Les Surfaces du 4ème ordre

1. Dans ma dernière communication j'ai donné un aperçu général sur les surfaces du 3ème ordre ; ce soir je vais parler des surfaces F^4 du 4ème ordre, surtout de quelques surfaces ~~du~~ particulières de cet 4ème ordre ~~particulièrement intéressantes~~. Tandis que pour les surfaces du 3ème ordre il y a des questions ~~importantes~~ générales et intéressantes concernant toutes ces surfaces ~~en général~~ ~~celle~~ la configuration des 27 droites, et celle du pentaèdre – il n'y a pas ~~grand~~ beaucoup à dire ~~quant à~~ sur les ~~aux~~ propriétés générales des surfaces du 4ème ordre ~~ou d'un ordre plus élevé~~, en dehors de ce que ~~l'on peut dire~~ concerne toutes les surfaces algébriques d'un ordre quelconque n. Déjà Noether a remarqué qu'une surface générale du 4ème ordre ~~ne~~ contient seulement des lignes algébriques d'ordre $4n$ ~~[et, si elles n'ont pas de points doubles, de genre $2n^3+1$]~~ qui en sont l'intersection complète avec des surfaces d'ordre n. Donc pas de droites, pas de coniques, etc.

Il y a bien des surfaces du 4ème ordre contenant une ou plusieurs ou même un nombre infini de droites ou de coniques, des surfaces réglées – mais ce sont toujours des surfaces particulières, c. à. d. des surfaces dépendant d'un nombre de paramètres plus petit que la surface générale ~~pour lesquelles les coefficients de l'équations satisfont à une ou plusieurs conditions $f(a, b, \ldots) = 0$~~. L'intérêt pour les surfaces ~~du 4ème ordre~~ se concentre pourtant surtout sur ces ~~des~~ ~~certaines~~ surfaces particulières ~~ou des types particuliers de surfaces part.~~ Dans ~~l'art.~~ l'Encycl. allemande, l'article ~~de~~ W. F. Meyer sur les surfaces du 4ème ordre, comprenant environ 250 pg., se rapporte pour 9/10 à des surfaces particulières. Et ce sont surtout des surfaces ayant un ou plusieurs points doubles, ou même ~~ou bien un point ou une droite~~ 3ple une ligne double. ~~Parmi ces dernières il y a aussi des surfaces réglées, et des surfaces contenant un faisceau de coniques, elles ont formé aussi l'objet de recherches mais des surfaces réglées~~ ~~mais je n'en parlerai pas ce soir~~. Quant à la forme de ces surfaces, j'en donnerai quelques exemples. (Elles peuvent avoir des nappes s'étendant à l'∞) Mais comme il s'agit de surfaces d'ordre pair, ~~elles~~ les surfaces réelles peuvent aussi être limitées à une région finie de l'espace, ~~pour quelques-unes j'aurai aussi l'occasion de vous donner une idée de leur forme~~.

Une surface générale d'ordre n est de classe $n(n-1)^2$; c. a. d. par une droite donnée on peut conduire à ~~la~~ cette surface $n(n-1)^2$ plans tangents. L'ég. de la surface étant

$$F(x_1 x_2 x_3 x_4) = F(x) = 0$$

l'équation du plan tg en un point (x') est

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)' x_1 + \cdots = 0$$

Autrement dit, si (x) est un point donné, et (x') le point de contact de la surface avec un plan tg passant par (x), (x') devra satisfaire à l'éq. (1) et à l'éq. de la surface :

$$F(x') = 0 .$$

Si le plan tg doit passer par une droite donnée, c.à.d. ~~pour~~ 2 points (x) (y) de cette droite, (x') devra satisfaire aux trois éq.

$$(2) \qquad F(x') = 0 \qquad \left(\frac{dF}{dx_1}\right)' x_1 + \cdots = 0 \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)' y_1 + \cdots = 0$$

qui ont bien $n(n-1)^2$ solutions [en général].

Une surface générale du 4ème ordre est pourtant de classe 36.

~~Mais chaque point double de la surface à ces~~

Mais si la surface a ~~quelques~~ des points doubles, les coordonnées ~~d'un~~ de ces points doivent satisfaire à toutes les éq. $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$.

