Lieber Herr College!

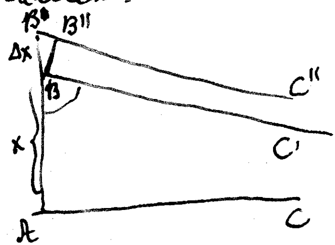
Ich danke sehr für das mir gesandte Buch, welches ich mit grossem Vergnügen durchlas.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich Ihnen einiges aus den Arbeiten mitteilen, welche ich (leider in ungarischer Sprache) über diese Angelegenheiten vor Jahren publiciert habe.

1). Eines der schönsten Sätze in Bolyai-s Appendix ist der Satz, dass in der abs. Geometrie die sphärische Geometrie gültig ist. Dieser Satz ist beinahe selbstverständlich. Nämlich man muss ja (nach Gauss, Riemann etc) an die Spitze einer jeden nichteuklidischen Geometrie die Hypothese stellen, dass im unendlichkleinen (an der Grenze) die eukl. Geom. gilt. Nun ist es bei einem Trieder gleichgültig, wo man an den Kanten die Winkel des Trieders misst. (S. Frischauf, wo es bewiesen ist). Folglich kann man die Winkel auch in der unendlichkleinen Umgebung der Spitze messen. Hier gilt die eukl. Geometrie. Diese Geometrie ist aber nichts anderes, als die sphärische Geom.

2). Wenn man einen entsprechenden Satz der sphärischen Trigonometrie (z. B.: $\sin\frac{1}{2}\Sigma = \frac{\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}$ Cagnoli'schen Satz) anwendet und den Mittelpunkt der Kugel ins unendliche rückt, dann wird $\varepsilon = 0$, womit der Bolyai'sche Satz, dass auf der F Fläche die eukl. Geom. gilt, bewiesen ist. Gleichzeitig der Satz von dass wenn zwei Linien einer u. derselben $\parallel$ sind, untereinander auch p$\parallel$ sind.

3. Eine neuartige Bestimmung des Parallelenwinkels habe ich gegeben. In grossen Zügen will ich es Ihnen mitteilen:



Bei B ist der Parallelenwinkel $\Pi(x)$, Bei B': $\Pi(x+\Delta x)$
$BB'' \perp B'C''$
so dass der Winkel $B'BC' = \Pi(BB'')$. ~~BB~~'' Der Winkel $B''BC' = \pi - \Pi(x) - (\frac{\pi}{2} - \Pi(x$ im eukl. Sinne gemessen (Mit ε kann man es pünktlicher machen) Also: $B''BC' = \frac{\pi}{2} + \Pi(x+\Delta x) - \Pi(x)$

Nun ist aber (wieder im unendlich kleinen eukl. gemessen)

$$B''BC' = \Pi(\Delta x . \sin \Pi(x+\Delta x))$$

* Monotonität vorausgesetzt:

$$\Pi(\Delta x \sin \Pi(x+\Delta x)) = \Pi(0) + \Delta x \sin \Pi(x+\Delta x) \cdot \Pi'(\xi)$$

$$0 < \xi < \Delta x \sin \Pi(x+\Delta x)$$

$\Pi(0) = \frac{\pi}{2}$, folglich:

$$\Delta x \sin \Pi(x+\Delta x)\, \Pi'(\xi) = \Pi(x+\Delta x) - \Pi(x)$$

$$\frac{\Pi(x+\Delta x) - \Pi(x)}{\Delta x} = \sin \Pi(x+\Delta x)\, \Pi'(\xi)$$

im limes.

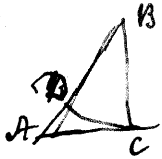
$$\Pi'(x) = \sin \Pi(x)$$

woraus $\cot \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{\frac{x}{k}}$

Mit Heranziehung der Gaussischen elementaren Bestimmung des ~~Inhaltes~~ Dreiecksinhaltes kann man diese Herleitung punktlicher machen.

