



CENTRO STUDI DI STORIA DELL'UNIVERSITÀ DI TORINO
Lezioni e Inediti di 'Maestri' dell'Ateneo Torinese

CORRADO SEGRE

LEZIONI INEDITE DI DUE CORSI UNIVERSITARI



Università degli Studi di Torino

CENTRO STUDI DI STORIA DELL'UNIVERSITÀ DI TORINO

Lezioni e Inediti di 'Maestri' dell'Ateneo Torinese



Corrado Segre nel 1889 (AccSciTo)

CENTRO STUDI DI STORIA DELL'UNIVERSITÀ DI TORINO

Lezioni e Inediti di 'Maestri' dell'Ateneo Torinese

5

Corrado Segre

Lezioni inedite di due corsi universitari

A cura di:

Alberto Conte, Livia Giacardi, Maria Anna Raspanti

Università degli Studi di Torino

CENTRO STUDI DI STORIA DELL'UNIVERSITÀ DI TORINO

Lezioni e Inediti di 'Maestri' dell'Ateneo Torinese

Proprietà riservata - *All Rights reserved*
ISBN: 978-88-909997-8-9

© Copyright 2020 Centro Studi di Storia dell'Università di Torino

Questo volume è stato sottoposto a referaggio da parte di due esperti selezionati,
sulla base delle loro competenze, nell'ambito di un Comitato di Referee.
Il Centro Studi di Storia dell'Università di Torino è responsabile del processo.
Immagine sul frontespizio: *Corrado Segre nel 1889*

INDICE

<i>Abbreviazioni e sigle</i>	p. i
ALBERTO CONTE, LIVIA GIACARDI, MARIA ANNA RASPANTI	
<i>Introduzione</i>	p. iii
1. Cenni biografici su Corrado Segre.	p. iii
2. Il quaderno manoscritto sulla geometria sugli enti algebrici semplicemente infiniti (1890-1891): Segre caposcuola.	p. viii
3. Il quaderno manoscritto delle lezioni per la Scuola di Magistero: Segre educatore.	p. xii
<i>Ringraziamenti</i>	p. xxv
<i>I Quaderni manoscritti</i>	p. xxvi
Nota editoriale	p. xxviii
CORRADO SEGRE, <i>Introduzione alla geometria sugli enti algebrici semplicemente infiniti</i> (1890-91)	p. 1
CORRADO SEGRE, [Appunti relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero] (non datato)	p. 83
<i>Appendici</i>	p. 128
1. MARIA ANNA RASPANTI, <i>Gli studenti di Segre alla Scuola di Magistero</i> .	p. 128
2. LIVIA GIACARDI, <i>I registri dei corsi delle lezioni del 1890-91 e del corso di Magistero</i> .	p. 150
Fonti iconografiche	p. 161
Indice dei nomi	p. 162

ABBREVIAZIONI E SIGLE

AccSciTo	Accademia delle Scienze, Torino
ANL-Castelnuovo	<i>Archivio Castelnuovo</i> , Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, accessibile sul sito curato da PAOLA GARIO: http://operedigitali.lincci.it/Castelnuovo/Lettere_E_Quaderni/menu.htm
ASUT	Archivio storico dell'Università di Torino
BMP	Biblioteca Speciale di Matematica Giuseppe Peano, Università di Torino
BMP-Segre	<i>Fondo Segre</i> , Biblioteca Speciale di Matematica - Giuseppe Peano, Torino, accessibile sul sito curato da LIVIA GIACARDI: http://www.corradosegre.unito.it/
BUMPI	<i>Bollettino Ufficiale del Ministero della Pubblica Istruzione</i>
GU	<i>Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia</i>
<i>Opere</i>	CORRADO SEGRE, <i>Opere</i> , Roma: Ed. Cremonese, 4 voll., 1957-1963.
UTo-ACS	<i>Archivio Corrado Segre</i> , Università di Torino. La maggior parte dei documenti è accessibile sul sito: http://users.mat.unimi.it/users/gario/Elenco-Segre.html



1. Corrado Segre studente
all'Università di Torino (UTo-ACS)



2. Corrado Segre nel 1899 (UTo-ACS)



3. Corrado Segre negli anni Venti (BMP-Segre)

Introduzione

ALBERTO CONTE, LIVIA GIACARDI, MARIA ANNA RASPANTI

«La mente del poeta - scrive Italo Calvino - e in qualche momento decisivo la mente dello scienziato funzionano secondo un procedimento d'associazioni d'immagini che è il sistema più veloce di collegare e scegliere fra le infinite forme del possibile e dell'impossibile. La fantasia è una specie di macchina elettronica che tiene conto di tutte le combinazioni possibili e sceglie quelle che rispondono a un fine, o che semplicemente sono le più interessanti, piacevoli, divertenti.»¹

Iniziare con una frase di Calvino può sembrare una inutile ricerca dell'originalità. In realtà le parole del celebre scrittore illustrano uno degli aspetti peculiari del metodo di lavoro di Corrado Segre, maestro dell'Ateneo torinese e leader della Scuola italiana di geometria.

I due quaderni manoscritti che qui presentiamo, relativi rispettivamente alle lezioni universitarie di geometria superiore tenute da Segre nel 1890-1891 e al corso di matematica per la Scuola di Magistero dell'Università di Torino, sono emblematici sia di un modo particolare di fare ricerca, sia di una visione alta dell'insegnamento della matematica, in cui l'intuizione geometrica, l'analogia e la capacità di stabilire connessioni giocano un ruolo importante.

1. Cenni biografici su Corrado Segre²

Segre nacque a Saluzzo il 20 agosto 1863 da Abramo Segre ed Estella De Benedetti, compì gli studi secondari presso l'Istituto tecnico Sommeiller di Torino. Ottenuta la licenza non ancora sedicenne, nel 1879, contrariamente al parere del padre che lo voleva ingegnere, si iscrisse al corso di laurea in Matematica presso l'Ateneo torinese, dove si laureò nel 1883 con Enrico D'Ovidio. La dissertazione dal titolo *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad n dimensioni ed applicazioni alla geometria della retta e specialmente delle sue serie quadratiche*, fu pubblicata nello stesso anno

¹ITALO CALVINO, *Lezioni americane. Sei proposte per il prossimo millennio*, Milano, Mondadori, 2018, p. 93.

²Questo paragrafo si deve a Livia Giacardi.

in due memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino³ a proposito delle quali l'amico Guido Castelnuovo scriverà:

«Chi legge anche oggi [...] i due lavori, strettamente collegati resta sorpreso della sicurezza e vastità di vedute e di mezzi con cui quel giovane, Corrado Segre, tratta l'ampio soggetto. La dissertazione sembra dovuta non già ad un principiante, ma ad un matematico provetto.»⁴

Vincitore di concorso, nel 1888 fu chiamato a ricoprire la cattedra di Geometria superiore presso l'Università di Torino, cattedra che reggerà per trentasei anni fino alla morte.⁵ Oltre al suo corso istituzionale insegnò anche per diciotto anni alla Scuola di Magistero per la formazione degli insegnanti, annessa alla Facoltà di Scienze dell'Università di Torino, divenendone direttore nel 1916.

L'attività scientifica di Segre si esplicò in varie direzioni e in ciascuna di esse egli aprì nuove strade.⁶

I primi lavori riguardano soprattutto la geometria degli iperspazi. Prendendo le mosse dai recenti risultati algebrici di Karl Weierstrass e di Ferdinand G. Frobenius, Segre riuscì a dare una sistemazione geometrica e analitica alla geometria proiettiva iperspaziale portandola a quel grado di sviluppo necessario per fare di essa uno strumento per le ulteriori ricerche della Scuola italiana di geometria. In alcune brillanti memorie egli mostra anche l'utilità di ricorrere agli iperspazi per studiare proprietà dello spazio ordinario S_3 . Esempio notevole è la memoria del 1884.⁷ La considerazione che sta alla base di questo lavoro era stata fatta anche

³La tesi è pubblicata nelle due memorie: *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, s. 2, 36, 1883, pp. 3-86 (anche in CORRADO SEGRE, *Opere*, Roma, Ed. Cremonese, 4 voll, 1957-1963, 3, pp. 25-126) e *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*, Ivi, pp. 87-157 (*Opere*, 3, pp. 127-217). Il manoscritto della tesi è custodito in BMP-Segre, Scritti. 1. Citando gli scritti di Segre si farà sempre riferimento anche alle *Opere*; si segnala che i quattro volumi della stesse sono accessibili in rete all'indirizzo http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre.

⁴GUIDO CASTELNUOVO, [Commemorazione del socio C. Segre], *Atti della R. Accademia dei Lincei, Rendiconti*, s. 5, 33.2, 1924, p. 353.

⁵Sulla carriera universitaria di Segre si veda ALBERTO CONTE, LIVIA GIACARDI, PAOLA NOVARIA, *Corrado Segre (1863-1924). A 150 anni dalla nascita, Catalogo delle Mostre documentarie*, - Torino, Novembre 2013, Torino, Kim Williams Books, 2013, pp. 19-65.

⁶Sull'opera scientifica di Segre la bibliografia è molto ampia, per cui ci limitiamo a segnalare il recente volume G. CASNATI, A. CONTE, L. GATTO, L. GIACARDI, M. MARCHISIO, A. VERRA (eds.), *From Classical to Modern Algebraic Geometry, Corrado Segre's Mastership and Legacy*, Birkhäuser, 2016, che contiene anche una completa bibliografia aggiornata. Si segnalano, per il carattere storico, i seguenti articoli: ALBERTO CONTE, LIVIA GIACARDI, *Segre's University Courses and the Blossoming of the Italian School of Algebraic Geometry*, pp. 3-91; ERIKA LUCIANO, C. SILVIA ROERO, *Corrado Segre and His Disciples: the Construction of an International Identity for the Italian School of Algebraic Geometry*, pp. 93-241; DAVID ROWE, *Segre, Klein, and the Theory of Quadratic Line Complexes*, pp. 243-263; ALDO BRIGAGLIA, *Segre and the Foundations of Geometry: from Complex Projective Geometry to Dual Numbers*, pp. 265-288; PAOLA GARIO, *Segre, Castelnuovo, Enriques: Missing Links*, pp. 289-323; LIVIA GIACARDI, *Corrado Segre: Biographical Timeline*, pp. 325-348; LIVIA GIACARDI, ERIKA LUCIANO, CHIARA PIZZARELLI, C. SILVIA ROERO, *Corrado Segre's Archives at the University of Turin*, pp. 717-730. Pubblicazioni meno recenti verranno citate quando necessario.

⁷CORRADO SEGRE *Étude des différentes surfaces du 4^e ordre à conique double ou cuspidale (générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions*, *Mathematische Annalen*, 24, 1884, pp. 313-444 (*Opere* 3, pp. 339-484).

e indipendentemente da Veronese e costituisce il germe della nozione di *varietà normale*.

Per gli importanti risultati ottenuti e per il campo nuovissimo di ricerche cui aprivano la via, nel 1884 Segre ottenne il Premio delle Matematiche dell'Accademia dei XL. In essi spicca il tratto peculiare di tutta la sua opera, vale a dire il carattere "geometrico" e l'abile intreccio di procedimenti sintetici e di metodi analitici: «Per Veronese, per Segre, per Bertini [...] - scrive Francesco Severi - lo spazio lineare a n dimensioni per loro è come se realmente esistesse. Non ridotto cioè alle ombre di una banale finzione del linguaggio.»⁸ Altro aspetto che colpisce è lo stile, lo stile geometrico italiano, con canoni di metodo e canoni estetici: modo geometrico di argomentare, eleganza e semplicità nella trattazione, valorizzazione dell'intuizione non disgiunta dall'esigenza di rigore.

A partire dal 1886 i lavori di Segre mostrano un ampliamento dell'orizzonte sotto l'influsso da un lato della nuova impostazione della scuola tedesca di Alexander Brill e Max Nöther e, dall'altro, delle idee esposte da Klein nel suo celebre *Programma di Erlangen*, la cui traduzione italiana fu pubblicata nel 1890, su indicazione di Segre, negli *Annali di matematica pura ed applicata*, a cura dell'allievo Gino Fano.⁹ Nei suoi studi si verificò, pertanto, il progressivo distacco da una ristretta visione proiettiva per giungere allo studio delle proprietà invarianti per trasformazioni birazionali. Nell'autunno del 1887, per interessamento di Segre, fu chiamato a Torino, come assistente di D'Ovidio, Guido Castelnuovo e fra i due giovani nacque una fruttuosa collaborazione scientifica destinata a durare anche dopo che nel 1891, vincitore di cattedra, Castelnuovo si trasferì a Roma. Il lavoro culminante e riassuntivo di questo periodo è l'importante memoria del 1894 *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*¹⁰ in cui confluiscono anche le ricerche torinesi di Castelnuovo e che, come scrive Severi, segna «una pietra miliare nella marcia della geometria italiana»¹¹.

In una breve nota del 1891 Segre definì per la prima volta il prodotto di spazi lineari, ora detto *varietà di Segre*, concetto rilevante negli sviluppi della geometria del XX secolo, e in un lavoro pubblicato nel 1896 introdusse uno fra i più importanti invarianti topologici di una superficie algebrica, oggi noto come *Invariante di Zeuthen-Segre*.¹²

Consapevole dell'importanza di stabilire relazioni con il mondo scientifico europeo, nell'estate del 1891 Segre intraprese un viaggio in Germania allo scopo di visitare i principali istituti e biblioteche di un paese allora all'avanguardia nella ricerca matematica, e di prendere contatti diretti con coloro che avevano influenzato le sue ricerche. Visitò Göttingen, Frankfurt, Nürnberg, Leipzig e München ed ebbe modo di incontrare, fra gli altri, Leopold Kronecker, Weierstrass, Nöther, Theodor

⁸FRANCESCO SEVERI, *Prefazione*, in Corrado Segre, *Opere* 1, 1957, pp. V-XII, alle pp. VII-VIII.

⁹GINO FANO, *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti* (traduzione), *Annali di matematica pura ed applicata*, s. 2, 17, 1890, pp. 307-343.

¹⁰CORRADO SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, *Annali di Matematica pura ed applicata*, s. 2, 22, 1894, pp. 41-142 (*Opere*, 1, pp. 198-304).

¹¹SEVERI 1957, p. X.

¹²CORRADO SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche*, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 31, 1895-96, pp. 485-501 (*Opere* 1, pp. 312-326).

Reye, Rudolf Sturm, Moritz Cantor e anche Klein con cui aveva intrattenuto fino ad allora rapporti solo epistolari.¹³

«Chi non è stato qui - scrive a Castelnuovo - non può immaginare che razza d'uomo è Klein e che specie d'organizzazione egli ha saputo, con abilità che nessun altro può avere, imporre agli studi matematici in questa Università: è una cosa che m'ha fatto un'impressione straordinaria. E sì che d'impressioni vivissime da parte degli scienziati ne ho già avute parecchie in questo viaggio!»¹⁴

Risale ai primi anni novanta un altro indirizzo di ricerche inaugurato da Segre a partire dalla teoria degli immaginari in geometria di Karl von Staudt. Per sua iniziativa, nel 1888 era uscita, a cura di Mario Pieri, la traduzione della *Geometrie der Lage* di Staudt, preceduta da un pregevole studio bio-bibliografico sull'autore di Segre stesso. Estendendo il campo di ricerca del matematico tedesco, egli introdusse nuove corrispondenze che chiamò *antiproiettività*, ne sviluppò una teoria completa, aprendo così la strada a un nuovo campo di ricerche geometriche, quello degli enti iperalgebrici.¹⁵ I suoi risultati furono in seguito ripresi e utilizzati da Elie Cartan.¹⁶

Segre aveva ormai acquisito notevole fama sia in Italia, sia all'estero¹⁷ tanto che nel Congresso internazionale dei matematici di Zurigo del 1897 fu invitato come vicepresidente della sezione di geometria. L'anno seguente gli fu assegnato, a pari merito con Vito Volterra, il Premio Reale per la matematica dell'Accademia dei Lincei, con una relazione molto lusinghiera. I commissari, accanto alla «novità e alla importanza dei risultati», riconoscevano a Segre, fin da allora, il ruolo di caposcuola¹⁸. Nel 1904 fu invitato a tenere una conferenza generale al quarto Congresso internazionale dei matematici, in Heidelberg, sugli indirizzi di ricerca più promettenti nel campo della geometria, conferenza che fu subito tradotta in polacco da Samuel Dickstein.¹⁹ Agli inizi del Novecento Segre stesso e i suoi allievi o collaboratori furono invitati a scrivere per la *Encyklopädie der Mathematischen Wis-*

¹³Cfr. LIVIA GIACARDI, *Corrado Segre maestro a Torino. La nascita della scuola italiana di geometria algebrica*, Annali di storia delle università italiane, 5, 2001, pp. 139-163, in particolare il paragrafo 2.1; ERIKA LUCIANO, C. SILVIA ROERO, *From Turin to Göttingen: Dialogues and Correspondence (1879-1923)*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 32, 1, 2012, pp. 7-232.

¹⁴C. Segre a G. Castelnuovo, Göttingen 30.6.1891, in ANL-Castelnuovo.

¹⁵CORRADO SEGRE *Un nuovo campo di ricerche geometriche*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 25, 1889-90, *Nota I*, pp. 180-205, *Nota II*, pp. 290-317, *Nota III*, pp. 376-396; 26, 1890-91, *Nota IV*, pp. 35-71 (*Opere 2*, pp. 237-337).

¹⁶Cfr. THOMAS HAWKINS, *Lie Groups and Geometry: the Italian Connection*, in ALDO BRIGAGLIA, CIRO CILIBERTO, EDOARDO SERNESI (a cura di), *Algebra e geometria (1860-1940): il contributo italiano*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Supplemento, s. 2, 36, 1994, pp. 185-206, alle pp. 200-204; BRIGAGLIA 2016, cit. in nota 6.

¹⁷Cfr. LUCIANO, ROERO 2016, cit. in nota 6.

¹⁸*Relazione sul concorso al premio reale per la Matematica, pel 1895*, Atti della R. Accademia dei Lincei, Rendiconti delle sedute solenni, 1, 1898, pp. 354-374, a p. 367.

¹⁹CORRADO SEGRE, *La geometria d'oggi e i suoi legami con l'analisi*, in *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8 bis 13 August 1904*, 1905, pp. 109-120 (*Opere*, 4, 456-468); la conferenza fu tradotta in polacco: *Geometria dzisiejsza i jej związki z Analizą*, Wiadomości Matematyczne, Warszawa, 9, 1905, pp. 7-21.

senschaften ben sette articoli. Quello di Segre *Mehrdimensionale Räume*²⁰ è dedicato agli spazi a più dimensioni e come scrive, Henry F. Baker, «rimarrà per molti anni un monumento della coltura di quell'uomo».²¹

Agli anni 1907-1913 risale un terzo gruppo di lavori che definiscono un nuovo settore di ricerca, la geometria proiettiva differenziale. È del 1907 il primo studio dedicato espressamente alla geometria proiettiva differenziale degli iperspazi, è però nella memoria del 1910 *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*,²² che Segre pone le basi per la costruzione sistematica di tale geometria, cui verrà dato grande impulso dall'allievo Alessandro Terracini e da Enrico Bompiani.²³

Gli anni fra 1891 e il 1912 furono quelli scientificamente più fecondi e furono anche quelli in cui prese l'avvio sotto la guida di Segre la Scuola italiana di geometria algebrica che porterà Torino e l'Italia ad imporsi sulla scena internazionale.²⁴ Molti erano i giovani che discutevano con lui la tesi di laurea sui temi più avanzati della ricerca: tra essi i più brillanti sono Fano (1892), Beppo Levi (1896), Alberto Tanturri (1899), Severi (1900), G. Zeno Giambelli (1901), Terracini (1911) e Eugenio Togliatti (1912). Numerosi erano anche quei matematici appena laureati, italiani e stranieri, che, attratti dalla sua fama, si recavano a Torino per seguire le sue lezioni e per perfezionarsi quali Castelnuovo (1887-1891), Federico Amodeo (1890-91), Federico Enriques (11.1892, 11.1893-1.1894), Gaetano Scorza (1899-1900), i coniugi inglesi William H. Young e Grace Chisholm (1898-99), e gli americani Julian Coolidge (1903-04), Clarence Lemuel Moore (3.1908) e Charles Herschel Sisam (1908-09):

«Se, educati alla sua Scuola, - scrive Berzolari - numerosi discepoli suoi, di cui taluni hanno ora un bel nome nella scienza, salirono poi una cattedra universitaria od occuparono posti onorevoli nell'insegnamento medio, la fama della sua valentia di Maestro varcò di molto i confini del nostro paese, e pressoché ogni anno accorsero ad ascoltarne la parola studiosi di altre nazioni, specialmente dell'Inghilterra e dell'America del Nord, i quali dagl'insegnamenti avuti in Italia trassero sovente l'ispirazione a pregevoli pubblicazioni.»²⁵

Nel 1923, Franz Meyer e Hans Mohrmann, nell'introduzione al volume della *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* dedicato alla geometria, rilevavano come in pochi anni alla fine del secolo l'Italia fosse arrivata alla posizione di comando (*führende Stellung*, III.I₁, p. VI) nel settore della ricerca geometrica. Segre fu, senza alcun dubbio, uno dei matematici che vi contribuirono in modo significativo.

²⁰CORRADO SEGRE, *Mehrdimensionale Räume*, in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, III.2.2 C7, Hälfte A, Leipzig 1921, pp. 769-972.

²¹HENRY FREDERICK BAKER, *Corrado Segre*, *Journal of the London Mathematical Society*, 1, 1926, pp. 263-271. La citazione è tratta dalla traduzione italiana di Gino Loria nel Bollettino della Unione Matematica Italiana, 6, 1927, pp. 276-284, alla p. 284.

²²CORRADO SEGRE, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 30, pp. 87-121 (*Opere*, 2, pp. 71-114).

²³Cfr. CIRO CILIBERTO, EMMA SALIENT DEL COLOMBO, *Enrico Bompiani: The Years in Bologna*, in SALVATORE COEN (ed.), *Mathematicians in Bologna 1861-1960*, Basel, Springer, 2012, pp. 143-177.

²⁴Sul formarsi a Torino della Scuola italiana di geometria algebrica cfr. GIACARDI 2001 e CONTE, GIACARDI 2016, cit. in nota 6.

²⁵LUIGI BERZOLARI, *Corrado Segre*, *R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Rendiconti*, s. 2, 57, 1924, pp. 528-532, alla p. 532.

Nel corso della sua vita egli ricoprì molte cariche. In particolare dal 1909-10 al 1915-16 fu preside della facoltà di scienze dell'Università di Torino e dal 1907 fino alla morte ebbe la direzione della Biblioteca speciale di matematica, l'attuale Biblioteca Giuseppe Peano. Dal 1904, per vent'anni, fu uno dei direttori degli *Annali di Matematica pura ed applicata*. Socio nazionale dell'Accademia delle Scienze di Torino dal 1889 e di quella dei Lincei dal 1901, Segre fu membro delle principali accademie italiane e straniere.

Morì a Torino il 18 maggio 1924, lasciando una grande eredità umana e scientifica:

«Io me ne andrò calmo e sereno - era solito dire - perché il padre deve far posto ai figli, perché bisogna che ogni giorno il passato muoia affinché altri mattini si alzino trionfanti».²⁶

2. *Il quaderno manoscritto sulla geometria sugli enti algebrici semplicemente infiniti (1890-1891): Segre caposcuola.*²⁷

«Nell'anno scolastico 1890-91 Segre ripetette con D'Ovidio a Torino la eccellente prova fatta da Brioschi, Casorati e Cremona nel 1869 a Milano. Mentre D'Ovidio faceva un corso di lezioni sulle *Funzioni di variabile complessa e sugli integrali abeliani*, egli [Segre] esponeva la Geometria su di una varietà algebrica semplicemente infinita sotto il triplice aspetto iperspaziale, algebrico e funzionale.»²⁸

Così scriveva Federico Amodeo ricordando il corso di Segre dell'anno accademico 1890-1891, un corso destinato a lasciare un segno nella storia della geometria algebrica italiana.

La geometria sull'ente algebrico semplicemente infinito, fondata da Bernard Riemann (*Theorie der Abel'schen Functionen*, 1857) si sviluppò secondo tre importanti indirizzi, quello funzionale che deriva da Riemann, quello algebrico geometrico, opera soprattutto di Alexander Brill e di Max Noëther (*Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie*, 1874) e quello algebrico-aritmetico dovuto a Leopold Kronecker, Richard Dedekind e Heinrich M. Weber.

Quando Segre muoveva i primi passi nella ricerca la Scuola geometrica italiana era così fortemente dominata dalla corrente proiettiva da non comprendere l'importanza dei problemi affrontati e in parte risolti da Noëther: «Era necessario - scrive Castelnuovo - che quei problemi li ritrovassimo noi stessi sotto una forma più adatta alla nostra mentalità.»²⁹

Una corrente di pensiero che, attraverso Klein si diffuse in Italia, condusse ad estendere la geometria proiettiva agli iperspazi; merito di Segre è quello di aver

²⁶ Discorso del Rettore della R. Università di Torino, Prof. Comm. Alfredo Pochettino, in Corrado Segre (20 agosto 1863 - 18 maggio 1924), Supplemento ai Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, XV, Anno 1926-1928, p. 42.

²⁷ Questo paragrafo si deve ad Alberto Conte.

²⁸ FEDERICO AMODEO, *Sintesi storico-critica della geometria delle curve algebriche*, Napoli, Conte, 1945, p. 245.

²⁹ GUIDO CASTELNUOVO, *La geometria algebrica e la scuola italiana*, Atti del Congresso internazionale dei matematici, Zanichelli, Bologna, 1929, I, pp. 191-201, a p. 192.

subito intravisto le applicazioni che si potevano fare della geometria iperspaziale alla teoria delle curve algebriche. Nell'introduzione alla fondamentale memoria del 1894 Segre scrive:

«Ora, nel fare, son già vari anni, delle ricerche sulle rigate algebriche, e in generale sulle varietà composte di ∞^1 spazi, avendo io avuto bisogno di valermi delle proprietà delle serie lineari studiate nella Memoria BRILL-NOETHER, mi accorsi come ricorrendo invece alle rigate ed alle dette varietà di spazi, e rappresentando quelle serie lineari mediante curve iperspaziali nel senso già accennato, si potessero ritrovare (almeno in parte) quelle proprietà mediante semplici ragionamenti geometrici, evitando i calcoli algebrici o le considerazioni funzionali che occorrono per stabilire il teorema del NOETHER fondamentale per quella Memoria.»³⁰

È precisamente il metodo geometrico che Segre espone nel corso del 1890-1891, metodo che non ha bisogno di «considerazioni funzionali, né sviluppi algebrici: unico modo con cui compare l'algebricità degli enti è con il principio di corrispondenza per le forme semplici razionali».³¹ In questo corso egli fa precedere la trattazione vera e propria da una rapida introduzione agli iperspazi secondo il metodo puramente analitico (Cap. 2), dove, fra l'altro, sottolinea il duplice ordine di vantaggi che si ottiene dall'uso dei medesimi. Innanzitutto la massima generalità «in quanto si può dire che tutti gli enti geometrici e vari analitici (algebrici) vi rientrano. E non solo i sistemi o varietà lineari, ma ogni specie di varietà. Così la varietà delle rette dello spazio ord.^o è una M_4^2 di S_5 ».³² In secondo luogo la duttilità come strumento di ricerca per le varie applicazioni che essi possono ricevere nella geometria.

Nel terzo capitolo del quaderno Segre, dopo aver definito il punto di vista che utilizzerà per lo studio delle curve, cioè quello delle proprietà invarianti per trasformazioni birazionali, introduce le serie lineari sottolineando che il loro studio equivale a quello delle curve che rappresentano:

«I gruppi neutri della serie corrispondono ai punti multipli e spazi secanti della curva. I gruppi con punti variamente coincidenti ai punti ed iperpiani singolari della curva. Ed anche le varietà di un sist. lineare variamente tang. alla curva. Come la dimens. della serie dà il numero delle varietà contenenti la curva.»³³

Il capitolo si chiude con un rapido excursus storico e bibliografico sulla geometria sull'ente algebrico da Riemann agli ultimi lavori di Castelnuovo. Nelle sezioni successive del quaderno Segre procede poi, a sviluppare la geometria delle serie lineari sopra una curva secondo il metodo iperspaziale, che esporrà in modo magistrale nella memoria del 1894, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico*

³⁰CORRADO SEGREG, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, Annali di Matematica pura ed applicata, s. 2, 22, 1894, pp. 41-142 (*Opere*, 1, pp. 198-304, citazione a p. 199).

³¹*Ibidem*, p. 200.

³²CORRADO SEGREG, *Introduzione alla geometria sugli enti algebrici semplicemente infiniti*, 1890-1891, BMP-Segre, Quaderni. 3, pp. 16-17.

³³*Ibidem*, p. 64. D'ora in avanti le pagine del quaderno di Segre verranno inserite direttamente nel testo.

semplicemente infinito.³⁴ Accanto al metodo geometrico Segre svolge nel suo corso anche quello algebrico di Brill e Nöther (p. 144) e quello funzionale riemanniano (p. 157) animato dalla convinzione più volte espressa che tutti i metodi meritano di essere studiati perché ciascuno permette di vedere il problema da punti di vista diversi.

Nell'estate del 1890 Eugenio Bertini, che si era accostato ai metodi di Segre e di Castelnuovo nei giorni che trascorse a Torino in compagnia di Segre,³⁵ gli suggerì di pubblicare la litografia del suo corso. In seguito alle sue amichevoli insistenze, Segre aveva pensato, in un primo tempo, di utilizzare gli appunti presi da Fano durante le sue lezioni e ne aveva iniziato la revisione, ma essendo questi «molto trascurati», aveva successivamente abbandonato l'idea.³⁶

Solo tre anni dopo, nel 1894 Segre si decise a pubblicare l'ampia e importante memoria *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* che, come scrive Severi, contiene 'le radici' della geometria algebrica italiana e in cui «la sintesi in questo terreno ha raggiunto la sua efficienza massima. Mirabili ad esempio le dimostrazioni del teorema di Riemann-Roch e del principio di corrispondenza di Cayley-Brill».³⁷

L'allievo Terracini ricordando il maestro a molti anni di distanza scriverà in proposito:

«La sua *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* pubblicata nel 1894 sugli *Annali di Matematica* [...] è stata come la magna charta che ha fatto testo per la geometria sulla curva secondo le idee di Segre. Quell'*Introduzione* è il frutto di un corso tenuto da Segre qua a Torino nell'anno accademico 1890-91, nel quale - Segre ci teneva a dirlo - egli aveva esposto non solo il metodo geometrico, dovuto a lui e a Castelnuovo, ma anche quelli preesistenti: segnatamente il metodo algebrico di Brill e Noether e quello trascendente di Riemann.»³⁸

Nella memoria del 1894 Segre espone unicamente il metodo geometrico, ma precisa:

«L'argomento in fatti è tale che non è ben trattato se non si sviluppa sotto più aspetti. Ond'è che l'aver io qui preso ad esporlo dal punto di vista geometrico non va interpretato nel senso di una preferenza che a mio avviso si debba dare a questo metodo rispetto agli altri. Tutti meritano di essere studiati; ognuno ha i suoi pregi speciali; per ciascuno vi sono questioni, in cui esso va più in là, od almeno riesce più luminoso degli altri.»³⁹

Se è vero che qui Segre si limitava a presentare unicamente il metodo geometrico, tuttavia per suo espresso desiderio, sullo stesso volume degli *Annali di matematica pura ed applicata* usciva anche il lavoro di Eugenio Bertini, *La geometria delle*

³⁴SEGRE 1894.

³⁵C. Segre a G. Castelnuovo, 28.7.1890, ANL-Castelnuovo.

³⁶C. Segre a G. Castelnuovo, Torino 8.8.1891, ANL-Castelnuovo.

³⁷SEVERI 1957, in SEGRE *Opere*, I, p. X.

³⁸ALESSANDRO TERRACINI, *Parole del Prof. Terracini*, in Atti del Convegno internazionale di geometria algebrica, Torino, 24-27.5.1961, Torino, Rattero, 1962, p. 12.

³⁹SEGRE 1894, *Opere* I, p. 200.

serie lineari secondo il metodo algebrico,⁴⁰ dove l'autore espone il metodo algebrico di Brill e Nöther, offrendo così un punto di vista diverso rispetto a quello presentato dall'amico. Alcuni anni più tardi, nella prefazione al trattato *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1907), Bertini renderà omaggio a Segre scrivendo di aver utilizzato ampiamente 'gli estesi sunti manoscritti' delle sue lezioni.

Nella memoria del 1894, e in alcuni casi già nel corso, Segre oltre a presentare con mirabile chiarezza un metodo ancora poco diffuso, coglie l'occasione per puntualizzare alcuni concetti fondamentali come quello di varietà algebrica e di corrispondenza algebrica fra due varietà (pp. 48-49). In particolare quest'ultima è considerata come una varietà algebrica contenuta nella varietà delle coppie ordinate di elementi delle due date;⁴¹ definizione a partire dalla quale una decina di anni dopo l'allievo Severi costruirà una teoria sintetica delle corrispondenze algebriche fra curve e successivamente una teoria generale delle corrispondenze fra varietà. Segre inoltre predispone, come egli stesso sottolinea nell'introduzione alla memoria del 1894, le basi e gli strumenti di ricerca per la creazione della geometria sopra una superficie algebrica che sarà portata avanti nella sua Scuola, con grande slancio creativo, da Castelnuovo e da Enriques.

A seguire il corso del 1890-1891 vi erano fra gli altri oltre all'allievo Gino Fano anche Federico Amodeo, venuto da Napoli appositamente per lavorare con Segre, già ritenuto all'epoca, come si è detto, il caposcuola della geometria italiana. Entrambi si cimentarono nella soluzione del problema proposto da Segre a lezione:

«Definire lo spazio S_r non già mediante coordinate, ma con una serie di proprietà dalle quali la rappresentazione con coordinate si possa dedurre come conseguenza.»⁴²

Nonostante l'invito di Segre a lavorare insieme, ciascuno pubblicherà un articolo per conto proprio. Fano nel suo lavoro del 1892, *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni*, si preoccupa, fra l'altro, di dimostrare l'indipendenza dei postulati tramite la ricerca di modelli adeguati e perviene così alla creazione di nuove geometrie (finite) che una decina di anni più tardi saranno sviluppate da Oswald Veblen.⁴³

L'importanza del corso del 1890/1891 non sta dunque solo nella rilevanza scientifica dell'approccio di Segre allo studio della geometria sulla curva, ma anche nel fatto che si consolidava da quel momento il suo ruolo di caposcuola: Segre suggeriva letture e temi di ricerca a Castelnuovo, Fano, Amodeo e illustrava a Bertini i nuovi metodi, ma soprattutto era ben chiara in lui la consapevolezza dell'importanza del nuovo indirizzo di ricerca e dell'esistenza di un gruppo di studiosi che lo

⁴⁰EUGENIO BERTINI, *La geometria delle serie lineari secondo il metodo algebrico*, Annali di matematica pura ed applicata, s.2, 22, 1894, pp. 1-40.

⁴¹SEGRE 1894, §2, n. 6.

⁴²GINO FANO, *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni*, Giornale di Matematiche, 30, 1892, pp. 106-132, a p. 106.

⁴³Cfr. MAURIZIO AVELLONE, ALDO BRIGAGLIA, CARMELA ZAPPULLA, 2002, *The Foundations of Projective Geometry in Italy from De Paolis to Pieri*, Archive for History of Exact Sciences 56, 2002, 5, pp. 363-425, a p. 391.

condividendo, come pure il desiderio di divulgare le proprie idee.

3. *Il quaderno manoscritto delle lezioni per la Scuola di Magistero: Segre educatore.*⁴⁴

3.1. *Il corso di Segre: aspetti istituzionali*

Oltre al corso di Geometria superiore Corrado Segre tenne anche il corso di Matematica presso la Scuola di Magistero dell'Università di Torino dal 1887-88 al 1890-1891 e dal 1907-1908 al 1920-1921 e, nel 1921-1923, impartì il corso di Matematiche complementari per la laurea mista in scienze fisiche e matematiche dopo che le Scuole di Magistero furono soppresse.⁴⁵

Queste Scuole erano state istituite dal ministro Ruggero Bonghi (R.D. dell'11 ottobre 1875, GU 1875, N. 255, pp. 6833-6836) per rispondere all'esigenza di formare i futuri insegnanti e di garantire in tal modo un più alto livello della scuola secondaria e sopravvissero con successive modifiche fino al 1920 quando ne fu decretata la soppressione dal ministro Benedetto Croce.⁴⁶ Nel 1875-1876 solo otto su ventuno università, le attivarono e solo tre accesero i corsi di matematica: Pavia, Pisa e Roma. I direttori delle Scuole erano rispettivamente Giovanni Cantoni, Enrico Betti e Eugenio Beltrami e i corsi di matematica erano tenuti da Felice Casorati, Cesare Finzi, e Giuseppe Battaglini (BUMPI 1876, II, pp. 372-373). Presso le Scuole di Magistero dell'Università di Torino, la sezione di matematica fu attivata nel 1876-1877: i corsi furono tenuti da vari professori, Enrico D'Ovidio, Francesco Faà di Bruno, Francesco Siacci, Giuseppe Basso e, successivamente dal solo Segre.

I quarantacinque anni di vita delle Scuole di Magistero preposte alla formazione degli insegnanti furono particolarmente difficili come mostra il gran numero di decreti ad esse relativi e, nella maggior parte dei casi, si rivelarono inadeguate ad affrontare in modo serio il loro compito.⁴⁷ Le ragioni sono molteplici: i professori che vi insegnavano erano gli stessi dei corsi istituzionali ed erano, in genere, poco preparati su questioni pedagogiche e di metodo: per esempio a Torino, prima di Segre solo i corsi di D'Ovidio affrontavano questioni di geometria e di aritmetica collegate con l'insegnamento secondario. Inoltre le strutture (biblioteche, laboratori, ecc.) e il materiale didattico erano spesso inesistenti, il numero delle ore previste era insufficiente e i finanziamenti scarsi.

Il corso di Segre costituisce una felice eccezione a questa situazione generale come mostra il quaderno manoscritto di cui presentiamo l'edizione critica [Appunti

⁴⁴Questo paragrafo si deve a Livia Giacardi e a Maria Anna Raspanti.

⁴⁵Sui corsi di Segre sulla formazione degli insegnanti, si veda LIVIA GIACARDI, *Educare alla scoperta. Le lezioni di Corrado Segre alla Scuola di Magistero*, Bollettino della Unione Matematica Italiana. La Matematica nella società e nella cultura, (8), VI-A, 2003, pp. 141-164; MARIA ANNA RASPANTI, *Vedute superiori sulla geometria elementare* (1916-17). *Un corso di Corrado Segre rivolto agli insegnanti*, conferenza tenuta a Torino il 20.4.2017.

⁴⁶Sulla formazione degli insegnanti in Italia, si veda LIVIA GIACARDI, *I matematici e la formazione degli insegnanti in Italia nel primo Novecento*, in FRANCO GHIONE (a cura di), *La formazione degli insegnanti di matematica. L'esperienza italiana a confronto con alcune esperienze europee*, PRISTEM STORIA 36-37, Milano, Università Bocconi, 2013, pp. 61-106. I principali decreti che riguardano le Scuole di Magistero sono accessibili nella sezione sulla formazione degli insegnanti a cura di LIVIA GIACARDI nel sito: <http://www.associazionesubalpinamathesis.it/storia-insegnamento/formazione-degli-insegnanti/>.

⁴⁷Cfr. FULVIA FURINGHETTI, LIVIA GIACARDI, *Training of secondary school teachers in pre- and post-unity Italy (1810-1920)*, ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 44, 4, 2012, pp. 537-550.

relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero]⁴⁸ e quello ad esso collegato *Vedute superiori sulla geometria elementare* (1916-17).⁴⁹ Il primo è dedicato soprattutto a questioni metodologiche e didattiche, è privo di titolo e non è datato, ma reca evidenza di successive aggiunte fino al 1924. Il secondo è in realtà relativo al corso di Geometria superiore del 1916-17, ma come afferma Segre stesso nell'introduzione e in vari punti del quaderno, è strettamente collegato con le lezioni di Magistero e tratta, con attenzione sia al punto di vista storico, sia agli sviluppi più recenti, temi di geometria elementare che possono rivestire un particolare interesse per il futuro insegnante.

Dai Quaderni 38 e 39 di Segre⁵⁰ e dalla documentazione d'archivio⁵¹ possiamo anche avere informazioni sulla frequenza dei corsi di matematica che integrano i dati riportati dall'Annuario⁵²: 1887-1888: 9 uomini; 1888-1889: 12 uomini, 1 donna; 1889-1890: 12 uomini, 2 donne; 1890-1891: 12 uomini, 1 donna; 1907-1908: 4 uomini, 13 donne; 1921-1922: 2 uomini, 11 donne.

Il registro degli esami di matematica sostenuti presso la Scuola di Magistero, che copre l'arco temporale 1907-1922, ci offre i seguenti dati:

1907: 1 donna; 1908: 2 uomini, 5 donne; 1909: 1 uomo, 5 donne; 1910: 5 uomini, 1 donna; 1911: 2 donne; 1912: 2 uomini; 1913: 1 uomo, 6 donne; 1914: 6 uomini, 12 donne; 1915: 1 uomo, 2 donne; 1916: 13 donne; 1917: 1 uomo, 4 donne; 1918: 3 donne; 1919: 11 uomini, 8 donne; 1920: 6 uomini, 9 donne; 1921: 1 uomo, 4 donne; 1922: 1 donna.⁵³

Oltre a fornirci informazioni su chi effettivamente sostenne l'esame di matematica, il registro sopra citato mette in evidenza altri aspetti significativi: il progressivo aumento della presenza femminile, in gran parte dovuto all'influenza della guerra sulla frequenza maschile; l'ammissione di candidati all'esame anche dopo la soppressione delle Scuole di Magistero; il carattere pratico della prova - si chiedeva infatti ai candidati di preparare una lezione; la varietà delle scuole interessate - dalle scuole normali per la formazione dei maestri alle scuole tecniche e istituti tecnici, dai ginnasi e licei al liceo moderno (a partire dal 1914); e infine il tipo di argomenti che spaziano dall'aritmetica all'analisi indeterminata, dalla geometria all'algebra, dalla trigonometria ai primi concetti dell'analisi infinitesimale.

3.2. Le lezioni di Segre: i temi

In apertura al quaderno [*Appunti relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero*] Segre fa riferimento al Regolamento del 6 dicembre 1903 emanato dal ministro Emanuele Orlando e ne trascrive gli articoli 1 e 7 dove si sottolinea che lo scopo

⁴⁸BMP-Segre, Quaderni. 40.

⁴⁹BMP-Segre, Quaderni. 30.

⁵⁰Cfr. http://www.corradosegre.unito.it/I31_40.php.

⁵¹ASUT, *Conferenze della Scuola di Magistero di Scienze*, VII 84; cfr. anche i verbali di laurea in *Facoltà di scienze MFN. Verbalì degli esami di laurea e di Magistero dal 27.10.1902 al 16.11.1925*, pp. 19-131. Cfr. anche CONTE, GIACARDI, NOVARIA 2013, pp. 92-94.

⁵²Dagli *Annuari* si ricavano i seguenti dati: 1908-1909: 1 uomo, 5 donne; 1909-1910: 5 uomini, 1 donna; 1910-1911: 2 donne; 1911-1912: 2 uomini; 1912-1913: 1 uomo, 7 donne; 1913-1914: 5 uomini, 12 donne; 1914-1915: 1 uomo, 1 donna; 1915-1921: nessun dato.

⁵³Cfr. *Appendice 1*.

principale di tali scuole è quello di «rendere gli alunni esperti nell'arte d'insegnare le discipline filosofiche, letterarie e scientifiche nei licei, nei ginnasi, nelle scuole tecniche e normali e negli istituti tecnici», e si precisa che le lezioni avrebbero dovuto trattare i metodi di insegnamento delle singole materie in relazione ai programmi delle scuole secondarie. (GU, 1904, 24, p. 410). Immediatamente dopo, però, Segre riporta l'art 1 del Regolamento della Facoltà di scienze dove se ne indica il fine di «mantenere e di estendere la coltura scientifica della Nazione». Questa duplice citazione a inizio corso è significativa dell'importanza che egli attribuiva, per la formazione degli insegnanti, tanto agli aspetti metodologici e pedagogici, quanto alle conoscenze strettamente scientifiche. I due quaderni citati precedentemente [*Appunti e bibliografia per il corso di Magistero di Matematica*] e *Vedute superiori sulla geometria elementare* (1916-17) rappresentano questi due aspetti complementari del suo insegnamento.

Il primo si articola nelle seguenti sezioni:

«La Matematica e l'esperienza; La Matematica in relaz.^e colle applicazioni; La Matematica come scienza esclusivamente logica; Scopo dell'insegnamento matematico nelle scuole secondarie; L'intuizione e i postulati; Il rigore; Sul metodo; Sugli esercizi; La riforma; Trattati generali; Bibliografia sulla Didattica; Didattica algebrica; Storie. Varia; Numeri frazionari, negativi, irraz.^{li}; Costruzioni; Didattica geometrica; Complementi di Mat. elem.; Trigonometria; Trattati di Aritmetica ed Algebra; Trattati di Geometria elem.^e e scritti vari sui fondamenti; Esercizi; Indice per Bibliogr^a».

Il secondo *Vedute superiori sulla geometria elementare* (1916-17) si suddivide nei seguenti capitoli:

«Cenni su i fondamenti delle Matematiche, in partic.^e della Geom.^a; Geometria elem.^e e geom.^a proiettiva; Geom. Elementare e geom.^a delle trasform.ⁱ circolari; Cenni sull'Analysis situs; Sulle costruzioni geometriche; Costruzioni con meccanismi articolati; I problemi risolubili colla sola riga; I problemi risolubili colla riga e col compasso, o strum.ⁱ equiv.ⁱ; Sulle equazioni algebriche risolubili per radicali quadratici; Applicazioni ai problemi classici di 3° grado; Le curve, le cui intersezioni con rette generiche si ottengono con riga e compasso; Il problema della divisione della circonferenza; Il problema della quadratura del cerchio; Principi di Geom.^a non-euclidea.»

Questo secondo quaderno, che sviluppa alcuni degli argomenti che Segre riteneva importanti per la formazione degli insegnanti, è preceduto da considerazioni sui fondamenti della matematica su cui ci soffermiamo brevemente perché utili a comprendere l'approccio didattico e metodologico a questa disciplina illustrato nel primo quaderno.

Nelle matematiche, scrive Segre le idee e le proposizioni primitive «son suggerite dall'esperienza o dall'intuizione, insieme coll'astrazione» (p. 8). Rispetto alle altre parti delle matematiche, in geometria occorre «ricorrere all'astrazione in grado ben maggiore. Si considerano *superficie, linee, punti*, che non s'incontrano in natura!» (p. 9). I nostri sensi, egli osserva, «non sono mai esatti, non possono fornire

che dati *approssimativi*; mentre per la trattazione matematica si assumono *esatti*» (p. 10). Dunque anziché prendere i dati sperimentali quali sono, «li alteriamo coll'astrazione» perché intendiamo fare della matematica di precisione. Naturalmente, aggiunge Segre, «se, dopo aver fatto della matematica di precisione vogliamo applicarne i risultati al mondo reale, dobbiamo tener conto delle ipotesi semplificatrici che s'erano fatte» (p. 13). Egli osserva però che si può anche presentare la geometria come «un sistema puramente logico-deduttivo, che esclude ogni possibilità di considerarla come scienza fisica» (p. 22) e che questo approccio offre un duplice vantaggio: conferisce alla geometria un valore scientifico indipendente dal fatto che si verifichi o meno nel mondo fisico, e rende possibili diverse applicazioni. Se si considera la geometria in modo astratto, allora è sufficiente che i postulati siano fra loro compatibili, ed è auspicabile che siano anche indipendenti. Segre precisa tuttavia che, dal punto di vista didattico, conviene che essi concordino il più possibile con l'esperienza, in modo da risultare evidenti.

3.3. Aspetti epistemologici, metodologici e didattici

Nel quaderno [*Appunti relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero*] Segre, dopo aver presentato alcune riflessioni sulla natura della matematica, sugli scopi dell'insegnamento, sull'importanza dell'intuizione e sul rigore, tratta esclusivamente questioni di carattere didattico e metodologico e offre ai futuri insegnanti suggerimenti di didattica pratica. Il suo approccio risente apertamente del suo modo peculiare di concepire la ricerca scientifica, ma è frutto anche dell'esperienza di docente e di un'attenta disamina delle problematiche didattiche che si dibattevano all'epoca nei vari paesi europei. Per esempio, dopo la creazione nel 1908 dell'International Commission on the Teaching of Mathematics (poi ICMI), Segre è particolarmente attento alle questioni discusse nel suo ambito e inoltre dimostra un'ampia conoscenza della letteratura internazionale in didattica generale e speciale, e non solo, come emerge dall'ampia bibliografia ragionata che corredda il quaderno in questione.

I problemi connessi con l'insegnamento gli stavano molto a cuore. Ne è una testimonianza luminosa il celebre articolo del 1891 *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche. Osservazioni dirette ai miei studenti*,⁵⁴ dove insiste soprattutto sui seguenti punti: il vero maestro deve invitare i suoi allievi a occuparsi solo di problemi «importanti» e insegnare loro a distinguere le questioni rilevanti da quelle sterili e inutili; spingerli a studiare, accanto alla teoria, le sue applicazioni; esortarli a non essere «schiavi del metodo», a non restringere la propria attività scientifica a un campo troppo limitato, in modo da poter considerare «le cose più dall'alto»; deve inoltre tenere in debito conto le esigenze didattiche e suggerire ai propri studenti di leggere le opere dei grandi maestri. Questo articolo attrasse l'attenzione di matematici e pedagogisti all'estero e nel 1904 fu tradotto in inglese con il titolo *On some tendencies in geometric investigations* e pubblicato sul *Bulletin of the American*

⁵⁴CORRADO SEGRE, *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche. Osservazioni dirette ai miei studenti*, Rivista di Matematica 1, 1891, pp. 42-66 (*Opere* 4, pp. 387-412).

*Mathematical Society*⁵⁵ da John Wesley Young (1879-1932), matematico molto interessato a questioni didattiche e futuro presidente della Mathematical Association of America. Nelle lezioni che quest'ultimo impartì alcuni anni dopo nell'University of Illinois, raccolte nel volume *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry* (1911),⁵⁶ egli definisce la matematica come «any body of propositions which is capable of an abstract formulation and arrangement»⁵⁷ e osserva che il metodo puramente logico non è il solo che può essere impiegato nelle ricerche matematiche:

«Imagination, geometric intuition, experimentation, analogies sometimes of the vaguest sort, and judicious guessing, these are the instruments continually employed in mathematical research».⁵⁸

Questo aspetto, come pure il fatto di insistere sulla rilevanza scientifica dei sistemi astratti, ma di affermare che le applicazioni concrete di tali sistemi costituiscono di gran lunga la parte più importante della matematica,⁵⁹ e quello di sottolineare l'importanza dell'approccio storico e delle matematiche elementari affrontate da un punto di vista superiore, costituiscono altri tratti comuni con la visione di Segre.