Par conséquent chaque point double isolé apporte à la classe une diminution de 2 unités au moins ; et une droite ou une conique double une diminution encore plus grande. Une surface du 4ème ordre peut avoir jusqu'à 16 points doubles isolés ; la classe se réduit alors à $36 - 16 \cdot 2 = 4$: c'est la surface de Kummer, du 4ème ordre et de la 4ème classe, dont je parlerai tout à l'heure.

L'éq. d'une surface du 4ème ordre ayant l'origine comme point double est

$$(3) \qquad f_2 + f_3 + f_4 = 0$$

où $f_2\, f_3\, f_4$ sont des polynomes homogènes des degrés 2 . 3 . 4 en $x\, y\, z$. $f_2 = 0$ est le cone tangent au point double, il peut se composer de 2 plans - point biplanaire - ou bien se réduire à un plan double - point uniplanaire ; $f_2 =$ carré d'un polynôme linéaire.

Une surface du 4ème ordre, même ayant un ou plusieurs points doubles isolés, n'est pas en général rationnelle (unicursale) c.à.d. on ne peut pas la rapporter biunivoquement ~~sur~~ à un plan, comme les surfaces du 2nd ou du 3ème ordre. Cela arrive seulement quand elle a une ligne double, ou ~~bien~~ un point triple, ou bien quelque point double particulier. ~~Un exemple assez~~ Ce sont des cas qui ont été ~~déterminés~~ étudiés surtout par Noether. Le point double doit être avant tout uniplanaire et cela ne suffit pas [de surface rationnelle avec un seul point double] encore. L'exemple le plus simple est donné par la surface

$$(4) \qquad X^2 + X\varphi_2 + \varphi_4 = 0$$

On appelle „tacnode" ~~pour~~ d'une courbe plane un point de contact de 2 branches de cette courbe  ; c'est la limite de 2 points doubles  qui se sont rapprochés indéfiniment. Pour une surface, un tacnode est un point de contact de 2 différentes nappes; et c'est justement cette singularité que notre surface présente à l'origine, le plan $X=0$ étant son plan tg. Ce plan coupe la surface selon 4 droites ~~passant~~ par le point de contact. C'est un point double auquel ~~sont~~ est infiniment ~~proches~~ voisin, dans toutes les directions sur la surface, ~~autant de~~ un autre point double.
La représentation de cette surface sur le plan a été donnée par Noether et aussi par Cremona.

Le cône tangent que l'on peut mener à une F^4 d'un de ses points doubles est en général du 6ème ordre ; pour la surface (3):

$$f_3^2 - 4 f_2 f_4 = 0$$

Il a comme droites doubles toutes les droites joignant le point double considéré aux autres, s'il y en a. Pour la surface (4), en faisant abstraction du plan $X=0$ compté 2 fois, on a seulement un cône du 4ème ordre :

$$\varphi_2^2 - 4\varphi_4 = 0 \;;$$

et c'est ~~cela~~ là la véritable raison de la rationalité de la surface dans ce cas – la „courbe de diramation" du plan double que l'on obtient comme projection de la surface se réduisant du 6ème ordre au 4ème.

On peut imposer à une surface du $4^{ème}$ ordre d'avoir des points doubles isolés en des points donnés arbitrairement ; mais seulement en 7 points au plus. S'il y en a de plus, ces points ne peuvent être tout-à-fait arbitraires ; ils forment toujours une configuration particulière. – Comme ~~un~~ exemple, assez simple, ~~à être précisé,~~ je mentionne le symmétroïde de Cayley c.à.d. la surface représentée en égalant à zéro un déterminant symétrique du $4^{ème}$ ordre :

$$|a_{ik}| = 0 \qquad i,k = 1.2.3.4 \quad a_{ik} = a_{ki}$$

dont les éléments a_{ik} sont des fonctions linéaires quelconques des coordonnées. Elle a 10 points doubles, dont les coordonnées ont la propriété de rendre égales à zéro aussi tous les mineurs du $3^{ème}$ ordre du déterminant $|a_{ik}|$ ~~...~~ (C'est une question d'algèbre ~~sur laquelle je ne~~ dépendant ~~des~~ ~~de la possibilité d'~~ des expressions que l'on peut donner des dérivées $\frac{\partial}{\partial x_i}|a_{ik}|$ par les dits mineurs) ~~...~~ Le cone tangent mené à la surface par un des 10 points doubles est composé de 2 cones du $3^{ème}$ ordre, passant tous les deux par les 9 droites joignant ce point double aux autres. La ~~S~~surface Hessienne d'une surface ~~...~~ du $3^{ème}$ ordre $f(x) = 0$, c.à.d. $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right| = 0$, est justement un symétroïde.