Ich habe diese Herleitung deshalb gemacht, weil mir die Bestimmung des Parallelwinkels bei Bolyai ganz rätselhaft ist. Ich habe viel nachgedacht darüber, wie ~~er~~ Bolyai zu seiner Herleitung kommen konnte, habe sogar im 1912 in Heidelberg Stäckel gefragt. Er konnte auch keine Auskunft geben. Ich bestrebte mich immer hinter die Coulissen zu kommen bei den matematischen Gedanken. Bolyai blieb mir ein Rätsel. Sie würden mich sehr verbinden, wenn Sie das Rätsel lösen könnten, und die Lösung mir mitteilen wollten. Gewiss war ein Analogieschluss vor seinen Augen, aber welcher?

4. Ich habe k folgendermassen bestimmt:



ABC sei ein gleichschenkliges rechtwinkl. Dreieck. DC die Kreislinie.

$$\cot g\, \alpha = \cosh \frac{a}{k}$$

$CD = k\alpha \sinh \frac{a}{k}$ (als Kreislinie gemessen)

folglich: $\overline{CD}^2 = k^2\alpha^2(\cot g^2 \alpha - 1)$

Wenn wir nun AB so bewegen, dass es zu AC und BC parallell wird, dann wird CD zur L Linie

und $\overline{CD}^2 = \lim\limits_{\alpha \to 0} k^2\alpha^2(\cot g^2\alpha - 1) = k^2$.

(S. auch Engel Sächs Ber. 1898).

5. Ich will noch erwähnen, dass, wie Sie wissen, Wolfgang Bolyai in einer Abhandlung welche er an Gauss schickte, beweisen wollte, dass die aequidistante Linie eine Gerade ist. Natürlich war der Beweis falsch. Ich stellte die Frage, wann es in einer beliebigen Fläche die aequidistante geodetische Linie (auch der geod. Kreis) geodetische Linie sein kann. Die Antwort war, dass dies nur bei constanter

der Krümmung 0 vorkommen kann. Damit war bewiesen, dass der Beweis von Bolyai nicht glücken konnte.

6. Es ist einer der schönsten Sätze, dass im rechtwinkligen Dreieck

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \frac{O(2a)}{2\,O(a)}$$

Diesen Satz kann man leicht aus dem Sinussatz (angewandt auf ein gleichschenkliges Dreieck) ableiten. Das schöne ist, dass dieser Satz in der eucl. Geometrie, so wie auch in der sphärischen Geom. giltig ist. Schön ist, dass überhaupt $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = f(a)$ also nur von a abhängt. Ich habe viel darüber nachgedacht, wie diese Relation im allgemeinen Fall von geodetischen Dreiecken ausschauen kann. Vielleicht können Sie mir darüber Bescheid geben.

In Ihrem bibliografischen Verzeichnis habe ich de la Vallée Poussin's schöne Arbeit (Mathesis 1895) vermisst. Wenn diese Arbeit Ihnen unbekannt wäre, so möchte ~~wollte~~ ich Ihre Aufmerksamkeit darauf richten. ~~wollen~~ Nun habe ich aber Ihre Geduld sehr lange in Anspruch genommen. Es war mir aber ein Vergnügen mit Ihnen nach so langer Zeit wieder einmal sprechen zu können.

Jetzt kommen so viele Italiener nach Budapest. Vielleicht kommen Sie oder Ihr Sohn aus Leipzig nach Ungarn. In diesem Falle würde ich mich ungemein freuen Sie oder Ihre Familie bei mir zu sehen.

Mein Gesundheitszustand ist nicht so gut, dass ich zu Congressen fahren könnte, wo ich ~~[illegible]~~ mit Ihnen zusammen kommen könnte.

Vor 3 Jahren war ich in San-Remo mit meiner Frau, und vielleicht wird es möglich sein auch in diesem Winter dorthin oder anderswo auf der Riviera zu kommen, wo wir gut und nicht teuer leben könnten. Vielleicht treffen wir uns.

Mit vielen Grüssen Ihr

Prof. Dr E. Beke

Budapest II Ady Endre u. 26 1937 VI/19.