tangentes de ces courbes sont des droites du complexe; mais aussi le plan osculateur en tout point d'une de ces courbes est le plan des ∞^1 droites du complexe passant par ce point. Et comme plan et point se correspondent dans une *polarité* dans l'espace, une *polarité nulle* $(z'-z\mp xy'-x'y=)_0$ ce sont des courbes *autoréciproques*, dont chaque singularité est autoréciproque; dont l'ordre n, s'il s'agit de C. alg., est égal au nombre des plans oscul. passant par un point donné]]c.à.d. à la *classe*; en particulier, si l'on prend les intersections d'une de ces courbes avec un plan π, les plans oscul. à la courbe en ces points passeront tous par un même point appartenant aussi à π.

Aux syst. homaloïdes dans le plan, composés de courbes d'ordre n et classe ν, corresp. des ~~courbes gauches~~ congruences du 1^er ordre de courbes gauches d'ordre $n+\nu$, appartenant à un même complexe linéaire; aux unions tangentes aux courbes du syst. homal., des courbes *directrices* de la congruence, et qui sont aussi des courbes du complexe, rencontrées par les courbes de la congr. en $n+\nu-1$ points.

Cette correspondance birat. entre le système des éléments du plan et les points de l'espace a toutefois des éléments exceptionnels, dont le corresp. est indéterminé;] cela tient au fait que les 2 systèmes ∞^3 diffèrent au point de vue topologique]et cela complique un peu la recherche des congruences des courbes du complexe.

Mais ~~on peut~~ il existe aussi une V. à 3 dim., assez simple, ~~qui peut~~ pouvant être rapportée au système des éléments d'un plan *projectif*, birationnellement sans exceptions.

Je vais partir de la considération de 2 plans, dans lesquels je prends des coord. π homog. $x_1\ x_2\ x_3,\ u_1\ u_2\ u_3$. Je forme les produits $\underline{X_{ik}=x_i u_k}$, au nombre de 9, homogènes, et dépendant en réalité de 4 paramètres. Les X_{ik} peuvent être considérées comme coordonnées π homog. dans un espace S_8 ; ~~et,~~ en faisant varier les 4 paramètres, on a dans cet espace ∞^4 points (X_{ik}) ~~en corres~~ — une variété algébrique à 4 dim. = M_4^6 = en corresp. biunit. sans exception avec le système des „couples de points des deux plans" considérés.

C'est une des Variétés de C. Segre. ~~Au lieu~~ Aux couples formées par un point fixe de l'un des deux plans et un point tout-à-fait variable de l'autre correspondent dans M_4^6 les points d'un plan : ~~lors~~ il y a pourtant sur M deux systèmes ∞^2 de plans, tels que 2 plans du même système ne se rencontrent jamais, tandis que 2 plans appart. aux 2 différents syst. ont toujours un point en commun. — Au lieu de considérer le x et les u comme coord. des points de 2 ~~dif~~ plans diff. nous ~~pouvons~~ allons les considérer comme coord. de point et de droite dans un même plan ; le M représentera alors l'ensemble des éléments = point et droite = d'un même plan. — Nos éléments, pour les transf. de contact, sont les ensembles d'un point et d'une droite passant par ce point, donc :

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

c.à.d.

$$X_{11} + X_{22} + X_{33} = 0$$

Les éléments „point-droite" qui nous intéressent sont donc représentés sans exception par les points d'une M_3^6 de S_7, section hyperplane de la M_4^6. $M_3^6 = M$

C'est une variété qui déjà rencontrée par Enriques il y a presque 50 ans, et étudiée dans toutes ses ~~par~~ détails par Scorza en 1908. Son importance pour les recherches sur les transf. de contact dans le plan a été signalée tout récemment par Severi (1940) ; elle avait été aussi envisagée dans un Mémoire de M. Beck-Born (M. Z. 42, 1937), mais peut-être sans en mettre en évidence ~~comprendre~~ toute la portée.

Les 2 représentations des éléments du plan, sur l'espace S_3 d'après Lie, et sur la M_3^6 sont aussi dans une relation très simple : ~~elles se déduisent~~ celle-ci donne lieu exactement à l'autre par une projection convenable de la M_3^6 sur S_3.

Aux unions dans le plan correspondent sur M des courbes, dont les tangentes en un même point quelconque sont aussi dans un même plan (courbes principales, plans principaux). A un système homaloïde de courbes d'ordre n et de classe ν, une congruence

Ω du 1^er^ ordre de courbes rationnelles, d'ordre n+ν, avec des directrices, aussi courbes prin et ration qu'elles rencontrent en n+ν-1 points en tout. En particulier, aux points et aux droites du plan, deux congruences de droites, sections des plans de la M_4^6 de Segre (sans directrices). En chaque point de M, le plan principal est pourtant le plan des deux droites passant par ce point.

Dans un plan (projectif), 2 points appartiennent toujours à une même droite, 2 droites à un même point. Conséquemment, sur M il y a toujours une droite de chacune des 2 congruences rencontrant deux droites données de l'autre congruence. Plus généralement, pour chaque congruence Ω il en existe une infinité d'autres telles qu'il y a une seule courbe de chacune des 2 rencontrant 2 courbes données de l'autre; cette notion de congruences conjuguées s'est montrée très importante.

1) Concernant les directrices de 2 congruences conjuguées :

Deux congruences conjuguées Ω Ω' non composées de droites ont toujours un certain nombre de directrices communes; en plus :

a) ou bien l'une Ω n'a absolument pas d'autres directrices, et l'autre Ω' a encore comme directrices un certain nombre de courbes de Ω;

b) ou bien Ω, Ω' se composent de courbes du même ordre n+ν; elles ont un faisceau (∞') de courbes communes; et chacune d'elles a une seule directrice en plus des directrices communes, appartenant ~~aux 2 cong et~~ au faisceau nommé, et rencontrant les courbes de la congruence en un seul point.

2) Aux transf. de Cremona du plan pointillé et réglé corresp par M des transf principales, transforment en elle-même l'une ou l'autre des 2 congr. de droites. Par un produit de ces transf on peut ~~toujours~~ parvenir ~~aux cong~~ à toute congruence Ω présentant le cas a) de ci-dessus ; mais pas toujours à celles qui sont dans le cas b). (transf dans A et B alternées)

3) Les congruences Ω du cas a) peuvent être rapportées birat sans exceptions aux point d'un plan ; les autres aux points d'un cone du 2nd ordre.