7 sans p. doubles

Sans m'arrêter sur les autres ~~cas de~~ F^4 ayant jusqu'à 15 p. doubles, je viens maintenant à la surface de Kummer,

(1810-93)

qui a 16 points doubles. J'ai déjà dit qu'elle est du $4^{ème}$ ordre et de la $4^{ème}$ classe. C'est aussi une surface dont toutes les propriétés tous les caractères se correspondent par dualité ; de même qu'elle a 16 points doubles, elle a aussi 16 plans doubles. Comme les p.d. sont des points ~~ayant~~ avec une infinité de plans tangents, enveloppant un cone du 2^{nd} ordre, c.à.d. de classe 2, ces plans ~~seront des plans~~ chacun de tangents à la F^4 ~~dans tous~~ en une infinité de points, dont le lieu sera une courbe du 2^{nd} ordre, c.à.d.

réciproque par rapport à une quadrique [dans plusieurs manières différentes] ; ainsi une conique. Ce sont des plans rencontrant la F^4 en des courbes se réduisant à une conique double. ~~S'il s'agit du~~ soit plan $A_1 = 0$ un de ~~ces~~ ces plans ~~est~~ tangent à la surface selon la conique $A_1 = A_2 = 0$; l'équation de la surface ~~pour~~ F^4 pourra s'écrire sous la forme:

$$A_1 A_3 - A_2^2 = 0$$

A_3 étant un polynome du $3^{\text{ème}}$ degré. Les 6 points $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ seront des points doubles de la F^4, donc ~~c.à.d.~~ chacun des 16 plans doubles contient 6 points doubles; et par dualité chaque point double appartient aussi à 6 plans doubles. Autrement dit, le cone tangent à la F^4 mené ~~p~~ d'un des points doubles se compose de 6 [plans pris] parmi les plans doubles; les 15 droites doubles ~~que~~ de ce cone sont les 15 intersections de ces 6 plans 2 à 2. ~~C'est pourtant une~~ On a ~~Cette surfa~~ configuration tout-à-fait particulière de 16 points ~~et de~~ 16 plans (chacun de ces éléments appartenant à 6 éléments de l'autre espèce) de 120 droites ~~dont chacune~~ passe par 2 ~~des~~ 16 points et est l'intersection de 2 des 16 plans). Les 16 points et les 16 plans peuvent être tous réels ~~et la surface ne s'étend pas à l'infini~~.

~~3 paramètres~~

~~Hudson 160 quart. surf.~~

D'autres propriétés intéressantes de cette surface sont les 2 suivantes:

a) Elle contient seulement des courbes d'ordre pair $2n$. Et il y a ~~toujours~~ des surfaces d'ordre n tangentes à la F^4 selon ~~certaines de~~ des C^{2n}.

b) Le rapport anharmonique des 4 intersections de cette surface avec une droite quelconque est égal au rapp. anharm. de 4 plans tangents de la surface passant par cette même droite.

Cette surface a été rencontrée par Kummer ~~dans ses~~, Plücker et d'autres (1866-70) à l'occasion de ~~dans ses des~~ recherches sur certains systèmes de droites; comme surfaces singulière des complexes (∞^3) du 2^{nd} degré, et comme surfaces focale de systèmes ∞^2 de droites. Je me bornerai à dire que les droites tangentes doubles de la surface, à part les 16 plans doubles, se répartissent ~~dans~~ entre 6 différents systèmes $[\infty^2]$, dont elle est la surface focale commune.

(Klein en parle continuellement dans ses mémoires sur les géom. réglées 1870-72)

La surface de Kummer est aussi une surface hyperelliptique, c-à-d. ~~que~~ les coordonnées ~~d'un~~ de ses points peuvent s'exprimer par des fonctions quadruplement périodiques de 2 variables

d'aure périodes près,
~~des valeurs différant seulement par~~

indépendantes u, v – chaque point de la surface correspondant toutefois, ~~[en dehors des périodes]~~ à deux couples de valeurs. Les surfaces hyperell. ont été étudiées premièrement par Picard et Humbert (1883-94), ensuite par les géomètres Italiens Enriques et Severi, Bagnera et De-Franchis (19 16 fols δ ($p=2$) – dimp...