Gli stessi suggerimenti, che compaiono nell'articolo del 1891 rivolti agli studenti universitari, si ripresentano contestualizzati rispetto all'insegnamento secondario, nelle lezioni di magistero di cui trattiamo. Come appare dal registro delle lezioni⁶⁰ e dagli appunti manoscritti, Segre intendeva il suo corso come una specie di laboratorio, dove gli studenti venivano preparati tenere una lezione chiara e documentata su argomenti rilevanti per l'insegnamento secondario. Infatti, attenendosi scrupolosamente alle direttive del decreto ministeriale, oltre ad affrontare questioni di tipo metodologico, egli invitava gli allievi a sviluppare temi di matematica quali problemi di massimi e minimi, divisibilità dei numeri, analisi indeterminata di primo grado, approssimazioni numeriche, equazioni irrazionali, o, ancora, il concetto di dimensione, le costruzioni geometriche mediante la retta e un cerchio fisso, ecc. e li stimolava a leggere e a commentare alcuni testi elementari.

Prima di illustrare gli assunti metodologici e didattici di Segre quali emergono da questo quaderno, è utile premettere qualche considerazione sulla sua visione epistemologica della matematica. Secondo Segre due sono i modi di accostarsi alla matematica, o considerarla in relazione alle sue applicazioni come fa Klein, oppure affrontarla dal punto di vista esclusivamente logico in accordo con le vedute di Peano e di Hilbert. Segre illustra ai suoi allievi la differenza fra i due approcci osservando che, per esempio, «nel 1° indirizzo il numero *irrazionale* trova la sua origine ad es. in Geometria, grazie alla continuità della retta, o a costruzioni di

⁵⁵CORRADO SEGRE, *On some tendencies in geometric investigations*, Bulletin of the American Mathematical Society, 10, 1904, pp. 442-468.

⁵⁶Nell'ampia bibliografia del quaderno, Segre cita la traduzione italiana del 1919 di questo libro, *I concetti fondamentali dell'algebra e della geometria*.

⁵⁷JOHN WESLEY YOUNG, *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry*, New York, The MacMillan Company, 1911, p. 222.

⁵⁸*Ibidem*, p. 221.

⁵⁹*Ibidem*, p. 224.

⁶⁰CONTE, GIACARDI, NOVARIA 2013, pp. 47-53 e qui in *Appendice 2*.

ipotenuse, ecc.; nel 2° si deve ricorrere a separazione dei numeri razionali, o al limite superiore di una classe di razionali, ecc.» (p. 13).⁶¹

Fra i due a riscuotere il suo favore è il primo approccio, che è caratterizzato da tre fasi: si parte dai dati dell'esperienza, si traducono in forma matematica, si procede alla trattazione puramente matematica del problema; e infine si traducono i risultati matematici nella forma più adatta all'applicazione. Per quanto riguarda il secondo approccio Segre osserva:

Diciamo subito che questo 2° indirizzo ha una grande importanza, anche filosofica. Esso ha messo bene in evidenza che cosa è la matematica pura; ed ha contribuito molto a porre il *rigore* in varie parti della matematica. Ma, collo staccarsi dalla *realtà*, vi è il pericolo di finire con costruzioni, che pur essendo logiche, hanno troppa artificiosità, non possono avere importanza scientifica duratura.» (pp. 13-14)

Egli era infatti convinto che lo scopo della matematica fosse quello di insegnare «a ragionare bene; a non contentarsi di parole vacue; a trarre conseguenze dalle premesse, a riflettere e scoprire da sé; [...] a parlare con precisione» (p. 42), ma riteneva anche che nell'insegnamento secondario la matematica non dovesse essere considerata come fine a se stessa: essa, invece «deve nascere dal mondo esterno e poi a quello applicarsi» (p. 15). Il primo approccio alla matematica dovrebbe essere, pertanto, sperimentale e intuitivo, in modo che l'allievo impari «non solo a *dimostrare* le verità già note, ma anche a fare le scoperte, a risolvere da sé i *problemi*» (p. 16), mentre «al rigore perfetto in certe cose si può giungere *più avanti*. Può la gioventù procedere *per gradi*, come l'umanità» (pp. 25-26). Inoltre, per motivare lo studio della disciplina e rendere la materia più vicina al mondo reale, l'insegnante dovrebbe presentare alcune applicazioni della matematica alle altre scienze quali la fisica, l'astronomia, l'economia politica, la matematica finanziaria e la geografia (pp. 41, 42, 119).

È quindi naturale che per Segre scopo primario dell'insegnamento della matematica sia quello di sviluppare tanto le capacità di ragionamento quanto l'intuizione e non a caso, per quanto riguarda il metodo da seguire nel presentare ai giovani di scuola secondaria questa disciplina, le sue preferenze vanno a quello *euristico* nell'esposizione della materia, a quello *analitico* nelle dimostrazioni, a quello *genetico* nello svolgimento delle teorie. Il primo, il metodo socratico, permette all'allievo di scoprire da solo le verità matematiche, il secondo gli consente di entrare nell'officina matematica e di capire il perché di ogni passo di una dimostrazione, il terzo, sviluppando una teoria seguendo il modo in cui si è formata, costituisce un buon avviamento alla ricerca scientifica. Tuttavia Segre non manca di sottolineare ai futuri insegnanti l'importanza di variare i metodi e soprattutto di sceglierli in base «all'argomento, la scolaresca e il tempo disponibile» (p. 44), così come faceva con i suoi studenti universitari, riferendosi in quel caso alla ricerca scientifica.

Per quanto riguarda il delicato rapporto fra intuizione e rigore nell'insegnamento, Segre esorta i futuri insegnanti a trovare un giusto equilibrio tra i due approcci.

⁶¹Le pagine indicate fra parentesi nel testo si riferiscono al quaderno in esame.

Che cosa questo significhi e come si possa conquistare questo equilibrio, risulta evidente dai suggerimenti che egli fornisce ai suoi allievi riguardo ai postulati, alle definizioni e alle dimostrazioni.

I postulati su cui si basa lo sviluppo di una teoria devono, a suo avviso, essere intuitivi, non è necessario che siano indipendenti (p. 17) e devono essere introdotti solo quando si rendano necessari in un ragionamento, senza bisogno di enunciarli tutti insieme fin dall'inizio della trattazione. Segre osserva anche che nelle moderne opere sui fondamenti se ne elencano alcuni «tanto ovvî» - cita gli assiomi di ordinamento di Hilbert - che «non può un ragazzo capire lo scopo di una serie di tali enunciati!» (p. 20).

Per quanto riguarda la definizione, ispirandosi alle regole fornite da Blaise Pascal in *De l'art de persuader*, Segre sostiene che «definire al ragazzo con un lungo discorso delle cose che egli crede già di conoscere è annojarlo» e mette in guardia i futuri insegnanti da un eccesso di rigore:

«Stando al punto di vista esclusivamente logico si dovrebbe bandire nell'insegnamento elementare la parola *linea* o *curva* perché non si hanno gli strumenti per definirla. Ma ciò è assurdo!» (pp. 18-19).

«Non definizioni rigorose, ma schiarimenti, quando la definiz^e (di linea o di area, ...) sarebbe troppo difficile.» (p. 46)

Nell'affrontare il tema della dimostrazione Segre precisa subito che dimostrare proposizioni che sono intuitivamente evidenti è doppiamente dannoso perché sminuisce tanto il ruolo del ragionamento, quanto quello dell'intuizione. Può essere invece utile, a suo parere, presentare abbozzi di dimostrazioni, piuttosto che dimostrazioni rigorose, ma lunghe e pesanti, perché così l'insegnante potrà mostrare «in che modo si fanno le scoperte, come si lavora coll'intuizione; oppure [...] dare un'idea più sintetica, più facile da ricordare, della dimostrazione rigorosa che poi verrà esposta [...] basta che si avvertano gli scolari che la dimostrazione esposta è incompleta» (p. 25). Per questo Segre accoglie, per quanto concerne la geometria, la proposta di Giovanni Vailati di un insegnamento di tipo sperimentale operativo che utilizzi come sussidi didattici la carta millimetrata, il disegno o i modelli geometrici che consentono di «vedere certe proprietà che con il solo ragionamento deduttivo non si sanno ottenere»⁶². Non è un caso che egli abbia invitato la sua allieva Luisa Viriglio a tradurre⁶³ il libretto di Grace e William Young *A First Book of Geometry* (1905), ispirato proprio a questo metodo, dove compare un ampio uso di modellini di solidi costruiti con la carta. L'allievo costruendo e manipolando i modelli con la guida dell'insegnante scopre da sé le varie proprietà e i primi teoremi. A questo proposito sono significativi anche i riferimenti nella bibliografia ai libretti di Karl Giebel e Alfonso Rivelli su costruzione e uso dei modelli geometrici e all'articolo del 1921 dove Marcolongo presenta il suo laboratorio ideale di matematica.⁶⁴

⁶²SEGRE 1891, p. 54.

⁶³GRACE CHISHOLM, WILLIAM YOUNG, *Geometria per i piccoli* (traduzione di L. Viriglio), Torino, Paravia, 1911.

⁶⁴Si veda più avanti nell'edizione di questo quaderno, la sezione *Costruzioni*, della bibliografia.

Se è vero che Segre assegna un ruolo significativo all'intuizione e all'esperienza per «interessare e facilitare», tuttavia per lui è altrettanto importante che l'insegnante metta in guardia gli allievi dagli inganni dell'intuizione stessa e ne mostri l'insufficienza per concepire taluni enti quali, per esempio, una curva senza tangenti (p. 43). Inoltre egli raccomanda di far osservare agli allievi «la differenza fra l'esattezza teorica e l'approssimazione pratica» (pp. 5, 29).

Quanto Segre fosse attento agli errori, alle cattive abitudini, ai punti deboli e alle idiosincrasie degli allievi, emerge a chiare lettere nei consigli pratici che non esita a offrire qua e là ai futuri insegnanti:

«Bisogna evitar di *annojare!* (p. 24)

Si cerchi di stimolare l'*attività* di mente dello scolare, piuttosto che la *passività* (p. 27)

Si soddisfi qualche volta la domanda di una dimostraz. che non si sarebbe data, ma che un giovane più intelligente possa capire. (p. 27)

Si varino le notazioni e le figure. Non accada che il giovane non sappia risolvere un'equaz. solo perché l'incognita non si chiama x . o una dimostraz. geom.^a solo perché è cambiata la disposiz.^e della fig.^a. (p. 28)

I calcoli non sian troppo lunghi, non essendovi scopo a stancare la pazienza dei giovanetti (p. 32)

Preparazione perfetta alla lez.^e... *Non dettare*: usare un libro di testo [...] *Pazienza* con gli scolari; ripetere se non han capito; non scandalizzarsi per errori; cercar di persuadere gli scolari che tutti posson fare, che non occorre un'inclinazione speciale. (p. 42)

Un triangolo qual.^e si faccia scaleno. Gli scolari han la tendenza a preferire le orizzontali e verticali (fatto fisiologico). Si abituino a segnare triang.ⁱ, ang.ⁱ retti, ecc. senza tale particolarità. Un quadrangolo non sia un rettangolo. Due parall.^e non sian orizz.^{li}. Ecc. Le figure non sian sempre disposte nello stesso modo». (p. 44)

L'attenzione su questo quaderno manoscritto fu richiamata per la prima volta da Francesco Tricomi, professore di analisi infinitesimale presso l'Università di Torino, in una conferenza tenuta nell'ambito del Seminario matematico dell'Università e del Politecnico di Torino il 22 febbraio 1940, fatto di rilievo non solo perché un contributo poco noto di Segre veniva reso pubblico, ma anche perché questo accadeva dopo le famigerate leggi razziali del 1938 contro gli ebrei, e assumeva quindi un significato altamente simbolico. La trascrizione del quaderno con una breve prefazione a cura di Tricomi stesso fu poi pubblicata sui Rendiconti del Seminario matematico dell'Università e del Politecnico di Torino.⁶⁵ Tricomi però tralasciava la ricchissima bibliografia ragionata che è significativa delle ampie letture di Segre che spaziavano da testi dedicati espressamente alla didattica generale e a quella della matematica a testi sui fondamenti e sulla storia della matematica, dalle raccolte di esercizi ai manuali di aritmetica, algebra, geometria e trigonometria, da libri dedicati alle costruzioni geometriche a quelli su complementi relativi ai vari settori della matematica elementare, e altro ancora. L'indicazione bibliografica dei

⁶⁵FRANCESCO TRICOMI, *Essenza e didattica delle Matematiche in un manoscritto inedito di Corrado Segre*, Rendiconti del Seminario matematico dell'Università e del Politecnico di Torino, 7, 1938-40, pp. 101-117.

vari testi e articoli, inoltre, è di tanto in tanto accompagnata da commenti personali di Segre e dalla collocazione dei volumi nella Biblioteca matematica torinese, utile certamente per lui stesso, ma anche per i suoi allievi.

Il particolare approccio metodologico, le citazioni e la bibliografia stessa, mostrano come punto di riferimento di Segre fossero soprattutto i francesi H. Poincaré, C. A. Laisant, E. Borel, J. Hadamard e i tedeschi P. Treutlein, M. Simon e F. Klein, matematici impegnati a valorizzare nell'insegnamento secondario il ruolo dell'intuizione e dell'esperienza a fronte di un approccio troppo improntato al rigore logico.

In buona sostanza, come emerge da quanto detto, Segre condivideva gli assunti metodologici e pedagogici di Klein: riteneva importante colmare la frattura fra insegnamento secondario e universitario introducendo precocemente i concetti di funzione e di trasformazione; preferiva il metodo genetico nell'insegnamento di una teoria perché costituisce un buon avviamento alla ricerca scientifica; riteneva che il primo approccio alla matematica dovesse essere sperimentale e intuitivo, in modo da indurre l'allievo a fare le scoperte e a risolvere i problemi da sé; attribuiva importanza didattica alle applicazioni della matematica alle altre scienze per collegare maggiormente l'insegnamento con il mondo reale e sosteneva l'importanza di un approccio storico. Infine, come Klein, riteneva che nella formazione degli insegnanti le matematiche elementari considerate da un punto di vista superiore dovessero avere un posto di particolare rilievo.⁶⁶

Il significato che Segre attribuiva alla locuzione 'matematiche elementari da un punto di vista superiore' è analogo a quello di Klein e deriva dall'idea che non vi sia separazione fra la matematica scolare e quella accademica e che si debbano evidenziare le mutue connessioni fra i problemi delle varie discipline in modo che gli insegnanti acquisiscano una comprensione più profonda dei concetti base della matematica e una più ampia visione del paesaggio matematico nel suo complesso:

«My task - scrive Klein - will always be to show you the *mutual connection between problems in the various disciplines*, these connections use not to be sufficiently considered in the specialised lecture courses, and I want more especially to emphasize the relation of these problems to those of school mathematics. In this way I hope to make it easier for you to acquire that ability which I look upon as the real goal of your academic study: the ability to draw (in ample measure) from the great body of knowledge taught to you here vivid stimuli for your teaching.»⁶⁷

Per esempio queste caratteristiche sono evidenti nella parte, dedicata ai problemi risolubili o non risolubili con riga e compasso, del quaderno sopra citato *Vedute superiori sulla geometria elementare* (1916-17) caratterizzata da un approccio storico e dall'attenzione alle connessioni fra geometria e algebra.

Anche sul concetto di intuizione Segre sembra accogliere il punto di vista di Klein, che distingueva fra intuizione ingenua, importante nella fase di scoperta di

⁶⁶Cfr. su questo argomento JEREMY KILPATRIK, *A Higher Standpoint*, in *Materials from ICME 1*, Regular Lectures, pp. 26-43 2008/2014:

https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/About_ICMI/Publications_about_ICMI/ICME_11/Kilpatrick.pdf and GERT SCHUBRING, *The Notion of Elementary mathematics*, in FELIX KLEIN, *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint*, Vol. 1 *Arithmetic, Algebra, Analysis*, pp. v-xii, Berlin, Springer, 2016.

⁶⁷FELIX KLEIN, *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint*, Berlin, Springer, 2016, vol. I, p. 2.

una teoria, e intuizione raffinata che interviene nell'elaborazione dei dati forniti dalla prima e nello sviluppo logico rigoroso della teoria stessa.⁶⁸

Nel già citato articolo del 1891, che sta all'origine di una celebre polemica con Peano,⁶⁹ egli scrive:

«Così è avvenuto frequentemente che il primo modo di giungere ad una verità non sia stato pienamente soddisfacente, e che solo dopo la scienza sia riuscita a completarne la dimostrazione [...] Ma non rigetterà senz'altro quei procedimenti incompleti nelle ricerche difficili in cui non possa sostituirli meglio: poiché la storia della scienza lo ammaestra appunto sull'utilità che tali metodi hanno sempre avuto [...]. Ora nel fare uso di simili mezzi d'investigazione il giovane deve badare che qui, come nelle salite difficili su erte pericolose, per non cadere nell'abisso o nell'errore ci vuol destrezza, prudenza e pratica. E dopo essersi valso colla massima cautela di quei mezzi per le sue scoperte deve cercare se non gli riesce di sostituirli con dimostrazioni sicure.»⁷⁰

Qui egli si riferisce alla ricerca scientifica, mentre nelle lezioni di magistero pensa soprattutto al metodo di insegnamento in cui il ricorso a una forma di intuizione ingenua può essere utile: «[Intuire] significa - egli scrive - lo scorgere una verità spontaneamente, senza ragionamenti e senza esperienze, ma è frutto d'incoscienti ragionamenti od esperienze» (p. 15), basati su conoscenze precedenti che vengono scelte a livello inconsapevole e combinate in nuovi modi o che suggeriscono analogie.⁷¹ Tuttavia, come si è detto, se per Segre era importante sollecitare l'intuizione dei ragazzi, era altrettanto importante evidenziarne gli inganni e arrivare gradualmente alla sistemazione logica della materia studiata.

Questo genere di riflessioni non costituiva un fatto isolato: l'intuizione, messa in crisi dalla potente opera di rigorizzazione nella matematica (Weierstrass, Cantor, Peano), attraversava nel primo Novecento un momento particolarmente vitale tanto in ambito filosofico, quanto nel campo della ricerca scientifica e diventava argomento di dibattito anche fra coloro che si occupavano di problemi dell'insegnamento.

Non essendo questa la sede per approfondire questo aspetto ci limitiamo solo a osservare che è sintomatico che la International Commission on the Teaching of Math-

⁶⁸FELIX KLEIN, *On the mathematical character of space-intuition and the relation of pure mathematics to the applied sciences* (1893), in *Lectures on mathematics delivered from Aug. 28 to Sept. 9, 1893 ... at Northwestern University Evanston, Ill.* by F. Klein, reported by A. Ziwet. New York, Macmillan and C., 1894, pp. 41-50, a p. 42.

⁶⁹Cfr. in merito GIACARDI 2001 e C. SILVIA ROERO, *Giuseppe Peano, geniale matematico, amorevole maestro*, in RENATA ALLIO (a cura di) *Maestri dell'Ateneo torinese dal Settecento al Novecento*, Torino, Centro Studi per la Storia dell'Università di Torino, Sesto Centenario, Torino 2004, pp. 115-144. ERIKA LUCIANO, *At the Origins of Functional Analysis: G. Peano and M. Gramegna on ordinary differential Equations*, *Revue d'histoire des mathématiques*, 12, 2006, pp. 35-79.

⁷⁰SEGRE 1891, p. 53, 54.

⁷¹La definizione di Segre richiama immediatamente alla mente quella di Poincaré: «Qu'est-ce, en effet, que l'invention mathématique? Elle en consiste pas à faire de nouvelles combinaisons avec des êtres mathématiques déjà connus [...] Inventer c'est discerner, c'est choisir [...] deviner des harmonies et des relations cachées [...] ce travail inconscient n'est fécond que s'il est, d'une part, précédé, et, d'autre part, suivi d'une période de travail conscient.» (HENRI POINCARÉ, *L'invention mathématique*, *L'Enseignement Mathématique*, 10, 1908, pp. 357-371, alle pp. 360-36).

ematics lanciasse nel 1911 un'inchiesta internazionale sul ruolo del rigore, dell'intuizione e dell'esperienza nell'insegnamento medio. Dal rapporto, presentato l'anno seguente da David E. Smith sulla rivista *L'Enseignement mathématique*,⁷² emerge come l'intuizione fosse maggiormente valorizzata in Austria, Germania e Svizzera piuttosto che in Inghilterra, Francia e Stati Uniti e come i temi più dibattuti fossero soprattutto l'insegnamento della geometria e l'introduzione o meno del concetto di funzione. Inoltre uscivano in quegli anni numerosi libri e articoli dove si affrontava il tema dell'intuizione tanto nella ricerca, quanto nell'insegnamento da parte di autori quali Poincaré, Hadamard, Laisant, Borel, Simon, Treutlein, e Klein, autori ben noti a Segre come si è già rilevato.

In Italia il tema era spesso oggetto di discussione nei convegni dell'Associazione Mathesis, associazione nazionale degli insegnanti di matematica fondata a Torino da Rodolfo Bettazzi nel 1895-1896, in articoli, recensioni e dibattiti sulle principali riviste rivolte agli insegnanti, ed anche la legislazione scolastica era influenzata dalle discussioni sul tema come mostrano i diversi provvedimenti legislativi circa l'insegnamento della geometria intuitiva.⁷³

Il contributo di Segre nel campo della didattica della matematica rimase limitato alle lezioni presso la Scuola di Magistero, egli tuttavia per diciotto anni formò tutti gli insegnanti di matematica che uscirono dall'Università di Torino, favorì la diffusione della visione metodologica e didattica di Klein fra i suoi allievi e con il suo esempio trasmise anche un certo modo di insegnare la matematica, che sia a livello universitario, sia a livello secondario, valorizza l'intuizione, incoraggia la creatività, si avvale di più metodi, e stabilisce collegamenti fra settori diversi in una visione unitaria della matematica. Anche in questo aspetto fu un caposcuola, per quanto i suoi discepoli, pur condividendone i principali assunti metodologici e epistemologici, li abbiano interpretati, approfonditi e declinati in accordo alla propria personalità e alle differenti esperienze individuali.⁷⁴

⁷²DAVID E. SMITH, *Intuition and experiment in mathematical teaching in the secondary schools*, *L'Enseignement mathématique*, 1912, pp. 507-534, tradotto in parte da Guido Castelnuovo sul Bollettino della Mathesis, 1912, pp. 134-139.

⁷³Cfr. per esempio i saggi di Aldo Brigaglia, Paola Gario, Simonetta Di Sieno e Livia Giacardi in LIVIA GIACARDI (a cura di), *Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*, Pubblicazioni del Centro Studi Enriques, La Spezia, Agorà Edizioni, 2006 e MARTA MENGHINI, *La geometria intuitiva nella scuola media italiana del '900*, *La Matematica nella Società e nella Cultura*, s. I, III, 2010, pp. 399-429.

⁷⁴Cfr. LIVIA GIACARDI, *The Italian School of Algebraic Geometry and the Teaching of Mathematics in Secondary Schools: Motivations, Assumptions and Strategies*, in *Geometria delle varietà algebriche, Convegno in occasione del settantesimo compleanno di Alberto Conte*, Rendiconti del seminario matematico. Università e Politecnico di Torino, Vol. 71, 3-4, 2015, pp. 421 - 461.



4. Corrado Segre e la moglie Olga Michelli (UTo-ACS)



5. Lapide in onore di Corrado Segre
(Dipartimento di Matematica, via C. Alberto, 10 Torino)

Ringraziamenti

La pubblicazione di questo volume è stata possibile grazie al sostegno del Centro Studi di Storia dell'Università di Torino, cui va la nostra più viva gratitudine. In particolare esprimiamo la nostra riconoscenza al Comitato scientifico che lo ha accolto nella collana Lezioni e Inediti di "Maestri" dell'Ateneo Torinese. Il nostro grazie più sentito va ai due referee per gli utili suggerimenti e ai colleghi e amici che in vario modo ci hanno aiutati nelle nostre ricerche, Aldo Brigaglia, Silvia Capuzzo, Claudio Fontanari, Paola Gario, Erika Luciano, C. Silvia Roero e Antonio Salmeri.

Un grazie particolare a Clara Silvia Roero per l'attenta rilettura del manoscritto.

La nostra più viva riconoscenza va inoltre al direttore Marino Badiale e a tutto il personale della Biblioteca Speciale di Matematica "Giuseppe Peano" del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino - Laura Garbolino, Orietta Piccini, Antonella Taragna, Giulia Scarcia, Giuseppe Semeraro, Silvia Oddone - a Paola Novaria e a Giuliana Borghino Sinleber dell'Archivio Storico dell'Università di Torino per l'interesse e l'efficienza con cui hanno coadiuvato le nostre ricerche bibliografiche e archivistiche.

Un grazie particolare ai Fratelli Fuà, Daniele e Silvano, per aver donato all'Università di Torino il cospicuo fondo di documenti inediti di Corrado Segre da cui sono tratte alcune delle fotografie riprodotte nel volume.

Infine desideriamo ringraziare Micaela Amplatz per aver trascritto in TeX il quaderno di Segre del 1890-91 e soprattutto a Silvia Capuzzo per la pazienza e la perizia con cui ha curato la trascrizione in TeX e la composizione del volume.

I Quaderni manoscritti

Nota editoriale

I due quaderni manoscritti, autografi, che qui si pubblicano provengono dal *Fondo Segre* della Biblioteca Speciale di Matematica “Giuseppe Peano”, del Dipartimento di Matematica dell’Università di Torino. Tale fondo è in gran parte accessibile sul sito curato da Livia Giacardi:

<http://www.corradosegre.unito.it/>.

Il primo dei due quaderni, *Introduzione alla geometria sugli enti algebrici semplicemente infiniti* (1890-91), consta di 218 pagine (158×108 mm) più 1 carta incollata nella pagina successiva al frontespizio del quaderno riportante l’Indice. La segnatura nel *Fondo Segre* è Quaderni. 3.

Il secondo [*Appunti relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero*], non datato e privo di titolo, consta di 126 pagine (148×103 mm), più 1 carta incollata alla pagina 29 la cui numerazione 41-42 appare esterna a quella del quaderno stesso. Il quaderno reca sulla copertina l’indicazione “II”. La segnatura nel *Fondo Segre* è Quaderni. 40.

I criteri adottati per la trascrizione mirano a rispettare il più possibile il testo originale. In tale ottica si sono mantenute le abbreviazioni tranne in rari casi in cui, risultando la comprensione difficoltosa, si è completata, tra parentesi tonde, la parola abbreviata. Si è intervenuti soltanto là dove erano presenti errori ortografici o refusi. Tutte le parole sottolineate nel testo originale sono state riportate in carattere corsivo. Il cambio di pagina è segnalato con il simbolo //. A margine del testo, fra parentesi quadre, sono stati indicati i numeri delle pagine originali di ciascun quaderno perché l’Autore nel corso della trattazione spesso rimanda a temi trattati in sezioni precedenti. I salti nella numerazione delle pagine segnalano la presenza di una o più pagine bianche nel quaderno.

Per quanto riguarda le note al testo, è stato necessario distinguere quelle dell’Autore da quelle dei curatori: le prime sono indicate con le cifre arabiche, le seconde con i numeri romani. Ogni integrazione delle note dell’Autore è posta fra parentesi quadre. Le note dei curatori hanno lo scopo di fornire le indicazioni bibliografiche degli articoli e delle opere citate e cenni biografici sugli autori menzionati meno familiari ai lettori non specialisti; di quelli più noti si è ritenuto sufficiente indicare le date di nascita e di morte essendo ormai disponibili in rete ottimi repertori biografici. Un terzo tipo di note, contrassegnate dall’indicazione *Nota del curatore*, contiene informazioni di carattere generale sul testo.

CORRADO SEGRE

Lezioni di
Geometria superiore
1890-91

*Introduzione alla geometria sugli enti algebrici
semplicemente infiniti*



6. Gino Loria (in centro) e Corrado Segre (secondo da destra) con Luisa Pochintesta, Adelina Pochintesta, Sofia Rolandi-Meroni, Rachele Meroni, Pierino Meroni, Teresa Lorenzi-Galante, Guicciardini-Vaj e Carla Marchesi-Taddei.

Indice

Cap. 1°.	Preliminari	pag.	1
Cap. 2°.	Degl'iperspazi	"	13
Cap. 3°.	Oggetto della Geometria su una ∞^1 algebrica.		
	Corrispondenze algebr ^e . Serie lineari	pag.	47
Cap. 4°.	Geometria sugli enti razionali	"	68
Cap. 5°.	Serie lineari ∞^1 . Genere degli enti algebrici	"	82
Cap. 6°.	Formola di Zeuthen. Varietà ∞^1 di spazi e loro applicazioni. Le serie speciali	"	104
Cap. 7°.	Serie complete. Serie residue. Curve aggiunte. Applicazioni	"	129
Cap. 8°.	Il metodo algebrico di Brill e Nöther	"	144
Cap. 9°.	Rappresentazioni reali dell'ente algebr ^o .		
	Il metodo funzionale di Riemann	"	157
Cap. 10°.	I moduli. Le serie lineari sugli enti generali	"	194

[1]

Introduzione alla geometria sulle ∞^1 algebriche

Cap. 1°. Preliminari

Considerazioni generali sui legami e le coincidenze fra la Geometria e l'Analisi. Metodo delle coordinate. Due modi di fondare l'edificio geometrico, o partendo dai postulati relativi allo spazio, a punti, rette, piani, ecc., ovvero introducendo per via puramente analitica questi elementi, come gruppi di numeri (coordinate), ecc. Conseguenze che ne derivano. Elementi complessi: ragione della loro introduzione.

Cenno sulle coordinate proiettive omogenee. Altri enti che si posson determinare // con coordinate sono quelli dati da un'equazione, cioè le curve piane, [2]

superficie, ecc., che ora accenniamo.

Curve piane algebriche. Luoghi ed involuppi. Ordine e classe. Punti multipli e tangenti multiple. Cenno sulle polari. Definizione di curve *aggiunte* ad una data. Le prime polari sono aggiunte. Le molteplicità $s_1, s_2, \dots$ dei punti singolari di una curva irriducibile d'ord. n sono tali che $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum \frac{1}{2}s(s-1) \geq 0$. Invero si potrà condurre (almeno) una curva aggiunta d'ordine $n-1$ per $\frac{1}{2}(n-1)(n+2) - \sum \frac{1}{2}s(s-1)$ punti semplici della curva [numero che è positivo, perché uguale ad $n-1$ aumentato della metà di $n(n-1) - \sum s(s-1)$, e questa differenza si vede
[3] esser positiva considerando¹ le // intersezioni della curva con una curva aggiunta d'ordine $n-1$, ad es. la prima polare di un punto qual.] ed il numero complessivo delle intersezioni che così si avranno $\sum s(s-1) + \frac{1}{2}(n-1)(n+2) - \sum \frac{1}{2}s(s-1)$ dovrà essere $\leq n(n-1)$. *Genere* di una curva piana dotata di sole singolarità ordinarie $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum \frac{1}{2}s(s-1)$. Caso che vi siano solo punti doppi. Cuspidi e flessi. Cenno sulla deduzione delle formole di Plückerⁱ dalla teoria delle polari. Dalla I^a formola si trae $\nu + r - 2n = 2p - 2$, espressione utile del genere. Il genere corrisponde per dualità a se stesso [perché da $\rho - r = 3(\nu - n)$ si trae $\nu + r - 2n = n + \rho - 2\nu$].

Superficie d'ordine n : numero dei coefficienti o dei punti che le determinano. Classe, rango, punti e linee multiple.

[4] Complessi di rette; grado. Numero // dei coefficienti; alterabilità dell'equazione; non si può alterare se si tien conto della generazione del complesso, della polarità rispetto a questo (cioè all'equazione) ecc. Complessi speciali. Complessi lineari: cenno sulle loro proprietà; caso dei complessi lineari speciali.

Connessi in generale di elementi qualunque tolti a forme fondamentali qualunque: esempi particolari. Coefficienti.

Per tutte le specie di enti enumerate abbiamo nei coeffⁱ delle loro equazioni delle *coordinate* nello stesso senso che per gli elementi. La specie più vasta è quella dei

¹Cfr. Bertini [si tratta del matematico Eugenio Bertini (Forlì 1846 - Pisa 1933)], Rendiconti Ist. Lomb. 1888 [si tratta di: BERTINI, E. 1888, *Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche*, Rend. Ist. Lombardo Scienze Lett., 2, 21, pp. 326-333 e 413-423]. Del resto la considerazione che quel numero è positivo non è necessaria: in caso opposto la disuguaglianza si avrebbe a fortiori.

ⁱJulius Plücker (Elberfeld 1801 - Bonn 1868).

connessi: essa abbraccia le precedⁱ, anche i gruppi di n elemⁱ di una forma fond. 1^a sp., coll'equaz. $f(x) = 0$. Anche le determinazⁱ degli elemⁱ rientrano in questa, poiché le loro coord. sono i // coeff.ⁱ delle loro equazⁱ. [5]

Diremo che queste varietà (ed altre che si vedranno in seguito) sono *lineari*, e di *dimensione* data dal numero delle coord. non omogenee. Entro una varietà lineare stanno altre varietà che possiamo definire² in due modi diversi. Le coord. $x, y, \dots$ sian funzⁱ date di r parametri indipⁱ $t, u, \dots$ sicché $x = f(t, u, \dots)$, $y = g(t, u, \dots)$, $\dots$, funzⁱ le quali mutino in generale valore mutando $t, u, \dots$, e più precisamente assumano dati valori solo per una serie discreta di gruppi di valori di $t, u, \dots$; la varietà si dice ∞^r se corrisponde ai valori *reali* di $t, u, \dots$ e per questi le funzⁱ sono definite ed hanno in generale le derivate prime. Ma noi diremo la varietà ∞^r quando corrisponde ai valori *complessi* di $t, u, \dots$ pei quali quelle // funzⁱ s'intendono [6] definite e funzⁱ nel senso di Riemannⁱⁱ (monogene di Cauchyⁱⁱⁱ), cioè aventi in generale le prime derivate. - Esempi: curve, superficie, rigate, sistemi e complessi di rette.

Definiz^e di funzⁱ algebriche e di irriduttibilità: le funzⁱ ad un sol valore son razionali. *Varietà algebriche*: quando le $f, g, \dots$ son funzⁱ algebriche³; varietà *riduttibili*.

Da una o più equazⁱ algebriche fra $x, y, \dots$ è definita una varietà algebrica: ma questa definizione non vale per tutte⁴. Una varietà algebrica ∞^{k-1} entro la varietà lineare ∞^k è però sempre data da un'equaz. alg. fra le coord. $x, y, \dots$ (eliminando i paramⁱ $t, u, \dots$): così le curve piane, le superf. ecc. *Varietà razionali*: quando le $f, g, \dots$ son funzⁱ alg^e ad un sol valore, cioè razionali, ed // un elemento della [7]

²riguardo alla *dimensione*.

ⁱⁱBernhard Riemann (Breselenz, Hannover, 1826 - Selasca, presso Intra, 1866).

ⁱⁱⁱAugustin Louis Cauchy (Parigi 1789 - Sceaux, Seine, 1857).

³legate eventualmente da una o più equazⁱ date.

⁴se con sole $k - r$ equazⁱ si vuol definire una ∞^r . Ma con un numero conveniente di equazⁱ si definisce ogni varietà. Kronecker [si tratta del matematico tedesco Leopold Kronecker (Liegnitz 1823 - Berlino 1891)] Festschrift p. 30 [si tratta dell'opera: KRONECKER, L. 1882, *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen (Abdruck einer Festschrift zu Heroin Ernst Eduard Kummer's Doctor-Jubiläum)*, Jour. für die reine und angewandte Math., 92, pp. 1-122]. V. anche Vahlen [si tratta del matematico austriaco Karl Theodor Vahlen (Vienna 1869 - Praga 1945) professore presso l'Università di Greifswald dal 1904. Fu sostenitore del nazismo. Diede contributi alla Teoria dei numeri e alla matematica applicata.] nel Crelle 108 p. 346 [si tratta di: VAHLEN, K. TH. 1891, *Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumcurven*, Jour. für die reine und angewandte Math., 108, pp. 346-347].

varietà corrisponde in generale ad un sol gruppo di valori dei paramⁱ $t, u, \dots$. Vedremo poi che per le ∞^1 razionali questa 2^a condiz^e non occorre. Curve, superf., ecc. razionali: come il loro studio si riduca per varie questioni a quello delle varietà *lineari* in cui $t, u, \dots$ son le coord.^e

Varietà lineari o *sistemi lineari* di forme si hanno, più in particolare, quando le coord $x, y, \dots$ son funzⁱ *lineari* (fratte col denom. comune) di $t, u, \dots$, ossia quando le equazⁱ degli enti si posson scrivere: $\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_r f_r = 0$ ove le λ sono i param.ⁱ Se le forme f sono linearm^e indepⁱ, cioè non legate da alcuna relaz. $a_0 f_0 + \dots + a_r f_r \equiv 0$ lineare a coeffⁱ costanti non tutti nulli, allora la varietà è ∞^r poiché l'ente [8] $\sum \lambda_i f_i = 0$ coincide con l'ente $\sum \mu_i f_i = 0$ solo quando le λ sian pro//porzionali alle μ . (i rapporti delle λ soddisfano alla condiz. posta sui paramⁱ $t, u, \dots$ a pag. 5 nella definiz^e generale di ∞^r).

L'indipendenza lineare delle f significa non stare in un sistema lineare di dimens. $< r$, cioè che non accade che il sistema determ.^o da alcune di esse contenga pure le altre (da cui si potrebbe quindi prescindere). Se $\varphi_i \equiv \sum a_{ik} f_k = 0$ sono forme qualunque del sist., il sistema lineare da esse determinato $\sum \mu_i \varphi_i = 0$ ossia $\sum_k f_k \sum a_{ik} \mu_i = 0$ è tutto contenuto in quello. Se le φ sono $r+1$ cioè $\varphi_0, \dots, \varphi_r$, si può porre $\sum \mu_i \varphi_i \equiv \sum \lambda_k f_k$, cioè $\sum_i a_{ik} \mu_i = \lambda_k$ sempre che non sia $|a_{ik}| = 0$ ⁵, il che esigerebbe che esistessero delle μ non tutte nulle per cui $\sum_i a_{ik} \mu_i = 0$, ossia [9] $\sum \mu_i \varphi_i \equiv 0$, cioè che le φ fossero legate linearm^e. Se dunque queste // sono indepⁱ linearm^e il sistema lineare ∞^r da esse determ.^o coincide con quello determ.^o dalle f : ciò mostra che le f son forme *qualunque* linearm^e indepⁱ del sistema. -

Dal fatto che se un sist.^a lin.^e contiene alcune forme, continene pure il sist.^a lin.^e determ.^o da queste si traggono conseguenze importanti. L'intersez. di due sistⁱ linⁱ è pure un sist.^a lineare (ove esista). Due sistⁱ linⁱ $\infty^k, \infty^{k'}$ che non abbiano alcuna forma comune stanno in un sist.^a lin.^e $\infty^{k+k'+1}$ tale che ogni sist.^a l^e che contenga quei due deve pur contenere questo (se i due sistⁱ sono determ. dalle forme $f_0, f_1, \dots, f_k; f'_0, f'_1, \dots, f'_{k'}$, queste saran tutte linearm. indep.ⁱ poiché se fosse $a_0 f_0 + \dots + a_k f_k + a'_0 f'_0 + \dots + a'_{k'} f'_{k'} \equiv 0$ ne seguirebbe che i 2 sistⁱ avrebbero una

⁵In altri termini si posson ricavare dalle $\varphi_i \equiv \sum a_{ik} f_k$ le f come combinazⁱ lineari delle φ .

forma comune; ora tutte quelle $k + k' + 2$ forme // determinano appunto il sist^a $\infty^{k+k'+1}$). [10]

Due tali sistⁱ $\infty^k, \infty^{k'}$ si dicono linearm. indepⁱ; entro un sist^a lin. $\infty^{k+k'+1}$ si determinano facilmt. due tali sistⁱ indepⁱ ecc. Due sistⁱ linⁱ $\infty^k, \infty^{k'}$, A e A' abbiano comune uno $\infty^i B$; entro A' prendiamo un sist^a l.^e $\infty^{k'-i-1} C$ linearm. indep. da B : esso determinerà con A da cui sarà indep. un sist^a l.^e $\infty^{k+k'-i}$ contenente A e A' , e contenuto in ogni sist^a lin^e passante per A, A' , cioè il *minimo* sist^a lin^e in cui quei due stiano insieme. In altri termini entro un sist^a ∞^r due sistⁱ $\infty^k, \infty^{k'}$, che non stiano in un sist^a minore, si tagliano in un sist^a $\infty^{k+k'-r}$ (in uno super^e se stanno in un sist^a infer.).

Caso di $k' = r - 1$; caso di $k' = r - 1$ e $k = 1$: se ne trae la costruzione di un // sist^a lin^e ∞^r mediante uno ∞^{r-1} ed una forma esterna (che si congiunge a quello con fasci); esempi. [11]

Considerazioni speciali relative ai sistemi lineari di gruppi di n pⁱ di una retta (involuzioni), di curve piane e sup. d'ord. n . Se in un tal sistema ∞^r si fissan più punti con date molteplicità (ed anche con qualche tangente) si hanno, ove esistano, le forme di un sist^a lin^e: poiché quelle condizⁱ son lineari nelle λ . Caso che si diano r punti semplici. Caso che il sist^a dato si componga di *tutte* le curve o sup. d'ord. n . - Nel sist^a lin^e determ^o da più forme ogni p. s-plo per queste sarà s-plo per tutte; e se una retta è tang. ivi a quelle, sarà tg. a tutte⁶. - Punti base o fondamentali di un sist^a; // ordinari e straordinari. I fasci di curve o sup. d'ord. n e le reti di sup. hanno sempre punti base: proprietà che vi si collegano*. - Ogni sist^a lin^e $\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_r f_r = 0$ è segato da una retta o da un piano in un sist^a lin^e $\lambda_0 f_0^{(0)} + \dots + \lambda_r f_r^{(0)} = 0$, il quale però può esser di dimens^e minore, e cioè sarà ∞^{r-h-1} se la retta od il piano fan parte di un sist^a ∞^h contenuto nel dato. // [12]

⁶Se le forme che determinano il sistema hanno una parte comune, questa si stacca da tutto il sist^a, e la parte rimanente descrive un sist^a lineare. Sistemi degeneri.

*Nota del curatore: L'asterisco inserito da Segre a questo punto non corrisponde a nulla.

[13]

Cap. 2°. Degl'iperspazi

Il nostro non essendo un corso sugl'iperspazi, ma un corso che si varrà di questi sia per raggiungere la massima generalità, sia come strumento di ricerca, ci limiteremo a dire intorno ad essi le cose fondamentali.

Concetto d'iperspazio. - Ricordiamo (pag. 1) la via puram^e analitica d'introdurre i punti come gruppi di 3 numeri, i piani ecc. come equazioni ecc.: perché fermarsi a 3 numeri? D'altra parte le varietà lineari considerate nel Cap. preced., i sistⁱ linⁱ in cui le forme eran determ^e dai paramⁱ omogⁱ $\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_r$ ci conducevano ad enti geometrici determinabili ... con gruppi non solo di 3 ma più coord.^e E si poteva continuare, considerando entro ad un sist. lineare di forme ∞^r la varietà ∞^{r-1} data da

- [14] un'equ. di // grado n fra le $\lambda_0 \dots \lambda_r$: i coeff. si posson assumere come coord. della varietà ∞^{r-1} entro al sistema di tutte ...; e così via. Si complica l'ente geometrico, ma la rappresentaz. analit^a è sempre un gruppo di numeri, variabili ad arbitrio. A questa stessa rappresentaz^e anal. si giunge se nello spazio si conservano tutti i postulati, come quello che per 2 punti passa *una* retta, ecc., ma si toglie quello delle 3 dimensioni: allora i punti della retta (che son determ. da 1 numero) congiunti ad un punto esterno danno il piano (i cui pⁱ saran determ. da 2 numeri), e congiungendo i pⁱ di questo ad uno esterno si ha uno spazio a 3 dimensⁱ, e congiungendo ad 1 p. esterno (supposto esistere) si ha uno spazio a 4 dimensⁱ; ecc. ecc. e si giunge allo
- [15] spazio a r dimensⁱ definito // da r numeri. Valore matematico che avrebbe lo studio dello spazio con tali postulati, quand'anche contraddicessero all'esperienza. - Queste considerazⁱ ci suggeriscono un'estensione del significato delle parole *spazio* e *punto*. Il *punto* sarà per noi: 1° un gruppo di valori di r numeri; 2° un elemento di una varietà lineare ∞^r qualunque in cui quei numeri son le coord^e; 3° un punto ordinario nell'ipotesi che lo spazio effettivo sia ad r dimensioni. Il 1° significato è puramente analitico; il 2° ed il 3° son geometrici, ma il 3° più vincolato a postulati (più fisico) che il 2°. Noi non facciamo però distinzione alcuna: il *punto* è un ente *matematico*; lo *spazio* è la varietà di tutti i punti. Ponendo $r = 3$ ed attenendosi al 3°
- [16] significato si avrà lo spa//zio ordinario.⁷

I vantaggi che si ottengono dall'introduz. degli'iperspazi sono appunto i due di cui si fe' cenno al principio di questo Cap^o. Anzitutto la massima generalità, in quanto si può dire che tutti gli enti geometrici e vari analitici (algebrici) vi rientrano. E non solo i sistemi o varietà lineari, ma ogni altra specie di varietà. Così la varietà delle rette // dello spazio ord^o è una M_4^2 di S_5 ; i complessi, sistemi, rigate, ne sono [17] le M_3 , le superf., le curve, ecc.; il punto di S_5 fuori della M_4^2 non ha un'interpretaz. (solo anal^a) e non occorre. Così si potrebbero studiare le rappresⁱ in iperspazi della varietà delle coppie di punti tolti da due rette o piani, ecc. - L'altra classe di vantaggi degli'iperspazi si ha nelle varie applicazⁱ che essi posson ricevere dalla geometria; alcune ne vedremo; una è quella del considerare gli enti di uno spazio, ad es. quello ordinario, come proiezioni di enti di spazi superiori. Già nella geom. ordinaria si hanno esempi in cui uscendo dalla forma fontam^{le} di cui si tratta la si studia più facilmente: così le involuzⁱ di 2^o (e 3^o) grado di una retta, ricorrendo alla conica (o alla cubica sghemba); // il teor. di Desargues^{iv} sui triangoli omologici; le coniche [18] studiate, a mo' degli antichi, come sezioni del cono circolare; ecc.

Qui però si può obbiettare che se per studiare una figura dello spazio ordinario lo si considera come contenuto in un iperspazio, s'introduce con ciò un nuovo postulato: l'essere lo spazio ordinario contenuto in uno superiore, cioè l'esistenza di punti fuori dello spazio ordinario, ecc. Ma così non è: poiché basta sostituire al punto dello spazio ord^o il gruppo delle coordinate, e poi aumentare questo gruppo con nuovi numeri, e così si avrà l'iperspazio che occorre. - Si può replicare che questo procedimento è puramente analitico. Quantunque noi non diamo una grande importanza all'attenersi piuttosto a concetti geo//metrici che ad analitici, [19] pure possiamo tradurre geometricamente ciò che ora s'è detto, in due modi diversi. Noi possiam riferire univocamente e linearmente lo spazio ordinario ad un sistema lineare di forme ∞^3 , ad es^o ad una invol. di grado n e di 3^a specie di una forma fondam^e semplice. Questa invol. è contenuta, per n abbastanza grande, in una di

⁷Le definizⁱ di pag. 5, 6 delle varietà ∞^k , in partic. di quelle algebriche e razionali si conservano per le varietà contenute nello spazio di dim. r , che s'indicherà con S_r . Notazioni per le varietà stesse: le M_{r-1} algebr. son date da equazⁱ; varietà lineari o spazi entro l' S_r : s'indicano con S_k . L'analogia porta ai nomi di *curva, superf., ..., retta, piano*, entro l' S_r . Punti reali e complessi.

^{iv}Girard Desargues (Lione 1591 - Lione 1661).

quella dimensione che si vuole, e che occorre per i ragionamenti che si voglion fare. Dopo, si ritorna dal sistema lineare ∞^3 di forme allo spazio ordinario, mediante la corrispondenza. Oppure, possiamo direttamente considerare lo spazio ordinario, ai cui punti, come involuppi di 1^a classe, s'aggiunga una superf. fissa di classe $n - 1$,
 [20] come contenuto in uno spazio lineare superiore // i cui *punti* sarebbero superf. di classe n ; le rette ed i piani ordinari sarebbero (sempre aggiungendo a tutti i loro punti la superf. fissa) pure rette S_1 e piani S_2 di quell'iperspazio (v. pag. 11, sistⁱ linⁱ degeneri).

Cenno storico e bibliografico sulla geometria, specialmente proiettiva, degl'iperspazi. In quali direzioni convenga coltivarla, e quali siano quelle facili ricerche che posson servire come esercizi, ma non come lavori scientifici.

Spazi contenuti in un iperspazio.

Definizione degli spazi contenuti in S_r (definiz. tale che se questo è un sistema lineare quelli siano appunto i sistⁱ linⁱ contenuti in esso) mediante le $x_i = \lambda_0 x_i^0 +$
 [21] $\lambda_1 x_i^1 + \dots + \lambda_k x_i^{(k)}$. // Questo spazio, determinato dai pⁱ $x^0 x^1 \dots x^{(k)}$, è un S_k , cioè dalle $\sum_l \lambda_l x_i^{(l)} \equiv \sum_l \mu_l x_i^{(l)}$ segue la proporzionalità delle λ alle μ , se non vi son valori (non tutti nulli) delle λ per cui quelle espressioni s'annullino, cioè se $k \leq r$ e i determinanti... delle coord^e di $x^0 x^1 \dots x^{(k)}$ non son tutti nulli, cioè quei pⁱ linearm^e indipendenti. Se fossero legati linearm^e, starebbero in uno spazio minore. Lo spazio determ^o dai punti $\sum \lambda_l x^{(l)}, \sum \mu_l x^{(l)}, \dots$ sta tutto su quell' S_k . Sicché questo contiene infiniti spazi, e se *su esso* si chiamano coordianate i paramⁱ λ , si ha che anche su esso gli spazi minori son rappresⁱ mediante combinazⁱ lineari delle coord. dei pⁱ che li determinano, ossia con forme lineari. - La proposiz. preced. significa
 [22] che se uno spazio passa per 2 o più punti, passa pure per lo spazio // che questi determinano. Ne segue che l'intersez. di due spazi, se esiste, è un punto oppure uno spazio. Tutto ciò è analogo, anzi identico a cose viste sui sistⁱ lineari (pag. 7 e seguⁱ). Così si ha che due spazi $S_k, S_{k'}$ con un S_i comune stanno in un S_r ove

$r \leq k + k' - i$: questo S_r è determ^o da $i + 1$ pⁱ dell' S_i ed altri $k - i, k' - i$ risp. di $S_k, S_{k'}$.

Dalla rappresentaz. param^a di un S_{r-1} od iperpiano si trae che esso è pur rappresentabile con un'equaz. $\sum \xi_i x_i = 0$; e viceversa; e si trae insieme la condiz. perché $r + 1$ punti stiano in un'iperpiano. Dualità fra punti ed iperpiani. Sistemi lineari (fasci, reti, ecc.) d'iperpiani determinati da h indipendenti (cioè coi determⁱ delle coord. non tutti nulli) $\sum \xi_i x_i = 0, \sum \eta_i x_i = 0, \dots$; da queste equazⁱ si traggono h delle x // come forme lineari delle altre, onde la base di quel sistema lineare $\propto^{h-1}$ [23] ossia l'inters. di h iperpiani indepⁱ sarà un S_{r-h} . Viceversa un S_k si può considerare come l'inters. di $r - k$ iperpiani indep., ossia la base di un sist. lineare $\propto^{r-k-1}$. Così gli spazi entro S_r godono di proprietà duali; spazi duali S_k ed S_{r-k-1} . Considerando un S_k e un $S_{k'}$ come intersⁱ di $r - k, r - k'$ iperpiani, si ha che si tagliano in un S_i ove $i \geq k + k' - r$. Se dunque non stanno in uno spazio inferiore ad S_r sicché (p. 22) $r \leq k + k' - i$, varrà il segno d'uguaglianza. Se $k + k' < r$ non vi è in generale intersez., a meno che i due spazi, i quali stanno sempre in $S_{k+k'+1}$, stiano in uno spazio minore. Se $k + k' \geq r$ essi si tagliano in generale in un $S_{k+k'-r}$; ma si ta//gliano in uno spazio maggiore S_i quando stanno in uno spazio $S_{k+k'-i}$ [24] inferiore ad S_r . Esempi: due spazi duali; uno spazio qualunque ed un iperpiano; ecc.