$\perp$ (Propriété déjà remarquée par Klein (1872)).

Surf. de Weddle est aussi une surf. hyperell. – lieux vertice coni per 6 punti – 6p.s. – 15+10 rette – C_3 – (Chasles 1837, Losola (?)).

Un cas particulier, ~~un point de~~ de la surface de Kummer, au point de vue métrique, dont la connaissance remonte à Fresnel (1827) est la surface d'onde des cristaux biaxes. $\perp$

deux ondes qui se propagent sur la même droite, avec vitesses diff.

On peut la construire très simplement, à partir d'un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad a>b>c$$

Lieu géom. des points jusqu'auxquels la lumière se propage dans le ... à partir du centre dans le même temps

~~Les plans $\perp$ à ces vecteurs aux leurs extrémités enveloppent la surface des vitesses~~

= Wellengeschwindigkeitsfläche = Normalenfläche

podaria della sup. d'onde (Strahlenfläche) = che a sua volta è la reciproca della „surface des indices" (Briot) risp. alla sfera $x^2+y^2+z^2=c^2$

(Drude – Ball, Précis d'optique)

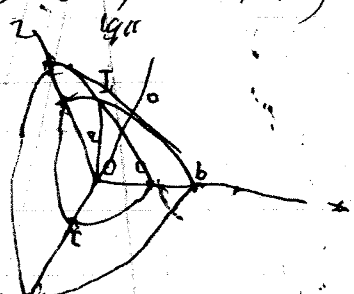
et en portant sur chaque diamètre, à partir du centre, et de chaque côté, deux longueurs égales au demi-axes de l'ellipse intersection avec le plan diamétral perpendiculaire ~~$\perp$~~ à ce diamètre.

L'équation de cette surface, en posant $x^2+y^2+z^2=\rho^2$, est

$$\frac{x^2}{\rho^2-a^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1$$

(les termes du 6ème degré disparaissent)

La surface se compose de 2 nappes, mais ayant 4 points communs, qui sont des points doubles réels. En faisant tourner le plan xy autour de l'axe y jusqu'à coïncider avec le plan yz, on voit qu'il y a deux plans passant par l'axe y et symétriques par rapport aux autres axes, ~~qui~~ rencontrant l'ellipsoïde en des cercles; l'on obtient ainsi les 4 p. doubles réels, dans le plan xz. Les autres 12 points doubles sont imaginaires, dans les autres plans coordonnés et à l'infini.



Plans principaux – Cercle + ellipse

$n=\frac{c}{v}$ $\quad \varepsilon$(cost. dielett.) $=n^2$

~~[illegible]~~
Le plan xz rencontre la surface selon le cercle $x^2+z^2=b^2$ et l'ellipse $\frac{x^2}{c^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$. Ces deux courbes, passant toutes les deux par les 4 points doubles, ont aussi 4 tangentes réelles communes; les plans normales à xz selon ces 4 droites sont des plans doubles réels: les autres 12 sont imaginaires.

2 rayons lumineux pour une $\perp$ donnée à l'onde incidente

Les points et ces plans ~~et ces plans~~ singuliers sont des points où la surface a une infinité de plans tangents, ~~par conséquent aussi une infinité~~ ou des plan tangents avec une

~~de normales~~, infinité de points de contact. Ils donnent lieu, en physique, au phénomène de la réfraction conique, extérieure et intérieure ~~et intérieure~~. (Hamilton (1832) Lloyd (1833)) 13 lignes
Des rayons de lumière arrivant à un cristal biaxe en direction telle que la ~~perpendiculaire~~ normale ~~à un des plans singuliers~~ à l'onde réfractée possède la direction d'une axe optique, (Binormale (axes optiques, Fr. Neumann) 1798-1895)
sont réfractés ~~aux points de contact de ce plan~~ selon ~~les~~ génératrices d'un cone (réfr. conique intérieure); Un rayon interne au cristal ~~qui~~ arrivant à un point ~~sur~~ double, où la surface a une infinité de plans tangents, et par conséquent une infinité des normales, donne origine à un cone de rayon réfractés. ~~(Hamilton des cristaux)~~

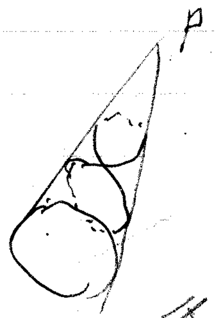
Je vais maintenant parler des F^e ayant une ligne de points doubles; c.à d. une droite double, ou une conique double. Si il y a une courbe double gauche du 3^ème ordre, la surface est réglée.

Une surface du 4^ème ordre ayant une droite double est rencontrée par les plans passant par cette droite selon un faisceau de coniques, dont quelqu'unes (en général 8) sont composées de 2 droites. Cette surface est en général de classe 20; mais elle peut avoir en plus aussi des points doubles isolés ~~jusqu'à~~ 8, au plus — et la classe se reduit alors à 4.

Sur ~~Les~~ surfaces avec une conique double ~~qui peut aussi être composée de 2 droites~~ il y a une litterature des plus riches, d'autant plus qu'il faut y comprendre toutes les cyclides, ayant comme conique double le cercle absolu. Ces surfaces ont ~~contiennent~~ 5 faisceaux de coniques, ~~et sont~~ en général de classe 12; mais elles aussi peuvent avoir des p. d. isolés en plus, jusqu'à 4; et leurs classe se reduit alors aussi à 4. (Kummer — Clebsch (1863-68))

(Dupin (1822) ici encore il s'agit de cas particuliers ~~cas de~~ hasti-métriques qui ont précédé la théorie générale)

Ces surfaces peuvent aussi s'obtenir ~~de~~ très simplement comme projections de surfaces, aussi du 4^ème ordre, de l'espace à 4 dimensions; Comme il arrive toujours, ~~leurs~~ les propriétés ~~de~~ ces dernières surfaces sont plus simples à établir que celles de leurs projections. L'intersection de 2 quadriques de l'espace à 4 dim. est justement une surface du 4ième ordre. Prenons comme centre de la projection un point P appartenant à l'une des deux quadriques et non à l'autre. L'espace à 3 dim. tangent en P à la première quadrique rencontrera celle-ci en un cône du 2ème ordre, dont P sera le sommet. La deuxième quadrique rencontrera ce cône en une courbe dont la projection sera une conique double. Les F^4 ayant une conique double peuvent s'obtenir toutes par cette voie. (C. Segre, Math. Ann. t. 24)



Francia 1860-75

Les cyclides ont été étudiées particulièrement par Darboux (Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques 1873) et par Moutard (surf. anallagmatiques, c. à d. transformées en elles-mêmes par des transf. par rayons réciproques (1864)). ~~On peut les obtenir comme enveloppes de sphères~~. On peut ~~aussi~~ les étudier ~~par~~ en faisant usage de coordonnées pentasphériques.

Elles se présentent aussi ~~comme~~ Enveloppe de ∞^1 sphères, en 2 différentes manières et

~~La cyclide de Dupin remonte à 1822 et a été trouvée par Dupin~~ a la propriété, qui fut justement l'objet de la recherche de Dupin, d'avoir ~~des cercles comme~~ lignes de courbure des cercles. Elle a 4 p. s. isolés, dont 2 au plus réels. Le tore est un cas encore plus particulier de la cyclide de Dupin; ses lignes de courbure sont, comme dans toute surface de révolution, les méridiens et les cercles parallèles; les points doubles sont les points-base de ces 2 faisceaux de cercles - ceux des parallèles dans l'entourage de 2 points du cercle absolu. On voit aussi très bien que le tore est l'enveloppe de deux systèmes ∞^1 de sphères, tangentes au tore le long des méridiens et des parallèles.

(surf. engendrée par la rotation d'un cercle autour d'une droite de son plan)

Une surface du 4ème ordre peut avoir aussi ~~un~~ point triple.
En prenant ce point comme origine des coordonnées O, l'éq. de la surface aura la forme :

$$f_3 + f_4 = 0$$

f_3, f_4 étant des polynômes homogènes de degrés 3, 4 en x, y, z; $f_3 = 0$ est le cone tg au point triple.
La surface contient les droites $f_3 = f_4 = 0$, en général au nombre de 12. Elle est rationnelle, pouvant être rapportée biunivoquement à la gerbe des droites passant par O, et par conséquent à un plan quelconque π ne passant pas par O, comme section de cette gerbe. Les sections planes de la surface sont projetées de O sur π en des courbes du 4ème ordre. Si nous rendons homogène l'éq. de la surface :