Rappresentazione degli S_k di S_r con coordinate. Considerandone i pⁱ d'incontro con $k + 1$ S_{r-k} si trovano $(k + 1)(r - k)$ coord^e indepⁱ, cioè che gli S_k di S_r sono $\propto^{(k+1)(r-k)}$. Ma coord^e più simmetriche e che non danno eccezioni si hanno nei determinⁱ della matrice delle coord. dei pⁱ o degl'iperpiani da cui l' S_k è determ^o: v. Clebsch^v Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie (Abhandl. kön. Ges. d. W. zu Göttingen Bd 17, 1872)^{vi}, e poi D'Ovidio^{vii} Le funzioni metriche fondamentali negli spazi ecc. (Memorie Acc. Lincei, ser. 3^a vol. 1^o, 1877)^{viii}. Così gli

^vRudolf Friedrich Alfred Clebsch (Königsberg 1833 - Göttingen 1872).

^{vi}CLEBSCH, R. A. 1872, *Über eine Fundamentalaufgabe der Invarianten Theorie*, Abhandl. K. Gesell. der Wissen. zu Göttingen, Math. Classe, pp. 3-62.

^{vii}Enrico D'Ovidio (Campobasso 1843 - Torino 1933).

^{viii}D'OVIDIO, E. 1876-77, *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante*, Atti R. Acc. Lincei, Memorie Cl. Sci. FMN, 3, 1, pp. 929-986.

- [25] S_k di S_r ap//paiono come formanti una varietà *razionale* di dimens. $(k+1)(r-k)$ nello spazio di dimens. $\binom{r+1}{k+1} - 1$. La condizione d'incidenza di due spazi duali S_k, S_{r-k-1} viene bilineare nelle coord^e dei due spazi.

Elementi fondamentali; punti, iperpiani, ecc. aventi tutte le coordinate nulle meno una.

Proiezione e sezione entro S_r ; forme geometriche fondamentali di questo spazio. Come quelle operazioni servano a riferire fra loro queste forme. Proiettività. Definizione diretta della *corrispondenza lineare* o *proiettiva* fra due S_r mediante le equazioni $x'_i = \sum_k a_{ik} x_k$ ove $|a_{ik}| \neq 0$. Ponendo per le x_k delle forme lineari si vede che gli spazi subordinati dei due S_r si corrispondono pure linearmente. [Collineazione e

- [26] reciprocità. // Punti e iperpiani della collineazione generale entro S_r . Caso particolare dell'omologia e in genere delle collineazⁱ (assiali) $x'_0 = \rho x_0 \dots x'_k = \rho x_k, x'_{k+1} = \sigma x_{k+1} \dots x'_r = \sigma x_r$, che hanno due spazi fondamentali S_k, S_{r-k-1} di pⁱ uniti.]

La corrispondenza lineare fra due forme lascia inalterati i *birapporti* delle forme semplici omologhe, (definiti analiticam. $(abcd) = \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}$).

Posto $P(x_0 \dots x_r), U(1, \dots, 1)$, nel fascio d'iperpiani $\lambda x_0 + \mu x_1 = 0$ si trova che il gruppo che proietta (01UP) ha per birapporto $x_0 : x_1$; e così le coord. in S_r si posson definire come birapporti. Le formule $x'_i = \sum a_{ik} x_k$ possono anche servire per una trasformazione di coordinate; e si trova come dianzi che le x'_i si possono ancora considerare come birapporti rispetto ad un nuovo sistema di riferimento.

- [27] Qui conviene osservare che i birapporti furon // da noi definiti ammettendo già le coord.

Ma nello spazio ordinario essi si posson definire, grazie a Staudt^{ix}, senza coord. o misure, in modo puramente grafico. Analogamente si potrà fare in S_r quando questo si definisca sinteticamente con alcune proprietà (postulati) relative agli S_k subordinati: con ciò si stabiliranno poi le coord^e in S_r e l'equazione lineare per gl'iperpiani. Trovare quali sono quei postulati che caratterizzano sinteticamente l' S_r (cioè le varietà *lineari* di enti qualunque).

^{ix}Karl Georg Christian von Staudt (Rothenburg ob der Tauber 1798 - Erlangen 1867).

Ritornando alle proiettività, se gli elemⁱ fondam^{li} si corrispondono le equazⁱ diventano $x'_i = a_i x_i$, e se inoltre si corrispondono i pⁱ uniti $x'_i = x_i$. La proj^à è determ. da $r + 2$ coppie pⁱ omol.ⁱ Proj^à degeneri: si riducono a proj^à tra forme minori. Proj^à fra spazi sovrapposti. Collineazione. [pag. 25, 26] Cenno sulle omografie involutorie.⁸ - Reciprocità in S_r $\zeta'_i = \sum a_{ik} x_k$, // ossia $\sum a_{ik} x'_i x_k = 0$, $\zeta_i = \sum a_{ki} x'_k$. Punti uniti $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$. Polarità (elementi involutori $\sum a_{ik} x_k = \rho \sum a_{ki} x_k$; tutti se questa vale qualunque sia x , ossia $a_{ik} = \rho a_{ki} = \rho^2 a_{ik}$, onde $a_{ik} = a_{ki}$ oppure $a_{ik} = -a_{ki}$): polarità ordinaria e sistema nullo; questo è sempre degenerare quando r è pari: definisce un complesso lineare di rette $\sum a_{ik} r_{ik} = 0$. Quadriche di S_r : la generaz. come luogo dei pⁱ uniti di una reciprocità si riduce, se questa è degenerare di 1^a, 2^a, ... specie alla generazione con forme inferiori reciproche: i sostegni di queste stanno sulla quadrica; se s'incontrano questa è un cono. //

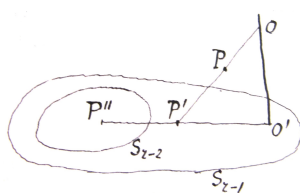
Varietà di dim. $r - 1$ di S_r . Le chiamiamo brevemente *varietà*. Varietà $f(x) = 0$ d'ord. n : numero dei coeffⁱ = $\binom{n+r}{n} = \binom{n+r}{r}$, onde tante sono le varietà d'ord. n di S_r quante quelle d'ord. r di S_n . Conseguenza dello sviluppo $f(\lambda x + \mu y) = \lambda^n f(x) + \lambda^{n-1} \mu \sum y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \lambda^{n-2} \mu^2 \sum y_i y_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} + \dots + \mu^n f(y)$. Punto semplice ed iperpiano tang; punto doppio, ..., punto s-plo e varietà-cono d'ord. s tang. Se il punto è quello fondamentale 0, l'equ. sarà $a_s x_0^{n-s} + a_{s+1} x_0^{n-s-1} + \dots + a_n = 0$. Casi di $s = n - 1$ ed $s = n$. - Polarità: definiz. e proprietà delle varietà polari.

Intersezⁱ di varietà: r varietà d'ord. $n, n_1, \dots, n_r$ si tagliano in $n_1 n_2 \dots n_r$ punti. Un num. minore i di varietà si tagliano in una M_{r-i} che è incontrata in generale // da un S_i in $n_1 n_2 \dots n_i$ punti. [30]

Sistemi lineari $\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_k f_k = 0$ di varietà d'ord. n . Si estendono senz'altro le cose viste a pag. 7-11. Danno una nuova specie di varietà lineari o spazi. Così pure si ha che un p. s-plo per le f è tale per tutto il sistema; se le f hanno una parte comune questa si stacca da tutte e rimane un sist. lineare. Le forme del sistema che passan per dati pⁱ con date multipl^a formano, ove esistano, un sist^a lin^e; ecc. ecc. Quest'ultima proprietà vale anche se i pⁱ dati sono ∞ e ad esempio si dà una curva,

⁸V. Bertini, Rendicⁱ Ist. Lomb 1886 [si tratta di: BERTINI, E. 1886, *Le omografie involutorie in uno spazio lineare a qualsivoglia numero di dimensioni*, Rend. Ist. Lombardo Scienze Lett., 2, 19, pp. 176-183].

- o sup., ... per cui le varietà debban passare con una certa molteplicità: poiché se ne passa più di una, passa tutto il fascio determ. da due, la rete determ. da tre, ecc
- [31] ... Riguardo // poi alla dimens. del sistema che rimane, si noti che un p. s-plo impone $\frac{s(s+1)\dots(s+r-1)}{r!}$ condizⁱ lineari, e se si ha un num. finito di passaggi imposti, sommando tutti i numⁱ di condiz. si avrà un limite super. del numero delle condizⁱ complessive.



- Le varietà alg. M_k di dim. $k < r - 1$, rappres. da equazⁱ $F_1(x_1tu\dots) = 0, F_2(x_2tu\dots) = 0, \dots F_r(x_rtu\dots) = 0$, per projezⁱ in spazi inferⁱ danno var^a algebr. Si noti, anche pel seguito, che una proj. su un S_i da un S_{r-i-1} si può scindere in più proiezioni centrali da centri $O, O' \dots$ dell' S_{r-i-1} (così per la proiezione di P dalla retta OO' sopra l' S_{r-2}). Ora la proj. centrale della M_k dal p. fondam. 1 si ha
- [32] ponendo $x_1 = 0$ e conservan//do $x_2 \dots x_r$. A ciò si può obbiettare che il p. fondam. 1 è particolare in quanto che da esso la M_k si proietta più volte, quanto è il grado di F_1 risp. ad x_1 ; ma si faccia una trasformaz. di coord. e le equazⁱ (più generali) che si avranno per la M_k proveranno di nuovo l'asserto. - Che la proj. della M_k da 1 p., ... da un S_{r-k-2} sia in generale univoca si vede segnando la M_k con un S_{r-k} in un certo num. finito di pⁱ (dalle equazⁱ lineari che danno l' S_{r-k}) e tirando le rette che congiungono questi: se il p. non sta su queste, ..., se l' S_{r-k-2} non le incontra (ma stanno sull' S_{r-k}), la projez. è univoca. - Due S_{r-k} incontrano in generale la M_k lo stesso num. di volte: se $r = k + 1$ è già noto; se $r > k + 1$ si diminuisce r proiettando
- [33] la M_k da 1 p. comune ai due S_{r-k} // (p. che si può sempre ammettere): *ordine* di una M_k . Ogni projez. da pⁱ esterni ha lo stesso ordine ...

Rappresentaz^e analitica delle varietà algebriche più semplice che quella di definiz. Sia una curva e l' S_{r-3} (34...r) la proietti univocam. in $f(x_1x_2) = 0$. Su ogni S_{r-2} proiettante le x_1x_2 son fisse e le $x_3 \dots x_r$ relative ai pⁱ della curva devono essere individuate. E precisamente dalle equazⁱ analoghe $g(x_1x_3) = 0, h(x_2x_3) = 0$ si trae la soluz. comune in x_3 razionalmente in x_1x_2 cioè $x_3 = f_3(x_1x_2), \dots x_r = f_r(x_1x_2)$. Analogamente in generale per una M_k si ha $f(x_1 \dots x_{k+1}) = 0, x_{k+2} =$

$f_{k+2}(x_1 \dots x_{k+1}) \dots x_r = f_r(x_1 \dots x_{k+1})$. In seguito a trasformaz. di coord., che può esser stata necessaria per render univoca la projez. quando le // equazⁱ erano $F_1(x_1 t u \dots) = 0, \dots F_r(x_2 t u \dots) = 0$, oppure semplicem. per simmetria si può dire che questa M_k si può sempre rappresentare così: $x_1 = f_1(y_1 \dots y_{k+1}), \dots x_r = f_r(y_1 \dots y_{k+1})$ ove $f(y_1 \dots y_{k+1}) = 0$, essendo le f_i razionali e tali che assumono ogni gruppo di valori solo per una soluz. della $f(y) = 0$. Così le r irrazionalità o funzⁱ algebriche di $t u \dots$ che prima s'avevano son ridotte ad una sola, ad es. alla y_{k+1} come funz. algebr. di $y_1 \dots y_k$. Si può dire che una M_k di S_r quando $r > k + 1$ si può sempre riferire razionalmente ad una M_k di S_{k+1} ⁹. Alle formule di trasformaz. si può introducendo l'omogeneità dar la forma $x_0 : x_1 : \dots : x_r = \varphi_0(y) : \varphi_1(y) : \dots : \varphi_r(y)$, con $f(y_0 \dots y_{k+1})$, ove le φ e f son forme nelle y . //

Intersez. di due $M_k^n, M_{k'}^{n'}$: se $k + k' \geq r$ è una $M_{k+k'-r}$ d'ord. prodotto. Basta [35] dimostrare per $k' = r - k$. Se la $M_{k'}$ si spezza in tanti $S_{k'}$. Principio dell'invarianza del numero. Pel caso di una curva e di una $M_{r-1}^{n'}$ l'invariabilità di quel numero seguirà da ciò che alla curva se ne può riferire univocam. un'altra su cui i relativi iperpiani danno la serie corrisp. a quella data sulla prima delle $M_{r-1}^{n'}$. Pel caso generale v. dimostrazⁱ che non ricorrono a quel principio in Halphen^x, (Bulletin soc. math. de France t. II^{xi}) ed in Pieri^{xiii} (1888, Giornale di mat. vol. XXVI^{xiii}). - Intersezⁱ di più varietà.

Varietà luogo di una ∞^k algebrica di S_r : è una M_{k+i} se ... Casi particolari. Coni di varie specie e dimensioni.

Curve e loro caratteri. Tangenti, piani // e spazi osculatori. Classe e ranghi [36] diversi. Cenno sulle formule di Cayley^{xiv} e di Veronese^{xv}. Punti multipli.

Cenno sulle varietà superiori, superficie, ecc. di S_r rispetto alle tangenti nei punti semplici e multipli (v. Del Pezzo^{xvi}, Sugli spazi tangenti ecc. Rendicⁱ Accad.

⁹Kronecker, Festschrift p. 31 [vedi nota 4].

^xGeorges Halphen (Rouen 1844 - Versailles 1889).

^{xi}HALPHEN, G. 1874, *Recherches de géométrie à n dimensions*, Bull. Soc. Math. de France, 2, pp. 34-52.

^{xii}Mario Pieri (Lucca 1860 - S. Andrea di Compito, Lucca, 1913).

^{xiii}PIERI, M. 1888, *Sopra un teorema di geometria ad n dimensioni*, Giornale di Mat., 26, pp. 251-254.

^{xiv}Arthur Cayley (Richmond, Surrey, 1821 - Cambridge 1895).

^{xv}Giuseppe Veronese (Chioggia 1854 - Padova 1917).

^{xvi}Pasquale Del Pezzo (Berlino 1859 - Napoli 1936).

Napoli 1886^{xvii}).

Quando è che diciamo che una varietà *appartiene* ad S_r , e quando che è *normale* per questo spazio.

Una curva d'ordine n non può appartenere ad uno spazio superiore ad S_n , se è irriduttibile¹⁰. E similmente una M_k^n non può appartenere a spazi superⁱ di S_{n+k-1} senza spezzarsi. - Ne segue che le M_k^n di S_{n+k-1} sono normali. - Caso di $n = 2$

- [37] Per vedere l'esistenza e le prime proprietà osserviamo che segnando // una C^n di S_n cogli'iperpiani per $n - 1$ punti fissi risulta la C^n razionale; e due tali fasci d'iperpiani risultano riferiti proiettivamente (l'una e l'altra cosa per principii su cui ritorneremo nel Cap. 3°). Ne segue la generaz. con fasci projⁱ $\lambda A_1 + \mu B_1 = 0, \dots, \lambda A_n + \mu B_n = 0$ e se queste equⁱ s'immaginano risolte risp. alle coord., queste vengono forme di grado n in λ, μ sicché la curva è d'ord. n .¹¹ La si può anche generare colle stelle collineari $\rho_1 A_1 + \dots + \rho_n A_n = 0, \rho_1 B_1 + \dots + \rho_n B_n = 0$ i cui centri son presi ad arbitrio sulla curva e così, segandole con un iperpiano e considerando i pⁱ uniti dalla collineazione che si avrà su questo, si scorge di nuovo che la curva è d'ord. n ; e similmente si vede che ogni S_{n-2} intersez. di due iperpiani
- [38] omologhi incon//tra C^n in $n - 1$ p. ⁱ La C^n è individuata da $n + 3$ p. ⁱ

Similmente $n - 1$ fasci proj. d'iperpiani in S_n generano una sup. rigata che è pur generabile mediante due forme aventi per sostegni due generⁱ qual., e collineari: ne segue che essa è d'ord. $n - 1$ e gli S_{n-2} intersezⁱ degli'iperpiani omologhi e quindi quelli base di quei fasci segano la rigata secondo delle C^{n-2} ¹². - E in generale $n - i$ fasci proj. d'iperpiani in S_n generano una M_{i+1}^{n-i} luogo di una ∞^1 razionale di S_i , la quale si può pure generare mediante due forme collineari aventi per sostegni due qualunque di quegli S_i : gli S_{n-2} intersezⁱ degli'iperpiani omologhi e quindi quelli base dei fasci segano le varietà secondo delle M_i^{n-i-1} luoghi di ∞^1 S_{i-1} . Ogni //

- [39] M_{i+1}^{n-i} di S_n luogo di ∞^1 S_i si può generare così, poiché un iperpiano per S_i dà

^{xvii}DEL PEZZO, P. 1886, *Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni*, Rend. Acc. Napoli, 25, pp. 176-180.

¹⁰Clifford [si tratta del matematico inglese William Clifford (Exeter 1845- Madera 1879)], *On the Classification of Loci* 1878 [si tratta di: CLIFFORD, W. 1878, *On the Classification of Loci*, Philos. Transactions, 169, pp. 663-681].

¹¹Una curva raz^{le} così rappresentata appartiene ad S_n se non è nullo il determ. dei coeffⁱ delle forme.

¹²Ogni rigata d'ord. $n - 1$ di S_n si genera in tal modo.

ancora una M_i^{n-i-1} che dovrà stare in un S_{n-2} (non essendo in generale riduttibile) ed allora il fascio d'iperpiani per questo determina gli $\infty^1 S_i$, ecc.

Applicazioni delle cose dette in generale sugl'iperspazi ad alcune varietà.

1° Alla geometria della retta, cioè di una M_4^2 di S_5 : come su questa si rappresentino i complessi e le congruenze lineari, i fasci di rette e le stelle ed i piani di rette; le rigate. Applicazione del teorema di Clifford alle rigate di 3° e 4° grado. - 2° alla geometria dei sistemi lineari di forme (involuzioni su una forma semplice, sistemi lineari di varietà in un S_r). *Indice* di una ∞^k // di forme: è il numero di quelle che [40] passano per k punti, ed è l'ordine della M_k che rappresenta coi suoi punti quella varietà. Un sistema ∞^k d'indice n sta in un sistema lineare di dimens. $\leq n + k - 1$; e se appartiene per $k = 1$ ad un sist. lineare ∞^n , esso è razionale, cioè rappresentabile con ... Due sistⁱ $\infty^k, \infty^{k'}$ di forme, d'indici n, n' , contenuti in una ∞^r lineare per $k + k' \geq r$ hanno comune una $\infty^{k+k'-r}$ d'indice nn' . E così altre proposizioni, ad esempio quella che una F^3 o appartiene ad S_4 ed è rigata, o sta in S_3 e contiene in generale 27 rette, si traducono per sistⁱ linⁱ ¹³. //

Un altro modo di rappresentare e studiare i sistⁱ linⁱ di forme mediante gl'i- [41] perspazi, il quale coincide poi in sostanza con quello, consiste nel rappresentare le forme del sistema $\infty^r \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r = 0$ cogl'iperpiani (di coord. λ) di S_r invece che coi punti. Sia S_k lo spazio di quelle forme (varietà M_{k-1}). Supporremo $r \geq k$. Alle forme passanti per un p. x di S_k corrisponderanno gl'iperpiani passanti pel p. $y_i = f_i(x)$ di S_r . Il p. y può così corrispondere ad un solo p. x od anche a parecchi: quest'ultimo caso quando il passaggio di una forma del sistema per un p. tragga il passaggio per altri $\mu - 1$ pⁱ. Noi supporremo che μ sia finito, cioè che ad un p. y non corrispondano ∞ pⁱ x . Allora la varietà descritta dal p. $y_i = f_i(x)$ di S_r sarà una M_k , in corrispondenza $(1, \mu)$ coll' S_k . Così ogni varietà M_k // riferibile razionalmente all' S_k ha le sue sezioni cogl'iperpiani rappresentate da [42] un sist. lineare di forme. - Nel caso $k = 1$ se $\mu > 1$ i gruppi associati di μ punti formano un'involuzione ∞^1 , (pel teor. che vedremo poi, che una ∞^1 di gruppi di pⁱ tale che ogni p. individui un gruppo è un'involuz.^e) e detti φ, ψ due gruppi di

¹³È appunto per questi che il Cayley introduce gl'iperspazi.

- questa, le $f_0, f_1, \dots, f_r$ saranno forme di grado $\frac{n}{\mu}$ (n essendo il loro ordine) nelle φ, ψ ; vicerversa partendo da tali forme si avrà un'involuz. ∞^r in cui ogni gruppo di n pⁱ si spezza in $\frac{n}{\mu}$ gruppi di un'invol. ∞^1 di grado μ , sicché il passaggio per un p. trae il passaggio per $\mu - 1$. - Analogam. in S_k si hanno delle involuzⁱ di gruppi di μ punti, e datane una si formano subito i sistⁱ lineari ∞^r corrispⁱ. - Un caso ovvio
- [43] in cui $\mu > 1$ si ha in ge//nerale quando $r = k$: allora si ha la rappresentaz. di due S_k descritti da x, y l'uno sull'altro mediante le $y_i = f_i(x)$. La corrispondenza sarà univoca in ambi i sensi quando $\mu = 1$, cioè k varietà del sistema lin. abbiano solo 1 inters. variab. : sistema *omaloidico*; le x sono pure funzⁱ raz^{li} delle y . Senza fermarci su queste corrisp. biraz^{li} fra due S_k , ci limitiamo a ricordare che per $k = 2$ esse si posson considerare come prodotti di trasformazⁱ quadratiche (proposiz. che non si sa estendere a $k > 2$ in modo opportuno), e che in generale si posson costruire i sistemi omaloidici di S_k partendo dalla rappresentazione di una varietà razionale di questo sull' S_{k-1} corrisp., come Cremona^{xviii} mostrò per $k = 3$. -
- [44] Ordine della M_k rappresentativa di un // sist. lin. ∞^r di S_k : per $k = 1$ si ha una curva il cui ord. è l'ordine dell'invol., astraendo dai pⁱ fissi che questa può avere; e per $k > 1$ è il numero delle intersⁱ variabⁱ di k forme qual. del sistema. Però nel caso che $\mu > 1$ bisogna dividere per μ . Si può togliere questa condiz. contando allora μ volte ogni p. y della M_k , cioè considerando una M_k μ -pla. Questa convenzione rende univoche le corrispondenze multiple; è importante in tutta la matematica ed ha condotto ad es^o, come vedremo, alla rappresentaz. di una funz. algebr. di 1 variab. mediante la sup. di Riemann.

- Teor.: se un sist lin ∞^r di forme $\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_2 f_2 = 0$ è contenuto in uno $\infty^{r'}$ $\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_{r'} f_{r'} = 0$ ($r' > r$), la M_k rappresentaz. di quello, cioè $y_0 = f_0(x) \dots y_r = f_r(x)$, // è proj. della M_k rappres. di questo, cioè $y'_0 = f_0(x), \dots y'_{r'} = f_{r'}(x)$. - Così potendo sulla retta ogni involuz. di grado $\leq n$, completata con punti fissi, considerarsi come contenuta in quella di tutti i gruppi n pⁱ, ogni curva raz^{le} d'ord. $\leq n$ sarà proj. di quella $y_0 = \lambda^n, y_1 = \lambda^{n-1}\mu, \dots y_n = \mu^n$, raz^{le} norm^{le} di S_n . Solo queste dunque son le curve raz^{li} normali; e se ne ha una rappres^e canonica

^{xviii} Luigi Cremona (Pavia 1830 - Roma 1903).

che servirà poi e che si dedurrebbe anche dalla rappres. gener. con forme binarie di grado n risolvendole risp. a $\lambda^n, \lambda^{n-1}\mu, \dots, \mu^n$ e trasformando le coord. Segue che due C^n di S_n son proiettive. - Analogam. le superf. rappresentate sul piano da sistⁱ linⁱ d'ord. n o minore sono proj. di una F^{n^2} di $S_{\frac{n(n+3)}{2}}$. Caso di $n = 2$ (v. Veronese, La sup. omal. normale del 4° ord. ecc. Mem. Acc. Lincei 1883-84^{xix}): si ha una F^4 // con ∞^r coniche, ecc., che, con le rigate razionali già considerate, dà tutte le F^{n-1} [46] di S_n (v. Del Pezzo, Sulle sup. d'ord. n immerse in S_n Rendicⁱ Acc. Napoli 1885^{xx}; Sulle proiezioni di una sup. e di una varietà di S_n . Rendicⁱ Acc. Napoli 1886^{xxi}; Sulle sup. d'ord. n immerse in S_n , Rendicⁱ Circ. Palermo t. I 1887^{xxii}); essa ha per proj. su S_3 la sup. di Steiner^{xxiii}. //

Cap. 3°. Oggetto della Geometria su una ∞^1 algebrica.

Corrispondenze algebr^e. Serie lineari.

[47]

Gli enti che studieremo: le ∞^1 algebriche, cioè le curve. Ma il punto di vista, cioè la specie delle proprietà, va ancor definita. Cenno sulle trasformazioni come caratterizzanti gl'indirizzi (Klein^{xxiv}, Vergl. Betrachtungen^{xxv}...): geom. elem^e; geom. proiettiva. Così la geom. su una M_k è la geom. delle trasformazⁱ birazionali di questa. Le trasformazⁱ che caratterizzano gl'indirizzi servono a sostituire agli enti dati dei trasformati più semplici. Così alla M_k qual. nella geom. sulla varietà si può sostituire una M_k di S_{k+1} . La definiz. data conduce alle corrisp. // algebriche: [48] del resto lo studio di una corrisp. su una M_k fa già parte di quest'indirizzo. Se fra due M_k alg. si ha una corrisp. (α, α') sì che le coord. dei pⁱ dell'una sian date funzⁱ

^{xix}VERONESE, G. 1883-84, *La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario*, Atti R. Acc. Naz. Lincei, 3, 19, pp. 344-371.

^{xx}DEL PEZZO, P. 1885, *Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di $n+1$ dimensioni*, Rend. Acc. Napoli, 24, pp. 212-216.

^{xxi}DEL PEZZO, P. 1886, *Sulle proiezioni di una superficie e di una varietà ad n dimensioni*, Rend. Acc. Napoli, 25, pp. 205-213.

^{xxii}DEL PEZZO, P. 1887, *Sulle superficie dell' n° ordine immerse nello spazio di n dimensioni*, Rend. Circolo Mat. Palermo, 1, pp. 241-247.

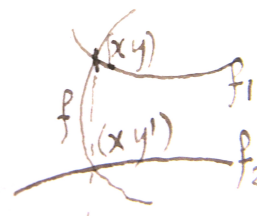
^{xxiii}Jacob Steiner (Utzenstorf 1796 - Berna 1863).

^{xxiv}Felix Klein (Düsseldorf 1849 - Göttingen 1925).

^{xxv}KLEIN, F. 1872, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Deichert, Erlangen.

- algebr. di quelle dell'omologo dell'altra (sì che tutti i p^i della prima M_k aventi per coord. quei valori si considerino come omologhi al p . della seconda) la corrisp. si dice *algebrica*. Corrisp. *birazionale* (funzⁱ razionali, indici = 1). Se due varietà sono in corrisp. algebr. o birazionale con una 3^a , anche fra loro. - Le definiz. di corrisp. algebr. produce equazⁱ algebr. fra le coord. $xy \dots, x'y' \dots$ di p^i omologhi. Dato un numero qual. di tali equazⁱ, e quindi un sistema qual. di legami geometrici o costruzioni, traducibili algebricamente, e tali da definire una corrisp. // (α, α') fra le due M_k , si posson sempre ricavare $x, y \dots$ come funzⁱ algebr. *ad α valori* di $x', y', \dots$, e viceversa ... Dimostriamolo per le curve: possiamo supporle piane $f(xy) = 0, f'(x'y') = 0$, e le relazⁱ $F(xy x'y') = 0, G(xy x'y') = 0, \dots$ Osserviamo che quando più equazⁱ in x hanno α soluzⁱ comuni, queste si hanno da un'equ. di grado α razionale nei coeff. di quelle. Se si hanno poi tre o più equazⁱ in xy con α soluzⁱ comⁱ $f(xy) = 0, f_1(xy) = 0, f_2(xy) = 0 \dots$ dalle 1^a e $2^a, 1^a$ e $3^a \dots$ si hanno eliminando y equazⁱ $\varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 0$ con le α soluzⁱ comuni e non di più, perché se vi fosse una x tale che $f(xy) = 0, f_1(xy) = 0$ ed in pari tempo $f(xy') = 0, f_2(xy') = 0$, ove $y \neq y'$, l'asse delle y sarebbe parallelo alla congiungente di un p .
- [50] $f f_1 //$ con un p . $f f_2$, il che si può evitare.

Dunque le x, y son radici di equaz. di grado α raz^{li} nei coeffⁱ delle $f(xy) = 0, f_1(xy) = 0, f_2(xy) = 0, \dots$ Applicando ciò alle equazⁱ della corrispondenza oltre la $f(xy) = 0$ si ha il teorema.



- In partic^e una corrisp. algebr. *univoca* fra due M_k è biraz^{le} e quindi, introducendo l'omogeneità si rappresenta con $y_i = \varphi_i(x)$, e similmente $x_l = \psi_l(y)$. Si noti una differenza fra il caso delle trasformazⁱ univoche di un S_k e quello delle trasformaz. univoche di una M_k di uno spazio super.: se le $y_i = \varphi_i(x)$ devon trasformare univocam. tutto lo spazio descritto da x , vedemmo che il sist. lineare di varietà $\sum \lambda_i \varphi_i(x) = 0$ dev'essere omaloidico
- [51] (pag. 43). Invece se devon trasformare univocam. solo una varietà // minore di quello spazio basta che questa non corrisponda a se stessa nell'*involuz.* (pag. 42) determinata da quel sist. lineare. Se gli spazi di x e y hanno la stessa dim., si vede

che la corrisp. univoca fra le due M_k si può considerare contenuta in corrisp. $(1, \mu)$ fra i due spazi: non in corrisp. univoche in generale.

Varietà razionali. Una M_k in corrisp. univoca con una razionale è razionale. Due M_k razionali si posson sempre riferire univocam. La geom. su una M_k razionale è la geom. sull' S_k , cioè la geom. delle trasformazⁱ biraz^{li} di questo. Caso di due ∞^1 razionali in corrisp. (α, α') : se x e x' sono paramⁱ omologhi, la corrisp. sarà data (p. 49, 50) da un'equ. $f_{(x, x')}^{(\alpha, \alpha')} = 0$, che è in sostanza il principio di corrisp. di // Chasles^{xxvi}. Per la corrisp. univoca si ha una relaz. bilineare, e quindi una [52] proiettività se si tratta di forme fondam^{li} (principio di corrisp. *univoca* di Chasles); e sempre, se diciamo *proiettive* due ∞^1 razionali riferite univocam.^e La geom. su una ∞^1 raz^{le} si riduce alla geom. proiettiva su una forma sempl. fondam^{le}, ad es. sulla retta.

La corrisp. univoca fra due curve γ, γ' data da $y_i = \varphi_i(x)$ ci conduce alle *serie lineari*, poiché muta la serie data su γ' dagl'iperpiani $\sum \lambda_i y_i = 0$ nella $\sum \lambda_i \varphi_i(x) = 0$.

In un S_k data una γ e un sist. lineare $\sum \lambda_i \varphi_i(x) = 0$ di varietà, dicesi *serie lineari* di gruppi di p^i di γ quella segata da quella varietà, togliendo o no quanti si vogliono fra i punti fissi. Serie lineari su una ∞ algebrica qualunque. // Per trasformazⁱ [53] univoche $x_l = f_l(y)$ la serie lineare diventa $\sum \lambda_i \varphi_i(y) = 0, \dots$, rimane una serie lineare. Ordine della serie. Dimensione: la serie composta di un sol gruppo si dice di dimensione 0. In generale poi si osservi che se un gruppo della serie è dato da più di una varietà del sistema, vi sono in questo delle varietà contenenti γ . Se per γ passano ∞^t (ove $t \geq 0$) varietà del sist., le quali formeranno pure un sist. lineare (pag. 30), un'altra var^a determinerà con questo il sist. ∞^{t+1} di *tutte* quelle passanti pel gruppo G dato da quella (poiché ogni var^a per G da con quella un fascio che contiene una var^a dell' ∞^t). Se dunque il sist. dato è ∞^d si può prendere entro esso un sist. ∞^r , ove $r = d - t - 1$, che non incontri l' ∞^t : ed esso darà da se tutta // la [54] serie, ogni gruppo una volta sola. La serie sarà ∞^r , e se n è il suo ord. s'indicherà con g_n^r . Da r pⁱ sarà in generale individuato un gruppo: basterà prendere il 1^o

^{xxvi} Michel Chasles (Épernon 1793 - Parigi 1880).

punto fuori dei p^i base del sist. ∞^r , e così il 2° dei p^i base del sist. ∞^{r-1} ottenuto, ... Sarà $r \leq n$. Se $r = n$, siccome fissati $r - 1$ punti si avrebbe un fascio di varietà che staccerebbe da γ i singoli punti, γ sarebbe razionale. Se γ non è razionale, è sempre $r < n$, e quindi da alcune (r) tra le inters. di γ con una varietà di un dato sist. lin. son sempre individuate le rimanenti $(n - r)^{14}$. Nello studio delle serie lineari una delle principali questioni sarà la determinaz. di n (dei punti mobili fra gli n) e specialmente di r : la relaz. $r = d - t - 1$ darà poi t se in una ∞^d che dia [55] quella serie si cercano le varietà // passanti per γ .

Come esempi di serie lineari consideriamo quelle staccate su una γ^m piana da tutte le curve aggiunte d'ord $\nu = m - 3 + \alpha$. Tutte le serie lineari su γ si posson considerare come date da tali curve (aggiungendo una curva aggt^a fissa). La dimens. del sistema di tutte le curve aggt^e d'ord. ν è

$$d \geq \frac{\nu(\nu + 3)}{2} - \sum \frac{s(s - 1)}{2},$$

ossia, introducendo il genere (pag. 3)

$$p = \frac{m - 1 \cdot m - 2}{2} - \sum \frac{s(s - 1)}{2}$$

$$\begin{aligned} d &\geq \frac{\nu(\nu + 3)}{2} - \frac{(m^2 - 1)(m - 2)}{2} + p \\ d &\geq m\alpha + \frac{\alpha(\alpha - 3)}{2} + p - 1 \end{aligned}$$

Se $\nu < m$ sarà $d = r$ dimensione della serie. Ma se $\nu \geq m$ vi saranno delle curve aggt^e d'ord. ν contenenti γ , e saranno ∞^t ove $t = \frac{\nu - m \cdot \nu - m + 3}{2} = \frac{\alpha(\alpha - 3)}{2}$, sicché (pag. 54)

$$r = d - t - 1 \geq m\alpha + p - 2 //$$

[56] Per $\alpha = 1, 2$ questa formula vale ancora. Si ha poi sempre per l'ordine della serie

¹⁴In tutto si può intendere che n siano i p^i variabili.

$$n = mv - \sum s(s-1) = m\alpha + 2p - 2.$$

Si ha dunque

$$n - r \leq p \text{ se } v > m - 3$$

e per le curve aggte d'ord. $m - 3$ si ha $d = r \geq p - 1$, $n = 2p - 2$, e in generale per $v < m - 3$ si ha $n - r < p$. Noi vedremo più tardi che per $v \geq m - 3$ si ha proprio $d =$ al valore trovato (sicché i passaggi pei p^i multipli di γ^m son condizⁱ indepⁱ per le curve aggte d'ord. $\geq m - 3$) e che gli n punti di ogni gruppo son variabili tutti. Osserviamo fin d'ora che per $v \geq m - 3$ è sempre $d > 0$, tranne per $p = 0$ nel qual caso non esistono curve aggte d'ord. $m - 3$ (n è negativo) e per $p = 1$ ne esiste una sola ($n = 0$). Per $p = 0$ abbiamo $n = m\alpha - 2$ // e $r \geq m\alpha - 2$: varrà dunque [57] (pag. 54) il segno inferiore, tutti gli n p^i saranno mobili e concludiamo che *le curve di genere 0 son razionali*. Invertiremo più tardi questa proposizione.

Ritornando alle serie lineari si è già notato (pag. 52) come si presentino nello studio della trasformaz. univoca di una curva γ di S_k . Viceversa abbiassi su questa una g_n^r , ove n sono i punti *variabili* di ogni gruppo (oltre ai quali ve ne posson essere dei fissi), sicché $r > 0$, e sia data $\sum_0^r \lambda_i \varphi_i(x) = 0$.

Riferendo linearmente le varietà di questo sistema agl'iperpiani (di coord. λ_i) di un S_r , i punti di questo corrisponderanno ai sistⁱ linⁱ ∞^{r-1} contenuti in quello; e così ai p^i x di γ fuori dei p^i base, cioè ai sistⁱ ∞^{r-1} di varietà per essi corrisponderanno in S_r punti y // formanti una curva C sì che $y_i = \varphi_i(x)$. Questa C appartiene ad [58] S_r perché non vi è nel sistema ∞^r alcuna varietà che contenga γ . - Noi supporremo anzitutto che per la g_n^r il passaggio per un punto non tragga sempre il passaggio per altri, onde $r > 1$. La corrispondenza fra γ e C sarà univoca e la g_n^r sarà segata su C dagl'iperpiani. Inoltre si potranno avere su γ e quindi su C dei punti fissi. Se le φ di un sist. ∞^{r-1} hanno s punti comuni su γ , sicché il passaggio di un gruppo dalla g_n^r per uno di quelli trae il passaggio per gli altri, il p. y omologo conterrà s volte fra le n inters. di un iperpiano di S_k con C , cioè sarà s -plo. Questo accade in

particolare se γ ha un p. s -plo x che non sia p. base per le φ : darà in C un p. y s -plo (almeno). Ma se il p. s -plo x // di γ è p. base per le φ , per veder come si muta, consideriamo le φ passanti per un p. di γ che s'avvicina indefinitamente ad x e si vede che in generale ai vari rami di γ per x corrispondono altrettanti punti su C , semplici in generale, ma che si vede anche quando saranno multipli. - Esempio: trasformazione di una curva piana in una piana¹⁵; il punto doppio, nodo o cuspidale, si scioglie mediante una rete di φ passanti per esso, ma il tacnodo no. Per la geom. su una curva siam condotti a considerare un p. s -plo di una γ come la riunione di s punti distinti che possono anche essere ∞^1 vicini se le tg^i non son distinte ... Questo dà una prima spiegazione della scelta delle curve *aggiunte* per la geom. sulla curva

[60] γ^m . Se su questa si vuol dare una serie lineare di dimens. $abbas$ // tanza elevata con un sist. di curve che nel punto s -plo x di γ non siano aggiunte, cioè non l'abbiano almeno per $(s-1)$ plo, il passaggio per gli s punti che cadono in x importerà solo 1 condiz., o 2, o 3, ..., o $(s-1)$ secondo che x non è p. base, od è semplice, doppio ... $(s-2)$ -plo. Per le curve con sole singolarità ordinarie le curve agg^{te} danno serie non particolari risp. ai p^i multipli.

Se la g_n^r è tale che il passaggio per 1 punto tragga *sempre* il passaggio per $\mu-1$, allora C sarà in corrisp. $(1, \mu)$ con γ e sarà solo d'ord. $\frac{n}{\mu}$: così per $r=1$. Poiché C appartiene ad S_r segue $\frac{n}{\mu} \leq r$, $\mu \leq \frac{n}{r}$. Esempio di una tal serie si ha su una curva che incontri in μ punti variabili le gener. di un cono: allora con un sistema d'iperpiani o di coni aventi comune il vertice con quello vi si sega una tal serie. //

[61] Del resto quando su γ si ha la ∞^1 di gruppi di μ punti tale che da 1 p. è individuato il gruppo, ogni serie lineare *composta* con quella si rappresenterà con una curva C in corrisp. univoca con quella ∞^1 di gruppi e quindi basta prendere una tal curva C e le serie lineari su questa avranno per corrispondenti su γ tutte le serie composte con quella ∞^1 (che' le $y_i = \varphi_i(x)$ mutano le serie lineari di C in serie lineari di γ ; e due C diverse essendo in corrisp. univoca, alle serie lineari dell'una corrispondono le serie lineari dell'altra). - Quando una g_n^r è così composta con una ∞^1 di gruppi di μ punti, sicché si rappresenta con una C d'ordine $\frac{n}{\mu}$, conviene dire che ancora

¹⁵Colla rete delle 1^e polari si muta la curva nella reciproca.

C , contando ogni suo p . come μ -plo, è d'ord. n : così per $r = 1$ la retta n -pla (cfr. pag. 44). E così, anche quando fra due curve $\gamma, \gamma' //$ si ha una corrisp. (μ, μ') , si [62] può, contando i p^i di γ μ' volte e quelli di γ' μ volte parlare di corrisp. *univoca*; la cosa si rende sensibile con la rigata delle congiungenti i p^i omologhi (o con una sua sezione piana).

La definiz. di una g_n^r su γ mediante il sistema ∞^r delle φ mostra che entro quella serie stanno delle serie di minor dimens. e dello stesso ordine; e fissando dei p^i su γ , anche delle serie d'ord. minore. Per $r > 1$ si ha un'immagine conveniente di ciò sulla C^n di S_r .

E non vi son altre serie lineari d'ord. n nella g_n^r ; e più precisamente: se una serie di gruppi di n p^i presi tra i gruppi di una g_n^r è tale che per r' punti di γ e quindi di C , passi un sol gruppo, allora gl'iperpiani $\infty^{r'}$ che la determinano su C formeranno un involuppo di 1^a classe, cioè una forma fondam^{le}, // e però quella serie sarà [63] *lineare* e di quelle già considerate entro la g_n^r (per le forme razionali ne trarremo poi una conseguenza speciale). - Segue che due C^n rappresentanti una stessa g_n^r sono proiettive, poiché ad una forma fondam. d'iperpiani di un S_r corrisponde idem ...

Segue inoltre che se mutano le φ con cui si determina una g_n^r su γ , non mutano però le serie lineari minori contenute in quella. - Se una $g_n^{r'}$ è contenuta nella g_n^r si può supporre che le due serie sian date risp. da $\sum_0^{r'} \lambda_i \varphi_i = 0$ e $\sum_0^r \lambda_i \varphi_i = 0$, e quindi le curve che le rappresentano da $y_i = \varphi_i$ ($i = 0 \dots r'$); $y_i = \varphi_i$ ($i = 0 \dots r$), sicché saranno proiezioni l'una dell'altra¹⁶; viceversa se C' è proj. di C , la serie rappres. da C' è segata su C dalla forma fondam. d'iperpiani proiettanti ecc. - Osservando che $r \leq n //$ dicesi *completa* (o normale) una g_n^r quando non sta in una d'ugual n [64] ..., *parziale* in caso contrario: vedremo poi che è unica la serie completa d'ord. n in cui sta una data g_n^r . La curva che rappresenta una serie è normale o no secondo che la serie è completa o parziale.

Importanza delle serie lineari di gruppi di punti. La loro determinazione ed il loro studio equivalgono a quelli delle curve che le rappresentano. I gruppi *neutri*

¹⁶Risulta anche dal teor. di pag. 44, 45, se ad es. γ si assume piana sicché le $y_i = \varphi_i(x)$ rappresentano superf. se x si lascia libero nel piano. Così si vengono a considerare per le curve delle superf. rappresentabili che le contengono.

della serie corrispondono ai punti multipli e spazi secanti della curva. I gruppi con punti variamente coincidenti ai punti ed iperpiani singolari della curva. Ed anche alle varietà di un sist. lineare variamente tangⁱ alla curva. Come (pag. 54) la dimens. della serie da il numero delle varietà contenenti la curva.

- [65] Cenno storico. La nozione di geometria // sull'ente algebrico è dovuta a Riemann (*Theorie der Abel'schen Functionen*^{xxvii}), che riunisce in una *classe* (§ 12) tutte le equazⁱ algebr. fra due variabⁱ che si equivalgono birazionalm^e, dimostra l'invariabilità del *genere*, determina il numero dei *moduli*, e considera delle serie lineari, specialmente ∞^1 , valendosene per ridurre l'equaz. ai minimi gradi, ecc. Clebsch (*Crelle* 63^{xxviii}, 64^{xxix}), Clebsch e Gordan^{xxx} (*Th. d. Ab'sch. F.*^{xxxi}) adoperano più geometricam. le serie lineari. Brill^{xxxii} e Nöther^{xxxiii} (*Math. Ann.* VII^{xxxiv}) fanno una teoria completa senza trascendenti basandosi su un teorema fondam^{le} ($Af + B\varphi$, Restsatz); e special^e Nöther vi ritorna, particolar^e nella Mem^a sulle curve sghembe (*Zur Grundlegung der Theorie der alg. Raumcurven*, Berl. Abhandl. 1882^{xxxv}). Segre da studi sulle rigate condotto a questioni di geom. sulla
- [66] curva, prima per $p = 1$, poi per // p qual. (*Math. Ann.* XXX^{xxxvi}, *Rendicⁱ Lincei* 1887^{xxxvii}. *Rendicⁱ Ist. Lomb.* 1888^{xxxviii}) si vale di curve di ogni spazio, e di

^{xxvii}RIEMANN, B. 1876, *Theorie der Abel'schen Functionen*, in *Gesammelte mathematische Werke*, Teubner, Leipzig, pp. 81-135.

^{xxviii}CLEBSCH, R. A. 1864, *Über die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie*, Jour. für die reine und angewandte Math. 63, pp. 189-243.

^{xxix}CLEBSCH, R. A. 1865, *Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind*, Jour. für die reine und angewandte Math., 64, pp. 43-65; *Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen*, Ibidem, pp. 210-270.

^{xxx}Paul Gordan (Breslavia 1837 - Erlangen 1912).

^{xxxi}CLEBSCH, R. A., GORDAN, P. 1866, *Theorie der Abelschen Functionen*, Teubner, Leipzig.

^{xxxii}Alexander Wilhelm von Brill (Darmstadt, 1842 - Tubinga, 1935).

^{xxxiii}Max Nöther (Mannheim 1844 - Erlangen 1921).

^{xxxiv}BRILL, A., NÖTHER, M. 1874, *Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie*, Math. Annalen, 7, pp. 269-310.

^{xxxv}NÖTHER, M. 1882, *Zur Grundlegung Theorie der algebraischen Raumcurven*, Abhandlungen der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1882 (1883), mathematische Abhandlungen, pp. 1-120.

^{xxxvi}SEGRE, C. 1887, *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques (I partie courbes algébriques)*, Math. Annalen, 30, pp. 203-226; *Opere*, 1, 80-104.

^{xxxvii}SEGRE, C. 1887, *Intorno alla geometria su una rigata algebrica*, Rend. R. Acc. Naz. Lincei, 4, 3, pp. 3-6; *Opere*, 1, 110-113.

^{xxxviii}SEGRE, C. 1888, *Sulle curve normali di genere p dei vari spazi*, Rend. R. Ist. Lombardo Scienze Lett., 2, 21, pp. 523-528; *Opere*, 1, 119-124.

rigate ...Castelnuovo^{xxxix} (Studio dell'involuzione generale sulle curve razionali mediante la loro curva normale dello spazio ad n dimensioni, Ist. Ven^o 1886^{xl}; Geometria sulle curve ellittiche, Atti Torino 1888 vol.24^{xli}; e specialmente Ricerche di geometria sulle curve algebriche, 1889 stesso vol^{exlii}) prosegue e risolve nuove questioni importanti; così determina i gruppi neutri di una serie o spazi secanti di una curva in due casi molto generali (Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche, Rendⁱ Palermo III 1889^{xliii}) ed il numero delle serie lineari su un ente (Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere, Rendⁱ Lincei 1889^{xliv}). Del resto le curve degl'iperspazi furon // usate altre [67] volte da altri, benché non così metodicamente. Klein (e Fricke^{xlv}) nelle Vorles. ü. ell., Modulfunctionen Bd I^{xlvi} rappresenta le serie lineari con tali curve. - È opportuno studiare le serie lineari coi 3 metodi e così noi faremo a suo tempo. Si noti poi che la geom. sulla curva comprende anche altri argomenti: le serie non lineari; le corrispondenze; ecc.; e si posson considerare corrispondenze fra due o più curve, ecc. ecc. Cenno sul programma ulteriore del corso. //

Cap. 4°. Geometria sugli enti razionali

[68]

Gli enti razionali ∞^1 ; le loro rappresentazioni sulle forme fondam^{li}, p. e. sulla retta; le loro rappresentazⁱ con coord. omogenee o no sugli enti stessi. Come ad essi si estenda tutta la geom. proiettiva della retta, il birapporto, ecc. Come si estenda in partic. la definiz. di involuzione $\sum \lambda_i \psi_i(t) = 0$, ove $t_1 t_2$ son le due coord. omog^e, ...

^{xxxix}Guido Castelnuovo (Venezia 1865 - Roma 1952).

^{xl}CASTELNUOVO, G. 1886, *Studio dell'involuzione generale sulle curve razionali mediante la loro curva normale dello spazio ad n dimensioni*, Atti Ist. Veneto, 6, 4, pp. 1167-1200.

^{xli}CASTELNUOVO, G. 1888 - 89, *Geometria sulle curve ellittiche*, Atti Acc. Scienze Torino, 24, pp. 4-22.

^{xlii}CASTELNUOVO, G. 1888 - 89, *Ricerche di geometria sulle curve algebriche*, Atti Acc. Scienze Torino, 24, pp. 346-373.

^{xliii}CASTELNUOVO, G. 1889, *Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche*, Rend. Circolo Mat. Palermo, 3, pp. 27-37.

^{xliv}CASTELNUOVO, G. 1889, *Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere*, Rend. R. Acc. Naz. Lincei, 4, 5, pp. 130-133.

^{xlv}Robert Fricke (Helmstedt 1861 - Bad Harzburg 1930).

^{xlvi}KLEIN, F., FRICKE, R. 1892, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, Teubner, Leipzig.