$$(1) \qquad x_4 f_3 + f_4 = 0$$

f_3 et f_4 étant homogènes par rapport aux $x_1 x_2 x_3$, l'intersection avec le plan

$$(2) \qquad \Sigma a_i x_i = 0$$

courbe du 4me ordre

sera projetée sur $x_4 = 0$ comme plan π en une C^4 dont l'éq. s'obtiendra par l'élimination de x_4 entre les 2 éq. (1) et (2).
Les courbes contiennent les 4 paramètres homogènes a_i, et passent ~~pas~~ par les 12 points intersections de π avec les 12 droites nommées.

Une F^4 avec un point triple O peut avoir aussi une, deux, ou même 3 droites doubles passant par ~~ces~~ ce point. Dans ce dernier cas on a la surface de Steiner (1796-1863). Il paraît que Steiner l'a ~~étudiée~~ considérée en 1844, pendant un séjour à Rome, et qu'il l'appellait „die ~~Römische~~ Römer Fläche" ; mais il n'a rien publié sur ce sujet;
~~(Spinto, circa, il periodo Romano di Steiner)~~

Il ~~en avait donné~~ était parti d'une génér. géom. d'après laquelle, peut-être, il n'était pas sûr de l'ordre de la surface ainsi définie. Il en a ~~donné fait~~ seulement ~~quelques communications~~ parlé avec d'autres mathématiciens, et c'est d'après cela que, à la mort de Steiner, en 1863, Weierstrass, Kummer et Schröter en ont parlé à leur tour à l'Acad. de Berlin, et W. en a publié ensuite plus tard, dans les Ges. W. de Steiner, un résumé „nach einer mündlichen Mitteilung".

Immédiatement après, Clebsch, Cremona, Cayley

Cette surface a été l'objet d'autres recherches surtout par Kummer,

La ~~plus~~ propriété la plus intéressante de cette surface ~~qui a été remarquée par Steiner et complétée plus tard par Kronecker et Castelnuovo~~, est d'être rencontrée par tous ses plans tangents en des courbes – naturellement du 4ème ordre – composées de 2 coniques. En effet, chacune de ces courbes a 4 points doubles, aux intersections avec les 3 droites doubles, et au point de contact, d'où la propriété énoncée s'ensuit immédiatement. 1

1 de §

1 La surface contient pourtant une double infinité de C^3, et c'est la seule F^4 ayant cette propriété.

Picard a aussi démontré que c'est la seule surface non réglée à sections universelles. D'autres compléments ♀

♀ aux propriétés de cette surface ont été apportés par Kronecker et Castelnuovo

En tout point d'une des droites doubles la F^4 a 2 plans tangents passant par cette droite ; mais ces 2 plans, même si la surface est réelle, peuvent être imaginaires conjugués (~~comme pour les R^3~~) ; c.à.d. il peut arriver que les nappes réelles de la surface passent seulement par des segments finis de chacune des 3 droites.

~~La surface ne contient que des courbes d'ordre pair. Les droites doubles sont des coniques particulières.~~

~~La surface est de la troisième classe ; c.à.d. par une droite donnée on peut mener à la surface 3 plans tangents.~~

L'équation de la surface peut ~~s'é~~ recevoir la forme (1) ; mais $f_3=0$, c.à.d. le cône tangent au point triple, est composé des 3 plans joignant 2 à 2 les 3 droites doubles ; et le cône $f_4=0$ a aussi ces mêmes 3 droites doubles. ~~On a pourtant~~ Les 12 droites $f_3=f_4=0$ sont absorbées par les 3 droites doubles. ♀

~~$x_1x_2x_3x_4 = x_1^2(x_2-x_3)^2 + \dots$~~

♀ de sorte que l'équation peut s'écrire :
$x_1x_2x_3x_4 = x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2$

Dans la projection de la surface du point triple sur le plan $x_4=0$, aux C^4 sections planes de la surface correspondent ∞^3 C^4 ayant les 3 points (1,0,0)... comme points doubles, aux coniques, les ∞^2 coniques de ce plan passant par ces mêmes points. Par une transf. quadratique dans le plan $x_4=0$

on peut transformer ces ∞^2 coniques dans les droites, les ∞^3 C^4 en des coniques; et l'on parvient à une représentation analytique paramétrique très simple de la surface. Considérons dans le plan 4 droites $t_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, côtés d'un quadrilatère; les polynomes t_i satisferont à une relation linéaire, à laquelle, en disposant des facteurs arbitraires dans les t_i, on peut ~~tou~~ toujours donner la forme :

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$$

Une surface de Steiner peut pourtant se représenter par les équations paramétriques :

$$\rho x_i = t_i^2$$

et l'équation de la surface sera :

$$\Sigma \sqrt{x_i} = 0$$

Aux sections planes de la surface correspondent les coniques $\Sigma a_i t_i^2 = 0$; aux coniques, les droites. ~~Par 2 pour~~ La surface contient seulement des courbes d'ordre pair; puisque leurs images dans le plan ~~ne pas~~ rencontrent les C^2 en un nombre pair de points. Les coniques de la surface ont la propriété que par 2 points de la surface il en passe toujours une seule, comme pour les droites du plan.

~~La surf. Aux 4 droites $t_i = 0$ correspondent~~

Parmi les sections planes de la surface il y a les 4 $t_i^2 = 0$, c.à.d. 4 coniques doubles : ce sont 4 plans tangents à la surface ~~s~~ le long des coniques. Aux ∞^1 coniques du plan tangentes aux 4 droites $t_i = 0$ (qui n'appartiennent pas au système $\Sigma a_i t_i^2 = 0$, images des sections planes) correspondent des courbes gauches ~~des~~ unicursales du 4ème ordre, qui sont les lignes asymptotiques de la surface (Clebsch, Cremona 1864) voir Cremona Oeuvres, t. II p. 155, 389)

La surface de Steiner est de la troisième classe; c. à. d. par une droite donnée g ~~peut~~ passent 3 plans tangents à la surface. Si nous indiquons par $A_1 .. A_4$ les 4 points ~~où~~ où g rencontre la surface, ce sont les plans des couples de coniques passant resp

Le plan tangent à la surface au point (x') est

$$\sum \frac{x_i}{\sqrt{x'_i}} = 0$$

Il a donc les coordonnées $u_i = \frac{1}{\sqrt{x'_i}}$, qui doivent ~~pourtant~~ satisfaire à l'éq.

$$\sum \frac{1}{u_i} = 0$$

c.à.d.

$$u_1 u_2 u_3 + \cdots = 0$$

La surface réciproque est donc justement du $3^{\text{ème}}$ ordre, avec 4 p[oin]ts doubles.

les étant x_i égales à des expressions de 2^{nd} degré par rapport à 3 param. homog.

Si nous considérons dans le plan non seulement le système ∞^3 de coniques $\sum a_i t_i^2 = 0$, mais le système total ∞^5 de coniques:

$$(B) \qquad a_{11} y_1^2 + \cdots + a_{12} y_1 y_2 + \cdots = 0$$

et posons:

$$x_0 = y_1^2 \qquad \ldots \qquad x_5 = y_2 y_3$$

nous avons la représ. paramétrique d'une surface aussi du $4^{\text{ème}}$ ordre, de l'espace à 5 dim., la surface de Veronese (1884). Le fait que le système de C^2 $\sum a_i t_i^2 = 0$ est contenu dans le système (B) équivaut à l'autre que la surface de Steiner est une projection de la surface de Veronese.

entrevue par Cayley (1858) – On the curves which satisfy given conditions – Coll. Pap.

V Parmi les surfaces hyperelliptiques du 4^{me} ordre il faut aussi mentionner la surface de <u>Weddle</u> ; elle est le lieu des sommets des cônes du 2^d ordre passants par 6 points génériques donnés ; elle possède 6 points doubles dans le 6 points donnés, 25 droites (les 15 droites joignant les 6 points 2 à 2 et le 10 droites communes aux couples de plans par les 6 points) et passe par la cubique gauche déterminée par les 6 points doubles. Il s'agit d'une transformée* birationnelle de la surface de Kummer au moyen d'une transformation crémonienne de l'espace.

// Elle est le lieu des points jusqu'auxquels la lumière se propage à partir d'un centre donné dans le cristal à un temps donné.

$\top_{o}$ qui a demontré comme la surface de Steiner est la seule surface de S_3, en dehor des surfaces réglées, qui possède une ∞^2 de section planes réductibles.

Φ (comme il arrive aussi pour les surfaces cubiques réelles)