Una serie lineare g_n^r sull'ente razionale $x_l = f_l(t)$, data da $\sum \lambda_i \varphi_i(x) = 0$ non è che un'involuzione $\sum \lambda_i \varphi_i(ft) = 0$. Viceversa dalla definizione di g_n^r (sulla retta) è evidente che un'involuzione I_n^r è una g_n^r . Se una serie alg^a di gruppi di n elemⁱ è
 [69] tale che da r qualunque è in generale indivi//duato il gruppo, essa è una I_n^r : poiché essa sta nella I_n^w costituita da tutti i gruppi di n elemⁱ della forma e quindi (pag. 62, 63) segue ecc. - In particolare se le coord. degli elementi di una varietà qual. son funzⁱ raz^{li} di t e ad ogni elem. corrispondono μ valori di t , questi genereranno una I_μ^1 ; e poiché questa è raz^{le}, sarà pur tale la varietà (e questa si potrà riferire univocam^e al parametro λ della I_μ^1).¹⁷

Principio di corrispondenza (α, α') . è attribuito a Chasles che primo lo formulò in generale nel 1864; però già nel 1861 Jonquières^{xlvii} e Cremona lo applicavano ripetutamente alla determinazione degli ordini di luoghi geometrici. La corrisp.
 [70] (α, α') su un ente raz^{le} è // (pag. 51) data da $\sum_0^{\alpha, \alpha'} a_{ii'} x^i y^{i'} = 0$; e però vi sono $\alpha + \alpha'$ elemⁱ uniti $\sum a_{ii'} x^{i+i'} = 0$. Soluzioni multiple: se $x = 0$ è unito ($a_{00} = 0$) e due omologhi cadono in esso, e ciò in ambi i modi ($a_{01} = a_{10} = 0$), esso conta due volte; questa condiz^e è anzi necessaria quando la corrisp. è simmetrica od involutoria ($a_{01} = a_{10}$). Come in molti casi si riconosca la molteplicità di una soluz.^e Enunciato generale dovuto a Zeuthen¹⁸: "il numero delle coincidenze di x e y che hanno luogo in un punto o della retta su cui si considera la corrisp^a è uguale alla somma degli ordini dei segmenti infinitesimi xy fra un punto x la cui distanza da 0 sia infinitesima di 1° ordine ed i corrispondenti punti y (l'ordine di una distanza
 [71] finita essendo uguale a zero)". Legame // colla singolarità di una curva piana, immagine della corrispondenza.

Applicazioni del principio di corrispondenza. - In una corrisp. (α, α') vi sono $2\alpha(\alpha' - 1)$ elemⁱ di diramazione della 1^a forma (ed altrettanti elemⁱ doppi corrispⁱ nella 2^a). Due corrisp. $(\alpha, \alpha'), (\beta, \beta')$ tra due forme hanno $\alpha\beta' + \beta\alpha'$ coppie comuni;

¹⁷V. Lüroth [si tratta del matematico tedesco Jacob Lüroth (Mannheim 1844 - Monaco 1910)], Beweis eines Satzes über rationale Curven (Math. Ann. IX) [si tratta di: LÜROTH, J. 1886, Beweis eines Satzes über rationale Curven, Math. Annalen, 9, pp. 163-165].

^{xlvii}Jean-Philippe-Ernest de Jonquières (Carpentras 1820 - Mouans-Sartoux, Grasse, 1901).

¹⁸Note sur le principe de correspondance (Bulletin des sciences math. V, 1873 p. 186) [si tratta dell'articolo del matematico Hieronymus Georg Zeuthen (Grimstrup, Jütland, 1839 - Copenhagen 1920): ZEUTHEN, J. 1873, Note sur le principe de correspondance, Bull. des Sciences Math., 5, pp. 186-190].

se sono involutorie, la metà. Una corrisp. (α, α') su una forma ha $\frac{\alpha \cdot \alpha' - 1}{2} + \frac{\alpha' \cdot \alpha' - 1}{2}$ coppie involutorie.

Curva generata da due fasci di rette di un piano in corrisp. (α, α') ; proposiz. inversa. Due $\gamma^n, \gamma^{n'}$ (di spazi qual.) in corrisp. (α, α') generano una rigata d'ord. $\alpha n' + \alpha' n - x$ (se x sono i pⁱ uniti): caso di $\alpha = \alpha' = 1$ (a cui ogni altro si può ridurre). Se le curve son sovrapposte $(\alpha + \alpha')n - x$; // e se la corrisp. è simmetrica, [72] la metà $\alpha n - \frac{x}{2}$ (onde x pari). Gli elementi doppi di una I_n^1 sono $2(n-1)$ (Jacobiano). Elementi multipli di un'involuzione qual.: imponendo un punto ν -plo ad un gruppo si danno in generale ν condizⁱ o $\nu - 1$ secondo che il punto è dato o no. Elementi $(r+1)$ pli di una I_n^r : dicendone $[n, r]$ il numero, si ha dal principio di corrisp. : $[n, r] = [n-1, r-1] + (n-r) = [n-2, r-2] + 2(n-r) = \dots = [n-r+1, 1] + (r-1)(n-r) = (r+1)(n-r)$. In generale *formola di Jonquières*¹⁹: in una I_n^r il numero dei gruppi con elemⁱ multipli secondo $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_t$, ove $r = \sum \nu_i - t$ ²⁰ è uguale a

$$\nu_1 \nu_2 \dots \nu_t (n-r)(n-r-1) \dots (n-r-t+1) //$$

diviso per $\alpha' \beta' \dots \delta'$ se fra le ν ve ne sono α uguali, β uguali, $\dots \delta$ uguali. Infatti, [73] supposte le ν in ordine decrescente di grandezza, considerando gli ∞^1 gruppi con elementi multipli secondo $\nu_1 \dots \nu_{t-1}, \nu_t - 1$ e la corrispondenza ha quest'ultimo e gli $n-r-t+1$ elemⁱ semplici, si ha, indicando con $\{n; r; \nu_1 \dots \nu_t\}$ il numero cercato la formola ricorrente:

per $\nu_t > 2$

$$\{n; r; \nu_1 \dots \nu_t\} = \frac{1}{\delta} [\{n-1; r-1; \nu_1 \dots \nu_{t-1} \nu_t - 1\} + (n-r-t+1) \{n-\nu_t+1; r-\nu_t+1; \nu_1 \dots \nu_{t-1}\}]$$

e per $\nu_t = 2$

$$\{n; r; \nu_1 \dots \nu_t\} = \frac{1}{\delta} 2(n-r-t+1) \{n-1; r-1; \nu_1 \dots \nu_{t-1}\}$$

¹⁹Crelle 66 (1866): Mémoire sur les contacts multiples des courbes de degré r avec une courbe... [si tratta di: JONQUIERES, E. DE 1866, *Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré r , qui satisfont à des conditions données avec une courbe fixe du degré m* , Jour. für die reine und angewandte Math., 66, pp. 289-321].

²⁰e $n \geq \sum \nu_i$, cioè $n \geq r + t$. La formola di Jonquières si ritrova in un lavoro di Lerch [si tratta del matematico ceco Mathias Lerch (Milínov, Boemia, 1860 - Sušice, Boemia, 1922)] (Sitzb. k. Böhm. Ges. d. W. 1885) [si tratta di: LERCH, M. 1885, *Bestimmung der Anzahl merkwürdiger Gruppen einer allgemeinen Involution n^{ter} Ordnung k^{ter} Stufe*, Sitzungsab. K. Böhm. Gesell. der Wissenschaften, pp. 597-600].

Ora queste formole sono appunto verificate da quell'espressione generale. Ne segue che questa è vera se ha luogo diminuendo successivamente la molteplicità ν di numero e di grandezza. Ma per $t = 1$ si riduce alla preced.: dunque è // vera sempre.

[74] - Caso particolare:

$$\{n; r; 2, 2, \dots 2\} = \frac{2^r (n-r) \dots (n-2r+1)}{r!}$$

- Applicazioni della formola di Jonquières. La $[n, r] = (r+1)(n-r)$ ci dà il num. degl'iperpiani stazionari di una γ^n raz^{le} di S_r ; e in generale che quel rango che è dato dal num. degl'iperpiani a contatto $(\rho+1)$ -punto passanti per una $S_{r-\rho-1}$, cioè dall'ordine della $M_{\rho+1}$ luogo degli S_ρ osculatori, è $(\rho+1)(n-\rho)^{21}$. Altri caratteri della curva dati dagl'iperpiani tangenti multipli²². Altre applicazⁱ alle varietà di un sist. lineare aventi dati contatti con una curva razionale; cerchi osculatori o sfere

[75] osculatrici per un punto o a contatto quadri- o // 5-punto o tangⁱ altrove; i punti sestattici di una curva piana raz^{le} (si devono togliere i flessi); ecc.

Per lo studio²³ dei gruppi ed invol. armoniche od apolari e teor. della polarità convien ricorrere alla C^n raz^{le} norm. (pag. 45)

$$x_0 = \lambda^n, \dots x_i = \lambda^{n-i}, \dots x_n = 1.$$

L'iperpiano osculatore in x sarà $\sum \xi_i y_i = 0$ ove $\sum \xi_i \sigma^{n-i} = 0$ abbia $\sigma = \lambda$ per soluz. n -pla, sicché $\xi_0 = 1 \dots \xi_i = (-1)^i \binom{n}{i} \lambda^i, \dots \xi_n = (-1)^n \lambda_0^n$ ossia confrontando: $\xi_i = (-1)^i \binom{n}{i} x_{n-i}$.

Questa è una reciprocità involutoria in cui il coniugio di due punti od iperpiani è dato da

$$\sum (-1)^i \binom{n}{i} x_i y_{n-i} = 0$$

²¹Se l' $S_{r-\rho-1}$ incontra γ in un punto, quel numero si riduce a $(\rho+1)(n-\rho-1)$, cioè diminuisce di $\rho+1$; γ è dunque $(\rho+1)$ pla per la varietà degli S_ρ osculatori. Ciò vale sempre.

²²I caratteri si modificano per curve particolari.

²³V. fra gli altri Castelnuovo, Studio dell'involuz^e ecc. e poi Deruyts [si tratta del matematico belga François Deruyts (Liegi 1864 - Liegi 1902) che tenne dal 1896 il corso di geometria superiore presso l'Università di Liegi e si distinse soprattutto per i suoi studi sulle involuzioni.], Bulletin Acad. Belgique 1887 [si tratta di: DERUYTS, F. 1887, *Sur la théorie de l'involution*, Bull. Acad. Belgique, 3, 14, pp. 650-664.].

$$\sum (-1)^i i! (n-i)! \xi_i n_{n-i} = 0.$$

Polarità rispetto a una quadrica, o sistema nullo²⁴, secondo che n è pari o dispari (Clif//ford). Dicendo *coniugate* od *armoniche* due n -ple quando l'una sta nella I_n^{n-1} [76] determinata dagli n elemⁱ n -pli presi nell'altra, la polarità rispetto alla C^n mostra che quella relaz. è reciproca; che se n è impari ogni n -pla è coniugata a se stessa; se n è pari solo se s'annulla un invariante quadratico. Le n -ple coniugate ad una o più date formano un'involuz.; involuzⁱ $I_n^\rho, I_n^{n-\rho-1}$ coniugate (quando i loro assi $S_{n-\rho-1}, S_\rho$ sono polari): gli stessi $(\rho+1)(n-\rho)$ elemⁱ sono $(\rho+1)$ pli per l'una, $(n-\rho)$ -pli per l'altra, giacché ad un S_ρ osculatore a C^n è polare l' $S_{n-\rho-1}$ osculatore nello stesso punto.

Al coniugio od *apolarità* fra n -ple di elementi si collega la *polarità* risp. ad una n -pla fissa $a_1 \dots a_n$ (rappres. dall'iperpiano α o // dal punto A). Se due elemⁱ, uno [77] x r -plo, l'altro y $(n-r)$ -plo fanno una n -pla coniugata alla A, dicesi che y è polo o centro armonico r -esimo, o d'ordine $n-r$ di x ; viceversa sarà $x \dots$. Se i paramⁱ di x e y sono risp. 0 e ∞ , l'equaz. di questa n -pla sarà $\lambda^r = 0$ e la condiz. di coniugio colla data $\sum \alpha_i \lambda^{n-i} = 0$ diventa $\alpha_r = 0$: il che mostra la coincidenza dell'ordinaria definiz^e dei centri armonici. Una teoria più generale si ha ponendo in luogo di x r pⁱ distinti $X_1 \dots X_r$: gli $n-r$ pⁱ y $(n-r)$ -pli in n -ple coniugate alla A e contenenti quegli rX formano il gruppo *polare misto* di questi r pⁱ. Si hanno pure prendendo il 1° gruppo polare di X_1 risp. ad A; poi il 1° polare di X_2 risp. a quello, ecc.; caso di $r = n-1$. - Si può domandare un gruppo di r elemⁱ X *apolare* ad A, cioè tale che ogni // elem. ne sia polo. Dovrà A giacere sull' S_{r-1} congiungente gli [78] X , sicché l'equaz. del gruppo A sarà $\sum \lambda_i X_i^n = 0$ o $\sum X_i^n = 0$, forma *canonica*, e viceversa. Allora *ogni* n -pla contenete tali r elemⁱ sarà coniugata alla A. Perché ciò accada basta che per l' S_{r-1} passino non solo $n-r$ ma $n-r+1$ iperpiani con contatti $(n-r)$ -punti altrove. Assunto un elem. y come $(n-r)$ -plo in una n -pla coniugata ad A, i G_r residui fanno una I_r^{r-1} . Si hanno così $n-r+1$ I_r^{r-1} le quali avranno in comune un'involuz. che sarà in generale (considerando la C_r^r di S_r) di dimens. $r - (n-r+1) = 2r - n - 1$. Dunque se $2r \geq n+1$ i gruppi di r elemⁱ *apolari* ad

²⁴Gli n pⁱ singolari della C^n di S_{n-1} per n dispari.

un gruppo di n formano in generale una I_r^{2r-n-1} . In partic. se n è impari vi è in
 [79] generale un determ. gruppo apolare // di $\frac{n+1}{2}$ elemⁱ: e se n è pari ∞^1 di $\frac{n}{2} + 1$
 elem. La questione in ogni caso coincide con quella degli S_{r-1} r -secanti passanti
 per A : si potrebbe anche risolvere proiettando da A e ricorrendo alle rigate F^{n-2}
 contenenti la C^n di S_{n-1} ed alle loro direttrici minime; inoltre quella consideraz.
 degli spazi secanti pone un limite infer. all'ordine dei gruppi apolari tolto quello
 d'ordine minimo. - Cfr. per la riduzione di una forma binaria a somma di potenze
 il Cap. sulle forme canoniche nella Algebra del Salmon^{xlvi}.

Le involuzioni d'ordine $n + 1$ sulla C^n conducono a notevoli proprietà di questa.
 I gruppi di una tale involuz. danno i vertici di piramidi iscritte: le facce di queste
 (iperpiani) formano per la I_{n+1}^r un involuppo ∞^r di classe $n - r + 1$ (perché r punti
 [80] // della C^n individuano la piramide e quindi $n + 1 - r$ facce). E poiché la I_{n+1}^r
 è individuata da $r + 1$ gruppi, segue che le facce $(r + 1)(n + 1)$ di $r + 1$ piramidi
 iscritte nella C^n sono in un involuppo ∞^r di classe $n - r + 1$ (che contiene ∞^r tali
 piramidi iscritte nella C^n). - Caso di $r = 1$: si ha un'altra C^n a cui le ∞^1 piramidi
 sono circoscritte. Se ad ogni vertice si fa corrispondere la faccia opposta, si ha fra
 le due C^n una corrisp. univoca: reciprocità; e poiché vi sono piramidi tali che ai
 vertici corrisp. le facce opposte sarà una polarità risp. ad una quadrica: ecc. ecc. -
 Caso di $r = n - 1$. - Esempi: coniche e cubiche sghembe.

Cenno sulla questione della determinaz. di un' I_n^r mediante gruppi di $i > r$ elemⁱ
 [81] // contenuti in essa: vale a dire determinaz. di spazi S_{n-r-1} incidenti a spazi dati
 S_{i-1} . Così Schubert^{xl} (Math. Ann. 26 p. 47)^l dimostra che gli S_{n-2} incidenti a
 $2n - 2$ rette sono $\frac{1}{n-1} \binom{2n-2}{n-2}$ e ne segue che tante sono appunte le I_n^1 con un dato
 Jacobiano: proposizione già enunciata dal Meyer^{li} (loc. cit. e Math. Ann. 21 p.
 132)^{lii} e trovata pure dallo Stephanos^{liii}. Altri casi furon determinati da Schubert e

^{xlvi}George Salmon (Cork 1819 - Dublino 1904).

^{xl}Hermann Schubert (Potsdam 1848 - Amburgo 1911).

^lSCHUBERT, H. 1886, *Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen unseres Raums*, Math. Annalen, 26, pp. 26-51.

^{li}Friedrich Wilhelm Franz Meyer (Magdeburg 1856 - Königsberg, Ostpreußen, 1934).

^{lii}MEYER, W. F. 1883, *Über Apolarität und rationale Curven*, Math. Annalen, 21, pp. 125-137.

^{liii}Cyparissos Stéphanos (Kea 1857 - Atene 1917).

Castelnuovo: non si ha però ancora quello generale.²⁵ //

Cap. 5°. Serie lineari ∞^1 . Genere degli enti algebrici.

[82]

Importanza delle serie lineari ∞^1 . Sono caratterizzate dalle due proprietà: 1° di esser razionali, 2° che un elemento individua un gruppo. Invero dalla 1ª segue che i gruppi corrispondono algebr. ad un param. λ ; e dalla 2ª che (pag. 49, 50) se x è l'elemento dell'ente la corrisp. fra i gruppi e gli elemⁱ che li compongono è data da $\lambda = f(x)$ ove f è funz. raz^{le}, ossia $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, $\varphi(x) - \lambda\psi(x) = 0$ che prova che la serie è lineare. Si vede inoltre come le funzⁱ razionali dell'ente algebrico²⁶, cioè delle coord. di elemⁱ dell'ente, corrispondono alle g_n^1 , essendo i gruppi di una tal serie i gruppi di elemⁱ in cui una // funz. raz^{le} assume uno stesso valore: il numero n degli elemⁱ variabⁱ (che non annullano φ e ψ), cioè il numero degli zeri o degl'infiniti della funz., dicesi *grado* od *ordine* di questa. Dire che due gruppi di n elemⁱ stanno in una stessa serie lin. (g_n^r e quindi in una g_n^1) equivale a dire che sono gli zeri e gl'infiniti di una stessa funz. raz^{le}. Ecc. ecc. (V. pag. 94) [83]

Su un ente algebr. γ si considerino due serie $g_n^1, g_{n'}^1$ e siano S, S' : abbiamo risp. ν, ν' gruppi od elemⁱ di diramaz. cioè coincidenze di 2 elemⁱ di un gruppo. Considerando nella serie S come omologhi due gruppi quando contengono due elemⁱ x, y di un gruppo di S' , si ha:

$$2n(n' - 1) = \nu' + 2z,^{27}$$

ove z è il numero delle coppie comuni ad // S, S' . Similmente ... e sottraendo

[84]

$$\nu - 2n = \nu' - 2n',$$

²⁵Per le I_n^1 , cioè per gli S_{n-2} , v. i Beiträge zur Liniengeom. in n Dimens. (Hamb. Mitth. III 1892) [si tratta di: SCHUBERT, H. 1892, *Beitrag zur Liniengeometrie in n Dimensionen*, Mitteilungen der Math. Gesell in Hamburg, 3, pp. 86-97], ove la questione è risolta completam.^e per le rette.

²⁶Cfr. Weierstrass [si tratta del matematico tedesco Karl Weierstrass (Ostenfelde 1815 - Berlino 1897)], Vorl. u. Abel'sche Functionen p. 22 [l'opera pubblicata, WEIERSTRASS, K. 1902, *Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten*, in *Mathematische Werke*, 4, Berlin, Mayer & Müller, si basa sulle lezioni del 1875-76, che Segre poteva conoscere verosimilmente su una copia manoscritta].

²⁷Cfr. Riemann pag. 105 lin. 3 da sotto [v. RIEMANN 1876, cit.].

sicch  sull'ente   costante la differenza fra il numero degli elemⁱ di diramaz. e il doppio dell'ordine di una ser. lin. ∞^1 . Dalla 1^a uguaglianza segue che ν   pari (v. anche pag. 72). L'espressione $\frac{\nu}{2} - n + 1$ dicesi *genere* dell'ente algebrico: chiamandolo p si ha

$$\frac{\nu}{2} - n + 1 = p$$

$$\nu - 2n = 2p - 2$$

$$\nu = 2(n + p - 1).$$

In questa definiz. di genere, come nel ragionamento preced., si noti che vi possono essere p^i di diramaz. da contar pi  volte nel numero ν : e precisamente se in un gruppo della g_n^1 vi sono i elemⁱ coincⁱ come in uno, questo conta $i - 1$ volte fra gli elemⁱ di diramaz.,   $(i - 1)$ -plo come elem^o diram. (ci  si // vede approssimativam.^e se si considerano i elemⁱ consecutivi, come una retta a contatto i -punto conta come $i - 1$ tangⁱ da un suo punto: analiticam. si pu  vedere in modo completo; se l'ente   raz^{le}, si vede subito sul Jacobiano).

Gli enti razionali hanno ($\nu = 2(n - 1)$) il genere $p = 0$.

  evidente che due enti in corrisp. univoca hanno lo stesso genere: donde l'importanza di questo nella geom. delle trasformazⁱ biraz^{li}. Cenno sui *moduli* ($3p - 3$ se $p > 1$ ecc.). Il genere e i moduli di una curva, rigata, ∞^1 di S_i non mutano per projez., per sezione, ecc.: cos  il genere ed i moduli di una ∞^1 di curve o superf. per sezione ecc. ecc.

[86] L'ente algebrico potendosi sempre ri//ferire ad una γ^n piana, vediamo come il genere di questa dipenda dai suoi caratteri. Per g_n^1 si prende quella determinata su γ da un fascio di rette. Se i punti multipli son tutti ordinari, le ν rette di diramaz. sono quanto la classe: $\nu = n(n - 1) - \sum s(s - 1)$, e quindi $p = \frac{\nu}{2} - n + 1 = \frac{n-1 \cdot n-2}{2} - \sum \frac{s \cdot s-1}{2}$ che coincide colla definiz. di pag. 3. Se poi si ha una singolarit  superiore, Nöther ha dimostrato (Math. Ann. IX)^{liv} che essa si pu  considerare come la riunione di p^i multipli ordinari e di p^i di diramaz. della curva. E precisa-

^{liv}NÖTHER, M. 1876, * ber die singul ren Werthsysteme einer algebraischen Function und die singul ren Punkte einer algebraischen Curve*, Math. Annalen, 9, pp. 166-182.

mente si dice che in un p. P di γ cadono $i - 1$ pⁱ di diramaz., quando, qualunque sia S , la retta SP conta $i - 1$ volte fra le rette di diramaz. della g_n^1 , cioè i punti di un gruppo di questa cadono in P (sicché $i \leq$ molteplicità di P). Allora Nö//ther [87] dimostra che la classe è $n(n - 1) - \sum s(s - 1) - x$, ove la somma va estesa a tutte le singolarità *ordinarie* che equivalgono alle singolarità di γ , e χ è il numero complessivo dei pⁱ di diramaz. di γ . Ne segue $\nu =$ classe + χ , cioè $\nu = n(n - 1) - \sum s(s - 1)$, sicché rimane valida in ogni caso la formola

$$p = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - \sum \frac{1}{2}s(s - 1).$$

Caso di soli pⁱ doppi: nodi e cuspidi. Il caso di soli d nodi è il più generale per una γ^n piana di gen. p (in questo senso che un p. s -plo impone $\frac{s \cdot s + 1}{2} - 2$ condizⁱ che sono più che le $\frac{s \cdot s - 1}{2}$ condiz. imposte da altrettanti pⁱ doppi). Si ha allora

$$d = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - p$$

come numero delle *coppie neutre* di una g_n^2 sull'ente di genere p . E dalle formole di Plücker pel numero dei flessi e delle // tgⁱ doppie [88]

$$\rho = 3(n + 2p - 2)$$

$$\delta = 2(n + p - 2)(n + p - 3) - 4p$$

si hanno in una g_n^2 $3(n + 2p - 2)$ elemⁱ tripli ecc.

Questo risultato si estende: in una g_n^r su un ente di genere p vi sono

$$(r + 1)(n + rp - r)$$

gruppi dotati di elementi $(r + 1)$ -pli (v. per gli enti razionali pag. 72). Rappresentando la g_n^r con una C^n di gen. p . di S_r si tratta di trovarne gl'iperpiani stazionari od iperpsculatori. Essi son dati da una delle formole di Veronese (Math. Ann. XIX,

pag. 201^{lv}, quella che dà $w^{(n-2)}$, ponendovi $R = w_1 = w_1^{(1)} = \dots = w_1^{(n-3)} = 0$; che però possiamo ricavare direttamente seguendo la via del Castelnuovo (Ricerche, n. 7). Seghiamo un piano π cogli spazi osculatori alla C^n : se ricordiamo che S_{r-2} [89] osculatore è intersez. di due iperpiani osculⁱ inf. vicini, ossia // un iperpiano oscul. $123 \dots r$ congiunge S_{r-2} osculⁱ inf. vicini $123 \dots (r-1)$ e $23 \dots r$; e che un iperpiano iperoscul. $123 \dots r(r+1)$ congiunge tre S_{r-2} consecutivi $12 \dots (r-1), 23 \dots r, 34 \dots (r+1)$; ed un S_{r-3} oscul. è l'intersez. di tre iperpiani osculⁱ consecutivi, vediamo che su π si avrà una curva luogo delle traccie degli S_{r-2} osculⁱ e involuppo degl'iperpiani osculⁱ, la quale avrà per tangⁱ staz^e le traccie degli spazi iperosculⁱ e per punti stazⁱ le traccie degli S_{r-3} osculⁱ incidenti a π . Indicando dunque con N_r il numero dei gruppi con elemⁱ $(r+1)$ -pli in una g_n^r sull'ente di gen. p , una nota formola di Plücker darà:

$$N_r - N_{r-3} = 3N_{r-1} - 3N_{r-2}$$

Di qui si trae appunto $N_r = (r+1)(n+rp-r)$, poiché questa formola verifica [90] quella relazione ricorrente e vale per $r=1$ ed $r=2$ (sicché // si può già applicare ad $r=3$, poiché $N_0 = n$ è il numero dei pⁱ d'incontro di π con C).²⁸ - Applicazⁱ di [91] questa formola a // naloghe a quelle di pag. 74.

^{lv}VERONESE, G. 1882, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens*, Mathematische Annalen 19, pp. 161 - 234.

²⁸Se la g_n^r è una serie composta mediante i gruppi di μ elemⁱ di una ∞^1 , sicché $n = \mu m$, la curva C che la rappresenta in S_r sarà d'ord. m (da contare μ volte) e di un certo genere π (il genere di quella ∞^1) ed essendo col dato ente algebr. in corrisp^a $(1, \mu)$, avrà per una formola che vedremo in seguito $y = 2(p-1) - 2\mu(\pi-1)$ elemⁱ di diramaz. Gl'iperpiani stazionari a C rappresentano ognuno un gruppo della g_n^r dotato di μ elemⁱ $(r+1)$ -pli e sono $(r+1)(m+r\pi-r)$. Ogni iperpiano poi che in un p. di diramaz. abbia con la C contatto i -punto rappresenta un gruppo della g_n^r dotato di elem^o $(2i)$ plo. Ogni p. di diramaz. viene così ad assorbire $\frac{r(r+1)}{2}$ elemⁱ $(r+1)$ pli della g_n^r composta, se vogliamo che anche per questa rimanga valida l'espressione trovata del numero degli elemⁱ $(r+1)$ -pli: giacché questi verranno così ad essere

$$\begin{aligned} & \mu(r+1)(m+r\pi-r) + \frac{r(r+1)}{2}[2(p-1) - 2\mu(\pi-1)] \\ & = \mu m(r+1) + r(r+1)(p-1) = (r+1)(n+rp-r). \end{aligned}$$

Ritornando alla curva piana come immagine dell'ente algebrico, si può sempre con trasf. biraz. del piano ridurla a sole singolarità ordinarie: v. Nöther, Math. Ann. IX e XXIII^{lvi}, e Bertini, Rendⁱ Ist. Lomb. 1888^{lvii}. Anzi si può sempre riferire univocam. a curva con soli p^i doppi (v. ad es. Bertini, Rivista di mat. t. I)^{lviii}. Noi ci varremo solo della prima riduzione.

Rappresentando così l'ente algebrico segue subito che (pag. 2) $p \geq 0$, e che (pag. 57) se $p = 0$ l'ente è razionale.

Sulla γ^m piana una serie lineare g_n^r si // determina (pag. 55) mediante un sist. di [92] curve aggte ψ^v . Considerando tutte le ψ^v agg. passanti per gli stessi p^i residui di γ^m si ha una g_n che contiene quella. Ora, posto $v = m - 3 + \alpha$, tutte le ψ^v segano una serie d'ord. $m\alpha + 2p - 2$ e dimens. $\geq m\alpha + p - 2$. Fissando quegli $m\alpha + 2p - 2 - n$ p^i residui si ha dunque una g_n di dimens. $\geq n - p$.²⁹ Segue che per una g_n^r completa si ha $r \geq n - p$, ossia $n - r \leq p$. In caso contrario la serie è parziale; una γ^n di uno S_r ove $r < n - p$ non è normale: è proj. di una di S_{n-p} . Una g_n^r per cui $n - r < p$ dicesi *speciale*: così pure una serie contentuta in una dello stesso ordine, la quale sia speciale. Dunque per le g_n^r complete e le γ_n di S_r normali, quando non son speciali è $n - r = p$; altrimenti $n - r < p$. Se $p = 0$, o $p = 1$, non vi possono essere serie speciali (pag. 54). Se // $p > 1$ si ottengono serie speciali segandole con curve aggte [93] d'ord. $m - 3$ su γ^m (curve aggte di ord. minore si completano con una curva fissa in tali): poiché quelle danno una g_{2p-2} di dimens. $\geq p - 1$ (pag. 56) e facendole passare per $2p - 2 - n$ p^i si ha una g_n^r ove $r \geq n - p + 1$. Vedremo poi che viceversa tutte le serie speciali si possono tenere così, sicché il loro ordine è sempre $\leq 2p - 2$; e che vi è una sola g_{2p-2}^{p-1} (la quale non ha elemⁱ fissi).³⁰

Si può sempre rappresentare l'ente di gen. p in ∞ modi (nota a pag. 92) con una curva appartenente ad S_r e d'ordine $n \leq p + r$; o, se appartiene ad S_{p-1} , d'ordine

^{lvi}NÖTHER, M. 1884, *Rationale Ausführung der operationen in der Theorie der algebraischen Functionen*, Math. Annalen, 23, pp. 311-358.

^{lvii}Cfr. BERTINI 1888, cit.

^{lviii}BERTINI, E. 1891, *Dimostrazione di un teorema sulla trasformazione delle curve algebriche*, Rivista di Matematica, 1, pp. 22-24.

²⁹Se $n > p$ si ha sempre per tal modo una g_n^r ove $r \geq n - p$ che contiene un gruppo dato qualunque di n elemⁱ.

³⁰È opportuno notare che se una serie speciale ha elementi fissi, la serie che rimane astraendo da questi sarà pure speciale.

$\leq 2p - 2$. In particolare con una curva piana d'ordine $\leq p + 2$. Così per $p = 1$ si ha la cubica; e per $p = 2$ la quartica con 1 punto doppio o la conica doppia (in ambi
[94] // i casi la g_2^1 speciale è evidente). Per $p = 3$ la quartica piana generale o la conica doppia.

In queste rappresⁱ piane dell'ente algebrico si cercava su questo una g^2 : la g^2 del minimo ordine dava la curva piana del minimo ord. rappres^e dell'ente. - Si può invece ricorrere a due g^1 cioè a due funzⁱ raz^{li} dell'ente (v. pag. 82).

Ricordiamo (ivi) che una funz. raz^{le} $z = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ dell'ente definisce una g_n^1 ove n è il grado (secondo Weierstrass) della funz.³¹. Viceversa data una g_n^1 $\varphi(x) - z\psi(x) = 0$ si avranno ∞ funzⁱ raz^{li} $\frac{a\varphi(x)+b\psi(x)}{c\varphi(x)+d\psi(x)}$, cioè le trasformazⁱ lineari $\frac{az+b}{cz+d}$ di una $z = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. E non se ne avranno altre, poiché se $\phi(x) - Z\Psi(x) = 0$ dà la stessa g_n^1 , fra le z e Z che corrispondono ad uno stesso elem. x dell'ente vi sarà corrisp. univoca, sicché
[95] // Z sarà funz. lin. fratta di z .

Siano $z = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, $s = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$ due funzⁱ razⁱ dell'ente, risp. di gradi n, m tali che non ogni gruppo di dato z abbia più elemⁱ comⁱ con un gruppo di dato s , cioè che le $g_n^1, g_m^1 \dots$ non abbiano ∞ coppie comuni. Fra z ed s vi sarà una corrispondenza (m, n) , cioè un'equ. $F_{(s,z)}^{(n,m)} = 0$, che si avrebbe per eliminaz^e, ed i gruppi (s, z) saranno in corrisp. univoca coll'ente; le coord. x di questo saranno viceversa funzⁱ raz^{li} di s, z : quella equaz. rappresenta l'ente. Così a rappres. un ente alg. si può prendere in generale la equaz. che lega due sue funzⁱ raz^{li} qual. Assumendo per una od entrambe le funzⁱ di grado minimo dell'ente si riduce la $F = 0$ a gradi minimi m, n .

[96] Notiamo ancora che se sull'ente vi è una g_n^1 (n elemⁱ variabⁱ) // le coord. dell'ente saranno funzⁱ raz^{li} di un parametro z e della radice s di un'equaz. di grado n a coeffⁱ raz^{li} in z (z sarebbe la funz. raz^{le} di grado n rappres^e la g_n^1).

Considerando la $F_{(s,z)}^{(n,m)} = 0$ come equ. di una curva piana si cade nella seguente rappres.^e Due g_n^1, g_m^1 si rappresentino con due fasci di raggi S, S' : questi saranno in corrisp. (m, n) e genereranno in generale una γ^{m+n} su cui il fascio S stacca la $g_n^1 \dots$ Di qui seguirebbe di nuovo il teor. del principio di questo Cap^o (pag. 82), assumendo ad arbitrio una g_m^1 ausiliaria. - Un p. s -plo di γ fuori di S, S' corrisponde

³¹Qui e nelle prime pag. segⁱ si considerano solo serie non degeneri.

ad s elemⁱ dell'ente, comuni a due gruppi delle g_m^1, g_n^1 , e viceversa. Uguagliando a p il genere di γ si ha la relaz. $p = (m-1)(n-1) - \sum \frac{s \cdot s-1}{2}$ che si trova in sostanza alla fine del n. 7 (p. 107) del // la memoria di Riemann; v. anche Castelnuovo n. 4. - [97]
 Se due g_n^1 hanno un G_n comune, stanno in una g_n^2 (coniche pei 3 pⁱ n -pli della γ^{2n}).
 Se hanno un G_n ed un G_{n-1} comuni, l'ente è razionale. Se hanno due G_n comuni, coincidono. Vedremo poi proposizioni più generali.

Facendo corrisp. la r. SS' a se stessa, γ si riduce all'ordine $m+n-1$; e in generale se le g_m^1, g_n^1 hanno un G_t comune, si può ridurre γ all'ord. $m+n-t$ (osservaz. di Bertini): com'è evidente per $t=2$. Basandosi su ciò la rappres. di un ente con una g_n^1 mediante una curva piana ed un fascio di raggi S si può semplificare, ottenendo una γ^{p+2} col p. S $(p+2-n)$ -plo ($n \leq p+1$): basta per $n-1$ pⁱ di un G_n della serie ed altri $p+1-(n-1) = p+2-n$ tra cui non vi sia l' n -esimo con // durre una g_{p+1}^1 ecc. (Bertini) [98]

Enti dotati di una g_2^1 . Valendosi di una g_m^1 ove $m \leq p+1$, che contenga un gruppo in cui non vi sia alcuna coppia della g_2^1 (nota a pag. 92), si ottiene una γ^{m+1} con p. $(m-1)$ -plo, ove si può supporre $m+1 \leq p+2$; ma sarà precisamente = poiché il gen. è p (e 0 pⁱ doppi). Se $p=0$ è evidente che vi sono $\infty^2 g_2^1$ (nella g_2^2) e che due qualunque hanno una coppia comune. Se $p=1$ ogni coppia determina (nota a p. 92) una g_2^1 ; si ritrova per imagine la cubica valendosi di due g_2^1 e $p=0$ o $p=1$ (p. doppio o no) secondo che vi è o no una coppia comune: sicché per $p=1$ ogni coppia *individua* la g_2^1 . Se $p=2$ si ha sempre la quartica con p. doppio. E sempre se $p>1$ non vi può essere una sola g_2^1 .

Gli enti con una g_2^1 , valendosi di una // funz. raz^{le} di 2° grado z si posson [99] rappresentare (v. il principio di p. 96) così: $x_i = f_i(z, s)$ ove le f_i son raz^{li} ed $s^2 = R(z)$ è un polinomio in z . La g_2^1 ha i gruppi corrispⁱ ai vari valori di z , per ognun dei quali se ne hanno due di s : elemⁱ di diramaz^e son dunque quelli per cui $R(z) = 0$. Ma sono (p. 84) $2p+2$: dunque questo è il grado di $R(z)$. Elemⁱ di diramaz. multipli non ve ne possono essere (fine di p. 84); sicché al più potrà accadere che $R(z)$ si abbassi al grado $2p+1$ per essere $z = \infty$ elem. di diramaz. Cenno sugl'integrali ellittici ed iperellittici. Gli enti $p=1$ si dicono anche *ellittici* e

quelli ... *iperellittici*. Noi però usiamo questo nome per tutti gli enti con una g_2^1 . Per questi enti particolari cominciamo a risolvere certe questioni che poi tratteremo in generale. //

[100] *Moduli degli enti iperellittici* $p > 0$. Osserviamo anzitutto che $R(z)$ è un polinomio arbitrario (senza radici doppie) di grado $2p + 2$. Dato un altro ente iperell. di gen. p rappres^o da $s'^2 = R'(z')$, se mediante una trasformaz. lin. $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ si ha $R'(z') = \frac{R(z)}{(cz+d)^{2p+2}}$ aggiungendo $s' = \frac{s}{(cz+d)^{p+1}}$ oppure $s' = \frac{-s}{(cz+d)^{p+1}}$ si muterà in $s^2 = R(z)$. Dunque *basta* che i due gruppi $2p + 2$ elemⁱ diramⁱ siano proiettivi perché i due enti iperellⁱ si equivalgano biraz.^e Ma ciò è anche necessario se $p > 1$, poiché allora le due uniche g_2^1 devono corrispondersi ... Dunque $2p - 1$ moduli³² (birapporti).

Rimane il caso $p = 1$: allora vi sono ∞ g_2^1 tali che da una coppia, e in partic. da un elem. diram., è individuata la serie. Ma allora se A, A' sono elem. di di-
[101] ram. di due g_2^1 , la corrisp. // univoca determinata dalla g_2^1 che contiene la coppia A, A' muterà l'una nell'altra quelle due g_2^1 , e però i birapporti delle due quaterne di elemⁱ di diramaz. saranno uguali: notevole teorema del *birapporto di un ente ellittico*. Segue poi che anche per $p = 1$ il birapporto di due enti in corrisp. univoca è lo stesso: esso è il *modulo*. - Le g_2^1 sulla γ^m ellittica si hanno con fasci di curve aggte d'ord. $m - 3 + \alpha$ per $m\alpha - 2$ pⁱ semplici: così sulla cubica piana da fasci d'ord. α per $3\alpha - 2$ pⁱ; in partic. da fasci di rette coi centri sulla cubica. Segue che tutte le coppie di una g_2^1 ottenuta ad es. da un fascio d'ord. α sono allineate con 1 p. fisso. Che in una corrisp. univoca fra due cubiche alle coppie allineate con 1 p. corrispondano coppie allineate con 1 p., ecc.

[102] *Serie speciali sugli enti iperellittici* $p > 1$. // Lasciamo da parte gli elem. fissi. Abbiassi una g_n^r che non sia composta colla g_2^1 : rappres. una γ^n di S_r , semplice o multipla, ma in cui le coppie della g_2^1 sono elemⁱ distinti. La rigata (p. 72) delle congiungⁱ sarà d'ord. $n - \frac{x}{2}$ ossia $n - p - 1$, onde (p. 36) $n - p - 1 \geq r - 1, n - p \geq r$. Segue che una g_n^r speciale è necessariamente composta con la g_2^1 , e però non è altro che un'invol. nella serie raz^{le} che ha per elemⁱ le coppie della g_2^1 (cfr. pag. 61);

³²Segue che la geom. proj. della r . doppia con $2p + 2$ pⁱ diram. che rappresenta l'ente iperell. equivale completamente alla geom. su quest'ente. - Resta anche risolta la questione delle corrispondenze univoche sull'ente iperellittico.

per una serie *completa* così composta è $n = 2r$: sarà speciale se $n - r < p$ cioè $r \leq p - 1$ e quindi $n \leq 2p - 2$ (Se poi $r > p$ per una serie così composta non può più essere completa poiché $n - r > p$). Si vede ora che (nel caso iperellittico) le curve aggr^{te} d'ord. $m - 3$ di una γ^m piana sono *precisamente* ∞^{p-1} e che la g_{2p-2}^{p-1} che esse staccano // non ha pⁱ fissi. Segue pure che vi è una sola g_{2p-2}^{p-1} e che per ogni g_{2r}^r speciale vi è una $g_{2p-2-2r}^{p-1-r}$ *residua* tale che ogni gruppo dell'una con ogni gruppo dell'altra dà un gruppo della g_{2p-2}^{p-1} , ecc. - Di passaggio si ha che una γ^n semplice di gen. p del piano se $n - p < 2$, $n < p + 2$, non può esser iperellitt. (e se $n = p + 2$ la curva iperell. ha un p. p -plo), cioè non può esser iperell. una γ^n con d pⁱ doppi se $d < \frac{n-2 \cdot n-3}{2}$: esempi $n = 4, 5$. //

Cap. 6°. Formola di Zeuthen.

Varietà ∞^1 di spazi e loro applicazioni.

Le serie speciali

[104]

Dati due enti $\gamma_p, \gamma_{p'}$ in corrisp. $(1, \mu)$ ad una g_n^1 di γ con ν elemⁱ di diram. corrisponde su γ' una $g_{\mu n}^1$ composta che ha per elemⁱ diram. i $\mu\nu$ che corrisp. a quei ν , e poi gli y elemⁱ doppi corrisp. agli y elemⁱ di diram. di γ nella corrispondenza. Segue (p. 84)

$$\nu = 2n + 2(p - 1)$$

$$y + \mu\nu = 2\mu n + 2(p' - 1),$$

donde:

$$y = 2(p' - 1) - 2\mu(p - 1).$$

Importanza di questa formola. Ne segue $\mu(p - 1) \leq p' - 1$. Quindi se $p = p' > 1$ sarà $\mu = 1$, la corrisp. è necessariam. univoca (per // $p = p' = 1$ ciò non varrebbe [105] più). Se $p' = 0$ anche $p = 0$, donde segue di nuovo che sull'ente raz^{le} una ∞^1 di gruppi di μ elemⁱ tale che ogni elem. stia in un sol gruppo è raz^{le} (cfr. p. 69).

Prima di passare alle applicazioni alle rigate ecc. osserviamo che quella formola si può generalizzare. Siano $\gamma_p, \gamma_{p'}$ in corrisp. (x, x') con (y, y') elemⁱ diram. e

consideriamo l'ente Γ_π costituito dalle coppie di elemⁱ omolⁱ di γ, γ' (rappres^o ad es. dalla rigata generata da γ, γ' se questi son curve). Sarà γ con Γ in corrisp. $(1, x')$ onde

$$y = 2(\pi - 1) - 2x'(p - 1).$$

Similmente

$$y' = 2(\pi - 1) - 2x(p' - 1),$$

e sottraendo

$$y - y' = 2x(p' - 1) - 2x'(p - 1),$$

formola di Zeuthen (Math. Ann. III)^{lix}. La si può anche avere direttam. senza passare
[106] per // quel caso partic. assumendo su γ e γ' due g_n^1, g_n^1 risp. con ν, ν' elemⁱ diram.: si avranno così su Γ due $g_{nx'}^1, g_{n'x}^1$, risp. con $y + \nu x'$ e $y' + \nu' x$ elemⁱ diram., onde (p. 84)

$$y + \nu x' - 2nx' = y' + \nu' x - 2n'x$$

che, sostituendo $\nu - 2n = 2(p - 1), \nu' - 2n' = 2(p' - 1)$ dà appunto la formola di Zeuthen. Del resto da quell'uguaglianza, ponendo $x = x' = 1$ e quindi $y = y' = 0$ si trae la $\nu - 2n = \nu' - 2n'$: ora essa si può dimostrare direttamente come si dimostrò questo suo caso particolare, cioè cercando il numero z delle coppie della g_n^1 di γ a cui corrispondono su γ' coppie della $g_{n'}^1$ (mediante il princ. di corrispondenza sulla g_n^1) ed uguagliandolo a quello ottenuto analogam. colla $g_{n'}^1$.

Data su una curva γ di gen. p una ∞^1 di gen. π di gruppi di m pⁱ sì che ogni // [107] p. stia in un sol gruppo, da pag. 104 abbiamo

$$(1) \quad y = 2(p - 1) - 2m(\pi - 1),$$

che vale anche se γ è *multipla* di gen. $p \dots$

In particolare se si è in S_r e gli spazi S_k cui appartengono i gruppi sono inferⁱ ad $S_r \dots$; caso di $k = r - 1$; in generale si hanno le curve tracciate sulla rigata di gen. π ,

^{lix} ZEUTHEN, J. 1871, *Nouvelle démonstration des théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes*, Math. Annalen, 3, pp. 150-156.

sulla ∞^1 di piani, ... E anche qui si ha (cfr. p. 105) che se $p = 0$ anche $\pi = 0$, sicché una rigata o varietà ... non razionale non può contenere alcuna curva direttrice razionale, e più in generale il genere delle curve dev'essere $p > m(\pi - 1)$, ecc.

Il num. y si può esprimere, anzi che coi generi, cogli ordini n di γ e v della rigata o varietà e qualche altro carattere (v cessa di aver senso quando $k = r$). Così poi eliminando y si ha una relazione importante // fra i caratteri di γ e, se $k \leq r - 1$, [108] quelli della M_{k+1} luogo degli $\infty^1 S_k$.

Se $k = 1$ si ha, per la rigata, applicando il princ. di corrisp. ad un fascio d'iperpiani proiettanti la corrisp. su γ in cui si considerano come omologhi due $p^i A, A'$ quando sono in una stessa gener.

$$(2) \quad y = 2(m-1)n - m(m-1)v - 2z,$$

ove z è il num. di quei p^i doppi di γ che riuniscono coppie $A A'$ (esempi). Dalle (1) e (2) segue

$$(3) \quad (m-1)n - p = \frac{m \cdot m - 1}{2} v - m\pi + m - 1 + z$$

formola da me data nella nota "Intorno alla geometria su una rigata algebrica (Rendicⁱ Lincei, 1887, 2^o sem^e pag. 3), e poi nelle "Recherches générales sur les courbes et surfaces réglées algébriques, 1^e P^e (Math. Ann. t. 30). Notiamo che essa vale anche se γ è multi//pla, cioè una curva d'ord. $\frac{n}{\mu}$ da contarsi μ volte, poichè allora vale [109] ancora la (2), senza modificazioni.

Sia k qualunque, $k \leq r$. Introduciamo gli ordini $x_1, x_2, \dots x_i \dots$ delle varietà costituite dalle rette, piani, ... $S_i \dots$ congiungenti $2, 3, \dots i + 1, \dots$ punti di un gruppo. L'ultimo di questi numeri si ha per $i = k$ se $k \leq r - 1$, ed è $x_k = \binom{m}{k+1} v$. Si ha anzitutto, similmente alla (2):

$$2(m-1)n = 2x_1 + y;$$

- però se vi son dei p^i doppi di γ che contino due volte in gruppi della ∞^1 , il loro numero raddoppiato si deve aggiungere al 2° membro. Ora da x_1 si passerebbe analogam. ad x_2 e da questo ad $x_3, \dots$ considerando similmente su un S_{r-i} la curva
- [110] luogo delle tracce degli $\infty^1 S_i$ e la rigata luogo di quelle degli $\infty^1 S_{i+1}$. // Ciò equivale ad applicare ancora il princ^o di corrisp., considerando nella nostra figura come omologhi due S_i che congiungano gli stessi i p^i P di un gruppo risp. a 2 p^i A, A' di questo; ed in un fascio di S_{r-i-1} di quell' S_{r-i} considerando come omologhi due spazi incidenti a due tali S_i . Si va fino ad $i = k - 1$, cioè a segare con un S_{r-k+1} ; se $k = r$, il fascio si riduce ad una retta punteggiata nel caso estremo. - La corrisp. nella ∞^1 di S_i è simmetrica d'indice $(i + 1)(m - i - 1)$; onde nel fascio si avranno $2(i + 1)(m - i - 1)x_i$ coincidenze. Queste si hanno: 1° essendo i due S_i distinti ma incidenti all' S_{r-i} nello stesso p ., che sarà dunque sull' S_{i-1} dei P : sono così $(m - i)(m - i - 1)x_{i-1}$ coincidenze; 2° essendo i due S_i distinti ed incidenti
- [111] all' S_{r-i} in due p^i distinti: questi essendo in un S_{r-i-1} del fascio, // la loro retta incontra il sostegno S_{r-i-2} , onde l' S_{i+1} di quei due S_i è incidente a questo: sono $(i + 1)(i + 2)x_{i+1}$; e per $i = k - 1$ bisogna mettere $x_k = \binom{m}{k+1}\nu$. Però questo caso estremo non ammette questa 2ª specie di coincidenze se $k = r$; dovremo dunque allora mettere $\nu = 0$. 3° coincidendo i due S_i nel coincidere di A, A' : ciò dà $\binom{m-2}{i}y$ coincidenze. 4° coincidendo i due S_i senza che coincidano A, A' , cioè essendovi un S_i con $i + 2$ p^i di un gruppo (ogni tal S_i darebbe $(i + 1)(i + 2)$ coincidenze): l'esistenza di un gruppo siffatto impone a questo $k - i$ condizⁱ e quindi si può dire che in generale ha luogo solo nel caso estremo $i = k - 1$, cioè che vi sono solo dei gruppi di $k + 1$ p^i appartenenti ad S_{k-1} , e siano z . Però nel seguito c'importerà solo
- [112] di sapere (tranne per $k = r$) che i primi mem/bri delle uguaglianze seguenti sono *almeno* uguali ai 2ⁱ, sicché non escluderemo neppure quelle particolarità eccezionali. Abbiamo dunque:

$$\begin{aligned} 2(m-1)n &= 1 \cdot 2x_1 + y \\ 2 \cdot 2(m-2)x_1 &= (m-1)(m-2)n + 2 \cdot 3x_2 + (m-2)y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \cdot 3(m-3)x_2 &= (m-2)(m-3)x_1 + 3 \cdot 4x_3 + \binom{m-2}{2}y \\
 &\dots \\
 2 \cdot i(m-i)x_{i-1} &= (m-i+1)(m-i)x_{i-2} + i(i+1)x_i + \binom{m-2}{i-1}y \\
 2(i+1)(m-i-1)x_i &= (m-i)(m-i-1)x_{i-1} + (i+1)(i+2)x_{i+1} + \binom{m-2}{i}y \\
 2(i+2)(m-i-2)x_{i+1} &= (m-i-1)(m-i-2)x_i + (i+2)(i+3)x_{i+2} + \binom{m-2}{i+1}y \\
 &\dots \\
 2(k-1)(m-k+1)x_{k-2} &= (m-k+2)(m-k+1)x_{k-3} + (k-1)kx_{k-1} + \binom{m-2}{k-2}y \\
 2k(m-k)x_{k-1} &= (m-k+1)(m-k)x_{k-2} + k(k+1)\left[\binom{m}{k+1}v + z\right] + \binom{m-2}{k-1}y
 \end{aligned}$$

Moltiplicando queste equazⁱ risp. per fattori:

$$k(m-2) \dots (m-k), (k-1)(m-3) \dots (m-k), \dots, (k-1)!$$

e quella generica intermedia per $(k-i)!(m-i-z) \dots (m-k)$ e sommando si vede dalle tre di mezzo che scompaia x_i , dalle due ultime scompaia anche x_{k-1} e, [113] riducendo, rimane

$$(4) \quad y = 2 \frac{m-1}{k} n - 2 \frac{m(m-1)}{k(k+1)} v - 2z : \binom{m-2}{k-1},$$

che dà l'espressione cercata del numero y ...; essa (con quel calcolo) è dovuta a Schubert.

Se $k = r$ bisogna porvi $v = 0$. Confrontando poi con la (1) (pag. 107) si ha:

$$(5) \quad \frac{m-1}{k} n - p = \frac{m \cdot m-1}{k \cdot k+1} v - m\pi + m-1 + z : \binom{m-2}{k-1},$$

formola generale della mia Nota "Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi" (Rendicⁱ Lincei 1887, 2^o sem.)³³, in cui si trova an-

³³SEGREGRE, C. 1887, *Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi*, Rend. R. Acc. Naz. Lincei, 4, 3, pp. 149-153; *Opere*, 1, 114-118.

che quel calcolo di Schubert. Essa vale anche se γ è multipla ...

Nel caso estremo $k = r$ si ha dalla (5)

$$(6) \quad z = \binom{m-2}{r-1} \left\{ \frac{m-1}{r} n - p + m\pi - m + 1 \right\}$$

come numero dei gruppi di $r + 1$ punti comuni ad una g_n^r e ad una involuz^e ∞^1 di ordine m e genere π , sopra un ente di genere p . Se $\pi = 0$ sicché l'invol. è una g_m^1 si
[114] ha //

$$(7) \quad z = \binom{m-1}{r} (n-r) - \binom{m-2}{r-1} p,$$

che Castelnuovo trova direttam. nel suo n. 8 senza notare che rientra nella (5). Il Castelnuovo ha del resto risolta la questione più generale di trovare il numero dei gruppi di $r + r'$ elemⁱ comuni ad una g_n^r ed una $g_{n'}^{r'}$ (nel lavoro cit^o a pag. 66, Rend. Pal. III).

Si noti che il teor. contenuto nella (6) abbraccia a sua volta la (5): basta applicarlo sostituendo alla g_n^r la g_n^k che su γ è data dagli iperpiani passanti per un S_{r-k-1} ; allora il numero dei gruppi di $k + 1$ pⁱ comuni a quella g_n^k ed alla serie ∞^1 ... dato da $\binom{m}{k+1} + z$, ecc.

Il caso particolare della (5) che più importa nel seguito è quello in cui i gruppi di m punti della ∞^1 si compongano in generale di pⁱ indepⁱ, cioè $k = m - 1$; diventa:

[115] //

$$(8) \quad n - p = v - m\pi + m - 1 + z,$$

ossia

$$(8') \quad n - p = v - (k+1)\pi + k + z.$$

Una prima applicazione si fa subito per le rigate e varietà M_{k+1} di ∞^1 S_k di gen. π . Su esse si posson tracciare ∞ curve che incontrino ogni S_k in $k + 1$ pⁱ indepⁱ, sicché $z = 0$; così segnando la rigata con quadriche non tangⁱ e la M_{k+1} con un cono di dim. $r - k$ proiettante da un S_{r-k-2} una C^{k+1} raz^{le} norm^{le}. Se una tal γ è proj. di una γ dello stesso ord. di uno spazio super^e, la M_{k+1} di questo altro spazio

sarà con questa nuova curva nella stessa relaz. $z = 0$, e non sarà incontrata dallo spazio centrale di projez., perché altrimenti sulla γ primitiva si avrebbero gruppi di p^i non indep., o perché sempre vale la (8') con $z = 0$. In base dunque alla pag. 92 si ha: una ∞^1 di gen π e d'ord. ν di S_k ha per spazio // normale quello di dim. $\nu - (k + 1)\pi + k$, od uno super.; secondo che le γ suddette tracciate su essa son tutte non speciali, o tutte speciali. Nel 2° caso si potrebbe chiamare *speciale* la varietà, come io ho già fatto per le rigate. In partic. per $\pi = 0$ si ha che le varietà ∞^1 raz^{li} d'ord. ν di S_k son normali per $S_{\nu+k}$ (cfr. pag. 38): il che si poteva vedere anche altrimenti. - Si noti che tutto ciò vale anche se la varietà è in S_{k+1} . Applicazioni che così si avrebbero del problema delle curve *direttrici*, quando fosse risolto per le varietà normali.

Applicando la (8) ad una g_m^1 , $\pi = 0$, si ha

$$n - p = \nu + m - 1 + z$$

nell'ipotesi che i gruppi di m p^i appartengano in generale ad S_{m-1} . Ora se $m - 1 = r$ il 2° membro è $\geq r$; e se $m - 1 < r$, siccome // il massimo spazio per una M_m d'ord. ν è appunto $S_{\nu+m-1}$ sarà pure quel 2° membro $\geq r$. Dunque sempre $n - p \geq r$. Segue che *quando* $n - r < p$ i gruppi di m p^i di una g_m^1 sulla γ^n di S_r appartengono a spazi di dim. $\leq m - 2$. [117]

Abbiassi ora sulla stessa curva e nella stessa ipotesi $n - r < p$ una g_Q^q : dico che i suoi gruppi G_Q stanno in spazi di dim. $Q - q - 1$ (Castelnuovo n. 14). Invero se in un G_Q si fissano $q - 1$ p^i qual. i rimanenti $Q - q + 1$ formano un gruppo di una serie ∞^1 e quindi per la propos. preced. appartengono ad un $S_{Q-q-1-\delta}$. Potrà forse in ogni G_Q il numero δ mutare a seconda della scelta dei $q - 1$ p^i : in tal caso si prenda il minimo, e $Q - q$ p^i dell' $S_{Q-q-1-\delta}$ tali che lo determinino; ogni altro p . di G_Q insieme con quei $Q - q$ ne darà $Q - q + 1$ che dovranno stare in quello spazio. Dunque tutti // i Q punti gli appartengono. [118]

Poiché una γ^n speciale è sempre proj. di una per cui $n - r < p$, segue che su ogni curva speciale i gruppi di una g_Q^q stanno in S_{Q-q-1} . Evidentemente ciò si estende

anche al caso che la g_Q^q abbia dei punti fissi.

Applichiamo questo teorema anzitutto alla g_n^r speciale segata sulla γ^n speciale dagl'iperpiani. I suoi gruppi staranno in S_{n-r-1} e però $n - r - 1 \geq r - 1$, ossia

$$n \geq 2r,$$

teorema dovuto a Clifford, per le g_n^r speciali (per Clifford, le γ^n di S_r per cui $n - p < r$). Da esso segue subito che la serie segata su una γ^m piana dalle φ^{m-3} aggte è precisamente ∞^{p-1} , completa e coi $2p - 2$ pⁱ tutti variabili: poiché se, astraendo da x pⁱ fissi si riducesse ad una g_{2p-2-x}^{p-1+y} , $2p - 2 - x \geq 2(p - 1 + y)$, $x = y = 0$. //

[119] La relazione $n \geq 2r$ per le g_n^r speciali varrà anche se vi sono elemⁱ fissi, poiché astraendo da questi rimane una serie speciale. Ora se si considera una serie completa speciale, od almeno una per cui $n - r \leq p - 1$, sommando questa (tal quale, o raddoppiata) colla $2r \leq n$ si ha

$$r \leq p - 1, n \leq 2p - 2.$$

Segue che una g_n^r per cui $r > p - 1$, o per cui $n > 2p - 2$ è certo non speciale; una curva d'ordine $> 2p - 2$ non è certo speciale, come pure se appartiene ad uno spazio superiore ad S_{p-1} : e però non potrà appartenere ad uno spazio super. ad S_{n-p} (teor. di Clifford, almeno in parte). Le serie complete d'ordine $n > 2p - 2$ sono di dim. $n - p$; le curve normali d'ordine $n > 2p - 2$ appartengono ad S_{n-p} . //

[120] Segue che una sup. a sezioni spaziali di gen. p , d'ord. $n > 2p - 2$ può appartenere al più ad S_{n-p+1} ; e similmente una $M_k^n \dots$ ad $S_{n-p+k-1}$.

Il numero $n - r$ è quello degli elemⁱ di un gruppo di una g_n^r che son determⁱ da r arbitrari. Se $r > p - 1$, od $n > 2p - 2$, abbiamo dunque che $n - r \geq p$, ossia almeno p elemⁱ di un gruppo son conseguenza dei rimanenti. Quindi nel problema di trovare quante fra le varietà di una ∞^d lineare contengono una data γ , se le intersez. sono $n > 2p - 2$, basta fissare $n - p + 1$ punti di γ e però saranno almeno $\infty^{d-n+p-1}$ quelle varietà (del resto da pag. 53 si ha, essendo $r \leq n - p$, $t \geq d - n + p - 1$).

Applicando il lemma di Castelnuovo (pag. 117) ad una g_{2p-2}^{p-1} su una C^{2p-2} di S_{p-1} si ha // che i suoi gruppi dovranno stare in S_{p-2} , e però saranno quelli segati [121] su C dagl'iperpiani. Segue che *esiste una sola* g_{2p-2}^{p-1} . In altri termini le C^{2p-2} di S_{p-1} rappresentanti uno stesso ente, cioè riferite univocam. fra loro, sono proiettive: si posson chiamare *curve canoniche* di genere p . La geom. sull'ente si riduce alla geom. proiettiva della curva canonica che lo rappresenta. Questa curva sarebbe data da $y_0 : y_1 : \dots : y_{p-1} = \varphi_0(x) : \varphi_1(x) : \dots : \varphi_{p-1}(x)$, ove $f(x) = 0$ è una curva piana d'ord. m di cui le φ sono aggte d'ord. $m - 3$. La curva canonica si riduce ad una curva razionale normale doppia d'ord. $p - 1$ nel caso iperellittico (pag. 102); tolto questo caso, la curva canonica e quindi la g_{2p-2}^{p-1} è semplice, cioè le curve aggte d'ord. $m - 3 \dots$ ³⁴

Il lemma di Castelnuovo conduce più // in generale al *teorema di Riemann e* [122] *Roch*^{lx}. Applicandolo in fatti alla curva canonica e ad una g_n^r speciale su questa, si ha che i gruppi di questa stanno in S_{n-r-1} , sicché se $n - r \leq p - 1$ (come accade certo se la serie speciale è completa), per ogni gruppo passano almeno $\infty^R S_{p-2}$, ove $R = p - n + r - 1$.

Chiamando *speciale* un gruppo di n elemⁱ quando fa parte di una serie lineare speciale di dim. > 0 , abbiamo che la posiz. di tali elemⁱ è veramente speciale. Mentre n elemⁱ qualunque, quando $n > p$, formano sempre un gruppo di una serie di dim > 0 (nota a pag. 92), sono sempre gl'infiniti (o gli zeri) di funzioni razionali dell'ente, per $n \leq p$ ciò non accade più in generale, ed n elemⁱ qualunque stanno solo nella g_n^0 da essi costituita, non sono più gl'infiniti di alcuna funz. // raz^{le} di grado [123] n dell'ente. Perché essi sian tali, stiano in una g_n^r ove $r > 0$, occorre che gli n pⁱ immagini sulla curva canonica C stiano in un S_{n-r-1} (anzi che in un S_{n-1}), stiano in ∞^R gruppi della g_{2p-2}^{p-1} , anzi che in soli ∞^{p-n-1} ; presentino cioè *al più* $n - r$ condizioni, anzi che n , a quei gruppi cioè sulla curva piana d'ord. m alle aggte d'ord. $m - 3$. In altri termini degli n pⁱ di un gruppo speciale, quando esso faccia parte di una g_n^r speciale non data, si posson prendere ad arbitrio *al più* $n - r$ punti, gi-

³⁴Intorno alle curve canoniche v. la mia nota "Sulle curve normali di genere p dei vari spazi" (Rend. Ist. Lomb. 1888) [Cfr. SEGRE 1888, cit.], nella quale si trova anche la dimostraz. del teor. di Clifford ecc.

^{lx}Gustav Roch (Dresda 1839 - Venezia 1866).

acché l' S_{n-r-1} congiungente di questi dovrà contenere gli altri. - Questo teor. per $r = 1$ si trova in sostanza nel n. 5 della memoria di Riemann, e per r qual. nella Nota di Roch (Crelle 64, 1864) "Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen"^{lxi}; lo completeremo in seguito precisandolo meglio sì da ottenere anche il risultato di Roch enunciato in quel libro (pel confronto si osservi che Riemann e Roch rappresentando l'ente con $F\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ s & z \end{smallmatrix}\right) = 0$ hanno per aggte le $\varphi\left(\begin{smallmatrix} n-2 & m-2 \\ s & z \end{smallmatrix}\right)$).

Intanto il teor. ci dà già la ragione del nome di serie *speciali*. Esso abbraccia tutti i risultati precedenti sulle serie speciali. Così, poiché per un gruppo di una g_n^r speciale si posson prendere al più $n - r$ elemⁱ, mentre quando è data se ne posson prendere r , segue $n - r \geq r$, $n \geq 2r$ (pag. 118). Osserviamo poi che se si prendono appunto $n - r$ pⁱ ad arbitrio su C l' S_{n-r-1} che li congiunge non incontra più in generale in r punti C , se si toglie il caso che esso sia un iperpiano S_{p-2} , cioè $n - r =$
 [125] $p - 1$; oppure che C sia doppia, cioè l'ente iperellittico.³⁵ Tolto dunque questo // caso e supposto $n - r < p - 1$, sono *meno* di $n - r$ gli elemⁱ arbitrari di un gruppo di una g_n^r speciale non data, e si ha quindi $n > 2r$. Segue che sopra un ente che non sia iperell^o la sola g_n^r speciale con $n = 2r$ è la g_{2p-2}^{p-1} .

Terminiamo questo Cap^o con un'applicazione delle proprietà viste delle serie lineari alle *rigate speciali*.³⁶ Abbiamo visto (pag. 116) che una rigata d'ord. n gen. p non speciale ha S_{n-2p+1} per spazio normale; mentre una speciale ha per normale uno spazio superiore. Se $n > 2p - 2$ si può andare solo fino ad S_{n-p+1} (pag. 120).

Dico anzitutto che la rigata F di gen. $p > 0$ e d'ord. $n \geq 2p$ di S_{n-p+1} è una
 [126] cono. // Poiché un iperpiano per una gener. dovà contenere altre gener., altrimenti la γ^{n-1} d'inters. residua starebbe in un S_{n-p-1} (anche se si riducesse ad una curva multipla) e gl'iperpiani per questo mostrano che F sarebbe razionale. Proiettando F su S_3 comunque ogni piano per una gener. ne conterebbe altre, cioè le gener. si

^{lxi}ROCH, G. 1865, *Über die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen*, Jour. für die reine und angewandte Math., 64, pp. 372-376.

³⁵Cfr. Noether, Raumcurven teor. III^{II} alla fine di p. 10 [cfr. NÖTHER 1882, cit.].

³⁶V. specialmente il mio lavoro sulle curve e rigate algebriche, 2^a P^e (Math. Ann. t. 34) [si tratta di: SEGRE, C. 1889, *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques* (II partie Surfaces réglées algébriques), Math. Annalen, 34, pp. 1-25; Opere, 1, 125-151].

tagliano a due a due: cono. Ecc. Del resto più tardi ritroveremo questa proposiz. con minori restrizioni. (pag. 133)

Sia ora F una rigata irriduttibile non conica di $S_{n-p-i+1}$, ove $1 \leq i \leq p-1$. Un iperpiano per $i+1$ gener. - che si può sempre tirare se (1) $n \geq p+3i+1$, taglia ancora F in una γ^{n-i-1} , che non può stare in un $S_{n-p-i-1}$, altrimenti gl'iperpiani per questo darebbero su F una g_{i+1}^1 di cui farebbe parte il gruppo di $i+1$ gener. // che s'era scelto ad arbitrio, il che contraddirebbe al teor. di Riemann. Quindi [127] supposto che essa si spezzi in una γ^m direttrice irriduttibile, semplice o multipla, ed in $n-m-i-1$ (≥ 0) generⁱ, dovrà lo spazio S_h a cui appartiene γ^m essere di dim. $h > m-p$; altrimenti con $n-m-i-1$ gener. qual. darebbe un $S_{n+h-m-i-1}$ e quindi un $S_{n-p-i-1}$ con una γ^{n-i-1} . Segue che nella ipotesi (1) vi è certo su F una *curva direttrice speciale*.

Si posson assegnare dei limiti superiori ad m ed h considerando la $g_{n-m}^{n-p-i-h}$ che su F è segata dagl'iperpiani per S_h , e supponendo che quella serie *non* sia speciale. Basta perciò imporre ad es^o la condizione $n-m > 2p-2$, cioè (2) $n \geq 2p+m-1$. Allora sarà $(n-m) - (n-p-i-h) \geq p$, ossia $m \leq h+i$. Questa poi con la $2h \leq m$ // che segue dalla g_m^h rappres^a da γ^m trae $h \leq i$. Abbiamo dunque nelle ipotesi (1), [128] (2):

$$(3) \quad h \leq i, 2h \leq m \leq h+i.$$

Per $h=i$ si ha $m=2h$. In ogni caso se $m=2h$ (v. pag. 124, 125) la γ^m si riduce ad una γ^h razionale normale doppia e la rigata è iperellittica: tolto solo il caso di $h=p-1$ e quindi anche $i=p-1$, cioè rigata di S_{n-2p+2} , ché allora la γ^m può anche essere una curva canonica non degenerare.

Poiché $m \leq 2p-2$, la condiz. (2) è certo soddisfatta se

$$n \geq 4p-3;$$

ma volendo abbracciare anche la (1), contemplando anche il caso estremo $i=p-1$, si deve porre

$$(4) \quad n \geq 4p-2.$$

Con questa sola ipotesi varranno le (3) ecc. In particolare, rigate di $S_{n-p}(p > 1)$, di
 [129] $S_{n-p-1}(p > 2)$, di // $S_{n-p-2}(p > 3)$. (v. loc. cit^o).

Cap. 7°. Serie complete. Serie residue.

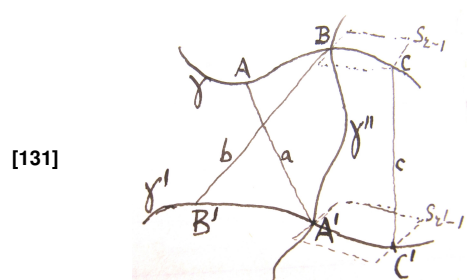
Curve aggiunte. Applicazioni

Come nel Cap^o preced. abbiamo derivato tutto da un teor. fondam.: la formola di Zeuthen, o la mia formola; così nel presente Cap^o sarà fondam^{le} il teor. segu.

Se due serie lⁱ d'ord. n su un ente algebrico hanno un gruppo comune, esse son contenute in una stessa serie l^e d'ord. n .

Per dimostrarlo consider. anzitutto il caso di 2 serie non degeneri $g_n^r, g_n^{r'}$. Saran
 [130] // rappres^e da una γ^n di S_r e una γ'^n di $S_{r'}$, e questi 2 spazi li supporremo indipⁱ, cioè congiunti da $S_{r+r'+1}$. Condotto per gli $S_{r-1}, S_{r'-1}$ contenⁱ i due gruppi omologhi di γ, γ' , un iperpiano, questo sega la rigata d'ord. $2n$ delle congiungenti i pⁱ omologhi di γ, γ' in n gener. ed in una curva direttr. irriduttib. γ'' d'ord. n . Sulla rigata le due serie $g_n^r, g_n^{r'}$ son date dagl'iperpiani passanti per $S_{r'}, S_r$, e su γ'' da sezⁱ con iperpiani, onde quelle serie saran contenute in quella rappres^a da γ'' .

Se le due serie $g_n^r, g_n^{r'}$ hanno degli elemⁱ fissi comuni, basta dimostrare il teor. pelle serie che rimangono togliendo questi elem. Possiamo dunque supporre che



i k elemⁱ fissi della g_n^r sian diversi dai k' elemⁱ fissi della $g_n^{r'}$. Queste due serie saran rappres. da curve γ, γ' di $S_r, S_{r'}$ d'ord. $n - k, n - k'$ con $k //$ pⁱ fissi A su γ , e k' pⁱ fissi B' su γ' : gli omologhi A' degli A su γ' saran distinti dai B' e così gli omolⁱ B su γ ai B' saran distinti dagli A ; e l'ipote-

si che vi sia un gruppo comune alle due serie significa che un S_{r-1} taglia γ oltre che nei k' pⁱ B in $n - k - k' (\geq 0)$ pⁱ C , ed un $S_{r'-1}$ taglia γ' oltre che nei k pⁱ A' in

$n - k - k'$ pⁱ C' sì che i C ed i C' si corrispondono. Sulla rigata d'ord. $2n - k - k'$ generata da γ, γ' le due serie son date: dalle gener. a fisse insieme colle sez. fatte dagl'iperpiani per $S_{r'}$, e dalle b fisse colle sez. ... Un iperpiano pei due $S_{r-1}, S_{r'-1}$ sega quella rigata nelle $n - k - k'$ gener. c ed in una γ''' irriduttib. E su questa quelle due serie saran // segate appunto da quegl'iperpiani, poiché essa contiene i pⁱ A' e B . [132]

Il teor. fondam^{le} si completa subito aggiungendo (pag. 10 e 23) che se una g_n^r ed una $g_n^{r'}$ hanno comune precisamente una $g_n^i (i \geq 0)$, esse stanno in una $g_n^{r+r'-i}$, e non in una serie minore.

Ma per le nostre applicazⁱ basta il teor. fondam^{le}. E esso prova che se due g_n hanno 1 gruppo comune, o l'una sta nell'altra, oppure entrambe stanno in una superiore. Questo 2° caso non si può rappresentare se l'una almeno delle due g_n è completa: l'altra vi starà.

Dunque: due g_n complete aventi 1 gruppo comune coincidono. Da un gruppo di n elemⁱ qualunque è individuata la g_n completa che lo contiene (e così una g_n qual. sta in una sola g_n completa): che può ridursi ad una g_n^0 (e vi si ridurrà certo se // $n \leq p$ e gli n elemⁱ si assumono ad arbitrio). - Quindi se due curve normali d'ord. n sono in corrisp. univoca sì che ad un particolare gruppo di n pⁱ dell'una, sez. con un iperpiano, corrisponda un analogo gruppo nell'altra, la corrisp^a è una collineazione. - Segue che una rigata d'ord. n e gen. $p > 0$ a sezioni spaziali non speciali (per es. di ordine $n \geq 2p - 1$) appartenente ad S_{n-p+1} è un cono (cfr. pag. 125); poiché due sezioni spaziali saranno in collineaz. con n pⁱ uniti su un S_{n-p-1} ed $n > n - p$, quindi omologia. [133]

Se una g_n^r è completa, è tale anche la $g_{n-h}^\rho (\rho \geq r - h)$ dei gruppi residui di h elemⁱ fissi risp. ad essa. Poiché se questa g_{n-h}^ρ stesse in una $g_{n-h}^{\rho'}$, questa cogli h elemⁱ fissi darebbe una $g_n^{\rho'}$ avente comune con la g_n^r completa una g_n^ρ e però contenuta nella g_n^r // e coincidente quindi colla g_n^ρ . - Quest'osservazione ha per conseguenza che proiettando una curva normale da h suoi punti qualunque si ottiene ancora una curva normale. [134]

- Applicazione alle curve aggte di una γ^m piana. Le aggte d'ord. $m - 3 + \alpha > m - 3$ segano una $g_{m\alpha+2p-2}$ di dim. $\geq m\alpha + p - 2$ (pag. 56); poiché l'ordine è $> 2p - 2$, la serie non è speciale e la differenza fra l'ordine e la dim. sarà $\geq p$. Segue che la dim. è precisamente $m\alpha + p - 2$, cioè (loc. cit.) i passaggi pei p^i multipli di γ impongono condizⁱ indipⁱ a quelle aggte; ed inoltre quella serie è completa. è pure completa (pag. 118) quella segata dalle aggte d'ord. $m - 3$. E vedremo subito anche quella segata dalle aggte d'ord. minore. - È dunque (pel teor. preced., pag. 133, 134)

[135] completa la serie segata su γ da tutte le aggte d'ord. $\nu //$ assoggettate a passare per p^i semplici dati ad arbitrio su γ .

Poiché le aggte d'ord. $m - 1$ segano su γ una serie completa, lo stesso sarà per le aggte d'ord. $m - 1 - a$ (se esistono): poiché una curva irriduttib. d'ord. a non passante per p^i multipli di γ le completa in aggte d'ord. $m - 1$, sicché la serie da esse segata è completata dagli am p^i d'inters. di γ con quella curva ausiliaria in serie data da φ^{m-1} aggte; e viceversa ogni φ^{m-1} aggte passante per quegli am p^i d'incontro conterrà tutta la curva d'ord. $a \dots$: dunque la serie data dalle φ^{m-1-a} , resto degli am p^i risp. a quella completa data dalle φ^{m-1} , sarà pure completa.

Dal fatto che le aggte di un ord. qual. passanti per dati p^i di γ vi segano, fuori di

[136] questi e dei p^i multipli, una serie completa, // segue un modo semplice di costruire la serie completa che è individuata su γ da un dato gruppo qual. G_n . Si conduca per questo una curva aggte (il che si può sempre, prendendola d'ord. abbastanza elevato) e sia G_N il resto: le aggte dello stesso ord. passanti per G_N daranno la g_n completa. Mutando quella prima curva aggte muterà G_N (anche N se muta l'ord.); ma si avrà sempre la stessa g_n ; si ha così (almeno in parte) il teor. del resto (Brill e Nöther, pag. 273): se due G_n son resti o corresiduali risp. ad un gruppo, son pure tali risp. ad ogni resto dell'uno dei due.

Se il sist. delle aggte d'ord. ν sega su γ^m una serie completa, lo stesso non varrebbe pel sistema di tutte le curve d'ord. ν : si verifica subito che la condiz.

[137] più naturale che si presenti per render completa la serie è di as//soggettare quelle curve ad avere in ogni p . s -plo di γ un p . $(s - 1)$ -plo: donde una nuova ragione dell'uso delle curve aggte. Ma anche se s'impone la stessa molteplicità di γ si ha,

fuori dei p^i multipli, una serie completa: poiché per le φ^n aggr^{te} l'avere in un p . s -plo di γ un p . s -plo equivale al passaggio per gli s p^i di γ che cadono in quel p . s -plo, sicché si può applicare il teor. di pag. 133.

Segue che in un sist. lineare di $\infty^k \gamma^m$ gen. p determinato dai p^i base, su ogni curva le altre danno una serie caratteristica g_n^{k-1} completa, onde $n - k + 1 \leq p, k \geq n - p + 1$; ed ha sempre luogo il segno = se la serie non è speciale, ad es^o se $n > 2p - 2$, oppure $k > p$; il segno di ineguaglianza se la serie è speciale. // In altri termini una sup. [138] razionale d'ord. n a sez. spaziali di gen. p , la quale sia normale, ha per sezioni spaziali delle curve normali, ed appartiene ad S_{n-p+1} , o a spazi superⁱ se quelle sez. sono speciali. Così per $p = 0, 1$ si hanno delle F^n di S_{n+1} o di S_n ; e poiché queste superf. son note (Del Pezzo), e son note le loro rappresentazioni piane, così se ne trae la riducibilità di tutti i sistemi lineari di genere 0 ed 1, tolti i fasci, a certi tipi.

- Serie residue. Data una g_v^p completa, i resti o residui di un G_n rispetto ad essa formano una $g_{n'}^{r'}$ completa (pag. 133), ove $n + n' = v$. E similmente i residui di qualunque gruppo G_n , di questa formano una g_n^r completa: quella determinata da G_n . Segue che ogni gruppo // della g_n^r ed ogni gruppo della $g_{n'}^{r'}$ sono i residui risp. [139] alla g_v^p : le due serie son residue risp. a questa; per ogni gruppo della g_n^r passano precisamente $\infty^{r'}$ gruppi della g_v^p , ecc. Rappres^o la g_v^p con una C^v normale di S_p , abbiamo che su questa la g_n^r ha i suoi gruppi in spazi $S_{p-r'-1}$ e la $g_{n'}^{r'}$ in spazi S_{p-r-1} .

Applichiamo ciò in partic. alla serie canonica g_{2p-2}^{p-1} ed alle serie speciali residue (rispetto a questa); con che completeremo il teor. di Riemann-Roch. Questo diceva che se un gruppo G_n determina una g_n^r completa speciale, sicché $n - r \leq p - 1$, per esso passano $\infty^{r'}$ gruppi della serie canonica sì che $r' \geq p - n + r - 1$: vedremo che ha luogo il segno = nell'ipotesi che la g_n^r sia // completa. Invero la $g_{n'}^{r'}$ residua, ove [140] $n' = 2p - 2 - n$, avrà ogni gruppo in ∞^r gruppi della serie canonica, e però sarà similmente $r \geq p - n' + r' - 1$; sicché sommando con la disuguaglianza preced. si trae che deve aver luogo il segno = in entrambe le relaz.ⁱ Così si precisa meglio il teor. di R. e R.: se un gruppo G_n determina una serie completa di dim. r , e sta in $\infty^{r'}$ gruppi della serie canonica, si ha $r' = p - n + r - 1$, ossia $r = n - p + 1 + r'$; od in

altri termini, esso impone *precisamente* $n - r$ condizⁱ ai gruppi della serie canonica che devon contenerlo. In pari tempo si ha il teorema di reciprocità con cui Brill e Nöther completano il teor. di Riemann e Roch: se due gruppi $G_n, G'_{n'}$ son residui
 [141] risp. alla serie canonica (sicché $n + n' = 2p - 2$) // e per G' passano ∞^r gruppi della serie canonica, i quali così danno come resti di G' la g_n^r completa che contiene G , e similmente per G passano $\infty^{r'}$ gruppi della serie canonica ..., si ha $r' = p - n + r - 1$, ecc.; o raddoppiando $n' - n = 2(r' - r)$.

Veramente Riemann e Roch non parlano della g_n^r completa determinata da G_n : essi considerano il *numero delle costanti da cui dipende una funz. raz^{le} dell'ente* che abbia tutti i suoi infiniti (semplici) fra gli elementi di G_n . Se la g_n^r completa è data sull'ente da: $\lambda_0 \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_r \varphi_r = 0$, ed il gruppo G_n da $\varphi_0 = 0$, quelle funzⁱ raz^{li} dell'ente si avranno dividendo quella forma generale per φ_0 , cioè saranno $\lambda_0 + \lambda_1 \frac{\varphi_1}{\varphi_0} + \dots + \lambda_r \frac{\varphi_r}{\varphi_0}$ sicché contengono *linearmente* $r + 1$ costanti. Il teor. di R. e R. si
 [142] enuncia allora così: le // funzⁱ raz^{li} dell'ente i cui infiniti sono fra gli n elemⁱ di un dato gruppo G_n pel quale passano $\infty^{r'}$ gruppi della serie canonica, dipendono (lineram.) da $n - p + 2 + r'$ costanti. - Si noti che il teor. vale anche quando G_n non sta in alcun gruppo della serie canonica, se si mette $r' = -1$, poiché allora è $r = n - p$.

Rappres^o l'ente con la curva canonica o con una γ^m piana si hanno enunciati speciali ...

Applichiamo il teor. Riemann-Roch alla questione: *se una γ_p^n piana data sia projez. di una C^n appartenente ad S_r* . Se $n \geq p + r$, certamente, poiché la dim. di una ser. g_n completa è $\geq n - p$ e quindi $\geq r$; e la questione consiste appunto nel veder se la g_n^2
 [143] segata su γ dalle rette // del piano è contenuta in una g_n^r , cioè determina una serie completa di dim. $\geq r$.

Se $n < p + r$, la g_n^r , e quindi la g_n^2 , sarà speciale. Per un G_n dato su γ da una retta qual. dovranno passare $\infty^{p-n+r-1}$ curve agg^{te} d'ord. $n - 3$, cioè γ dovrà ammettere altrettante curve agg^{te} d'ord. $n - 4$, e ciò è anche sufficiente. Ora contando le costanti si avrebbe che le agg^{te} d'ord. $n - 4$ sono ∞^{p-n+1} in generale: nel caso attuale dunque essendo $\infty^{p-n+r-1}$ devono $r - 2$ delle condizⁱ imposte alle curve agg^{te}

d'ord. $n - 4$ dai passaggi pei p^i multipli di γ esser conseguenza delle rimanenti. //

Cap. 8°. Il metodo algebrico di Brill e Nöther

[144]

Teor. algebrico fondamentale di Nöther³⁷. Nel caso che a noi importa dice perché una curva piana F si possa rappresentare con $A\varphi + B\psi \equiv F$, ove φ e ψ son curve date tali che in ogni punto P comune, s -plo per φ , s' -plo per ψ cadano solo ss' intersezⁱ, cioè non vi sian tangⁱ comⁱ, *basta* che F abbia ivi la molteplicità $s + s' - 1$; ed allora A e B avranno la multipl^a $s' - 1, s - 1$.

Ciò posto, sulla f_m piana abbiassi una g_n^r data dal sist. lineare $\psi = 0$ di curve *qualun//que* e pel gruppo G_n dato da $\psi_0 = 0$ si tiri una curva *agg^{ta}* $\varphi_0 = 0$ d'ord. [145]
 ν . Si avrà $\varphi_0\psi \equiv Af + \psi_0\varphi$, poiché $\varphi_0\psi$ in un p. comune ad $f = 0, \psi_0 = 0$ che sia risp. s -plo, s' -plo, ha multipl^a $s + s' - 1$. Inoltre se le tgⁱ in quei p^i a f e ψ_0 son distinte, φ vi avrà multipl^a $s - 1$ cioè sarà *agg^{ta}*. Dunque ogni gruppo della g_n^r cioè dato da $f = 0, \psi = 0$ fuori di $\psi_0 = 0$ dà $\varphi = 0$: la g_n^r è segata da un sist. lin. di curve *agg^{te}* d'ord. ν . Un esame speciale completerebbe il caso che la g_n^r abbia p^i fissi. - Se il sistema primitivo ψ era già di curve *agg^{te}*, lo si sarà sostituito con un altro φ (E supponendo che ψ_0 e ψ fossero due curve *agg^{te}*, anche di ordⁱ diversi, si ottiene il Restsatz sotto la sua forma più generale; v. Brill e Nöther pag. 273). - In conclusione, tirata per G la φ_0 *agg^{ta}* d'ord. ν che dia un // resto Γ , la g_n^r sta in [146]
quella segata dalle φ^ν *agg^{te}* per Γ . Si noti che il carattere di curva *agg^{ta}* ci servì nella dimostraz.

Segue che se la g_n^r è completa essa è segata da *tutte* le φ^ν *agg^{te}* per Γ , e viceversa. Una serie completa è individuata da un suo gruppo G . Due serie con un gruppo comune stanno nella serie completa determinata da questo, ecc.³⁸

³⁷Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen, Math. Ann. VI p. 351 [si tratta di: NÖTHER, M. 1873, *Über eine Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen*, Math. Annalen, 6, pp. 351-359]; v. anche (per dimostrazioni algebriche) Voss [si tratta del matematico tedesco Aurel Edmund Voss (Altona 1845 - Monaco 1931)] Math. Ann. 27 [si tratta di: VOSS, A. 1886, *Über einen Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen*, Math. Annalen, 27, pp. 527-536], Stickelberger [si tratta del matematico svizzero Ludwig Stickelberger (Buch 1850 - Basilea 1936) allievo di Weierstrass e professore all'Università di Freiburg. Collaborò scientificamente con F. G. Frobenius.] e Nöther Math. Ann. XXX [si tratta di: STICKELBERGER, L. 1887, *Über einen Satz des Herrn Nöther*, Math. Annalen, 30, pp. 400-409].

³⁸Per quanto precede v. Nöther, M. A. 23 p. 348 [cfr. NÖTHER 1884, cit.]. E così per l'ordinamento di quanto segue si tien conto, oltre che della mem. Brill e Nöther [cfr. BRILL e NÖTHER 1874, cit.], di un passo di una lettera di Nöther a Bertini (26 Marzo 1889).

Le serie complete essendo così ridotte a curve aggte d'ord. $\nu \dots$ ricordiamo (pag. 55, 56), che si ottiene $n - r \leq p$ e se $\nu = m - 3$ una g_{2p-2}^r di dim. $\geq p - 1$, la quale dà delle g_n^r per cui $n - r < p$. Il numero $n - r$ dice, quando è data la g_n^r , quanti
[147] sono i p^i determinati dai rimanenti, sicché se // la serie è completa sono al più p . - Vedremo che se $n - r < p$ la serie è sempre segata da φ^{m-3} aggte (supposto, a partir di qui, f irriduttibile).

Premettiamo il teor. di riduzione (Reductionssatz) di Nöther³⁹: Se un gruppo G_n di una g_n^r completa sta su φ^{m-3} aggte ed il p . P non è su tutte queste φ^{m-3} passanti per G , la g_{n+1} completa determinata da $G_n + P$ ha P per p . fisso, ossia non è altro che la g_{n+1}^r ottenuta aggiungendo ad ogni gruppo della g_n^r il p . P . - Invero per determinare la g_{n+1} completa contenente $G_n + P$ conduciamo per questo una φ^{m-2} aggte, composta di una φ^{m-3} per G_n e di una retta r per P : il resto Γ non conterrà P , ma gli $m - 1$ p^i residui di d'inters di f con $r, \dots$; le φ^{m-2} aggte per Γ cioè per //
[148] quegli $m - 1$ $p^i, \dots$ si spezzeranno in r e φ^{m-3} e però conterranno tutte P .

Se $n < p$, per n p^i passano certo delle φ^{m-3} . Per dimostrare che se $n - r < p$, per ogni gruppo di una g_n^r passano delle φ_{m-3}^r basterà dunque provare, che se ciò è vero, è pur vero pei gruppi di una g_{n+1}^{r+1} . Invero se P è un p . non fisso per questa, i suoi residui formano una g_n^r ; per un G_n di questa passano per ipotesi delle φ^{m-3} : e queste conterranno anche P , altrimenti pel teor. di riduzione, la serie completa g_{n+1} determ. da $G_n + P$ avrebbe P fisso, mentre la g_{n+1}^{r+1} non ha P fisso. Dunque per 1 gruppo $G_n + P$ della g_{n+1}^{r+1} passano delle φ^{m-3} .

Così il concetto di G_n o di g_n^r dati da φ^{m-3} aggte coincide con quello di gruppi o
[149] serie per le cui g_n^r complete è $n - r < p$. Li diciamo // gruppi o serie speciali. Sarà dunque $n \leq 2p - 2$. Inoltre $r \leq p - 1$, cioè le φ^{m-3} non possono essere più di ∞^{p-1} , altrimenti darebbero una g_{2p-2}^p a cui aggiungendo 1 punto si avrebbe una g_{2p-1}^p speciale poiché $n - r < p$, e sarebbe $n > 2p - 2$, assurdo. Di più nessun punto A può esser fisso per la g_{2p-2}^{p-1} data dalle φ^{m-3} , altrimenti astraendo da esso si avrebbe

³⁹Crelle's J. 97 p. 224 [si tratta di: NÖTHER, M. 1884, Beweis und Erweiterung eines algebraisch-functionen-theoretischen Satzes des Herrn Weierstrass, Jour. für die reine und angewandte Math., 97, pp. 224-229], M. A. 37 p. 424 [si tratta di: NÖTHER, M. 1890, Zur Theorie der Abel'schen Differentialausdrücke und Functionen, Math. Annalen, 37, pp. 417-499]; e la lettera citata a Bertini.

una g_{2p-3}^{p-1} ed aggiungendo a questa 1 punto P diverso da A una nuova g_{2p-2}^{p-1} , ed i gruppi di questa dovrebbero stare su φ^{m-3} che così avrebbero su f $2p - 1$ punti, assurdo.

Le serie complete d'ord. n non speciali, ad es^o quelle per cui $n > 2p - 2$ sono di dim. $n - p$. Questo basterebbe per provare che se curve di genⁱ p, p' sono in corrisp. univoca si ha $p = p'$: considerando cioè due g_n complete omologhe con $n > 2p - 2, 2p' - 2$. //

Dal teor. di riduzione segue subito il teor. di Riemann e Roch. Supposto il [150] gruppo G_n speciale, cioè sito (precisamente) in $\infty^{r'} \varphi$, o determinante una serie completa g_n^r (ove $n - r < p$), si vuole una relazione fra n, r, r' . Presi successivam. i punti $P_1, P_2, \dots, P_{r'+1}$ in guisa da rappresentare altrettante condizⁱ distinte per le φ che contengono G_n , il teor. di riduz^e dice che la serie completa determ^a da $G_n + P_1$, poi quella determ. da $G_n + P_1 + P_2, \dots$ ed infine quella determ. da $G_n + P_1 + \dots + P_{r'+1}$ sono ∞^r (la g_n^r con aggiunti i pⁱ P). Ma quest'ultima non è speciale, poiché per quel suo gruppo non passa più alcuna φ . Dunque $r = n - p + 1 + r'$: che è appunto il teor. di Riemann-Roch. - Da esso si passa subito al teor. di reciprocità di Brill e Nöther, poiché le φ per G_n daranno la $g_{n'}^{r'}$ residua // della g_n^r . - Inoltre [151] poiché a determinare un gruppo nella g_n^r si posson prendere ad arbitrio r punti, e poi altri r' punti arbitrari si posson prendere per una φ contenente quel gruppo, segue $r + r' \leq p - 1$, e sommando con la relaz. preced.: $2r \leq n$, cioè il teor. di pag. 118; dal quale s'è pure dedotto che le φ^{m-3} danno una g_{2p-2}^{p-1} senza pⁱ fissi.

Il teor. di riduzione di Nöther ed il suo inverso, che trarremo subito dal teor. Riemann-Roch, stabiliscono le condizioni perché una g_{n+1}^r con un punto fisso P sia completa. Osserviamo che la g_n^r residua di P deve pur essere completa. E speciale, perché se non fosse speciale sarebbe $n - r = p$, e quindi $(n + 1) - r > p$, sicché la g_{n+1}^r non sarebbe certo completa. - Tutto si riduce dun//que a vedere quando è [152] che aggiungendo ad una g_n^r speciale completa un punto P si ha una g_{n+1}^r completa. Il teor. di riduz^e dice che *basta* che P non stia su tutte le φ passanti per un gruppo G_n della g_n^r , cioè non sia un p. fisso della serie residua di questa. Viceversa questa condiz. è *necessaria*, perché se P stesse su tutte quelle φ , nella formola $r = n -$

$p + 1 + r'$, dal gruppo G_n al $G_n + P$ non muterebbe r' , mentre n aumenterebbe di 1, sicché anche la $\dimens^e$ da r dovrebbe diventare $r + 1$ per la g_{n+1} completa determinata da $G_n + P$.

Rappresentando la g_n^r con una C^n di S_r , si ha che la g_{n+1}^r è completa cioè non contenuta in una g_{n+1}^{r+1} se la C^n non è proj. di una C^{n+1} da 1 suo p^o . Ed abbiamo
 [153] // che una C^n normale *non* speciale è sempre proj. di una C^{n+1} . Ma se la C^n è normale speciale, essa si può ottenere come proj. di una C^{n+1} di S_{r+1} solo quando la residua della g_n^r risp. alla serie canonica ha almeno 1 p^o P fisso (e questo p^o sarà imag^e del centro di proj. della C^{n+1}).

Il teor. di riduz^e con l'inverso si può enunciare sotto forma analitica così (v. Nöther nel Crelle 97): affinché le funzⁱ raz^{li} dell'ente algebr^o i cui infiniti (semplici) sono fra gli $n + 1$ elemⁱ $P, P_1, \dots, P_n$ siano tutte finite in P è necessario e sufficiente che esista un gruppo della serie canonica (od una φ) che contenga $P_1, \dots, P_n$ ma non P (v. anche Math. Ann. 37 p. 424). Poiché quelle funzⁱ raz^{li} restan finite in
 [154] P appunto quando // le g'_{n+1} che esse rappresentano e che son determinate dal gruppo $PP_1 \dots P_n$ hanno P fisso.

Abbiansi n p^i di f formanti un G_n in cui non s'annulli alcuna φ . Siano anzitutto $P_1 \dots P_\mu P_{\mu+1}$ tali che formino un gruppo $G_{\mu+1}$ di una $g'_{\mu+1}$, mentre μ qual. fra essi non formino ancora un gruppo di una serie infinita. S'indichino con $P_{\mu+2}, \dots$ i punti di G_n per cui passano tutte le φ che contengono $G_{\mu+1}$. Poi con $P_{\mu+1}$ un nuovo p^o di G_n e con $P_{\mu+2}, \dots$ i p^i per cui passano le φ che contengono $P_1 \dots P_{\mu+1}$; ecc. Il teor. di riduzione con l'inverso mostrano che delle serie di gruppi di m p^i mobili ottenibili da $G_m = (P_1 \dots P_m)$ ove $m = 1, 2, \dots, n$, mancheranno quelle corrispⁱ ai
 [155] valori seguⁱ di m : $1, 2, \dots, \mu, \mu_1 + 1, \mu_2 + 1, \dots$, in tutto pre//cisamente p , cioè p saranno le funzⁱ raz^{li} dell'ente mancanti fra quelle che hanno per infiniti i gruppi G_m . - Questo teorema è una estensione dovuta al Nöther (Crelle 97) di un teorema che Weierstrass dà nelle sue Lezioni sulle funzⁱ abeliane (Lückensatz). Anzitutto in un cap^o sulle funzⁱ raz^{li} dell'ente che hanno un solo infinito (multiplo, s'intende) il Weierstrass mostra che se questo p^o non ha una posizione *particolare*, l'ordine d'infinità, cioè il grado della funz^e, dev'essere $> p$ e per ogni val. $> p$ esistono funzⁱ

siffatte. Considerando il p. m -plo come la riunione di m pⁱ inf. vicini, ciò si può derivare dal teor. Riemann-Roch (v. la fine della pag. 122); bisogna cioè che il p^o che si vuol sia infinito m -plo per funz. raz^{li} di grado m , ove $m \leq p$, sia tale che le φ che vi hanno // contatto $(m - 1)$ -punto con f vengano in conseguenza ad avervi contatto **[156]** m -punto: il che non accade che per punti *particolari*⁴⁰. Ma considerando poi un p^o *qualunque* si ha (Lückensatz) che fra i numeri $1, 2, 3, \dots$ ve ne sono *precisamente* p che non si possono assumere come gradi di funzⁱ raz^{li} aventi tutti gli infiniti coincidenti in quel p. ° Questa proposiz. ha anche servito (qualche volta) al Weierstrass per definire il *rango* (genere) dell'ente algebr.^o E serve pure elegantemente per ottenere equazⁱ particolari dei vari enti di gen. p (v. le Lezⁱ di Weierstrass).//

Cap. 9°. Rappresentazioni reali dell'ente algebrico.

Il metodo funzionale di Riemann

[157]

L'ente algebrico come varietà ∞^2 (v. pag. 5) di elemⁱ; ad es^o la varietà delle coppie di numeri complessi (s, z) soddisfacienti alla $F(s, z) = 0$. Questa varietà è *continua*, chiusa e tale che da ogni elem^o si può andare in ∞ direz.ⁱ Un'immagine reale si ha in una *superficie* (reale): si tratta di rappresentarlo effettivamente su una superf. in guisa che la corrispondenza sia univoca e continua. Alle superf. si potranno dunque far subire (per ora) deformazⁱ continue qual.; essendo equivalenti le superf. che sono in corrisp. univoca continua. Converrà che le sup. siano *chiuse*, come l'ente alg.^o //

Per l'ente razionale si ha subito la rappres^e distendendo il parametro $z = x + iy$ **[158]** da cui esso dipende sul piano di Argand^{lxii} e Gauss^{lxiii} (con 1 sol p^o all' ∞), o sulla sfera (di Riemann).

In generale per l'ente $F\left(\begin{smallmatrix} n \\ s \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} m \\ z \end{smallmatrix}\right) = 0$, fissato un p. z_0 sul piano o sulla sfera, a cui corrisp. i valori $s'_0 \dots s_0^{(n)}$ di s , si faccia muovere con continuità ma senza attraversare un taglio che passa per tutti i pⁱ di diram^e, o i tagli che congiungono 1 p. fisso

⁴⁰Per una dimostraz. dettagliata v. Nöther Crelle 92 p. 301 [si tratta di: NÖTHER, M. 1882, *Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen*, Jour. für die reine und angewandte Math., 92, pp. 301-303].

^{lxii}Jean Robert Argand (Ginevra 1768 - Parigi 1822).

^{lxiii}Carl Friedrich Gauss (Braunschweig 1777 - Gottinga 1855).

a questi p^i diram^e; allora congiungendo i valori delle varie radici che si hanno dai due lati di ogni taglio si ottiene la superf. di Riemann n -pla, connessa o no secondo che l'ente è o no irriduttibile. Si noti che così si mette in evidenza una g_n^1 qual. ad elemⁱ tutti mobili (v. pag. 95). Caso dell'ente iperell^o, $n = 2$.

- [159] Superf. di Klein: dei p^i reali delle tg^i // imag. della curva piana che rappresenta l'ente (Klein, Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen, Math. Ann. VII e χ^{lxiv}): la connessione fra i vari piani sovrapposti si fa nei p^i reali della curva, lungo le tg^i reali isolate o di flesso (e nei p^i reali delle tg^i di flesso imag^e se la curva è imag^a).



Esempi: la conica, da cui si ritorna alla sfera (ellissoide); le curve reali di 3^a classe che conducono all'anello.



- Si posson avere direttam^e, senza l'astrazione delle sup. multiple, superf. semplici che rappresentino l'ente. Così prendendo per questo una curva imag. che non stia in un piano reale, le rette reali che ne contengono i vari p^i , cioè li congiungono ai coniugati, formano una congruenza reale che rappres^a l'ente (nel caso di una r^a imag^a di [160] 2^a sp. si ha // la rappres^e di Staudt) e che si può sostituire con la sup. luogo dei p^i medi fra le coppie di p^i coniugati. O si ricorre ad S_4 ed al cono che proietta da 1 r^a imag^a la curva: il luogo dei p^i reali dei vari piani generatori sarà una sup. immagine dell'ente.

- Con tagli da una sup. chiusa si può passare ad una con orli o ad un aggregato di superf. Viceversa una tal sup. od un aggregato si considererà come una superf. chiusa, purché sia fissata una corrispondenza univoca fra i punti degli orli, fra loro accoppiati in un determinato modo. (Esempio: un poligono piano curvilineo, un parallelogrammo che si muta in un anello, ecc.); così che si abbia ancora *in abstracto* una varietà chiusa. E se la superf. è *unilatera* o *doppia* (esempi, di Möbius^{lxv} ecc.), si [161] può pure usare considerandola // come una sup. bilatera chiusa, purché in ogni

^{lxiv} KLEIN, F. 1874, *Über eine neue Art der Riemann'schen Flächen*, Math Annalen, 7, pp. 558-566 e 10, 1876, pp. 398-416.

^{lxv} August Ferdinand Möbius (Schulpforta 1790 - Lipsia 1868).

suo p^o se ne considerino *due*; lo stesso artificio si può usare per una sup. qualunque aperta, considerando gli orli come linee di passaggio dall'uno all'altro foglio⁴¹.

Lo studio delle proprietà di una sup. che non mutano per trasformazⁱ continue costituisce l'Analysis situs o Topologia (Leibniz^{lxvi}, Riemann). In essa compaiono i tagli *trasversi* (Querschnitte) e *chiusi* o rientranti (Rückkehrschnitte). Definiz^e di superf. connessa, semplicem. connessa. In una superf. chiusa (connessa) si posson fare un certo numero N di tagli, chiuso il 1° e trasversi gli altri, che non la spezzano ma la rendono semplicem. connessa, mentre $N + 1$ // tagli la spezzerebbero. Il [162] num. (*fondam^{le}*) N è pari, $= 2p$ ove p è il massimo numero di tagli chiusi che non spezzano la superf. e dicesi *genere* di questa. La sup. secondo Riemann è $N + 1 = 2p + 1$ volte connessa (mentre Klein e Neumann^{lxvii} dicono $N = 2p$ la *connessione*). Si dimostra, con pure cosiderazⁱ di posiz^e (v. Neumann p. 168-171), che per una sup. sferica di Riemann d'ord. n con ν pⁱ di diram., o ν per somma degli ordⁱ di questi pⁱ si ha per quel num. $N = 2p$ di tagli $\nu - 2n + 2$: dunque p è il genere dell'ente algebr.^o Per trasformazⁱ univoche continue non muta il genere di una sup. : ne segue di nuovo che due enti algebrⁱ in corrisp. univoca hanno lo stesso genere. Anzi con analoghe considerazⁱ di Analysis situs si dimostra che se 2 sup. chiuse di gen. p, p' in corrisp. univoca continua $(x, x') //$ hanno y, y' punti uniti ..., si ha [163] $y - y' = 2x(p' - 1) - 2x'(p - 1)$ ⁴²; e se ne trae in particolare la formola di Zeuthen per una corrisp. fra 2 enti algebrici.

L'uguaglianza del genere non è solo necessaria, ma anche sufficiente perché due sup. chiuse si possan riferire univocam. con continuità⁴³. Ne segue che a rappre-

⁴¹V., anche per altre cose del seguito, Klein Ueber Riemann's Theorie der alg. Functionen und ihrer Integrale [si tratta di KLEIN, F. 1882, *Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, Teubner, Leipzig]; e i Neue Beiträge ... nei Math. Ann. XXI [si tratta di: KLEIN, F. 1883, *Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie*, Math. Annalen, 21, pp. 141-218].

^{lxvi}Gottfried Wilhelm Leibniz (Lipsia 1646 - Hannover 1716).

^{lxvii}Carl Gottfried Neumann (Königsberg 1832 - Lipsia 1925).

⁴²V. De Paolis [Riccardo De Paolis (Roma 1854 - Roma 1892) autore di pregevoli lavori nell'indirizzo cremoniano, fu in corrispondenza con Segre, che ne scrisse il necrologio: SEGRE C., *Riccardo De Paolis*, Rend. del Circolo Mat. Palermo, 6, pp. 208-224; *Opere* 4, pp. 413-427.], Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze ecc. Mem. soc^a XL, t. VII ser. 3^a 1890 [si tratta di: DE PAOLIS, R. 1890, *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi*, Mem. Soc. It. Scienze detta dei XL, 3, 7, pp. 1-167].

⁴³V. ivi, e Möbius, Theorie der elementaren Verwandtschaft (*Werke*, B. II) [si tratta di: MÖBIUS, A. 1863, *Theorie der elementaren Verwandtschaft*, Berichte über die Verhand. K. Sächsischen Gesell. der

sentare un ente alg^o di gen. p si posson assumere certe sup. *normali* di gen. p , ad es^o una sfera con p manichi (per $p = 1$ l'anello), come fa Klein (op. cit).

Funzioni complesse del punto sulla sup. Dato un sistema qual. di paramⁱ o coord.
[164] *curvilinee* // p, q sulla sup., non conviene prendere per funzⁱ compl. del p. ogni funz. di p, q ; ma conviene far sì che due qual. funzⁱ siano funzioni l'una dell'altra nel senso di Riemann (funzⁱ monogene di Cauchy). Ciò si ottiene se, assunta ad arbitrio una $z = x + iy$ come funz. compl. del punto, si assume poi come tale ogni funz. $w = u + iv$ di z , cioè ogni funz. delle 2 variabⁱ reali x, y tale che

$$(1) \quad i \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

ossia

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 0$$

cioè

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ora queste condizⁱ si posson anche esprimere in altro modo; poichè si sa che esse equivalgono a dire che $\frac{du+idv}{dx+idy}$ non dipende da dx, dy , è una funz. di x, y ; e quindi anche $\frac{du-idv}{dx-idy}$; e moltiplicando si ha

$$(3) \quad du^2 + dv^2 = E(dx^2 + dy^2)$$

ove E è funz. di x, y [si trova $E = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$], la qual identità equivale alle (2)
[165] purchè si aggiunga che $du + idv$ // deve mutarsi (a meno di un fattore) in $dx + idy$ e non in $dx - idy$. Così allorquando si assume una certa $z = x + iy$ come funz. completa del punto sulla sup., le altre devono esser quelle $w = u + iv$ tali che la equaz. $dx^2 + dy^2 = 0$ si muti (con la detta restrizione) nella $du^2 + dv^2 = 0$, cioè non cambi.

Wissens. zu Leipzig, 15, pp. 18-57, *Werke*, Hirzel, Leipzig II, 1886, pp. 433-472]; Jordan [si tratta del matematico francese Camille Jordan (Lione 1838 - Parigi 1922).], Sur la déformation des surfaces, J. de Lionville, 11₂ (1866) [si tratta di: JORDAN, C. 1866, *Sur la déformation des surfaces*, Jour. de Math. pures et appliquées, 2, 11, pp. 105-109].

Sia ora data ad arbitrio nelle coord. curvilinee p, q una forma differenziale quadratica definita $ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$ di discriminante $H^2 = EG - F^2 > 0$. Avremo, spezzandola in due fattori lineari, complessi coniugati: $ds^2 \equiv (Adp + Bdq)(\bar{A}dp + \bar{B}dq)$ (ove il segno $\equiv$ indica uguaglianza, a meno di un fattore, funz. di p, q); e supposto $\lambda(p, q)$ un fattore integrante di $Adp + Bdq$, sicché

$$\lambda(Adp + Bdq) = dx + idy$$

e quindi $\bar{\lambda}(\bar{A}dp + \bar{B}dq) = dx - iy$, // sarà $ds^2 \equiv (dx + idy)(dx - idy) \equiv dx^2 + dy^2$. [166]

Se dunque si assume $z = x + iy$ come funz. complessa del luogo, sarà la forma $ds^2 = 0$ data, quella che da tutte le funz.ⁱ complesse del luogo sarà ridotta alla forma $du^2 + dv^2$. Fissato il sistema di coord. p, q , per ogni forma differ. (o meglio equaz. differ.^{le}) $ds^2 = 0$, si ha un sistema di funz.ⁱ complesse del luogo. Si hanno subito le condiz.ⁱ caratteristiche di queste mediante E, F, G . Pongasi

$$\begin{aligned}\Delta_1 u &= \frac{1}{H^2} \left\{ E \left(\frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 - 2F \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial u}{\partial q} + G \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)^2 \right\} \\ \Delta_2 u &= \frac{1}{H} \left\{ \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{H} \left(G \frac{\partial u}{\partial p} - F \frac{\partial u}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{H} \left(E \frac{\partial u}{\partial q} - F \frac{\partial u}{\partial p} \right) \right\};\end{aligned}$$

quando la forma ds^2 si riduce a $dx^2 + dy^2$ si ha $\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$, $\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; e nel caso che ds indichi l'elem.^o lineare essi sono quelli che Lamé^{lxviii} chiamò param.ⁱ differenz.^{li} di 1° e 2° ord. della funz. u (v. ad es.^o le Leçons sur les coord. curvil.^{lxix}; veramente Lamé // chiama param. differ.^{le} di 1° ord. $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2}$) [167] Beltrami⁴⁴ conserva questi nomi alle espress.ⁱ che corrispondono all'espressione generale dell'elem.^o lineare ds e dimostra che queste $\Delta_1 u, \Delta_2 u$ (ed un param. differ.^{le} intermedio, relativo a due funz.ⁱ) sono invariab.^{li} per trasformaz.ⁱ di coord., cioè che

^{lxviii}Gabriel Lamé (Tours 1795 - Parigi 1870).

^{lxix}LAME, G. 1859, *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, Paris, Mallet-Bachelier

⁴⁴[Si tratta del matematico Eugenio Beltrami (Cremona 1835 - Roma 1900)] Ricerche di Analisi applicata alla Geometria, *Giornale di mat.* t. II (1864) e III (1865) [si tratta di: BELTRAMI, E. 1864 - 1865 *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, *Giornale di Mat.*, 2, 1864, pp. 267-282, 279-306, 331-339, 355-375; 3, 1865, pp. 15-22, 33-41, 82-91, 228-240, 311-314]; e più specialmente Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque, *Annali di mat.*, ser. 2 t. I (1867-8) [si tratta di: BELTRAMI, E. 1867, *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque*, *Annali di Mat. pura ed applicata*, 2, 1, pp. 329-366].

se si passa ad altre coord. p', q' , sicché $ds^2 = E'dp'^2 + \dots$, le $\Delta_1 u, \Delta_2 u$ diventano uguali alle analoghe espressioni fatte con $p', q', E', \dots$. Ciò vale all'infuori del significato speciale geometrico che egli dà al ds^2 . Ne segue dunque che l'equ. caratteristica (1) (pag. 164) di una funz. w del luogo diventa $\Delta_1 w = 0$; e le equazⁱ differ^{li} $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ a cui // soddisfano u e v diventano $\Delta_2 u = 0, \Delta_2 v = 0$ (onde $\Delta_2 w = 0$). Si trova poi che le (2) (pag. 164) diventano

$$(2') \quad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial p} &= \frac{1}{H} \left(F \frac{\partial u}{\partial p} - E \frac{\partial u}{\partial q} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial q} &= \frac{1}{H} \left(G \frac{\partial u}{\partial p} - F \frac{\partial u}{\partial q} \right), \end{aligned}$$

e queste caratterizzano la $w = u + iv$ (e sono compatibili se $\Delta_2 u = 0$ ossia $\Delta_2 v = 0$). Due funzⁱ qual. w soddisfacenti a quelle equⁱ son funzⁱ l'una dell'altra, e viceversa; ecc.

La forma $ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$ uguagliata a 0, è rappresentata geometricam. da coppie di direzⁱ imag. uscenti da ogni p^o della sup., e quindi da un sist. ∞ di 2° grado (o da due sistⁱ di 1°) di linee imag^e, integrali dell'equ. di $ds^2 = 0$. Se $u + iv$ è funz. complessa risp. a quella ds^2 poichè sarà $ds^2 \equiv du^2 + dv^2$, le direzⁱ $du = 0, dv = 0$, ossia $u = \text{cost.}, v = \text{cost.}$ saranno coniugate armoniche risp. a $du \pm idv = 0$, cioè a quelle due. // E variando la funz. $u + iv$ che si sceglie, le direzⁱ delle $u = \text{cost.}, v = \text{cost.}$ passanti per 1 dato p^o rimarranno sempre coniug. arm. risp. a quelle, formeranno un'invol. I sistemi $u = \text{cost.}, v = \text{cost.}$ saranno ortogonali se ds è l'elem. lineare; saranno coniugati se $ds^2 = 0$ è l'equaz. delle asintotiche. Quando ds è l'elem. lineare, il sist^a $u = \text{cost.}$ per cui $\Delta_2 u = 0$ dicesi di curve isoterme. Esso col suo ortogonale rende $ds^2 = \lambda(Udu^2 + Vdv^2)$, ove U e V sono risp. funzⁱ di u e v . Ma sostituendo ad u e v delle funzⁱ, il che non muta i due sistemi ortog^{li} di curve isoterme si rende subito $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$; ed allora i paramⁱ u, v si dicono isometrici (isometrico dicesi il sistema di curve $u = \text{cost.}$, ed il suo ortog^{le} $v = \text{cost.}$, perchè insieme con questo divide la sup. in // quadrati infinitesimi). Le equaz. (2') caratterizzano i paramⁱ isometrici ortogonali u, v . E l'artificio usato a pag. 165 è quello noto per dedurre da una data espressione dell'elemento lineare

di una sup. un sistema isoterma. - (Si passi a pag. 172)

[Queste cose si collegano strettamente colla *fisica matematica*. Abbiassi un fluido che scorre sulla superficie con un potenziale di velocità (Geschwindigkeitspotential secondo Helmholtz^{lxx}) u funz. del punto, ma non del tempo t , cioè un fluido tale che le componenti della sua velocità in un punto qual. $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ sian date da $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$. In un dato intervallo di tempo dt l'incremento di fluido nell'aria $dx dy$ sarà dato da $\Delta_2 u \cdot dx dy \cdot dt$ sicché affinché esso sia sempre nullo occorre // e basta che $\Delta_2 u =$ [171] 0. Quest'equaz. caratterizza dunque il fluido *incompressibile*, e coll'indipendenza di u da t il flusso *stazionario*. Così nel caso della propagazione del calore u è la temperatura, e si ha l'equilibrio calorifico; mentre nel caso del fluido elettrico u è il potenziale elettrostatico, e si ha un flusso elettrico stazionario. In ogni caso le curve per cui $u = \text{cost.}$ sono *curve di livello*, o curve isoterme, ecc.; mentre quelle $v = \text{cost.}$ (ad esse ortog^{li}) sono le *linee di flusso*. E passando su una di queste, cioè sulla normale n , da una curva di livello u alla $u + du$, siccome per significato geometrico del param^o differ^{le} di 1^o ord. si ha $\Delta_1 = (\frac{du}{dn})^2$, si conchiude che $\frac{du}{dn} = \sqrt{\Delta_1 u}$ è la *velocità* del fluido in quel punto. // Si hanno così dei mezzi fisici, ad es^o l'elettricità, [172] per generare delle funzⁱ complesse su una superf. Si costruisce infatti il potenziale u , ed allora dalle equⁱ (2') (pag. 168) è determinata v , e quindi $u + iv$, a meno di una cost^e addittiva complessa.]

Se su 2 superf. si considerano come omologhi due $p^i (p, q), (p', q')$, quando due funzⁱ complesse risp. delle 2 sup. vi hanno lo stesso valore $u + iv$, funzⁱ relative risp. alle forme definite $ds^2 \equiv Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2, ds'^2 \equiv E'dp'^2 + 2F'dp'dq' + G'dq'^2$, allora nei p^i omologhi sarà $ds^2 \equiv ds'^2 (\equiv du^2 + dv^2)$, le equazⁱ differ^{li} $ds^2 = 0, ds'^2 = 0$ si muteranno l'una nell'altra, cioè si corrisponderanno i loro sistⁱ di curve integrali. E viceversa se si ha fra le 2 sup. una corrispondenza per cui $ds^2 \equiv ds'^2$, le funzⁱ complesse sull'una // risp. a ds^2 si muteranno funzⁱ complesse dell'altra risp. [173] a ds'^2 . In partic^e su una stessa sup. si hanno ∞ corrisp^e risp. ad una data forma $ds^2 = 0$ mediante le ∞ funzⁱ complesse relative a queste. - Nella rappres^e di Gauss di $x + iy$ sul piano, la relativa forma differ^{le} quadratica $ds^2 = dx^2 + dy^2$ dà l'ele-

^{lxx}Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (Potsdam 1821 - Berlino 1894).

mento lineare. In generale quando per ds, ds' si prendon gli elemⁱ linⁱ delle superf., le rappresentazioni in cui essi si corrispondono (a meno di un fattore) diventano le rappresⁱ *conformi* (se invece $ds^2 = 0$ è l'equaz. delle asintotiche si hanno rappresⁱ pure notevoli.-). Abbiamo così il modo di riferire 2 superf. qual. in corrispondenza
 [174] conforme od isogonale⁴⁵, in // partic. una sup. qual. ad un piano. Però in ciò bisogna limitarsi a parti delle superf. in cui quelle funzⁱ complesse del luogo non abbiano infiniti, ed inoltre, se si suol che la corrisp^a sia univoca, siano monovalenti ecc. Nel seguito ci atteniamo a quel ds^2 per definire le funzⁱ complesse: quindi due sup. chiuse saranno atte a rappres. le stesse funzⁱ complesse quando, e solo quando siano in corrisp^a univoca conforme. Così se su una sup. si ha una funz. complessa $x + iy$ che prenda ogni valore in n pⁱ, essa si rappresenta conform^e su un piano n -plo di Riemann. (Seguo il tratto fra [] a pag. 170-2)

Premesse queste generalità intorno alle funzioni complesse su di una superficie,
 [175] veniamo a quelle funzioni che posson ser//vire per lo studio dell'ente algebrico. Le funzⁱ razionali dell'ente, che ci han dato analiticam. le serie lineari su queste, con funzⁱ univoche degli elemⁱ, legate algebricam^e fra loro, continue, all'infuori di un certo numero di poli (infiniti algebrici), numero che è il *grado* della funzione (*Werthigkeit* secondo Klein) (valenza). Orbene abbiasi viceversa su una sup. chiusa qual. una funz. complessa sì fatta, cioè univoca e continua all'infuori di n poli, e che prenda ogni val. in n pⁱ. Distendendola sul piano complesso z , si ha (pag. 174) un piano n -plo di Riemann in corrispondenza univoca conforme con la superf. Un'altra funz. complessa s univoca e continua all'infuori di poli, sulla sup. si rap-
 [176] presenterà sul piano in una simile funz. di z e però per un noto teor. (v. ad // es^o Neumann pag. 119^{lxxi}) sarà una funz. algebrica di z , cioè $F(s, z) = 0$. Se s prende in gener^e valori diversi dove z ne prende uno stesso, la sup. rappresenterà univocam. l'ente algebr^o $F(s, z) = 0$. Ogni altra funz. s' univoca sulla sup. e con soli poli sarà

⁴⁵Questo modo coincide con quello dato da Gauss "Soluzione generale del problema: rappresentare le parti di una sup. data su un'altra sup. data in guisa che la rappresentaz. riesca nelle sue parti infinitesime simile alla figura rappresentata" (trad. da Beltrami, Annali di Mat. t. IV, 1861) [si tratta di: GAUSS, C. F. 1825, *Soluzione generale del problema: rappresentare le parti di una superficie data sopra un'altra superficie parimenti data, in guisa che la rappresentazione riesca, nelle sue parti infinitesime, una figura simile alla figura rappresentata*, (trad. di E. Beltrami), Annali di Mat. pura ed applicata, 4, 1861, pp. 214-232].

^{lxxi}NEUMANN, C. 1884, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*, Teubner, Leipzig.

similmente algebrica in z ; ma siccome la corrispondenza è tale che ad ogni coppia (s, z) corrisponde una sola coppia (s', z) , così s' sarà funz. raz^{le} di s, z (v. pag. 50). Cioè le funzⁱ univoche sulla sup. con soli poli sono precisamente le funzⁱ raz^{li} di s, z , cioè le funzⁱ raz^{li} dell'ente⁴⁶. // È appunto quel carattere che nella teoria funzionale [177] di Riemann si sostituisce all'espressione razionale, come in generale (seguendo le orme di Dirichlet^{lxvii}) nella definiz. delle funzioni di Riemann ricorre a caratteri ... anzi che ad espressⁱ analitiche.

Ma per costruire e studiare quelle funzⁱ algebriche univoche della sup. (invece che *univoche* Riemann dice *diramate come la superficie*) occorrono nella teor. di Riemann anche i loro integrali, cioè quelle funzⁱ w la cui derivata $\frac{dw}{dz}$ è funz. univoca con soli infⁱ algebrici (cioè senza singolarità essen//ziali), sicché $w = \int_{s_0 z_0}^{sz} R(s, z) dz$ [178] hanno per sole discontinuità sulla sup. dei poli e degli infⁱ logaritmici: poiché in prossimità di un p. qual. z' la funz. R si può rappres. con $\frac{a_y}{(z-z')^y} + \dots + \frac{a_1}{z-z'} + a_0$ ed integrando verrà un termine $a_1 \log(z-z')$, [a_1 dicesi *residuo* (logaritmico) della funz. R nel punto z' : Cauchy] e gli altri algebrici. (Se $z' = \infty$ in luogo di $z-z'$ si scriva $\frac{1}{z}$, e se z' è p^o di diramaz^e v -plo in luogo di $z-z'$ si scriva $(z-z')^{\frac{1}{v}}$). Integrali Abeliani. Distinzione in 3 specie. Loro moduli di periodicità. Sistema normale di tagli (Riemann n. 19, Neumann p. 182, Klein-Fricke p. 495): sulla sup. normale son rappresentⁱ dai meridiani a dei manichi e dai paralleli b . Gli integrⁱ Abelⁱ son caratterizzati dall'avere solo discontinuità al//gebr. o logaritmiche e dall'essere determ. a meno di periodi, oppure dall'esser univoci sulla sup. tagliata e con differenze costanti lungo i tagli: poiché la derivata di una funz. siffatta sarà algebrica. Assumeremo questo carattere come definiz. degl'integrⁱ (cfr. p. 177).



[179]

Ciò posto, data *ad arbitrio* una sup. chiusa, ad es. una sup. di Riemann, esistono su essa delle funzⁱ complesse che presentino i detti caratteri, cioè funzⁱ algebr^e ed

⁴⁶Questo teor. è di Riemann che al n. 8 vi giunge mostrando algebricamente che le funzⁱ raz^{li} di s, z con m' poli dipendono linearmente da $m' - p + 1$ costⁱ (con un calcolo che coincide con quello con cui, mediante le curve aggr^{te} di $F(s, z) = 0$ si prova che un $G_{m'}$ sta (almeno) in una $g_{m'-p}$); mentre al n. 5 aveva stabilito che appunto da tante costⁱ dipendono le funzⁱ univoche con dati m' poli. In tutto però vi è la lacuna relativa alle serie speciali. Per un'altra dimostraz. v. Klein-Fricke pag. 499.

^{lxvii}Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren 1805 - Gottinga 1859).

- integrali? È un risultato capitale della teoria di Riemann, che la distingue da tutte le altre, quello dell'esistenza di tali funzⁱ, cioè (Riemann, n. 3): su qual. superf. (di Riemann) di gen. p è determinata a meno di una costante complessa addittiva una funz. che 1° nei $2p$ tagli a e b abbia moduli di periodic^a costanti le cui parti
- [180] reali siano // date ad arbitrio, 2° in dati punti abbia date discontinuità algebrico-logaritmiche, 3° dal lato positivo di linee, che (entro la sup. tagliata) congiungano un p. fisso O ai p^i per cui il residuo logaritmico a_k (pag. 178) non è nullo, superi di $-2\pi i a_k$ il valore che ha dall'altro lato; e del resto sia univoca e continua. - La risoluz. di questo problema si può ridurre alla costruz. della parte reale u della funz. complessa $u + iv$, cioè di un *potenziale* con date discontinuità e dati valori nei contorni. E perciò Riemann ricorre ad un principio che Dirichlet (completando un analogo ragionam^o della mem. di Gauss "Allgemeine Lehrsätze..."^{lxxiii}) dava
- [181] nelle sue Lezioni pei potenziali (continui in ogni punto)⁴⁷, e che // egli estende al caso di discontinuità. Lacune nelle dimostrazⁱ del principio di Dirichlet (rilevate da Weierstrass, Kronecker ecc.). Come furono colmate da Schwarz^{lxxiv} e Neumann (Cap.ⁱ 16-18 delle Vorlesungen; v. anche in Klein-Fricke pag. 508 e seguⁱ un abbozzo del metodo di combinazione di Neumann). Metodo fisico per costruire i potenziali e quindi (p. 172) le funzioni cercate su qualunque superficie chiusa: il Klein (op^o citato) ricorre ad una batteria elettrica: i due poli messi a contatto colla superficie danno due infⁱ logaritmici pel potenziale, sorgenti di elettr^a di copia $2a\pi$ (se a è il residuo di u nell'un punto), e facendoli coincidere darebbero un inf^o algebrico; un tratto di curva, od una curva chiusa che non spezzi la sup. e sia sede di una forza elettromotrice costante. //
- [182] Le funzⁱ di cui il teor. d'esistenza di Riemann (pag. 179-180) stabilisce l'esistenza si diranno integrali (Abeliani) di 1^a, 2^a, 3^a specie a seconda dei casi. Se $w_1, w_2, \dots, w_p$ sono integrⁱ di 1^a sp., le $2p$ costanti reali disponibili nel teor. d'esistenza per tali integrⁱ mostrano, che quelli si possono assumere linearmente indepⁱ, e che allora

^{lxxiii} GAUSS, C. F. 1840 *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte*, in *Werke*, V, pp. 197-242.

⁴⁷ V. Vorlesungen di Dirichlet, 2^e Auflage, § 32, p. 127 [si tratta di: DIRICHLET, G. L. 1876, *Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte*, Leipzig, Teubner].

^{lxxiv} Karl Hermann Amandus Schwarz (Hermisdorf, Slesia, 1843 - Berlino 1921).

ogni altro è dato da $\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_p w_p + \text{cost.}$ Si vede pure che si possono scegliere in modo che w_k abbia moduli di periodicità nulli in tutte le a tranne a_k ove il mod^o sia πi (così Riemann al n. 20, per introdurre le w come argomenti nelle Θ ; e Neumann. - Clebsch e Gordan, e quindi Lindemann^{lxxv}, prendono $2\pi i$. - Klein-Fricke ed altri prendono 1): integrali *normali*. Fra gl'int. 2^a sp. si considerano quelli *elementari* t_c con un sol polo c : son determⁱ // a meno di un fattore e di un int. 1^a sp. [183] addittivo. Il fattore si determina fissando che il coeffic. di $\frac{1}{z-z_0}$ nello sviluppo in prossimità di $c(z_0, s_0)$ sia 1; l'int. di 1^a sp. può servire ad annullare i modⁱ di per^a lungo tutte le a , e si ha così l'int. *normale* di 2^a sp., determinato a meno di 1 cost. add.. Indicando con t integrⁱ normali, avremo che ogni integr. di 2^a sp. coi poli $c_1 \dots c_n$ sarà rappres. da

$$\beta_1 t_{c_1} + \dots + \beta_n t_{c_n} + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_p w_p + \text{cost.}$$

In partic. ogni funz. univoca s che non abbia altre discontinuità che quei poli, e quindi non abbia differenze nelle a sarà

$$s = \beta_1 t_{c_1} + \dots + \beta_n t_{c_n} + \text{cost.}$$

ove le β dovranno ancora esser tali da annullare i periodi lungo le b_k cioè $\tau_c^{(k)}$

$$\begin{aligned} \beta_1 \tau_{c_1}^{(1)} + \dots + \beta_n \tau_{c_n}^{(1)} &= 0 \\ \dots & \\ \beta_1 \tau_{c_1}^{(p)} + \dots + \beta_n \tau_{c_n}^{(p)} &= 0 // \end{aligned}$$

Sono p equazⁱ lineari omog. fra $\beta_1 \dots \beta_n$, onde se $n > p$ è possib. in ∞ modi [184] costruire funzⁱ siffatte. Due qual. son legate da un'equ. alg. $F(s, z) = 0$ (pag. 176) che si riconduce al punto di vista delle pag. 174 e seguⁱ. Così tutte saran funzⁱ raz^{li} di due s, z . In partic. le derivate dei nostri integrⁱ risp. ad una di esse z saran funzⁱ siffatte, sicché quegl'integrⁱ sono effettivam. del tipo $\int R(s, z) dz$. Per gl'integrⁱ 1^a

^{lxxv}C. Louis Ferdinand Lindemann (Hannover 1852 - Monaco di Baviera 1939).

sp. si dimostra (v. per es. Riemann n. 9) che si può assumere $w = \int \frac{\varphi(s,z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}$, ove φ è una funz. di gradi $n-2, m-2$ aggr^{ta} ad $F(s, z)$, sicché le $\varphi = 0$ segano su $F = 0$ la g_{2p-2}^{p-1} ⁴⁸.

Le equaz. lineari fra le β si possono scrivere tenendo conto che (v. Klein-Fricke pag. 532, Lindemann pag. 805, Clebsch e Gordan p. 121)^{lxxvi} il periodo $\tau_c^{(k)}$ dell'int. [185] normale di 2^a sp. t_c lungo b_k è $\tau_c^{(k)} = -2\left(\frac{dw_k}{dz}\right)_c // = -2w'_k(c)$ (v. anche Riemann pag. 131 ultime linee)

$$\begin{aligned}\beta_1 w'_1(c_1) + \cdots + \beta_n w'_1(c_n) &= 0 \\ \dots \\ \beta_1 w'_p(c_1) + \cdots + \beta_n w'_p(c_n) &= 0\end{aligned}$$

Poniamo per maggiore generalità che queste p equazⁱ si riducano a sole $p - \tau$, ove $\tau \geq 0$ siano le identità lineari indepⁱ che legano, cioè i sistemi di λ linearm^e indepⁱ tali che

$$\begin{aligned}\lambda_1 w'_1(c_1) + \cdots + \lambda_p w'_p(c_1) &= 0 \\ \dots \\ \lambda_1 w'_1(c_n) + \cdots + \lambda_p w'_p(c_n) &= 0.\end{aligned}$$

Sostituendo $w'_k(c) = \frac{\varphi_k(c)}{\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_c}$ diventano

$$\begin{aligned}\lambda_1 \varphi_1(c_1) + \cdots + \lambda_p \varphi_p(c_1) &= 0 \\ \dots \\ \lambda_1 \varphi_1(c_n) + \cdots + \lambda_p \varphi_p(c_n) &= 0,\end{aligned}$$

⁴⁸Ai p integrⁱ $w_1 \dots w_p$ corrisp^o le p φ linearm. indepⁱ.
^{lxxvi}KLEIN, F., FRICKE, R. 1890, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, I vol., Teubner, Leipzig; CLEBSCH, R.A.(LINDEMANN, F.) 1876-1891, *Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet und herausgegeben von Ferdinand Lindemann*, 2 voll., Teubner, Leipzig; CLEBSCH, R. A., GORDAN, P. 1866, *Theorie der Abelschen Funktionen*, Teubner, Leipzig.

cioè τ sono le φ linearm. indepⁱ che contengono tutto il gruppo $c_1 \dots c_n$. In tale ipotesi abbiamo che le funzⁱ raz^{li} dell'ente i cui poli sono fra questi punti dipendono da $n + 1 - (p - \tau)$ costanti, e ciò è il teor. di Riemann-Roch (v. pag. 141, ove $r' = \tau - 1$), dimostrato appunto // col metodo avviato da Riemann (n. 5) e completato [186] da Roch (Crelle 64).

Si può giungere allo stesso risultato col *teorema d'Abel*^{lxxvii}. Abbiassi una funz. raz^{le} qualunque z dell'ente algebr^o e siano $x_1 \dots x_n$ i pⁱ in cui essa prende un dato valore qual. z . Sarà $w(x_1) + \dots + w(x_n)$ una funz. di z univoca e finita per tutti i valori di z (all'infuori di differenze costanti lungo linee corrispⁱ alle a e b): e però una costante⁴⁹ (Questo è in sostanza il ragionam^o di Riemann n. 14; che si estende subito, com'egli osserva al teor. relativo agl'integrⁱ di 2^a e 3^a sp. ; e che d'altra parte si può estendere alle corrispondenze algebriche fra due enti: Hurwitz^{lxxviii}, Math. Ann. 28)^{lxxix}. Quindi se $c_1 \dots c_n$ è un altro gruppo, sarà: // [187]

$$w(x_1) + \dots + w(x_n) \equiv w(c_1) + \dots + w(c_n)$$

ossia $\int_{c_1}^{x_1} + \int_{c_2}^{x_2} + \dots + \int_{c_n}^{x_n}$ presi convenientem. danno 0. Viceversa se queste p somme d' $\int$ son nulle $c_1 \dots c_n$ ed $x_1 \dots x_n$ son due gruppi di una stessa g_n^1 . Supponendo il gruppo $x_1 \dots x_n$ inf. vicino a $c_1 \dots c_n$ ed indicando con z una variab. indep. (funz. raz^{le} dell'ente) diventa

$$w'_1(c_1)dz_1 + \dots + w'_1(c_n)dz_n = 0$$

...

$$w'_p(c_1)dz_1 + \dots + w'_p(c_n)dz_n = 0$$

e ad ogni soluz. $dz_1 : \dots : dz_n$ di questo sist^a corrisponderà una g_n^1 contenente il gruppo $c_1 \dots c_n$, e viceversa; sicché se fra quelle p equazⁱ sono $p - \tau$ le indepⁱ, e

^{lxxvii}Niels Henrik Abel (Finnøy 1802 - Froland 1829).

⁴⁹a meno di periodi di w .

^{lxxviii}Adolf Hurwitz (Hildesheim 1859 - Zurigo 1919).

^{lxxix}HURWITZ, A. 1887, *Über algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip*, Math. Annalen, 28, pp. 561-585.

quindi $n - p + \tau - 1$ le dz arbitrarie, la g_n completa determinata da quel gruppo conterrà $\infty^{n-p+\tau-1} g_n^1$, cioè sarà di dim. $r = n - p + \tau$. D'altronde quelle equazⁱ
[188] sono appunto le p del principio della // pag. 185; solo che in luogo delle β vi son le dz . Dunque τ ha il significato che ivi si trova, cioè il num. delle φ indep. per $c_1 \dots c_n$. Si ritrova così il teorema di R.-R.

Questo teorema (ed in particolare i gruppi speciali) si collega pure al *problema d'inversione* di Jacobi^{lxxx} (v. Neumann, p. 350 e 382): date le p equazⁱ $w_k(x_1) + \dots + w_k(x_p) \equiv V_k$ determinare i $p^i x$ mediante le V . Il teor. d'Abel. prova che se vi sono due soluzⁱ, il problema è indeterminato, cioè tutti i gruppi della g_p^1 che congiunge quei due gruppi soddisfano quelle equ.: e si ha (indicando con $d_1 \dots d_{p-2}$ un gruppo residuo di quei gruppi speciali) $V_k \equiv w_k(d_1) + \dots + w_k(d_{p-2})$. Il problema d'inversione fu risolto da Riemann mediante le funzⁱ θ . Si esprimono le funzⁱ //
[189] raz^{li} simmetriche di $z_1 \dots z_p$ mediante prodotti di rapporti del tipo $\frac{\theta(w_k \alpha - V_k)}{\theta(w_k \beta - V_k)}$ ove α e β son costanti date. Ora si dimostra che $\theta(w_1 z - V_1, w_2 z - V_2, \dots, w_p z - V_p)$ è una funz. di z che s'annulla solo per p punti $\eta_1 \dots \eta_p$ tali che $w_k(\eta_1) + \dots + w_k(\eta_p) \equiv V_k$, e però nel caso detto è identicam. nulla, qual. sia z . E così l'essere $c_1 \dots c_n$ un gruppo di una g_n^1 quando $n < p$ si può esprimere dicendo che $\theta(w_k z - w_k(c_1) - \dots - w_k(c_n) - w_k(\eta_{n+1}) - \dots - w_k(\eta_p))$ è identicam. nulla qual. siano z ed $\eta_{n+1} \dots \eta_p$. Dalla consideraz. dell'annullarsi identico delle θ si può ritrovare il teor. R.-R. (v. ad es. Clebsch-Lind. p. 857-62).

Il teor. Riemann-Roch vale anche per $p = 0$ e $p = 1$: allora è sempre $\tau = 0$. La
[190] dimostraz. cogl'integrⁱ di 2^a sp. vale ancora; av//vertendo che per $p = 0$ essi si riducono alle funzⁱ raz^{li}, $t_c = \frac{1}{z-c}$, non vi son più periodi, ecc.

Dai teorⁱ d'esistenza di Riemann traghiamo che assunti ad arbitrio su un piano z (o sfera) $v = 2(n + p - 1)$ punti e costruito un piano n -plo con quei p^i di diram. e quindi di gen. p esistono su esso delle funzⁱ univoche con soli poli e quindi esistono enti algebrⁱ in corrisp. univoca con quella sup. e su cui quelle funz. son raz^{li}: ai vari valori di z corrispondono su un tal ente i gruppi di una g_n^1 . Dunque: esistono sempre degli enti di gen. p contenenti una g_n^1 per cui i $2(n + p - 1)$ gruppi

^{lxxx}Carl Gustav Jacob Jacobi (Potsdam 1805 - Berlino 1851).

di diram. corrispondono a dati valori della funz. $\text{raz}^{\text{le}} z$ che rappresenta quella g_n^1 , ossia i birapporti indipendenti di quei $2(n + p - 1)$ gruppi singolari abbiano dati valori. Tali enti si dividono in un numero finito di sistemi sì che due enti di uno stesso sistema sono in corrisp. univoca (corrispondendosi quelle due g_n^1). Quegli enti si possono tutti rappres^e con curve piane su cui quella g_n^1 è data da un fascio di rette: allora il teor. si riferisce all'esistenza, e alla distinz. in un num. finito di classi, delle curve di gen. p incontranti quelle rette in n punti variabili e con $\nu = 2(n + p - 1)$ rette di diramaz. date ad arbitrio (tangenti e rette che vanno alle cuspidi). [191]

Infine rileviamo ancora un importante risultato che recentemente s'è dedotto dalla teoria di Riemann. S'è dimostrato che qualunque ente algebr^o cioè la sup. che lo rappresenta si può riferire univocam. nel senso // solito (conformemente) ad un poligono curvilineo piano (o sferico), i cui lati sono fra loro accoppiati (v. pag. 160), sì da dare una sup. idealmente chiusa di gen. p . Introducendo la variab. complessa z al modo solito nel piano, abbiamo che le funzⁱ raz^{li} dell'ente son funzⁱ anal^e uniformi di z , definite però solo nell'interno di quel poligono. Ma si può fare che i punti omologhi dei dati lati corrispondⁱ si corrispondano per una trasformat. lineare di z : allora un principio anal^o, quello del proseguimento delle funzⁱ analitiche, fa sì che per estendere quella funz. al di là di un lato si deve ammettere che si trasformi in se stessa per quella sostituz. lin. Così continuando, perché quella funz. sia univoca e definita in tutto il piano si vede che deve ammettere un gruppo infinito (discontinuo) di sostituzⁱ lineari. // Casi di $p = 0$ (funzⁱ raz^{li}), $p = 1$ (funzⁱ ellittiche biperiodiche). In generale si ha un sistema di funzⁱ del Poincaré^{lxxxi}, Fuchsiane o Kleiniane: esse danno in funzⁱ anal. uniformi di un param. tutte le funzⁱ raz^{li} dell'ente, ciò che con le funzⁱ Abelianne per $p > 1$ non si poteva fare. // [192]

Cap. 10°. I moduli. Le serie lineari sugli enti generali

[194]

La questione della possibilità di corrisp. univoche fra due enti algebrici. - Fra parentesi si osservi che una corrisp. univoca *analitica* fra due enti (∞^1) algebrⁱ è certo *algebrica*, poiché produce una corrisp. univoca conforme fra le due superf.

^{lxxxi}Jules Henri Poincaré (Nancy 1854 - Parigi 1912).

immagini e mediante questa le funzⁱ raz^{li} dell'un ente son funzⁱ raz^{li} dell'altro (funzⁱ univoche e continue sulla sup. a meno di poli). - Se vi sono più corrisp. univoche fra i due enti, vuol dire che ve ne sono altrettante sull'uno; e viceversa.

Caso del genere 0, non vi son moduli, e ∞^3 corrisp^e univoche. Caso del genere
[195] 1: un modulo (pag. 100), e ∞^1 corrisp. univoche, // di cui due restano individuate quando, dati 2 pⁱ omolⁱ, nelle g_2^1 che li hanno per elemⁱ doppi si dia la corrisp^a proj^a che fa corrispondere anche gli altri elemⁱ diramⁱ, sicché due dati elemⁱ sono omologhi in 2,4,6 ecc..

Se $p > 1$ vi sono su 1 ente di gen. p degli elemⁱ *particolari*, a cui si può ricorrere per la questione: ad es^o elemⁱ p -pli per g_p^1 ; cioè sulla curva canonica punti singolari, d'iperosculatione⁵⁰. Per un tal p^o sia m il minimo numero tale che esista una g_m^1 di cui esso sia m -plo: allora vi sarà una sola g_m^1 siffatta, altrimenti se vi fosse una g_m^2 , il resto di quel p. in questa sarebbe una g_{m-1}^1 di cui quel p. sarebbe $(m-1)$ -plo. Insomma vi sia un S_{m-2} iperosculatore (cioè con contatto m -punto) e non uno spazio
[196] infer^e; cioè m sia il 1^o numero non mancante nel // Lückensatz di Weierstrass (pag. 156). La g_m^1 determinata da quell'elem. m -plo avrà in tutto $2(m+p-1)$ elemⁱ diram^e: al più in uno ne posson coincidere $m-1$, come appunto in quello; ma $m \leq p$ e quindi $p > m-1$, sicché $2(m+p-1) > 4(m-1)$, e vi sono più di 4 elemⁱ di diramaz. *distinti*. Ciò posto se fra due enti, distinti o no, γ_p, γ_p^1 vi è una corrisp^a univoca alla g_m^1 di γ deve corrisp. un'analogia g_m^1 di γ^1 ed agli elemⁱ di diram. gli elemⁱ di diram., sicché essendo quelli distinti più di due, le proiettività possibⁱ fra le due g_m^1 sono in numero finito. Quando poi è fissata la proj^a fra le due g_m^1 le corrisp^e univoche possibili sono pure in num. finito: ciò risulta ad es^o da ciò che il num. delle coppie di elemⁱ omolⁱ comuni a due corrispondenze è necessariam. finito (e
[197] // $\leq 2p+2$). Dunque fra due enti di gen. $p > 1$ o sopra un ente $p > 1$ non vi può essere che un numero finito di corrisp. univoche. È di Schwarz (Crelle 87, 1875)^{lxxxii} il teor. che un ente di gen. $p > 1$ non può ammettere un'infinità continua (analitica)

⁵⁰Dalla formula pag. 88 per $r = p-1, n = 2p-2$ si ha che tali elemⁱ sono $(p-1)p(p+1)$.
^{lxxxii}SCHWARZ, H. A. 1879, *Über diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Größen, welche eine Schaar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen*, Jour. für die reine und angewandte Math., 87, pp. 139-145.

di corrisp^e univoche. Che non possa neppure ammettere un'infinità discreta fu poi provato dal Klein (in una lettera dell'82 al Poincaré: v. la dimostraz. di quest'ultimo nella Nota Sur un théorème de M. Fuchs Acta math. VII, 1884, p. 1-32; v. pag. 16^{lxxxiii}); ma la 2^a dimostraz. che Nöther (Math. Ann. 21 p. 138 1882)^{lxxxiv} dava del teor. di Schwarz vale pure se la serie infinita è discontinua: su essa è ricalcata quella ora esposta. - Segue in partic. che ogni corrispondenza univoca sopra un ente $p > 1$ è periodica. V. anche la Nota di Hurwitz sulle corrisp^e univoche Math. Ann. 32^{lxxxv} e quella dei Math. Ann. 41 p. 403 (1892)^{lxxxvi}. //

Segue anche subito il num. dei moduli. Dei $2(m + p - 1)$ elemⁱ diram. della g_m^1 [198] abbiamo $m - 1$ coincⁱ; dunque in tutto $2p + m$; e però $2p + m - 3$ birapporti. Dati questi ad arb^o è determ. in un num. finito di modi la classe di enti (pel teor. pag. 190-1): sicché quelli sono i moduli. Nel caso generale $m = p$, e però $3p - 3$ moduli. Nel caso partic^e $m = 2$ l'ente è iperell^o e si ritrova il num. $2p - 1$ di moduli.

Il num. $3p - 3$ di moduli ($p > 1$) è dovuto a Riemann, che lo ottiene come segue (n. 12). Sopra un dato ente il num. delle costanti da cui dipende una funz. raz^{le} di grado $n > 2p - 2$ è $2n - p + 1$, mentre sono $2(n + p - 1)$ i valori di z di diram^e per quella funz. Ammesso che questi valⁱ di diram. siano funzⁱ indepⁱ di quelle $2n - p + 1$ costⁱ, // si potrà disporre di queste in modo che altrettanti di quelli assumano [199] valori fissati ad arbitrio, ed allora saran determⁱ i rimanenti $3p - 3$. Viceversa se oltre a quei valⁱ fissi si prendono questi $3p - 3$ ad arbitrio esiste una classe di enti con funzⁱ raz^{li} aventi quei pⁱ diram. Onde $3p - 3$ moduli. - Ma volendo assicurarsi di quanto sopra si è ammesso si hanno difficoltà, e per toglierle Riemann ricorre poi, invece che alle funzⁱ raz^{li} dell'ente, agl'integrali di 1^a specie. - Se $p = 0, 1$ alle ∞^ρ trasformaz. univoche ($\rho = 3, 1$) corrisponde il fatto che sono ∞^ρ le funzⁱ raz^{li} cogli stessi valⁱ z di diram.; quelle con valⁱ distinti rimangono $\infty^{2n-p+1-\rho}$, e fissati $2n - p + 1 - \rho$ valⁱ diram^e di z ne rimangono $3p - 1 + \rho$. Quindi per $p = 0, 1$ si

^{lxxxiii} POINCARÉ, H. 1885, Sur un théorème de M. Fuchs, Acta Math. 7, pp.1-32.

^{lxxxiv} NÖTHER, M. 1883, Nachtrag zur "Note über die algebraischen Curven mit einer Schaar eindeutiger Transformationen in sich", Math. Annalen, 21, pp. 138-140.

^{lxxxv} HURWITZ, A. 1888, Über diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen, Math. Annalen, 32, pp. 290-308.

^{lxxxvi} HURWITZ, A. 1892, Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich, Math. Annalen, 41, pp. 403-442.

[200] hanno risp. $0,1 \bmod .^o$ (v. anche l'opuscolo di Klein p. 65). - Natural//mente in tutto il ragionam^o di Riemann in luogo della funz. raz^{le} si può parlare di g_n^1 e in luogo di valⁱ, di birapporti.

I risultati precedⁱ danno (op^o di Klein) notevoli proposizⁱ sulle *rappresⁱ conformi delle superf. chiuse*. Due sup. $p = 0$ si posson sempre riferire univoc. conform^e sì che a 3 dati pⁱ corrisp^o 3 dati pⁱ; due sup. $p = 1$ solo se ...; e per $p > 1$ si hanno $6p - 6$ costⁱ reali (i $3p - 3$ moduli complⁱ) da cui dipende la *classe* di sup. Sulle sup. $p = 0, 1$ vi sono infinite rappresⁱ conformi di 1^a specie (cioè che non mutano il segno agli angoli); sulle sup. $p > 1$ non ve ne può essere che un num. finito.

Infine rivolgiamoci alla questione delle serie lineari g_n^r esistenti sopra un ente di gen. p . // Basta determinare le serie complete. Quelle non speciali ($n > p$, $r = n - p$) son determ. da un gruppo qual. di n elemⁱ, di cui $r = n - p$ fissi e i rimanⁱ p variabⁱ ad arbitrio; onde sono ∞^p per ogni n . Quelle speciali si compongono di gruppi di n pⁱ $x^1 \dots x^n$ sulla curva piana $f_m(x) = 0$ che impongono solo $n - r$ condizⁱ alle φ_{m-3} aggr^{te}, cioè $\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_p \varphi_p = 0$; sicché per un tal gruppo, oltre alle $f(x^1) = 0, \dots, f(x^n) = 0$, devono le equⁱ

$$\lambda_1 \varphi_1(x^1) + \dots + \lambda_p \varphi_p(x^1) = 0$$

...

$$\lambda_1 \varphi_1(x^n) + \dots + \lambda_p \varphi_p(x^n) = 0$$

ridursi a sole $n - r$, cioè nella matrice $\begin{bmatrix} \varphi_1(x^1) & \dots & \varphi_p(x^1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x^n) & \dots & \varphi_p(x^n) \end{bmatrix}$ devono annullarsi tutti i determⁱ d'ord. $n - r + 1$, ed in partic^e

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(x^1) & \dots & \varphi_{n-r}(x^1) & \varphi_i(x^1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x^{n-r}) & \dots & \varphi_{n-2}(x^{n-r}) & \varphi_i(x^{n-r}) \\ \varphi_1(x^k) & \dots & \varphi_{n-r}(x^k) & \varphi_i(x^k) \end{bmatrix}$$

$i = n - r + 1, \dots, p; k = n - r + 1, \dots, n$. // In tutto sono $r(p - n + r)$ condizⁱ [202] indipⁱ (dal complesso delle loro soluzⁱ si devono però togliere delle soluzⁱ estranee) per gli n pⁱ; sicché tali gruppi sono in gener. $\infty^{n-r(p-n+r)}$. [Lo stesso si vede sulla curva canonica ove si tratta di determinare $n - r$ pⁱ tali che l' S_{n-r-1} che li congiunge la incontri in altri r pⁱ, il che importa $r(p - n + r - 1)$ condizⁱ, onde il num. $\infty^{n-r-r(p-n+r-1)}$]. Ciò posto le g_n^r saranno $\infty^{n-r-r(p-n+r)} = \infty^{(r+1)(n-r)-rp}$, ove

$$(1) \quad \begin{aligned} (r+1)(n-r) - rp &\geq 0 \\ n &\geq r + \frac{rp}{r+1}; \quad p \leq \frac{(r+1)(n-r)}{r}. \end{aligned}$$

Il num. $(r+1)(n-r) - rp$ dà la *dimens.* del sistema di tutte le g_n^r se i moduli son *general*i. Se son *special*i, il caso più generale è che sian complete⁵¹. Se non son *special*i le // g_n^r stanno in g_n^{n-p} e per ognuna di queste sono $\infty^{(r+1)(n-p-r)}$, sicché in [203] tutto $\infty^{p+(r+1)(n-p-r)} = \infty^{(r+1)(n-r)-rp}$. Allora la condiz. (1) è soddisfatta sempre, poiché $n - r \geq p$.

Se ne trae il num. delle γ_p^n di S_r ; perché abbian moduli generali deve aver luogo la (1); ed allora (v. pag. 63) al num. dei moduli e poi delle g_n^r vi sarà solo da aggiungere il num. delle collineazⁱ di S_r , sicché in tutto si avrà per *dimens.* di tutte le γ_p^n di una dato S_r

$$(2) \quad \begin{aligned} 3p - 3 + (r+1)(n-r) - rp + (r+1)^2 - 1 \\ = (r+1)n - (r-3)(p-1). \end{aligned}$$

Per $p = 0, 1$ in luogo di $3p - 3$ moduli si deve scrivere $3p - 3 + \rho$ (v. pag. 199), ma allora le ∞^ρ trasformazⁱ univoche dell'ente diminuiscono di ρ il num. d'inf. delle serie non equivalenti, che danno origine a curve distinte; sicché la formola (2) vale sempre. Per moduli /li particⁱ può accadere che senza la (1) esistano delle g_n^r, γ_p^n di [204] S_r : allora si trova che la *dimens.* di queste curve è ≥ 0 all'espress. (2). Per $r = 3$ si hanno $\infty^{4n} \gamma_p^n$ di S_3 ecc.

⁵¹Se la g_n^r sta in una $g_n^{r'}$, la *dimens*^e di tutte le g_n^r siffatte è $(r'+1)(n-r') - r'p + (r'-r)(r+1)$, che è $< (r+1)(n-r) - rp$ poiché $n - r' < p$.

La (1) da sull'ente generale le serie di minimo ord. n per una data dimens. r . Così per $r = 1$ abbiamo, se p è pari un num. finito di $g_{\frac{p}{2}+1}^1$, se p è impari $\infty^1 g_{\frac{p+3}{2}}^1$. Ciò fu già notato da Riemann, che ne profitta per ridurre l'equaz. $F(s, z) = 0$ ai minimi gradi risp. ad s, z (n. 13); v. pag. 96. Escluso $p = 2$ per cui si ha una sola g_2^1 , si può ricorrere a due g_n^1 minime. Anzi, siccome il num. delle coppie comuni a queste è (pag. 96) $(n-1)^2 - p$, ossia, a seconda che p è pari od impari, $\frac{p \cdot p - 4}{4}$ o $(\frac{p-1}{2})^2$, così esclusi i casi $p = 1, 2, 4$ si può profittare della coppia comune che
[205] sempre esiste in ogni // altro caso per ridurre la $F(\frac{n}{s}, \frac{n}{z}) = 0$ all'ordine $(2n-2)$, cioè p con due punti $(\frac{p}{2}-1)^{\text{pli}}$, oppure $p+1$ con due punti $(\frac{p-1}{2})^{\text{pli}}$. La g_n^1 minima coi suoi $2(n+p-1)$ ossia $3p$ se p è pari, $3p+1$ se p è impari, gruppi diram^e serve a ritrovare i $3p-3$ moduli come birappⁱ di quei gruppi (ove nel 2° caso fra le $\infty^1 g_n^1$ si scelga ad es. una con un elem^o diram. doppio).⁵²

Per $r = 2$ la (1) da $p \leq \frac{3(n-2)}{2}$, e quindi dicendo d il num. dei pⁱ doppi della γ_p^n piana $d = \frac{n-1 \cdot n-2}{2} - p \geq \frac{n-2 \cdot n-4}{2}$, cioè: perché una curva piana d'ord. n rappresenti un ente di moduli generali, deve avere almeno $\frac{n-2 \cdot n-4}{2}$ punti doppi. Si ha poi per g_n^2 minime $n = \frac{2p+6}{3}, \frac{2p+7}{3}, \frac{2p+8}{3}$, in num. finito, o ∞^1 , o ∞^2 . Questo sarà l'ordine
[206] minimo delle γ_p^n piane. // E poiché il num. degl'invarianti assoluti di una γ_p^n piana è $\frac{n \cdot n + 3}{2} - \frac{n-1 \cdot n-2}{2} + p - 8 = 3n + p - 9$, così si trae di nuovo il numero $3p-3$ di moduli.

Analogam. per ogni valor di r si ha dalla (1) qual è il minimo ord. n di g_n^r , cioè di una γ_p^n , per moduli generali. E la (1) mostra che queste serie minime o curve di minimo ord. son sempre speciali, tolti al più alcuni valori di p .

Va notato però che l'esistenza di g_n^r con la condizione (1) fu provata coll'enumeraz. delle costanti. Per assicurarsi della validità di questo ragionam^o ed anzi trovare il numero delle g_n^r minime nel caso estremo che sia finito, si può procedere come segue. Si consideri una C^{n+p} normale di gen. p di S_n . Un gruppo di una g_n^r dà
[207] un iperpiano S_{n-1} // con un resto di p punti, e se quella g_n^r è completa, per questi p punti passeranno precisamente ∞^r iperpiani (pag. 138), cioè un S_{n-r-1} . Trovare le

⁵²Se vi è una g_n^1 , ove $n < \frac{p}{2} + 1$, si avranno similmente $2n + 2p - 5$ moduli, cioè $p - 2n + 2$ di meno che in generale. Tante son dunque le condizioni per l'esistenza di g_n^1 .

serie speciali d'ord. n significa dunque trovare gli spazi p -secanti di quella C^{n+p} , e tante sono quelle serie in generale quanti sono questi spazi. Il Castelnuovo (v. pag. 66) seguì questo concetto, e come C^{n+p} di gen. p notò che si può prendere una C^n raz^{le} normale con p corde, e che allora gli S_{n-r-1} sono quelli secanti queste p rette. Quando $(r+1)(n-r) = rp$ il numero di tali spazi è in generale finito e, ponendo $r' = p - n + r - 1$, uguale a $\frac{2!3!\dots r!2!3!\dots r'!p!}{2!3!\dots (r+r'+1)!}$. Questo è dunque il numero delle g_n^r nel detto caso (Castelnuovo). - In casi particolari si può trovare altrimenti le serie lineari. Così per $p = 6$ supposto che veramente esista una g_4^1 , la residua sarà [208] una g_6^2 e però l'ente si rappresenterà con una sestica piana con 4 punti doppi. Un gruppo qual. di una g_6^2 su questa curva imporrà solo 4 condizⁱ alle cubiche pei 4 pⁱ doppi; onde tali cubiche saranno ∞^1 (e segheranno la g_4^1 residua): ma avendo 10 pⁱ comuni si spezzeranno in una conica ed una retta. Se è la retta che sta fissa, la g_6^2 è quella data dalle rette del piano; se no si hanno altre 4 g_6^2 date dalle coniche per i 3 pⁱ doppi: e così 5 g_4^1 . //

Indice

[209]

Cap. 1^o. *Preliminari* pag. 1-12

Coordinate ecc. 1. Curve piane, superficie, complessi, connessi 2. Generalità sulle varietà di enti geomⁱ, algebriche, razionali, lineari, 5. Sistemi lineari in generale 7. Casi speciali 11. -

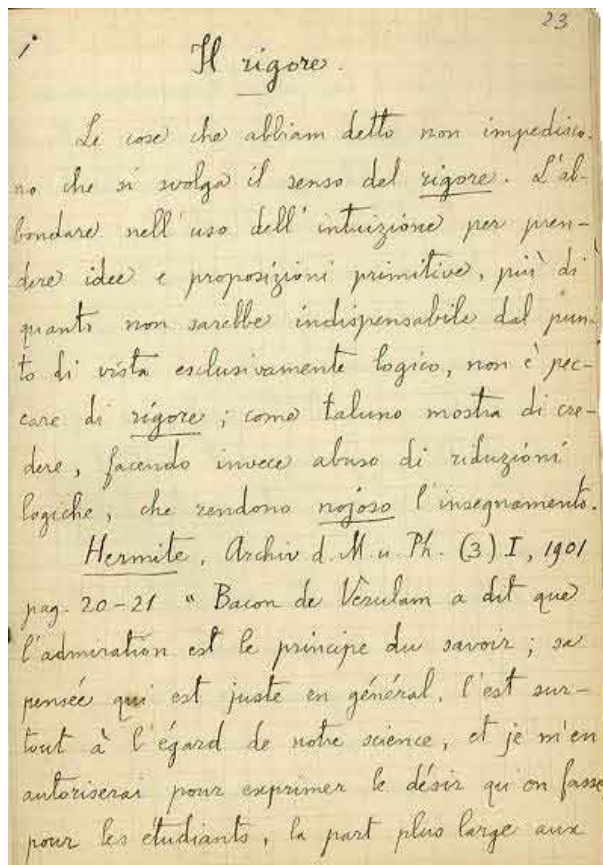
Cap. 2^o. *Degl'iperspazi* pag. 13-46

Nozione d'iperspazi e considerazioni in proposito 13. Spazi contenuti in S_r , loro intersezioni, iperpiani, ecc. 20. Proiettività fra due S_r , ecc. 25. - Varietà M_{r-1}^n di S_r e loro sistⁱ linⁱ 29. Varietà M_k $k < r - 1$, loro rappres^e, intersezⁱ ecc. 31. Curve, superf. ecc., elemⁱ tangⁱ 35. La C^n di S_n e gli enti generati da fasci projⁱ d'iperpiani 36. Applicazioni 39. Rappres^e iperspaziale di un sist^a lineare di varietà; varietà razionali; corrispondenze birazionali fra 2 spazi 41.

Cap. 3^o. *Oggetto della Geometria su una ∞^1 algebrica. Corrispond^e algebr^e. Serie lineari.* 47-68.

CORRADO SEGRE

*[Appunti relativi alle lezioni tenute per la
Scuola di Magistero]*



7. Pagina tratta da [Appunti relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero]
(BMP-Segre)

(Dal *Regolamento* delle Scuole di magistero 6 dicembre 1903)

Art. 1. Le scuole di magistero ... hanno per fine di rendere gli alunni esperti nell'arte d'insegnare le discipline filosofiche, letterarie e scientifiche nei licei, nei ginnasi, nelle scuole tecniche e normali e negl'istituti tecnici.

Art. 7. Le conferenze ... verseranno sul metodo da seguirsi nell'insegnamento delle singole materie, a norma e nei limiti dei programmi delle scuole secondarie.

(Dal *Regolamento* per la Facà di scienze ...)

Art. 1. La Facoltà di scienze ... ha per fine:

- a) di mantenere e di estendere la coltura scientifica della Nazione;
- b) di fornire gl'insegnamenti scientifici, oltre che ai propri studenti, anche a quelli delle altre Facoltà e Scuole speciali;
- c) di preparare gli studenti al conseguimento dei diplomi speciali d'insegnamento;
- //
- d) di abilitare all'ammissione alle Scuole d'applicazione per gl'ingegneri.

R. Decreto 24 nov. 1921, n. 1837 sulle lauree miste "... Gli studenti ... dovranno seguire un corso biennale di magistero di matematica e uno biennale di magistero di fisica, di 3 ore settimanali ciascuno, destinati a conferenze ed esercitazioni didattiche e metodologiche". //

La Matematica e l'esperienza

[1]

Per poter parlare del modo come si deve *insegnare* la matematica, dobbiamo premettere qualcosa su *ciò che è la matem^a*.

Le scienze tutte si servono di due strumenti: *l'esperienza* ed il *ragionamento*. Fra quelle in cui prevale il 2° sono anzitutto *la logica* e *le matematiche*.

La *logica* parte da alcune forme semplicissime di raziocinî (come sarebbe il sillogismo) in numero finito, e combinandole fra loro (anche con calcoli analoghi a quelli dell'algebra) ne trae altri raziocinî. I primi sono ammessi senz'altro; sono *assiomi* [2] (*postulati*), che hanno per noi un'evidenza assoluta. Gli altri avranno // lo stesso grado di sicurezza! In ogni particolare scienza deduttiva si prendono dall'esperienza certi *postulati*, e si combinano fra loro per mezzo della logica, dimostrando così delle nuove verità.

Le *matematiche* sono, dopo la logica, le scienze in cui il sistema dei postulati è meno ampio. Possiamo distinguerle, sebbene non nettamente, in *Analisi*, *Geometria* e *Fisica matematica* (incl^a la *Meccanica*).

In ognuna vi sono *idee primitive*, che non vengon definite; e *proposizioni primitive* (o *postulati*), che non vengon dimostrate. Vi è libertà di scelta, sotto certe condizioni.

Si le idee che le proposizioni primitive risultano dall'*esperienza*, congiunta // [3] coll'*astrazione*.

Così prendiamo l'*Analisi*: le sue basi son quelle dell'*Aritmetica*: ossia i *numeri interi*. Un concetto primitivo è appunto quello di numero intero. Ora adesso si giunge per astrazione, dal considerare delle collezioni di oggetti, per es^o di pensieri. Un altro concetto primitivo che si suol prendere è quello di 1; oppure di zero. Poi, quello di *successivo*. Si hanno allora pochi postulati estremamente evidenti, ed uno che ha un aspetto ed uno scopo molto diverso da quelli: il *principio d'induzione matematica*, che tiene il posto d'*infiniti sillogismi*, e quindi non può risultare da un numero finito di esperienze.

[4] In *Geometria*, e così in *Fisica*... si // deve ricorrere all'*astrazione* in grado ben maggiore. Si considerano *superficie*, *linee*, *punti* che non s'incontrano in natura! Si considerano *corpi solidi*, *invariabili*, *movimenti senza deformazione*: cose che non si hanno mai esattamente. S'introduce la *linea retta*, rappresentandola col filo a piombo, coi raggi luminosi, ecc.; i quali, se si tien conto delle attrazioni, delle rifrazioni, ecc. non possono avere esattamente quei caratteri che noi attribuiamo alla retta. Così pel *piano*. E in relaz. a ciò che si accennò dianzi s'introduce il concetto di *movimento* o di *uguaglianza*, per es. di segmenti *uguali*. - Tanto più questo lavoro di

esperienza e successiva astrazione occorre per stabilire i concetti da cui parte la fisica. Così si deve considerare ciascun fenomeno fisico // come isolato, senza tener [5] conto dei fenomeni concomitanti inevitabili (¹⁴) p. 47. Poi vi è il fatto essenziale che gli strumenti fisici, in particolare i nostri sensi, non sono mai *esatti*; sicchè i dati di partenza si avrebbero solo *per approssimazione*, mentre per la trattazione matematica si assumono *esatti*.¹ (12) p. 46 (15) p. 48.

Queste ultime parole si riferiscono anche alle proposizioni primitive o postulati della Fisica. In quelle della Geometria rileviamo pure *l'esperienza*² e *l'astrazione*. Così l'esperienza ci dà che per due punti passa un solo segmento rettilineo: ma le nostre esperienze portano solo in una *regione limitata di spazio*. Ammettere che quel fatto // valga in *tutto* lo spazio è cosa arbitraria: come se, sulla terra, dalle experien- [6] ze fatte in una regione limitata, secondo cui tra due punti passa una sola geodetica, si concludesse che lo stesso vale su tutta la terra: il che non è! - Così ancora si ammette spesso come dato sperimentale che *la retta è infinita*: cioè che se su una retta, in un dato verso, e a partire da un dato punto *A*, si porta un dato segmento un numero qualunque di volte, si otterranno sempre nuovi punti, non si ritornerà mai al punto di partenza *A*. Anche ciò non si giustifica pel campo che va al di là di quello a noi accessibile. - Infine citiamo *il post. V* (o assioma 11^o) *d'Euclide*³: "Se una retta, incontrando due altre rette [sottint. di uno stesso piano], fa con esse // da una [7] medesima parte angoli interni la cui somma sia minore di due retti, quelle due rette prolungate indefinitamente, si dovranno incontrare da quella parte da cui stanno gli angoli la cui somma è minore di due retti." Anche qui la verifica sperimentale sarà sempre limitata. E così se al postulato stesso si dà l'altra forma: dell'*unicità della parallela*; non potendosi coll'esperienza acquistar la sicurezza che due rette di un piano non s'incontrino mai. Oppure l'altra forma: che *la somma degli angoli di un triangolo rettilineo è due retti*. Nei triangoli finora misurati è infatti due retti nei limiti d'approssimaz. dati dagli strumenti di misura. Ma in triangoli maggiori? //

¹Parlando di dati *sperimentali*, anche per la Geometria, s'intenderà sempre *approssimativi*, appunto perchè l'esperienza non dà l'esattezza.

²In spazio non troppo grande nè troppo piccolo.

³Euclide (III secolo a. C.).

La Matematica in relaz^e colle applicazioni

[8]

Possiamo concepire, come diremo poi, una matematica che sia fine a se stessa; e possiamo invece badare alle applicazioni.

(Osserviamo di passaggio che quasi tutte le scienze tendono alla forma matematica. Dopo i fatti *qualitativi* si vogliono quelli *quantitativi*!)^{e 3}

Se si considera la matematica in relaz. colle applicazioni, si trovano *tre stadi* nel processo scientifico. 1^o si assumono dal mondo esterno i dati, di concetti e di proposizioni, sotto forma matematica; e forma matematica si dà al problema. 2^o trattazione puramente matematica. 3^o traduzione dei risultati matematici sotto

[9] forma // adatta all'applicazione.

Un'illustrazione importante di ciò che si fa nel 1^o stadio si vede nei concetti primitivi della Geom^a enumerati a p. 4. In realtà il mondo esterno non ci presenta dei punti ma dei corpuscoli. I dati sperimentali si riferirebbero a questi, a nastri, ecc. Ma conviene *raffinare*, passare dal *concreto* all'*astratto*. Perché? Per *semplificare* la trattazione matematica. (16) p. 49. Così riguardo ai postulati geometrici pag. 6, 7. Noi troviamo ad es. che la somma degli angoli di un triangolo rettilineo è prossima a due retti ... come s'è detto: l'assumiamo esattamente uguale, per *semplificare*. Vediamo i pianeti muoversi come se si attraessero ... $\frac{kmm'}{r^v}$ ove $v = 2$ [10] approssimativam⁴, e // si ammette per semplicità che sia esattamente $v = 2$ (legge di Newtonⁱⁱ).

Quando poi si è al 3^o stadio, ritorno al mondo esterno, si deve tener conto delle ipotesi semplificatrici che si fecero, e della mancanza di esattezza nelle misurazioni pratiche, ecc. Ad esempio sarà inutile valersi dei risultati numerici irrazionali, bastando sempre in pratica i numeri razionali, e anche solo spingendone l'ap-

³Matem^a d'approssimaz^e, e Mat^a di *precisione* Klein [si tratta del matematico tedesco Felix Klein (Düsseldorf 1849 - Gottinga 1925)] cit. a p. 66. [si tratta dell'opera citata da Segre in bibliografia a p. 66: KLEIN, F. 1902, *Anwendung der Differential-und-Integralrechnung auf Geometrie*, Leipzig, Teubner].

⁴Secondo le più recenti misure, a meno di 0,00000004 Jahresb. D. M. V. 13, 1904 p. 146. [Si tratta di: SCHWARZSCHILD, K. 1904, *Die naturwissenschaftlichen Ergebnisse und Ziele der neueren Mechanik*, Jahresbericht der D. Math.-Vereinigung, 13, pp. 145-156].

ⁱⁱIsaac Newton (Woolsthorpe 1642 - Londra 1727).

prossimazione fino ad un certo punto, essendo inutile o privo di senso l'andare al di là. Se si è trattato del moto dei gravi nell'aria prescindendo dall'attrito e dalla resistenza dell'aria, bisognerà esser consci che i risultati varranno solo nel vuoto, o approssimat^e in gas molto rarefatti: v. ad es. la figura a p. 533 di // Klein- [11] Sommerfeldⁱⁱⁱ *Theorie des Kreisels*^{iv}, ove son segnate la traiettoria calcolata in tali ipotesi e quella osservata nell'aria. Così in tutta la Fisica teorica quando si trascura qualche fenomeno nel porre i problemi in equazione. - È pure pel 3^o stadio che si procede alla *discussione* dei risultati matematici, introducendo a seconda dei casi la condizione che i numeri trovati sian reali, o positivi, od interi, ecc.

La Matematica come scienza esclusivamente logica

La critica moderna,⁵ e in particolare quella di *Peano*^v e sua scuola, e quella di *Hilbert*^{vi} e sua scuola, colle relative costruzioni, han mostrato come si possa // svol- [12] gere la Matematica nel seguente modo, formale, o puramente logico-deduttivo. Si pensano una o più *classi* di oggetti (numeri; punti, rette, piani, ecc.), e delle *relazioni* fra essi (numero *successivo*, *appartenersi* di punto e retta, ecc.). Si ammettono certe proprietà di queste classi e relazioni: proposizioni primitive (due punti apparten- gono ad una retta, ecc.). Poi, con sole deduzioni logiche si costruisce l'edificio. Non importano i *nomi* che si danno alle classi: potrebbero anche prendersi fuori dei no- mi ordinari. Le interpretazioni possono essere diverse: come si vede nella legge di dualità. Non c'è più da occuparsi del mondo fisico.⁶ La differenza coll'indirizzo prima considerato appare ad es. nel modo come // viene esteso il concetto di *nu-* [13] *mero*. Nel 1^o indirizzo il numero *frazionario* si ha spezzando l'unità in parti; nel 2^o è

ⁱⁱⁱArnold Sommerfeld (Königsberg 1868 - Monaco 1951), fisico tedesco.

^{iv}KLEIN, F., SOMMERFELD, A. 1897-1910, *Über die Theorie des Kreisels*, Heft III (1903), Teubner, Leipzig.

⁵Weierstrass [si tratta del matematico Karl Weierstrass (Osterfeld, Münster, 1815 - Berlino 1897)], Grassmann [si tratta del matematico Hermann Grassmann (Stettino 1809 - ivi 1877)] *Lehrbuch der Arithmetik* 1861 [si tratta di: GRASSMANN, H. 1861, *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten*, Enslin, Berlin].

^vGiuseppe Peano (Cuneo 1858 - Torino 1932).

^{vi}David Hilbert (Königsberg 1862 - Gottinga 1943).

⁶Niente *figure!* *Aritmetizzazione* dell'Analisi.

invece una coppia di numeri interi, oppure un *operatore* su numeri interi, ecc. Nel 1° indirizzo il numero *irrazionale* trova la sua origine ad es. in Geometria, grazie alla continuità della retta, o a costruzioni di ipotenuse, ecc.; nel 2° si deve ricorrere a separazione dei numeri razionali, o a limite superiore di una classe di razionali, ecc. Così il 2° indirizzo apre senz'altro la porta alla geometria ad n dimensioni, alle geometrie non-euclidea, non-archimedeo, ecc., e a tante altre geometrie.

Diciamo subito che questo 2° indirizzo ha una grande importanza, anche filosofica. Esso ha messo bene in evidenza che cosa è la matematica pura; ed ha contribuito molto a porre il *rigore* in varie parti della matematica.

Ma, collo staccarsi dalla *realtà*, vi è il pericolo di finire con costruzioni, che pur essendo logiche, hanno troppa artificiosità, non possono avere importanza scientifica duratura. Si sa che tali edifici si possono moltiplicare: ma spesso non varrà la pena.

Scopo dell'insegnamento matematico nelle scuole secondarie.

[15] Consiste, non solo nel far acquistare // certe *cognizioni* che devono esser di dominio comune, ma anche nello *sviluppare certe facoltà della mente*: il *ragionamento* e la *intuizione*. (1) (p. 42)

Su questo dobbiam fermarci, per avvertire che non si deve bandire l'intuizione. Nell'insegnamento secondario, cioè in quello che non è esclusivo per i futuri matematici, non va considerata la Matematica come fine a se stessa (v. pag. 8). Essa deve nascere dal mondo esterno e poi a quello applicarsi. Quindi dev'essere in stretta connessione coll'*esperienza* e coll'*intuizione* (che significa lo scorgere una verità spontaneamente, senza ragionamenti e senza esperienze, ma è frutto d'incoscienti ragionamenti od esperienze).

[16] Anzi, si sa bene che il primo insegnamento matematico dev'essere essenzialmente sperimentale od intuitivo. Le menti dei ragazzetti non possono ancora lavorare a lungo colla logica!

A grado a grado si sale a ragionamenti che abbracciano più ampie teorie. Quando si è agli *ultimi anni* dell'insegnamento secondario i giovani possono vedere trattate le varie parti della Matematica elementare *razionalmente*, cioè partendo (come s'è detto a pag. 1 e seg.) da idee e proposizⁱ primitive, ed operando su esse colla logica.

Così s'imparerà non solo a *dimostrare* le verità già note, ma anche a fare le *sco-*
perte, a risolvere da sè i *problemi*: // il che spesso non si fa con sole trasformazioni [17]
logiche, ma esige anche l'intuizione!

L'intuizione e i postulati.

L'insegnamento secondario della matematica incontra gravi difficoltà. I giovani spesso non capiscono lo scopo, o non s'interessano.

Bisogna stare attenti ai concetti e proposizioni primitive. In un primo insegnamento non occorre enumerarli tutti! In un insegnamento più elevato si potrà anche rilevarli *man mano*. Ma bisognerà badare che sian tutti intuitivi. *Non si esiga l'indipendenza.*⁷ //

Fermiamoci anzitutto sulle *idee primitive*. Lo scolaro accetterà subito non solo [18]
quella del numero intero, ma anche quella di somma, poi di numero frazionario, e più avanti di numero irrazionale: il tutto traendolo dalla vita pratica o dall'intuizione: v. pag. 13. Definire al ragazzo con lungo discorso delle cose che egli crede già di conoscere è annojarlo. Si aspetti a fare questa riduzione nelle idee primitive quando egli sia più maturo e possa capirne lo scopo. Così, se passiamo alla geometria, si ammetta non solo il concetto di retta ma anche quello di piano. Stando al punto di vista esclusivamente logico si dovrebbe bandire nell'insegnamento ele//mentare la parola *linea* o *curva*, perchè non si hanno gli strumenti per definir- [19]
la. Ma ciò è assurdo! Si ammetta il concetto primitivo di *linea*. (11) p. 46. E così non si vieti al giovane di parlar di *lunghezza*⁸, di *area*, di *volume*, nozioni di cui egli ha

⁷V. anche *Leoni* [si tratta del matematico Carlo Leoni] pp. 220-221 [si tratta di: LEONI, C. 1915, *La matematica nel suo insegnamento primario e secondario*, Vallardi, Milano].

⁸Tangente.

dall'esperienza un concetto primitivo⁹: sebbene sian solo quei pochi che studieranno poi il calcolo integrale gli eletti che potranno ridurre quei concetti ad altri più semplici.

Veniamo ai *postulati*. Notiamo anzitutto che nelle trattazioni moderne se ne incontrano di quelli che son tanto ovvî da far stupire il giovane che meriti di prenderne nota. Così: un numero è uguale a se stesso; il successivo di un // numero è pure un numero. - Oppure (*Hilbert*,¹⁰ 1882. *Grundlagen der Geometrie* 1899^{vii}): Se A, B, C son tre punti di una retta, e B sta fra A e C , B starà pure fra C ed A . - Se A e C son due punti di una retta, vi è sempre sulla retta almeno un punto che sta fra A e C . - Se B sta fra A e C , C non sta fra A e B . - Ecc. Non può un ragazzo capire lo scopo di una serie di tali enunciati! Quando occorran nei ragionamenti, si adoperino senz'altro.

E d'altra parte il ragazzo non potrà immaginare l'utilità del *dimostrare* proposizioni, per lui evidenti, come queste: La somma di due numeri non muta se // al posto di uno di essi si mette un numero uguale. La somma di due numeri non è uguale ad uno dei due. Ogni numero diverso da zero è maggior di zero. Ecc. Oppure: Fra due punti di 1 retta ne stanno un numero illimitato. Due segmenti uguali ad un terzo sono uguali fra loro. Ecc. ecc. (*Sull'intuizione* v. p. 43).

Tutte le proposizioni che l'intera classe di scolari ritiene evidenti si potrebbero ammettere come postulati (tranne, se mai, nell'ultimo più alto insegnamento; e salvo ad avvertire che quelle proposizioni si posson dedurre le une dalle altre logicam^e). "Col dimostrare logicamente ciò che è evidente all'intuizione, si porta un doppio danno, perchè si scredita insieme il ragionamento, // di cui non è quello l'ufficio, e l'intuizione, di cui si disconosce l'immenso valore. Si ha un bel dire che l'intuizione può condurre all'errore; sarà; ma l'intuizione fornisce pure la principale, se non l'unica, guida alla scoperta della verità. Dovremo forse rinunciare alla

⁹Così Borel [si tratta del matematico Émile Borel (Saint-Affrique, Aveyron 1871 - Paris 1956)] assume *area* e *volume* come concetti primitivi [si tratta di: BOREL, É. 1905, *Géométrie*, Colin, Paris.].

¹⁰Da *Pasch* [si tratta del matematico Moritz Pasch (Breslavia 1843 - Bad Homburg vor der Höhe 1930).] *Vorlesungen ü. neuere Geometrie* [si tratta di: PASCH, M. 1882, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig.].

^{vii}HILBERT, D. 1899, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig.

verità per paura dell'errore?"¹¹ (Castelnuovo^{viii} cit^e p. 63^{ix}).

Notiamo poi che vi sono in Geometria delle teorie (Analysis situs, topologia, forma delle curve e superficie) in cui l'osservazione dà direttamente un gran numero di fatti, quantunque si sia ben lungi dal poter fissare un sistema semplice di postulati da cui gli altri fatti si traggano logicamente. //

Il rigore.

[23]

Le cose che abbiām detto non impediscono che si svolga il senso del *rigore*. L'abbandonare nell'uso dell'intuizione per prendere idee e proposizioni primitive, più di quanto non sarebbe indispensabile dal punto di vista esclusivamente logico, non è peccare di *rigore*; come taluno mostra di credere, facendo invece abuso di riduzioni logiche, che rendono *noioso* l'insegnamento.

Hermite^x, Archiv. d. M. u. Ph. (3) I, 1901 pag. 20-21^{xi} "Bacon de Verulam a dit que l'admiration est le principe du savoir; sa pensée qui est juste en général, l'est surtout à l'égard de notre science, et je m'en autoriserai pour exprimer le désir qu'on fasse, pour les étudiants, la part plus large aux // choses simples et belles [24] qu'à l'extrême riguer, aujourd'hui si en honneur, mais bien peu attrayante, souvent même fatigante, sans grand profit pour le commençant qui n'en peut comprendre l'intérêt." E poco oltre, dopo d'aver citato esempi di cose *interessanti* da insegnare, soggiunge: "Je pourrais invoquer bien d'autres exemples, à l'appui de la préférence, que je donnerais en principe et surtout au début à la science attrayante sur la riguer..."

Tutto ciò va inteso come s'è detto nella pag. preced. Bisogna evitar di *annojare*.

¹¹*Borel* (citaz. p. 63) per ragioni d'opportunità suggerisce di scegliere aritmetica e algebra per insegnam^o *logico*, e geometria per insegnam^o *intuitivo* [si tratta di: BOREL, É. 1907, *La logique et l'intuition en mathématiques*, Revue de métaph. et de morale, 15, pp. 273-283].

^{viii}Guido Castelnuovo (Venezia 1865 - Roma 1952).

^{ix}CASTELNUOVO, G. 1907, *Il valore didattico della Matematica e della Fisica*, Rivista di Scienza, 1, pp. 329-337.

^xCharles Hermite (Dieuze 1822 - Parigi 1901).

^{xi}HERMITE, CH. 1901, *Extrait d'une lettre à M. E. Jahnke*, Arch. der Math. und Physik, 3, 1, pp. 20-21.

Ma vi è luogo anche, per ragioni didattiche, a mancare veramente di rigore, a
[25] dare cioè in iscuola degli *abbozzi di ragionamento* invece, oppure prima dei // veri ragionamenti. Un tale abbozzo, o *dimostraz. non rigorosa*, potrà insegnare *in che modo si fanno le scoperte*, come si lavora coll'*intuizione*; oppure servirà a dare un'idea *più sintetica*, più facile a ricordare, della dimostrazione rigorosa che poi verrà esposta; oppure anche, per ragion di brevità, od altra ragione d'opportunità, si darà soltanto l'abbozzo di dimostraz. *Basta che si avvertano gli scolari* che la dimostraz. esposta è incompleta; e talvolta si mostri dov'è la lacuna. - Per esempio: l'area del cerchio, come limite di quella di un poligono regolare iscritto, risulterà subito espressa nel modo noto.

Al rigore perfetto in certe cose si può giungere *più avanti*. Può la gioventù
[26] pro//cedere *per gradi*, come l'umanità. v. pag. 40: *La riforma*

Sul metodo.

(2) a p. 42

Nell'insegnante ci vuole: *affetto* per gli scolari, *affetto* per la scienza, *abnegazione*. La *soddisfazione* dell'insegnante di esporre certe cose, o certi metodi, va postposta allo scopo (p. 14-15) (13) p. 47. Bisogna essere *istruito* per sapere che cosa occorrerà all'allievo di ciò che si va esponendo nel seguito dei suoi studi o nella vita; come pure per evitare certi errori, ecc: ma non per insegnare in scuola *tutto* ciò che si sa.

Non si esiga troppo dalla *memoria*: non è la cosa principale.

[27] (5) p. 44 Si cerchi di stimolare l'*attività* della // mente dello scolare, più che la *passività*. Al posto del tradizionale (e comodo!) metodo *sintetico*, si usi quando si può il metodo *analitico*: sicchè il giovane impari a *far da sè*. Lo si *interessi* coll'eccitare qualche volta la sua curiosità con una parola che gli faccia intravedere campi scientifici più ampî. Si soddisfi qualche volta la domanda di una dimostraz. che non si sarebbe data, ma che un giovane più intelligente possa capire. Pensare anche ai più intelligenti, non solo ai mediocri; e spinger quelli.

Ogni studio si deve porre a *interessare* i giovani. (4) p. 44. Perciò è molto utile far uso continuo dei *legami dell'Algebra colla Geometria*, e di queste colle altre scienze. Rappresentare i numeri su una retta si può fare prestissimo; e allora ogni iden//tità algebrica diventa una proposizione sui punti di una retta (come se ne [28] trovano anche in Euclide). La Fisica, l'Astronomia, ecc. forniscono formole o leggi, che opportunamente si riguarderanno come *equazioni*... (8) (p. 45).

Si sia precisi nel discorso, ma non *pedanti*. Si varino le nozioni e le figure (3) (pag. 44). Non accada che il giovane non sappia risolvere un'equaz. solo perchè l'incognita non si chiama x . O una dimostraz. geom^a, solo perchè è cambiata la disposiz^e della fig^a.

Si *colorisca* la trattazione, dando rilievo alle cose essenziali, mettendo in luce al principio o alla fine di una parte quale è stato il concetto che ha guidato, quale lo scopo, ecc. ecc.

I giovani si interessano alle verifiche sperimentali. Così, dopo di aver dimostrato // certi teorⁱ geometrici come il concorrere delle mediane e bisettrⁱ di un trian- [29] goli, il teor. dei triangolo omologici, quello sul lato dell'esagono regolare, si facciano verificare colla costruzione grafica.

Tali costruzⁱ grafiche serviranno a mettere in rilievo gli errori strumentali, e quindi la differenza tra l'*esattezza* teorica e l'*approssimazione* pratica.

Mentre non giova, anzi nuoce nell'insegnamento secondario l'eccedere nell'indirizzo logico-deduttivo moderno, può essere molto opportuno vivificare quell'insegnamento con certi concetti un po' moderni. Così è del concetto di *funzione*,¹² coi vari esempi che s'incontrano sì nella Matematica che nella Fisica. Gioverà il//lustrarlo con rappresentazioni *grafiche, diagrammi*, .. Così l'allievo s'interesserà [30] alla *curva* ($y = x^2$, $y = \sin x$, ...) che può sostituire una tavola di quadrati, o di seni, o di logaritmi. E così pure ad una che segni l'andamento della temperatura nel giorno, o il variare della mortalità nella città, ecc. - In Geometria potrà convenire di

¹²Klein dice che il concetto di funzione dev'essere come un fermento che influisca e invada tutto l'insegnam^o matem^o elem^e.

estendere le *corrispondenze* o *trasformazioni*¹³ da figure parziali (2 triangoli, 2 cerchi, ...), come una similitudine, omotetia, ecc. a tutto il piano o lo spazio. (6) (p.45).

Non si tenga sempre lo stesso metodo. Si tentino vari modi di trattaz^e: non ve n'è solo uno di buono! Ci si interesserà di più all'insegnamento, variandolo. //

Magistero[†]

Diagrammi, rappresentazioni geometriche varie. V. Pareto^{xii} "Manuale di economia politica."^{xiii} ne fa uso continuo. Si assumano come x y le quantità di certi beni economici X , Y possedute da una persona. Se per lui è *indifferente* possederne $(x_1 \ y_1)$, oppure $(x_2 \ y_2)$, ... il luogo di questi punti è una certa linea (*linea d'indifferenza*). Il piano è riempito di ∞^1 tali linee $f(xy) = C$. Se C è scelta in modo che cresca quando si passa a linee di maggior soddisfazione, C può assumersi come // misura dell'*ofelimità*. Assumendo poi C come 3^a coordin^a, si ha la rappresentazione topografica della superficie o monte dell'*ofelimità*. V. il libro^{xiv} di Amoroso^{xv}.

Si veda in Hugues^{xvi} "Geografia matematica"^{xvii} le applicazⁱ della geometria della sfera: p. 46 e segⁱ (successione di giorni e notti ecc.); p. 60-61 (spiegaz. delle stagioni); p. 106 e 120 trattaz. delle eclissi (tangenti comuni a 2 cerchi o sfere); ecc.

Gli attuali programmi assegnano alla 1^a cl^e ginnas^{le}, o tecnica, o di scuola comple^e quelle nozioni di geografia fisica. La trattazione matematica si può farla bene nel corso di Geometria. //

¹³Sull'importanza di queste v. anche p. 36.

^{xii}Vilfredo Pareto (Parigi 1848 - Céligny 1923), sociologo ed economista.

^{xiii}PARETO, V. 1906, *Manuale di economia politica*, Società Editrice Libreria, Milano.

^{xiv}AMOROSO, L. 1921,1923, *Lezioni di matematica finanziaria*, 2 voll., G. Majo, Napoli.

^{xv}Luigi Amoroso (Napoli 1886 - Roma 1965), matematico ed economista.

^{xvi}Luigi Hugues (Casale Monferrato 1836 - Casale Monferrato 1913) professore di geografia presso l'Università di Torino.

^{xvii}HUGUES, L. 1882, *Nozioni di geografia matematica*, Loescher, Torino.

[†]*Nota del curatore.* Questo paragrafo si trova su una pagina incollata fra le pagine 28 e 29 del Quaderno ed è numerata 41 e 42.

Sugli esercizi

[31]

(9) p. 45

Nel primissimo insegnamento matematico non si daranno dimostrazioni, ma *verifiche sperimentali*: v. Laisant^{xviii} "Initiation Mathématique" Hachette 1906^{xix}. Così, riguardo alla Geometria *sperimentale* (meglio, dice Vailati^{xx} cit^e p. 63^{xxi}, che *intuitiva*: chè non si tratta solo di cose evidenti all'intuizione), servirà molto la carta millimetrata; si useranno recipienti di cui si possa misurare la capacità, ecc.

Importante sarà in tutti i gradi dell'insegnamento geometrico il *disegno geom^o*, diretto dal prof. di mat^a. V. pag. 29: a cui si aggiunga l'esercizio di far ricopiare una figura in altra scala (figure simili).

Negli esercizi di problemi da risolvere // si abbia riguardo al *buon senso* che [32] deve aver presente l'allievo, non solo al *tecnicismo* delle operazioni. I *dati* dovranno dunque essere *verosimili*, affinché verosimili siano i risultati; e quindi si possa far colpa all'alunno di non essersi accorto di un errore dall'inverosomiglianza del risultato. Così Borel insiste sull'importanza da darsi agli *errori di virgola*. E raccomanda i problⁱ *numerici*.

I calcoli non sian troppo lunghi, non essendovi scopo a stancare la pazienza dei giovanetti.

Si abituino presto a tener conto delle approssimazioni; non prendano troppe cifre decimali nei risultati, ecc.

Non siano *schiavi del tecnicismo*, col voler applicare i metodi generali a // casi [33] che si trattano più presto direttamente.

Della *discussione* dei problemi si è già parlato (p. 11). Essa va fatta anche nelle figure geometriche. Non facendola s'incontrano dei paradossi, che possono, divertendo, mostrare la necessità di quelle cautele¹⁴ (come già s'è detto a p. 43).

^{xviii}Charles-Ange Laisant (Basse-Indre, Loira Inf., 1841 - Parigi 1920).

^{xix}LAISANT, CH.-A. 1906, *Initiation mathématique*, Hachette, Paris.

^{xx}Giovanni Vailati (Crema 1863 - Roma 1909).

^{xxi}VAILATI, G. 1907, *L'insegnamento della Matematica nel primo triennio della Scuola secondaria*, Boll. di Matematica, 6, pp. 137-146.

¹⁴Così Enriques [si tratta del matematico Federigo Enriques (Livorno 1871 - Roma 1946).] a p. 26 di "Questioni..." citato qui a p. 67 [si tratta di: ENRIQUES, F. 1900, *Questioni riguardanti la Geometria elementare*, Zanichelli, Bologna]. V. il cap. II di Ball [si tratta del matematico W. William Rouse Ball

Si abituino i giovani a parlare bene, esattamente (è uno dei meriti dell'insegnam^o matematico). V. in Reidt^{xxii} p. 62^{xxiii} vari esempi di mancanze.

Sui *giudizi dell'insegnante*, e in partic^e sul diverso valore degli errori, v. Leoni Cap. IV. //

[34] M. Simon^{xxiv} Didaktik u. Methodik... 1908^{xxv}

Pag. 60 "Die Forderung, dass der Schüler denken anschauen soll..."

Pag 84-85 "Entweder keine komplexen Zahlen, oder im Anschluss an die *Gleichungen 3 ten Grades*" [perchè il caso irriducibile obbliga ad introdurre i numeri complessi anche per problemi reali il che non avviene colle equazioni quadratiche].

Pag. 86 "Ein Kapitel der Arithmetik, das nirgends fehlen darf, ist die *Wahrscheinlichkeitsrechnung*" V. anche p. 101.

Pag. 88-89. La trattazione moderna dell'Aritmetica differisce dalla antica principalmente per due principii. 1^o) di non usare come *materiale* nichts als die Grundvorstellungen der Einheit, Vielheit und Allheit; und in *formeller* Hinsicht nichts als das allgemein logische Identitätsgesetz samt dessen unmittelbaren Folgerungen... 2^o) in der strengen Beobachtung der Regel, den Resultaten arithm. Operationen auf der einen Seite nie eine ausgedehntere Gültigkeit beizulegen, als sie nach den

[35] gemachten Voraussetzungen besitzen // können; auf der andern Seite sie aber auch nicht für spezieller zu halten, als sie ihrer Natur nach wirklich sind, und namentlich mehrdeutige Resultate nicht als eindeutige zu betrachten. - Subito dopo dice qualcosa che io modificarei così: bisogna *fixare bene che cosa s'intende* col simbolo $\sqrt{x}$, se il solo valor positivo od uno qualunque dei due valori (il che è più pericoloso).

Pag. 91 "Man wird die Schüler allmählich an Aufgaben gewöhnen, bei denen scheinbar eine Angabe fehlt..."

(Hampstead 1850 - Elmside 1925)] *Récréations et problèmes mathématiques etc.* cit. qui a pag. 76 [si tratta di: ROUSE BALL, W. 1898, *Récréations et problèmes mathématiques des temps anciens et modernes*, Hermann, Paris]. *Enr. Amaldi* [si tratta del matematico Amaldi Ugo (Verona 1875 - Roma 1957).] pp. 428-432 [si tratta di: ENRIQUES, F., AMALDI, U. 1903, *Elementi di geometria*, Zanichelli, Bologna].

^{xxii}Friedrich Reidt (Neukirchen 1834 - Hamm 1894), matematico tedesco, autore di varie opere concernenti l'insegnamento della matematica.

^{xxiii}REIDT, F. 1906, *Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen*, G. Grote, Berlin.

^{xxiv}Max Simon (Kolberg 1844 - Straßburg 1918), matematico, insegnante e storico della matematica tedesca.

^{xxv}SIMON, M. 1908, *Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik*, Beck, München.

Pag. 92 Significati (definizioni) di a^0 , a^1 .

Pag. 117 Dante^{xxvi}, Paradiso, canto 13^o, versi 101-102

“O se del¹⁵ mezzo cerchio far si puote

Triangol, sì ch’un retto non avesse.”

[Ma non è il caso di vedervi geometria non euclidea! Aggiungo dall’ultimo canto 33^o del Paradiso, terzina 45^a:

“Qual è il geometra che tutto s’affige

Per misurar lo cerchio, e non ritrova,

Pensando quel principio ond’egli indige;”

con che allude alla *quadratura*, o rettificazione...] //

Pag. 116 (da Study^{xxvii}) Per comprendere a fondo le parti, anche più elementari, [36] della *Geom^a euclidea*, occorre conoscere la *Geom^a non-euclidea*.

Pag. 116 L’esistenza di un *rettangolo* basta per concludere la verità della *geom^a euclidea*. Il *rettangolo* è la forma fondamentale della nostra intuizione (*Anschauung*), non il *triangolo*.

Pag. 120-1 Importanza della *simmetria assiale* nella Geom. elem.: p. e. pel triangolo isoscele, pel parallelogramma.

Pag. 121 Il concetto di *trasformaz^e* o *corrispond^a* ha per la Geometria la stessa importanza che il concetto equivalente di *funzione* ha per l’Aritmetica.

Pag. 179 in principio. Errore frequente di scambiare 0 ed 1.

Pag. 187 fine e segⁱ. Storia dei *segni* dell’Aritmetica e Algebra. //

^{xxvi}Dante Alighieri (Firenze 1265 - Ravenna 1321).

¹⁵Forse si deve leggere *nel*.

^{xxvii}Eduard Study (Coburg 1862 - Bonn 1930).

**Da Pascal^{xxviii} (1623-1662), *Pensées*,
“De l’art de persuader”^{xxix}:**

[37]

Regole per le definizioni.

1. Non imprendere a definire alcuna delle cose talmente cognite per se stesse, che non vi siano termini più chiari onde spiegarle.
2. Definire tutti i termini oscuri o equivoci.
3. Nella definizione dei termini impiegare solamente parole perfettamente cognite e già spiegate.

Regole per gli assiomi.

1. Non mettere alcuno dei principi fondamentali senza avere domandato se si accorda, per quanto sia chiaro ed evidente.

[38]

2. Non domandare come assiomi altro che // cose evidenti per se stesse.

Regole per le dimostrazioni.

1. Non imprendere la dimostrazione delle cose che sono talmente evidenti per se stesse, che non vi sia nulla più chiaro per provarle.
2. Provare tutte le proposizioni un poco oscure, e nella loro dimostrazione non impiegare altro che assiomi evidentissimi, o proposizioni già accordate o dimostrate.
3. Sostituire sempre mentalmente le definizioni al posto dei definiti, onde non ingannarsi coll’equivoco dei termini che le definizioni hanno ristretto.

Le prime regole di ciascuna parte possono trascurarsi senza errore.

- [39] Possono muoversi tre obiezioni principali. Una, che questo metodo non ha nulla di // nuovo, l’altra che è facilissimo ad impararsi, e infine che è abbastanza inutile, perchè il suo uso è quasi rinchiuso nelle sole materie geometriche.

^{xxviii} Blaise Pascal (Clermont, oggi Clermont-Ferrand, 1623 - Parigi 1662).

^{xxix} PASCAL, B. 1783, *Pensées de M. Pascal*, chez Nyon, Paris: *De l’art de persuader*, Supplement, Art. III, pp. 338-357.

Bisogna dunque far vedere che nulla è così sconosciuto, nulla più difficile a porre in pratica, e nulla è più utile e più universale. //

La riforma

[40]

Accostare l'insegnam^o della Matem^a alla *realtà*: questo il programma. - Prima è svolto in Francia: programmi del 1902 (riportati in Tannery^{xxx} *Notions de math*^{xxxi}). Klein dal 1900 in poi, in Germania. Programma di Merano del 1905, riprodotto alla fine del vol. Klein-Schimmack^{xxxii} (citato qui pag. 64)^{xxxiii}. Perry^{xxxiv} in Inghilterra. V. il discorso di Loria^{xxxv} "La scuola media e la sua attuale crisi di sviluppo", inaugur^e il congresso di Padova 1909 di "Mathesis"^{xxxvi} V. Marotte^{xxxvii} cit. qui p. 64^{xxxviii}.

V. i *diagrammi ferroviari* in Borel. V. i *programmi francesi* del 1902 (riforma) in // Tannery *Notions de mathém.*

[41]

Esempi dell'indirizzo logistico in confronto a quello realistico: dimostrazione di $ab = ba$ in Catania^{xxxix} *Aritmetica ed Algebra*^{xl}, e in Borel *Arithmétique*^{xli}.

Qualche notizia storica. //

^{xxx}Jules Tannery (Mantes-la-Jolie 1848 - Parigi 1910).

^{xxxi}TANNERY, J. 1903, *Notions de mathématiques, (avec) Notions historiques par P. Tannery*, Ch. Delagrave, Paris.

^{xxxii}Si tratta di *Der Meraner Lehrplau für Mathematik* (1905), che è riprodotto nel volume citato nella nota seguente alle pp. 208-220.

^{xxxiii}KLEIN, F.-SCHIMMACK, R. 1907, *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen Bearbeitet von R. Schimmack*, Teil I, Teubner, Leipzig.

^{xxxiv}John Perry (Garvagh, Irlanda, 1850 - Londra 1920), matematico e ingegnere, presidente della Physical Society di Londra, qui ricordato per aver elaborato un metodo di insegnamento noto come "practical mathematics".

^{xxxv}Gino Loria (Mantova 1862 - Genova 1954).

^{xxxvi}LORIA, G. 1909, *La scuola media e la sua attuale crisi di sviluppo*, Atti del II Congresso della Mathesis, Società Italiana di Matematica, Premiata Società cooperativa tipografica, Padova, pp. 12-29.

^{xxxvii}Francisque Marotte (Clermont-Ferrand 1873 - 1945), matematico e pedagogo, direttore della rivista *La Revue de l'Enseignement des Sciences*.

^{xxxviii}MAROTTE, F. 1905, *L'évolution actuelle de l'enseignement mathématique en Angleterre et en Allemagne*, Bull. Sci. Mat., 29, pp. 281-306.

^{xxxix}Sebastiano Catania (Catania 1853 - Catania 1946).

^{xl}CATANIA, S. 1910, *Trattato di aritmetica ed algebra ad uso degl'Istituti Tecnici*, N. Giannotta, Catania.

^{xli}BOREL, E. 1907, *Arithmétique*, Colin, Paris.

[42] ‡(1) (a p. 15) La Matematica insegna a ragionar bene; a non contentarsi di parole vacue; a trarre conseguenze dalle premesse; a riflettere e scoprire da sè; a giudicar giusto; a generalizzare, a lavorare di astrazione; a parlare con precisione. V. (6) p. 45.

(2) (p. 26) Qui metterei anzi tutto “*Doveri dell’insegnante*”, e passerei più avanti “*Sul metodo*”. I *doveri* sono quelli indicati a pag. 26, 27 prescindendo dal metodo; e inoltre: *Preparazione perfetta* alla lez^e. Non consultare libri o appunti, eccezion fatta per cose speciali, come date, ecc. *Non dettare*: usare un libro di testo. Procurare in ogni modo di *catturarsi l’attenzione* (v. pag. 27, 28). *Pazienza* cogli scolari; ripetere se non han capito; non scandalizzarsi per errori; cercar di persuadere gli scolari che tutti posson fare, che non occorre un’inclinazione speciale. Se una dimostraz^e presenta difficoltà, non è capita da un allievo, si potrà talvolta farlo passare oltre: dopo qualche tempo, magari un altro anno la capirà. - L’insegnante *disegni bene* (se occorre, con rira e compasso): le figure ben fatte attraggono di più lo scolaro, e gli servono anche d’esempio. E talvolta posson servire i gessi colorati, o le linee punteggiate. Segue nota (3) p. 44.//

[43] (Aggiunta a pag. 21) Riguardo all’esperienza ed *intuizione*, aggiungiamo che sono insufficienti a concepire taluni enti: come la curva senza tangenti, un segmento senza gli estremi, un segmento coi soli punti razionali, ecc.¹⁶

Riguardo ai postulati d’*ordinamento* (di cui esempi a pag. 20) si osservi col Klein (Elem. Mathem. II^{xlii}) che la loro mancanza in Euclide è un vero difetto. Essa rende possibili le dimostrazioni di vari *paradossi geometrici* (v. Klein, ivi) (e Enriques-Amaldi p. 379). //

[44] (3) (a p. 28) Un triangolo qual^e si faccia scaleno. Gli scolari han la tendenza

¹⁶V. anche in Borel “*L’espace et le temps*” p 121-124 [si tratta di: BOREL, E. 1922, *L’espace et le Temps*, Alcan, Paris.] un altro esempio dell’impossibilità d’*intuire* taluni enti.

^{xlii}KLEIN, F. 1909, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Teil II (Geometrie), Teubner, Leipzig.

‡Nota del curatore. Le pp. 42-49 contengono aggiunte di Segre alle pagine precedenti.

a preferire le orizzontali e verticali (fatto fisiologico). Si abituino a segnare triangoli, angoli retti ecc. senza tale particolarità. Un quadrangolo non sia un rettangolo. Due parallele non siano orizzontali. Ecc. Le figure non siano sempre disposte nello stesso modo.

(4) (p. 27). A ciò può anche servire l'inserzione di *notizie storiche*. Così talvolta può servire a riposare o ad attrarre qualcuna delle curiosità che si trovano nei libri di Matematica dilettevole, p. e. Gheresi^{xliii} ecc. Vedi (7).

(5) (p. 26) *Reidt* p. 32 e seg.ⁱ, contrappone: 1° nella *forma* dell'esposizione il metodo *espositivo* (dozierend) al metodo *euristico* (10) (*interrogativo*, al modo dei dialoghi di Socrate^{xliv}): v. esempio in *Reidt* p. 33 (v. anche qui a pag. 64 citaz. di un passo di Platone^{xlv}); 2° nelle dimostrazioni o soluz. di problemi il metodo *sintetico* e il metodo *analitico* (*Reidt* p. 37 e seg.ⁱ con esempio); 3° nello svolgimento delle singole teorie e nel loro collegamento, il metodo *euclideo* (o *dogmatico* e il metodo *genetico* (*Reidt* p. 42 e seg., con esempi, p. e. a p. 46). V. altri esempi in *Reidt* p. 48 e p. 53. La terna più efficace è: euristico - analitico - genetico; ma non sempre sarà conveniente, anche gli altri metodi han vantaggi. Sarà da alternare, // e da scegliere [45] secondo l'argomento, la scolaresca e il tempo disponibile. - Sul metodo *analitico* e *sintetico* v. anche Sannia^{xlvi} e D'Ovidio^{xlvii} *Elem.ⁱ di Geom.* I p. 128^{xlviii}.

(6) Come uno degli scopi dell'insegnamento deve essere l'abituare a *pensare funzionalmente*, così un altro sarà quello di *rafforzare l'intuizione spaziale*.¹⁷

Qui aggiungiamo: I ragazzi han tendenza a ritenere la proporzione diretta come l'unica legge possibile. Bisogna che le *funzioni* mostrino loro che così non è. Tendano a idee *general*i.

^{xliii}GHERSI, I. 1913, *Matematica dilettevole e curiosa. Problemi bizzarri, paradossi algebrici*, Hoepli, Milano.

^{xliv}Socrate (V sec. a. C.).

^{xlv}Platone (IV sec. a. C.).

^{xlvi}Achille Sannia (Campobasso 1823 - Napoli 1892).

^{xlvii}Enrico D'Ovidio (Campobasso 1843 - Torino 1933).

^{xlviii}SANNIA, A., D'OVIDIO, E. 1895, *Elementi di geometria*, B. Pellerano, Napoli (I ed. 1869).

¹⁷V. in Simon p. 182 "Kopfgeometrie". [si tratta di una sezione del libro SIMON, M. 1908, *Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik*, C. H. Back, München].

Un esempio dell'importanza che ha l'insegnamento della Matematica per imparare a ragionare è dato dalle *proposizioni inverse*. Non sempre è vera l'inversa di una proposizione^e: errore che accade di sentire nella vita comune. (Reidt p. 60 e seg.).

(7) Pare che i ragazzi s'interessino agli esercizi combinatori (Herbart^{xlix}). V. Leoni p. 126 (con citaz. di Capelli^l Boll di mat. del Conti^{li}, anno 5^o) e fine pag. 137.

(8) Sul coordinamento degl'insegnanti di Mat. e Fis. v. Leoni, cap^o 13^o.

[46] (9) A p. 31 *Sui libri di testo*. Un tale libro non // deve esser conciso, per modo che lo scolaro debba prendere appunti e svilupparli poi a casa diffusamente. Per quanto ciò possa costituire un utile esercizio, sarà tempo preso ad altro studio. Senza contare che lo scolaro facilmente sbaglia nei suoi appunti. V. Reidt p. 82-83.

(10) *Metodo euristico* di esposizione della scienza è quello che segue la via in cui le proposizioni sono state effettivamente trovate, o almeno avrebbero potuto esser trovate: cioè esposizione della scienza non com'è, ma come si è formata.

(11) Occorre nell'insegnamento della Fisica parlar di linee in generale, di tangente alla linea, di aree, di volumi. Occorrono parabole, ellissi, paraboloidi, ecc. L'insegnante di Matem^a deve tener conto di ciò. Non definizioni rigorose, ma schiarimenti, quando la definizione (di linea, o area, ...) sarebbe troppo difficile.

(12) In Fisica ciò che si trae con ragionamento dalle ipotesi, o teorie, o postulati, si sottopone ogni volta che si può al controllo dell'esperienza. In Matematica ciò non occorre di regola, perchè i postulati hanno un tal carattere di evidenza da dar quasi la certezza. - Qui si noti che questa perfetta sicurezza del ragionamento matematico

^{xlix}Johann Friedrich Herbart (Oldenburg 1776 - Gottinga 1841), filosofo e pedagogista tedesco.

^lAlfredo Capelli (Milano 1855 - Napoli 1910).

^{li}Alberto Conti (Firenze 1873 - Firenze 1940).

è in contrasto con ciò che accade coi ragionamⁱ // della vita comune, e delle al- [47]
tre materie di studio nelle scuole. Lì non si hanno ipotesi sicure, o precise: o vi è
un po' d'indeterminatezza nei dati, o sono fatti solo probabili; le deduzioni se ne
risentono; e potrebbero anche essere errate. Sicchè van sempre confrontate colla
realtà, come in Fisica. Perciò un'educazione esclusivamente matematica è incom-
pleta; il ragazzo non deve credere che il ragionamento matematico sia *il solo*.

(13) Si danno certe dimostrazⁱ invece di altre più semplici o più istruttive, per
ragione di *metodo* (purezza): cioè per non servirsi di questo o quello strumento,
come le parallele, o le proporzioni, o la teoria dell'equivalenza. *Sono cose inutili, che
gli scolari non possono apprezzare*, ancora. Si badi solo a interessare e a facilitare.

Così è della purezza del metodo geom^o, che consiste nell'evitare l'uso dell'a-
ritmetica. - Per es^o il postulato della *continuità della retta* adoperato in Enriques-
Amaldi Geometria (p. 356 n. 573) è l'equivalente dell'introduz. dei numeri irraz^{li}
(cfr. ivi p.389-390).

(14) P. e. moto dei gravi prescindendo dall'attrito, dalla resistenza dell'aria. //

(15) L'esperienza dà *approssimaz^e*, non *precisione*. Così per le *lunghezze* gli stru- [48]
menti più perfetti permettono di apprezzare fino all'ordine di grandezza dei di-
ametri degli atomi, $\frac{1}{10}$ di millimicron, $\frac{1}{10}\mu\mu$ in metri 10^{-10} . Così nelle misurazioni
in metri possiamo apprezzare fino alla 10^a cifra decimale. L'11^a cifra e segⁱ non
hanno più senso. - E poichè le altre misure si riducono a lunghezze, possiam dire
che la Matem^a del mondo reale, come la Fisica, lavora solo con numeri *approssimati*.
Si può andare solo fino a una certa cifra. Bastano i *numeri razionali*.

In quest'ord^e d'idee della *realtà*¹⁸, il *punto* diventa un *corpo*, una *linea* un nastro
d'estrema sottigliezza. Non diciamo più che 2 pⁱ individuano una retta: la deter-

¹⁸M. Pasch Vorl. ü neuere Geom. 1882. Klein Anwendang... cit. a p. 66. J. Hjelmslev [si tratta del
matematico danese Johannes Hjelmslev (Hornung 1873 - Copenhagen 1950)] Die Geometrie der Wirk-
lichkeit. Acta m. 40 1915-16 p. 35 [si tratta di: HJELMSLEV, J. 1916, *Die Geometrie des Wirklichkeit*, Acta
mathematica, 40, pp. 35-60].

minano con tanta maggior precisione quanto più son discosti (il segmento, non i prolungamenti). Due rette che s'incontrino determinano il loro p^o com'è tanto meglio quanto maggiore è il loro angolo acuto: se questo è piccolo, l'indeterminaz^e è grande. - E così, proseguendo, una linea *pratica* si compone, in più modi, di segmenti rettilinei. La semitg a destra in P è quella // retta che ha comune colla curva a partir da P il più lungo segmento (Hjelmslev). Ecc.

(16) Così l'ammettere che un punto abbia dimensioni crea una *zona d'indecisione* che non si ha più col punto ideale. È più semplice ammettere che 2 punti individuano una retta, anzi che pensare un pennello sottilissimo di rette pei 2 p^i . Ecc.
//

Trattati generali[§]

[61]

(v. anche pag. 63 e seguenti)

[K.] Schwab - [O.] Lesser Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Lehranstalten 1909 e seg. (secondo il programma di Merano)

[C.] Färber, [E.] Netto, [Fr.] Meyer, [H.] Thieme Grundlehren der Mathematik 1909 e seg.ⁱ (Arithmetik von Färber 1911; Geometrie I von Thieme 1909, molto criticata da S. Medici nel Bollettino di Loria 14, 1912 p. 51)

[O.] Behrendsen u. [E.] Götting Lehrbuch d. Mathem. für höhere Mädchen-Bildungsanstalten. Teubner 1911.

P. Broux Les principes de l'Analyse mathém. [incl. la geom^a] Exposé historique et critique [i fatti, poche dimⁱ; molte notizie storiche]. Tome 1^{er} Hermann 1914; 2^e 1919. C II 182

[H.] Weber - [J.] Wellstein Encykl. p. 113

J. Tannery p. 79* //

Bibliografia sulla Didattica

[63]

C. A. Laisant La Mathématique. Philosophie. Enseignement. Paris, Carré et Naud, 1898. C IV 196

L. Liard Des définitions géométriques et des définitions empiriques Paris, nouv. éd., Alcan 1888

[§]Nota del curatore. Le opere e gli articoli segnalati da Segre in questa bibliografia ragionata, in genere, sono facilmente identificabili poichè le citazioni bibliografiche da lui inserite, per quanto non complete, contengono i dati essenziali. Nei casi in cui ciò non accade le integrazioni sono poste fra parentesi quadre direttamente nel testo. Le sigle presenti al termine di alcune opere indicano la collocazione nella Biblioteca matematica torinese, all'epoca di Segre.

*Nota del curatore. L'indicazione bibliografica completa si trova alle pagine di questo quaderno indicate da Segre.

[H.] Poincaré¹⁹ La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. L'ens. math. t. I 1899 p. 15

[H.] Poincaré Les définitions générales en mathématiques. L'enseign. math t. VI, 1904 p. 257 ("Science et methode" p. 123)

[G.] Castelnuovo Il valore didattico della Matematica e della Fisica. Rivista di Scienza I 1907 p. 329

E. Borel La logique et l'intuition en mathématiques Revue de métaph. et de morale 15, 1907 p. 273

G. Vailati L'insegnamento della Matem^a nel 1^o triennio della Scuola secondaria. Boll. di mat^a VI, 1907 p. 137

[Ch. - A.] Laisant Initiation mathématique, Hachette 1906 C VI 178

[F.] Klein u. [E.] Riecke Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Teubner 1904

[J. - M.] Duhamel Des méthodes dans les sciences de raisonnement. 4 vol^s. 1865-68 //

[64] M. Simon Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik, 2^e Aufl. München 1908

E. Borel Les exercices pratiques de math. dans l'enseignement secondaire. Revue gén. des sciences 15, 1904 p. 431 (v. anche [M.] Ascoli ivi p. 496)

H. Schubert Auslese aus meiner Unterrichts-und Vorlesungspraxis 1905 ... C VI 168 [Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, 1905-1906.]

F. Marotte L'évolution actuelle de l'enseignement mathématique en Angleterre et en Allemagne Bull. s. m. t. 29, 1905 p. 281 - 306

¹⁹Vari artici di Poincaré in "Science et méthode" M VI 37, "La science et l'hypothèse" C V 188, "La valeur de la Science" C VI 165, "Dernières pensées" C VI 301.

J. Hadamard Réflexions sur la méthode heuristique. Revue générale des sciences 16, 1905 p. 499-504

Platone Passo del "Menone" riportato da Loria "Le scienze esatte..." Libro I (pre-Euclide) p.109 - 110. (Propedeutica geometrica) 2^a ed^e (man. Hoepli) 1914 p. 115 M VI 88

F. Klein Vorträge ü. den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Bearbeitet von *R. Schimmack*. Teil I Teubner 1907

F. Klein Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus. Teil I Vorles. 1907-1908 (Arithmetik, Algebra, Analysis). Teil II 1908 (Geometrie) C V 244

F. Reidt Anleitung zum mathematischen Unterricht 1886; 2^e Auflage (da H. Schotten) 1906 [Berlin, G. Grote] //

K. Schwering Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer. Teubner 1907 [65]

R. Schimmack U. die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen. Zeitschr. f.m.u.n. Unterricht 39 (1908) p. 513 - 527 e biblioteca

R. Bettazzi La risoluzione dei problemi numerici e geometrici, Paravia 1893

E. Bisson-Minio Errori ed inesattezze più comuni di Aritmetica e Geometria Belluno 1908

W. Lietzmann Stoff und Methode in mathematischen Unterricht der Norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher. Teubner 1909

W. Killing u. H. Hovestadt Handbuch des mathematischen Unterrichts Teubner 1910 1^{er} Bd. Geometrie. (molto utile), 1913 2^{er} Bd. C IV 268

O. Lesser Die Entwicklung des Funktionsbegriffes und die Pflege des funktionalen Denkens in Mathematikunterricht unser höheren Schulen Frankfurt a M. [Gebrüder Knauer] 1907 (Op^{li} M. 173)

Sulla riforma v. nel vol. 3^o degli Atti del 4^o Congr^o intern^{le} dei Matemⁱ (Roma 1908, pubblicato nel 1909) le comunicazⁱ di [A.] Gutzmer p. 441, [C.] Godfrey (Inghilterra) p. 449, [D. E.] Smith (Amer^a) 465, [R.] Suppantshitsch (Austria) p. 478, [G.] Vailati p. 482, [H.] Fehr (Svizzera) 500, [E.] Beke (Ungheria) 530. - [F. S.] Archenhold p. 510 //

- [66] A. Höfler Didaktik des mathematischen Unterrichts Teubner 1910 (buono) M III 47

H. Fehr La notion de fonction dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes. L'enseign. math. 7 1905 p. 178

Abhandlungen ü. den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die internationale mathematische Unterrichtskommission, herausgegeben von F. Klein. 1909 e segⁱ [Berlin, Leipzig, Teubner]

Abhandlungen ü. die Reform des mathem. Unterrichts in Ungarn 1901 [Leipzig, Teubner]

Klein Anwendung d. Diff - u. Integralrechnung auf geometrie, eine Revision der Principien. Vorles. 1901 (Leipzig 1902)

Atti della Sottocommissione italiana per l'insegnamento matematico. Nel Bollettino della Mathesis Anno III 1911 [Supplemento, pp. 1-23, 25-80]

Rapports de la Commission internationale de l'enseignement mathématique. Sous-Commission française. Paris, Hachette 1911

The Teaching of Mathematics in the United Kingdom (2 volⁱ 1912) [London, H. Stationery Off.] //

- [67] L'enseignement mathématique en Suisse (Rapports de la Sous-Commission Suisse) 1912

J. Jacob Praktische Methodik des mathem. Unterrichts. Wien 1913

Calcolo infin^{le} nelle scuole medie: rapporti. Pubblicati in *L'enseignement math.* 16, 1914 p. 245

C. Leoni La Matem^a nel suo insegnam^o primario e secondario 1915 C V 337

R. Bettazzi I problⁱ di Aritmetica pratica [Paravia Torino, 1900]

Discussione dei problemi (geomⁱ) nelle Lezioni di [G.] Frattini C II 157 p. 36

Lacroix S.F. Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier 1805 B' 208

J.W. Young I concetti fondamentali dell'Algebra e della Geometria 1911 (vers^e ital^a 1919) C V 273, C VI 382

Norme riguardanti l'insegnam^o delle materie di cultura gener^e nelle Scuole medie. Boll. uff. [della Pubblica Istruzione] 23 Ott. 1919 p. 1651.

G. Mannoury Methodologisches u. Philosophisches zur Elementar-Mathematik (Haarlem 1909) M V 60

C. Ciamberlini Saggi di Didattica matem^a [Paravia Torino, 1920]

G. Furlani Rapporti fra la mat^a e la fis^a ecc. Boll. di Mat. [Il Bollettino di Matematica] 16 (1919) p.120

A. Bemporad L'Astronomia nelle scuole medie. Per^o di M. [Periodico di matematiche] (4) 2 1922 pag. 261 //

A. De Morgan On the Study and Difficulties of Mathematics [Chicago, 1910] [68]

W. Dieck Stoffwahl u. Lehrkunst in math. Unterricht [Leipzig, 1918]

W. Birkemeier U. den Bildungswert der Mathem. 1923

W. Lietzmann Methodik des math. Unterrichts 2^{er} Teil 2^r Aufl. 1923. //

Didattica algebrica

[71]

M. Simon Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischen Analysis Teubner 1906

[H.] Weber - [J.] Wellstein Encyklopädie der Elementarmath C III 155

J. Houel Considérations élémentaires sur la généralisation successive de l'idée de quantité dans l'Analyse mathématique. Suivi de Remarques sur l'enseignement de la Trigonométrie. Paris 1883

H. Schubert[†]

S. Catania Grandezze e numeri, Catania 1915 Op^{li} C 447

Disuguaglianze, in part. di 1^o e 2^o gr^o. Bertrand Alg^a, [C.] Bourlet [Leçons d'Algèbre élémentaire, Paris, 1902] C V 168 p. 158-161, 244-249; [C.] Arzelà [Trattato di algebra elementare, 3^a ed. Firenze, 1908] M VI 15 p. 244-257, 390-392; [S.] Pincherle [Lezioni di algebra elementare, Bologna, 1911] C III 222 p. 309-317 //

Storie - Varia

[75]

W.R.Ball Breve compendio di storia delle matematiche, 2 volⁱ 1903-04 C IV 206

Zeuthen Historie des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge 1902

J. Tropfke Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. 2 volⁱ 1902-03 Leipzig-Veit C II 93

M. Simon U. die Entwicklung der Elementargeom. im 19. Jahrhundert 1906

S. Günther Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis 1525 Berlin 1887

[†]Nota del curatore. Segre non indica alcun titolo. Molto probabilmente intendeva riferirsi a un libro di aritmetica e algebra che nel 1898 inaugurò la *Sammlung Schubert*, raccolta di testi di matematica pura e applicata.

P. Tannery Notions historiques; nel vol^e di *J. Tannery* Notions de mathématiques

G. Loria Le scienze esatte nell'antica Grecia, Modena 1893 - 1902, 2^a ed. man.
Hoepli 1914 M VI 88

G. Fazzari Breve storia della matematica. Dai tempi antichi al Medio Evo. (Sandron 1907)

G. Libri Histoire des sciences mathém. en Italie depuis La Renaissance jusqu'à la fin du 17^e siècle.

A. von Braunmühl Vorl. ü. Geschichte der Trigonometrie. 2 volⁱ Teubner 1900, 1903 C VI 57

D. Gambioli Breve sommario della storia della matematica (con numerosi errori)
C V 187

[J.] *Boyer* Histoire des mathém. Paris 1900 C VI 68 //

E. Lucas Récréations mathématiques 1883-1894 4 volⁱ [76]
L'Arithmétique amusante 1895 (Introduction aux Récréations math.) C IV 135

W. W. R. Ball Récréations et problèmes mathém. des temps anciens et modernes (3^e éd. angl. 1898) 2^e éd. franc. 1908-09 M VI 45 in 3 volⁱ

W. Ahrens Mathematische Unterhaltungen und Spiele 1901

H. Schubert Mathematische Mussestunden 1900 3 volⁱ C VI 170

I. Gherzi Matematica dilettevole e curiosa. (Manuale Hoepli 1913) C VI 294

[D. E.] *Smith* and [L. C.] *Karpinski* The Hindu-Arabic Numerals (storia della numeraz. decimale) 1911

W. Lietzmann u. *V. Trier* Wo steckt der Fehler? Math. Bibliothek 10, 1913

P. Maennchen Geheimnisse der Rechenkünstler Math. Bibliothek [Mathematisch-physikalische Bibliothek] 13, 1913

[A.] *Witting* - [M.] *Gebhardt* Beispiele z. Geschichte d. Math. Math. Bibliothek [Mathematisch-physikalische Bibliothek] XV, 1913

[H.] *Vuibert* Les anaglyphes géométriques [Paris, 1912 2^a ed] Op^{li} C 422

J. Toisoul Particularités utiles et intéressantes sur les nombres et leurs combinaisons. (Namur 1911)

W. Ahrens Scherz und Ernst in der Mathematik [Leipzig, 1904] C IV 220 //

[77] [A. - F.] *Ozanam* Récréations math. et phys. 3 vol. (nouv. édition 1741)

[C. - G.] *Bachet de Méziriac* Problèmes plaisants et délectables ... [Lyon, 1624, 2^a ed] M VI 29

[A.] *Rebière* Mathématiques et mathématiciens [Paris, 1898] C V 35

A. Mieli Le scuole ionica, pitagorica ed eleata [Firenze, 1915]

[C.] *Perregaux* - [A.] *Weber* Le relief en géom. par les couleurs complémentaires 1914 C I 227

R. E. Moritz Memorabilia Mathematica, New York 1914 C III 287

E. Fourrey Curiosités géométriques 1907 C V 229

Notizie storiche in [P.] *Boutroux* cit^o qui a p. 61

E. Fourrey Récréations arithmétiques [Paris, 1899]

F. Cajori A History of elem. mathematics 1917 C V 387

G. A. Miller Historical Introduction to mathematical Literature 1916 C V 389

D'Arcy W. Thompson On Growth and form C IV 359 [Cambridge, 1917]

A. Vaccaro I sofismi geometrici

C. Toffoletti Sofismi matematici [Livorno, 1916]

F. Müller Führer durch die math. Literatur. Abh 3 Gesh. d. Math. 27 (1909)

W. Dieck Mathematisches Lesebuch 1921

M. D'Ocagne Vue d'ensemble s. les *machines à calculer* Bull. sciences math. (2) 46, 1922 p. 102 (anche a parte)

S. Günther, H. Wieleitner Gesch.[ichte] d. Mathem. (Samml. Schubert) [2 voll. 1908 e 1911-192]

[P. A.] Mac Mahon New Mathematical Pastimes [Cambridge, 1921]

E. Fourrey Procédés originaux de constructions géométr. 1924 //

Numeri frazionari, negativi, irraz^{li}

[79]

Ch. Méray Lecons nouv. sur l'Analyse infin. t. I 1894 introduce i *fratti come operatori*; i numeri positivi e *negativi* come quantità con direzioni $\vec{a}$, $\overleftarrow{a}$.

V. anche [J.] Hoüel cit. a pag. 71

Nell'art. 1^o della *Encyklopädie* ([H.] Schubert, Grundlagen der Arithmetik) vi è la storia dei numeri negativi, che vengono definiti con $a - b$ ove $a < b$. Vedere in partic. il rifacimento francese di Tannery J. e Molk [*Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées*, tome I Arithmétique et Algèbre, Paris, 1904-1909]

J. Tannery Notions de mathématiques, avec Notions historiques par. P. Tannery [Paris, 1905]. Introduce nel miglior modo i numeri frazionari ed i negativi, e ne svolge anche benissimo la teoria.²⁰

E. Borel Algèbre 1^{er} Cycle [Paris, 1903]. I numeri negativi nel cap. 2^o, e le applicazⁱ nel 3^o cap.

²⁰Numeri *simmetrici* chiama 2 numeri la cui somma è 0.

G. Mignosi Sui vari modi d'introdurre il concetto di frazione. Boll. di Mat^a 7, 1908 p. 6

H. Burkhardt Algebraische Analysis, Leipzig 1903

A. Padoa Introduz. alla teoria delle frazioni (lez^e premiata) Bollettino della Mathesis Dicembre 1909

P. Bachmann Vorlesungen ü. die Natur der Frationalzahlen. Teubner 1892 C III 93 //

[80] *E. Maillet* Introd. à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions. Gauthier-Villars 1906 C III 197

H. Wieleitner Der Begriff der Zahl (Mathem Bibliothek II, Teubner 1911)

A. Natucci Cenni storici e sistematici sui numeri reali (irrazionali) Bollettino della "Mathesis" 6, 1914 , p. 23

C. Mineo Sul concetto di numero reale (irraz^{le}) Per^o di mat. (3) 12, 1914 p.1

Irraz^{li} in [G.] Frattini cit. a p. 95, e [U.] Amaldi - [F.] Enriques Nozⁱ di mat. 1^o vol. cit^o ivi.

O. Perron Irrationalzahlen 1921

A. Natucci Il concetto di numero e le sue estensioni 1922

E. Bortolotti Definizioni di Numero. Per^o di mat. (4) 2, 1922; Esercitⁱ mat. Catania 2, 1922

L. G. du Pasquier Le développement de la notion de nombre (naturelle) 1921 //

Costruzioni

[83]

T. Vahlen Konstruktionen u. Approximationen Teubner 1911 C III 219

A. Adler Theorie der geometrischen Konstruktionen (Samml. Schubert 52) 1906
C VI 157⁵²

J. Hjelmslev Geometrische Experimente 1915 Op. C 446

K. Giebel Anfertigung math. Modelle [Mathematisch-Physikalische Bibliothek]
16) 1915

A. Rivelli Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi e loro costruzione in
carta. Man. Hoepli [1897]

F.G. Teixeira S. les problèmes célèbres de la géom. élém. non résolubles avec la
règle et le compas. Coïmbre 1915

L. Mascheroni Problemi per gli agrimensori con varie soluzioni. Pavia 1793 F IV
21

Hilda P. Hudson Ruler and Compasses 1916

A. Kempe How to draw a straight line [London, 1877] M VI 176

R. Marcolongo Materiale didattico ed esperienze nell'insegnamento (conferen-
za). Giorn. di m. [Giornale di matematiche] 60, 1922, p. 1 //

Didattica geometrica

[89]

P. Treutlein Der geometrische Anschauungsunterricht (als Unterstufe eines zwei-
stufigen geometrischen Unterrichtes an unseren höheren Schulen) Teubner 1911

H.E. Timerding Die Erziehung der Anschauung Teubner 1912

D.E. Smith The teaching of Geometry 1911

[H.] Vuibert p. 76 e [C.] Perregaux - [A.] Weber p. 77[‡]

Th. Moreux Pour comprendre la géométrie 1922

[‡]Nota del curatore. Le pagine indicate fanno riferimento a questo quaderno.

H. Poincaré Des fondements de la Géométrie [Paris, 1921] //

Complementi di Mat. elem.

[95]

[G.] *Frattini* Lezioni di Algebra, Geom. e Trigon^a (pel 2^o biennio ist. tecn.) 1911, 1913 C II 157

[Guido] *Ascoli* Complemⁱ di Geom^a per gl'istⁱ tecnici Livorno, Giusti 1913

[D.] *Amanzio*, [P.] *Cassani* v. p. 105 in fine[§].

M. de Franchis Complementi di Geometria [Palermo, 1911]

G. Scorza Complemⁱ di Geometria, Bari, Laterza 1914

[A.] *Socci* e [G.] *Tolomei* Complemⁱ di Matem^a pei licei moderni. Le Monnier 1914

G. Veronese Complementi di Algebra e Geom. ad uso dei Licei moderni, Padova 1915

[U.] *Amaldi* - [F.] *Enriques* Nozⁱ di Matem^a ad uso dei Licei moderni, 2 volⁱ 1914-15

C. Alasia I complemⁱ di Geom. elem. Manuale Hoepli 1903

G. Arzela I complemⁱ di Alg^a elem.

[S.] *Ortu-Carboni* " " [Roma, 1920]

G. Garbieri Trattato di Alg^a elem^e vol I e II (nel vol I applicazⁱ dell'alg^a alla geom^a; nel II varie altre teorie complemⁱ) [Voll. I e II, Padova, 1886, 2^a ed. Torino, 1905]

G. M. Testi Complemⁱ d'Algebra. [Livorno, 1904] //

[96] *G. Gallucci*. Algebra e Geometria metrica per il 2^o corso liceale classico e moder-

[§]Nota del curatore. La pagina indicata fa riferimento a questo quaderno.

no 1918

A. Martini Zuccagni Algebra complem^e [Livorno, 1919]

R. Marcolongo Corso di Mat^a p. 2^o biennio istⁱ tecnⁱ 1920

N. Amici e S. Medici Lezⁱ di Aritm^a ed Alg^a 3^o vol. 1921

C. Guichard Traité de Géom. tome II Compléments 5^a ed. 1923

[I.] Todhunter Complementi d'algebra [2^a ed. Napoli, 1875] //

Trigonometria

[101]

Breve ma chiaro cenno in [J.] Tannery Notions de mathém. [Paris, 1905] pag. 90-93. - V. anche [R.] Baltzer [Elemente der Mathematik, Leipzig, 1870], [J. A.] Serret [Traité de trigonométrie, Paris, 1900], [E.] Baroni [Trigonometria piana e sferica, Firenze, 1910] C VI 276, [J.] Petersen [Plane and spherical trigonometry, 1863]

Per la storia v. [A.] Braunmühl (qui p. 75)[✱], [J.] Tropicke (ivi, vol. II p. 212)

V. anche [F.] Klein Elem - Math. (qui p. 64)[✱], I pag. 360 e seguenti

M. de Franchis Elemⁱ di Trigonometria rettilinea. Op^{li} C 406 [Milano, 1910]

[W.] Killing - [H.] Hovestadt 2^{er} Bd (qui, p. 65)[✱]

G. Pesci Trigonom^a piana e sferica (per la R. Acc. Navale) 4^a ediz. 1916

G. Frattini v. pag. 95[✱] lin. 1^a

Tavole trigonom^e dirette, o naturali, cioè anche senza log., in [D. - F.] Rivard [Trigonométrie rectiligne et sphérique, Paris, 1750] (del 1750) B' 118, in [J.] Hoüel C IV 7 e poi (con maggiori approssimazⁱ) C III 78, [E.] Mougin di 10' in 10' [J.] Bottomley, [F.] Castle, [J.] Wrapson and [W.] Gee J. M. Peirce idem

[✱]Nota del curatore. Le pagine indicate fanno riferimento a questo quaderno.

E. W. Hobson A Treatise on plane trigonometry. (interessante; contiene anche un cap^o sulle funzⁱ iperboliche) [Cambridge, 1918]

U. Concina e A. Neppi-Modona Trigon^a piana e sferica. [Torino, 1925]

Le cose più essenziali negli Elemⁱ di Geom^a di Legendre, Méray, Bourlet*. //

Trattati di Aritmetica ed Algebra

[105]

V. pag. segu^e

A. Conti Elementi di Aritmetica razionale ad uso delle Scuole Normali 4^a ediz. Zanichelli 1909

S. Catania Trattato di Aritmetica ed Algebra ad uso degl'istituti tecnici 3^a ediz. 1910 C VI 275

S. Pincherle Lezioni di Algebra elementare ad uso delle scuole medie superiori 1911 (Accurato in genere, ma non nella introduzione, man mano, dei nuovi numeri) C III 222

E. Bortolotti Manuale di Aritmetica generale ed Algebra (p. liceo e ist. tecn.) in 3 volⁱ 1911 C VI 280

G. Fazzari Elementi di Aritmetica per le scuole medie superiori, *con note storiche e numerose questioni varie* C VI 283 [Palermo, 1918]

E. Palatini Aritmetica ed Algebra ad uso delle Scuole medie superiori, Torino, Petrini C II 147 [Torino, 1910]

Teorie complementari: [D.] Amanzio Sette lezⁱ di Alg^a ad uso degl'istituti tecnici. Op. M. 182 [Napoli, 1881]

[P.] Cassani Complemⁱ d'Algebra ad uso istⁱ tecnⁱ B' 190, e M VI 48 [Torino, 1885]
//

*Nota del curatore. Per le indicazioni bibliografiche si vedano le pagine seguenti.

S. Pincherle Gli elementi dell'Aritmetica ad uso delle scuole secondarie inferiori [106]
(Zanichelli, 16^a ediz^e) [Bologna, 1901]

H. Grassmann Lehrbuch der Arithmetik Berlin 1861

[G.] *Peano* Arithmetices Principia ... 1889

Aritm^a gener^e e algebra elem. 1902 M IV 26

E. Baroni Algebra ad uso dei licei e 1^o biennio istⁱ tecnⁱ (in 2 volⁱ) 3^a ed. 1912

C. Arzelà Trattato di algebra elem^e ad uso dei licei e istⁱ tecnⁱ 3^a ed. 1908 M VI
15

E. Bortolotti Aritmetica pratica per le scuole secondarie inferiori (Albrighi, Segati
e C.) [5^a ed. Roma, 1907]

A. Loewy Lehrbuch der Algebra. 1^{er} Theil Grundlagen der Arithmetik 1915
(molto profondo)

S. Catania Corso di Algebra elem^e per i licei classici e moderni Parte 2^a, 1914

M. Leoncini Aritmetica ed Algebra ad uso del 1^o biennio d'Istit^o tecnico Brescia
1915

C. Bourlet Lecons d'Algèbre élémentaire 1902 (C V 168) (Ottimo. V. ad es. la
discussione dei problemi)

[J. - L.] *Bertrand* [Éléments de géométrie, Paris, 1912]

[R.] *Baltzer* M I 36 (orig^{le})[†] //

C. Burali Forti Lez.ⁱ di Aritm^a pratica (7^a ediz. 1915) [107]

C. Burali Forti e Ramorino Elemⁱ d'Algebra p. le scuole medie inferⁱ 4^a ed^e 1914

G. Frattini V. pag. 95 in principio[‡].

[†]Nota del curatore. Cfr. p. 101 di questo quaderno.

[‡]Nota del curatore. La pagina indicata fa riferimento a questo quaderno.

L. Lo Monaco Aprile Elemⁱ di Aritm^a raz^{le} ad uso delle Scuole medie superⁱ 1916

[A.] *Clairaut* Éléments d'Algèbre 1746 (2 vol^s) B' 218

(1713-1765) (molto didattico)

[L.] *Euler* (1707-1783) Éléments d'Algèbre 1768 (2 voll.) B' 221

N. Amici e *S. Medici* Lezⁱ di Aritm^a e Alg^a per gli Ist. Tecn. in 3 volⁱ 1921

G. Vivanti Aritmetica 1920 M VI 166

M. Royer et *P. Court* Aritmétique 3 vol^s 1922 M VI 169 //

Trattati di Geometria elem^e e scritti vari sui fondamenti

[111]

[A.] *Sannia* e [E.] *D'Ovidio* (1^a ediz. 1869) Elemⁱ di geom. C VI 161

R. De Paolis 1884 Elemⁱ di Geom.

M. Pasch Vorlesungen ü. neuere Geometrie 1882 (fa epoca, per aver messo in evidenza i postulati...) trad. in spagnolo M I 21

G. Peano I principi di Geometria logicamente esposti 1889

Sui fondamenti della Geometria *Rivista di mat.* t. 4^o, 1894 p. 51-90

G. Veronese Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee ... 1891

G. Veronese Elementi di Geom. 1897 (appendice 1898) 2^a ediz. 1901 C VI 270

M. Pieri I principi della geom. di posiz... 1898

Della geom. elem^e come sistema ipotetico-ded^o 1899

La geom. elem^e istituita sulle nozioni di punto e sfera 1908

D. Hilbert Grundlagen der Geometrie 1899^{lii} 2^a Auflage 1903 Ediz. francese 1900

C III 146

^{lii}Recensione di Poincaré in *Bull. sciences m.* (2) 26, 1902 p. 249.

G. Ingrams Elemⁱ di Geom. 1899, 2^a ediz. 1904 (fusione) C VI 265

F. Enriques *Questioni* riguardanti la Geom. elem. 1900. - Ediz. tedesca "Fragen der Elem. geom." II 1907 //

[F.] Enriques - [U.] Amaldi Elemⁱ di Geom. 1903 M VI 59

[112]

[F.] Enriques Prinzipien der geom. 1907, nell'Encykl. [*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, III 1907] (anche nell'ediz. francese) III 11

W. Killing Einführung in die Grundlagen der Geom. 1893 e 1898

H. Schotten Inhalt und Methode des planimetr. Unterrichts 1890, 1893

M. Simon Euklid und die sechs planimetrischen Bücher 1901 (Abh. z. Gesch. d. m. W. Heft XI)

U. *die Entwicklung d. Elementar-Geom. im 19. Jahrhundert*. Bericht 1906 (criticato molto da F. Müller in Bibl. Math. (3) 7 p. 406-418)

Ch. Méray Nouveaux Éléments de Géométrie 1874 2^a ediz. 1903, 3^a ediz. 1906 C V 206

J. Hoüel Essai critique sur le principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire 1867

H. Müller Leitfaden der ebenen Geometrie u. der Stereometrie, *mit Benutzung neuerer Anschauungs-weisen für die Schule* 1875 u. s. w. (*notevole*)

[J.] Henrici - [P.] Treutlein Lehrbuch der Elementar-Geom. [Leipzig, 1897]

[F.] Engel - [P. G.] Stäckel Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss 1895

[R.] Baltzer Elemente der Mathematik [Leipzig, 1870]

R. Bonola La Geometria non-euclidea 1906 //

- [113] [H.] Weber - [J.] Wellstein Encyklopädie der Elementarmathematik (1906-7 2^e Auflage dei vol 1 e 2; 1^a del 3^o) C III 155

J. Hadamard Leçons de Géom. élém. C V 175 Note A (vol. I) "Sur la méthode en Géométrie" pag. 261

T. L. Heath The thirteen Books of Euclid's Elements. 3 vols. Cambridge 1908 C IV 261

[W.] Killing - [H. J.] Hovestadt v. qui p. 65[†]

[G.] Lazzeri e [A.] Bassani Elemⁱ di Geometria 1^a ediz. 1891 (2^a ediz. Livorno 1898) C V 154

W. Lietzmann Die Grundlagen der Geometrie im Unterricht (mit besonderer Berücksichtigung der Schulen Italiens) Zeitschr. f. m. u. n. Unt. 39, 1908 p. 177

G.B. Halsted. Géométrie rationnelle. Traité élémentaire de la science de l'espace. Gauth. Vill. 1911

Iniziazione: [J.] Andrade [Nouvel enseignement d'initiation] La Géom. naturelle 1908 Op. C 398

[H.] Thieme v. pag. 61[†]

[M.] De Franchis Geom. elem^e 1909, C VI 251 (Ha la fusione, il gr^o dei moti. Ma poco didattico, a mio avviso) //

- [114] G. Giorgi Sui fondamenti della geometria. Boll^o della Mathesis IV, 1912 [pp. 74-91]

G. Scorza Sui libri di testo di geometria per le scuole secondarie superiori. Ivi p. 235

E. Bortolotti Nozioni di geometria per le scuole tecniche (Albrighi, Segati e C.)

[†]Nota del curatore. Le pagine indicate fanno riferimento a questo quaderno.

P. Benedetti Elemⁱ di Geom. ad uso specialm. d. scuole normali 1916 C V 357

[E.] Rouché et [Ch.] Comberousse. Traité de géom. C V 7

[A.] Clairaut Elemⁱ di Geom^a (prima ed. 1741 anche in francese 1775) B' 139

[A. M.] Legendre [Éléments de géométrie] 1794 C V 364

E. Borel Géométrie [Paris, 1905] M VI 30

J. Petersen Text-Book of elementary plane Geometry [London, 19] M V 5 (breve, succoso, 73 paginette, incl. molti esercizi)

C. Bourlet Éléments de Géom. [Paris, 1908] C VI 381

J. Poirée Méthodes pour résoudre les probl. de géom. 1920

C. Guichard Traité de Géom. [Paris, 1903] / /

Esercizi

[119]

[E.] Heis Raccolta di esempi e quesiti di Aritmetica ed Algebra. Torino, Loescher [1876] C V 252

[J.] Fitz-Patrick (et [G.] Chevreton [?]) Exercices d'Arithmétique (avec préface de J. Tannery) Paris, Hermann 1893 3^e édition 1914 (vi sono anche le soluzⁱ in ambe le edizⁱ) C II 185 (da raccomandare)

[G.] Ritt Problèmes de Géométrie et de Trigonométrie F V 11, (e con B' 214) Paris, Hachette 1847

[C.-A.] Laisant Recueil de problèmes de mathématiques Gauthier - Villars [1893-18] (Son 6 volⁱ, fra cui uno di Aritm^a e Algebra elem^e, e uno di Geom^a elem. Ma son cose un po' elevate) C IV 126³⁴

A. Schülke Aufgaben-Sammlung aus der Arithmetik, Geom. u. Trigon. 2 volⁱ Teubner 1902, 1906

[O.] *Zanotti-Bianco* L'Astronomia come sorgente di esempi e problemi per le scuole secondarie (Rivista di Astron^a e Scienze affini, 4, 1910 od anche: Bollettino della "Mathesis" II, 1910)

A Naccari Problemi di Fisica in sussidio all'insegnamento della matem^a nelle scuole medie (Bollettino della "Mathesis" II, 1910) p. 116

Esercizi per Scuola Complem^e in *E. Bortolotti* Elemⁱ di Aritmetica pratica per le scuole secondarie inferⁱ, Elemⁱ di Geometria per le scuole tecniche Roma, Albrighi e Segati [1914]. //

[120] Esercizi per Scuola Normale in: *Lia Predella Longhi*: Elemⁱ d'Algebra per la 1^a cl. normale; Aritmetica raz^{le} per 2^a e 3^a norm^e [Torino, 1901 e 1910 rispettivamente] (Paravia)

Esercizi di Geometria in *Enriques-Amaldi* Elemⁱ di Geom^a (ed^e ridotta ad uso delle Scuole Normali; e altre edizⁱ). Molti (pratici e teorici) nel *Bourlet*
Esercizi vari (molti) in *Amaldi-Enriques* Nozⁱ di Mat.*

S. Ortu Carboni Raccolta di problemi d'applicaz. dell'Algebra alla Geom^a. [Livorno, 1912]

A. R. Rivera Problⁱ di Geom^a e di Trigon^a con le loro soluzioni... Torino 1861 (forse esaurito) F III 59

[Frère Gabriel-Marie] *F. G-M* Exercices de géométrie comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues 5^e éd. 1912

S. Catania Problⁱ di mat^a dati agli esami di licenza d'ist. tec^o, colle soluzⁱ 3^a ediz. 1914

R. Bettazzi I problⁱ di Aritmetica pratica. [Torino, 1900]

*Nota del curatore. I testi sono già stati citati nelle pagine 95 e 112 del quaderno.

E. M. Radford Mathematical Problem Papers. Solutions. (Ogni "Paper" o foglio contiene problemi in vari rami di Matematica, incl^a elementare) [Cambridge, 1904]

J. Wolstenholme Mathematical Problems 2^a ed. 1878 (problemi su tutta la mat^a senza soluzⁱ) C IV 12

P. Cattaneo Avviamento alla risoluz. dei problemi di Aritmetica e di Geom. metrica 1915

G. Ritt Problèmes d'Algèbre et exercices de calcul algèbr. [Paris, 1860] B' 214

[I.] *Todhunter* Esercizi di Geom^a colle loro soluzⁱ [Livorno, 1891] //

H. Thieme Raccolta di teoremi e problⁱ di Stereometria [Livorno, 1891] [121]

[Frère Gabriel-Marie] *F. G.-M.* Exercices d' Algèbre

G. Wulliet Problemi di Aritmetica p. scuole tecn^e e commerc^{li}. - Soluzionario id. 4000 problemi d'aritmetica [Torino, 1915]

C. Alasia Esercizi ed applicⁱ di trigon^a piana [Milano, 1901] C VI 112

R. Javelot Comment résoudre les probl. de géom. élém. [Paris, 1918]

S. Pincherle Esercizi sull' Algebra elem^e [Milano, 1896]

Esercizi sulla Geom. elem^e [Milano, 1915]

F. Panizza Esercizi di Aritmetica raz^{le} [Milano, 1893]

[I.] *Crespi-Baccin* e [A.] *Solustri* Esercizi e problⁱ di Aritmetica, Geom. e Alg^a 1920

E. Bortolotti 4000 esercizi di alg^a elem^e p. licei 1921

[Ch.] *v. Nagel* Geometrische Analysis (syst. Anleitung z. Auflösung von Aufgaben der Geom.) 1883

[E.] *Bardey* Aufgaben-Sammlung (Aritm^a e Alg^a) [Liepzig, 1913] //

Indice per Bibliogr^a

Trattati generali	Pag.	61
Bibliografia sulla Didattica		63
Didattica algebrica		71
Storie-Varia		75
Numeri fraz ⁱ , negativi, irraz ^{li}		79
Costruzioni		83
Didattica geometrica		89
Complementi di mat. elem ⁱ		95
Trigonometria		101
Trattati di Aritmetica e Algebra		105
Trattati di Geom. elem. e fondam ⁱ di Geom.		111
Esercizi		119

Appendici

ARGOMENTO DELLA LEZIONE 55^a Seguito: caratteri di quella diestrica. Applicazione alle rigate di $S_{n-p}, S_{n-p}, \dots$ Cap. 4^o Serie complete. Serie residue Curve aggiunte. Applicaz. Le due serie d'ord. n hanno un gruppo comune, così sono contenute in una stessa serie Addì 7^o Maggio 1891 Firma dell'Insegnante G. Segre	ARGOMENTO DELLA LEZIONE Continuaz. Conseguenze. Applicaz. alle serie complete. Una serie completa è individuata da un suo gruppo; ecc. Presti di uno o più elem. rispetto ad una serie completa formano una serie completa. Applicazione alle curve aggiunte di una S_n piana. Addì 4 Maggio 1891 Firma dell'Insegnante G. Segre
ARGOMENTO DELLA LEZIONE Le serie complete ottenute mediante le curve aggiunte. Il teorema di Riemann-Roch. - le curve aggiunte nei p^i S_{n-p} di S_n hanno p^i S_{n-p} hanno fuori di questi una serie completa. Applicaz. ai sist. lineari di curve piane ed alle surf. razionali normali e basi dei generi g e 1 Addì 6 Maggio 1891 Firma dell'Insegnante G. Segre	ARGOMENTO DELLA LEZIONE Serie residue rispetto ad una data serie completa. Applicaz. a precisare meglio il teorema di Riemann-Roch. Teoremi di Brill e Noether per due serie residue risp. alla serie canonica. - Applicaz. del teo. R.-R. alle g^r piane proiez. di S_n Addì 8 Maggio 1891 Firma dell'Insegnante G. Segre
ARGOMENTO DELLA LEZIONE Cap. 8^o Il metodo algebrico di Brill e Noether. Il teorema $Af + Bg$ di Noether. Teorema del resto. Applicazione alle serie complete, residue, ecc. Teorema di riduzione di Noether Addì 11 Maggio 1891 Firma dell'Insegnante G. Segre	ARGOMENTO DELLA LEZIONE Sue varie applicazioni alle serie speciali g^{p-1}_{p-2}; ecc. Teoremi di Riemann e Roch. Inverso del teo. di riduzione: condizioni perché una serie completa abbia un punto fisso. Applicazione alle C^n di S_n. Applicazione funzionale. Addì 13 Maggio 1891 Firma dell'Insegnante G. Segre

8. Registro delle lezioni di Corrado Segre di Geometria superiore del 1890-1891 (UT0-ACS)

APPENDICE 1

Gli studenti di Segre alla Scuola di Magistero

a cura di Maria Anna Raspanti

Si riporta qui di seguito la lista degli studenti che hanno sostenuto l'*Esame di Magistero in Matematica*, con Corrado Segre dal 1907 al 1922, con la trascrizione dei dati ad essi relativi quali compaiono nel registro:

ASUT: *Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche, Naturali: Verbalì degli esami di Laurea e di Magistero in Matematica, Fisica, Chimica. Dal 27.10.1902 al 16.11.1925*, pp. 19-131.

Picco Annetta, nata a Cuorgnè (TO), p. 19¹

TEMA: Relazione fra gli angoli e relazioni fra i lati e le diagonali di un quadrilatero iscrivibile in un circolo. Sua costruzione, dati i lati.

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 16/12/1907

PRESIDENTE: Naccari². COMMISSARI: Parona,³ Segre.

Caramelli Olga, nata a Venezia, p. 21

TEMA: Posizione relativa di due cerchi nello stesso piano.

ESITO: approvata

CON PUNTI: 28/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 14/07/1908

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

¹Le pagine riportate per ciascun candidato si riferiscono al registro citato.

²Andrea Naccari (1841-1926), fisico dell'Università di Torino, fu direttore della Scuola di Magistero annessa alla Facoltà di scienze dal 1908 al 1916, quando gli subentrò Corrado Segre. Ricoprì pure la carica di rettore dell'Università di Torino dal 1889 al 1892. Le notizie sui vari commissari, quando non precisato, sono tratte da C. SILVIA ROERO (a cura di), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino, 1848-1998*, Deputazione subalpina di storia patria, Torino 1999, vol. II, *I Docenti*, cui si rimanda per ulteriori informazioni.

³Carlo Fabrizio Parona (1855-1939), paleontologo, insegnò Geologia all'Università di Torino. Fu presidente della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche, Naturali e poi rettore dell'Università di Torino dal 1920 al 1922.

Gaido Margherita, nata a S. Remo prov. di Portomaurizio, p. 21

TEMA: Teoria delle disuguaglianze (di 1° e 2° Grado)

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 14/07/1908

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Riva Francesco, nato a S. Antioco (Cagliari), p. 22

TEMA: Retta e piano perpendicⁱ.

ESITO: approvato

CON PUNTI: 25/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 14/07/1908

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Rovetti Carlo, nato a Cuorgné (Torino), p. 22

TEMA: Principi d'analisi ind. di 1° grado.

ESITO: approvato

CON PUNTI: 28/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 14/07/1908

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Raffo Raffaella, nata a Roma, p.25

TEMA: Alcuni problemi nella costruzione di cerchi soddisfacenti a certe condizioni di passaggi per punti e contatti con rette, o cerchi dati.

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 31/10/1908

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Mo Vittoria, nata a Nizza marittima, p. 26

TEMA: Equivalenza di tetraedri fra loro e con prismi. Volume del tetraedro.

ESITO: approvata

CON PUNTI: 30/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 02/12/1908

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Oneglio Teresa, nata a Torino, p. 26

TEMA: Logaritmi.

ESITO: approvata

CON PUNTI: 30/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 02/12/1908

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Druetti Maria Carmela, nata a Chivasso prov. di Torino, p. 27

TEMA: Triedri. Loro proprietà; Casi d'uguaglianza (1^a. classe liceale o 2°. d'Ist.

Tecnico)

ESITO: approvata

CON PUNTI: 24/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 18/05/1909 N° di matricola 730

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Gino Fano,⁴ Parona.

Colombo Ofelia, nata a Saluzzo prov. di Cuneo, p. 27

TEMA: Costruzione del pentagono e del decagono regolare (sezione aurea).

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 12/07/1909

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Artom Emilio, nato a Torino, p. 28

TEMA: Formule di addizione per le funzioni trigonometriche.

ESITO: approvato

CON PUNTI: 30/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 12/07/1909

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Cairo Emma, nata a Massa Carrara, p. 29

TEMA: Esercizi relativi alle misure delle superficie e volumi del cilindro e della sfera (2^a classe liceale).

ESITO: approvata

CON PUNTI: 28/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 20/10/1909

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Marnetto Antonietta, nata a Cañada de Gomez,⁵ (Rep. Argentina), p. 30

TEMA: Grandezze direttamente ed inversamente proporzionali. Problemi relativi (regola del tre).

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 20/10/1909

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Peyroleri Margherita, nata a Torino, p. 30

TEMA: Rapporto dei perimetri e delle aree di due poligoni simili (1^a classe liceale o d'istituto tecnico)

ESITO: approvata

CON PUNTI: 30/30

⁴Gino Fano (1871-1952), matematico, allievo di Corrado Segre, insegnò Geometria proiettiva e descrittiva con disegno e Geometria superiore presso l'Università di Torino fino al 1938 quando le leggi razziali lo costrinsero a lasciare l'Italia. Diresse la Biblioteca matematica dal 1924 al 1938.

⁵Città della provincia argentina di Santa Fé.

DATA DELL'ESAME: Torino, 20/10/1909
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Cytron Davide, figlio di Abram, nato a Bialystok (Grodno), Russia, p. 32
TEMA: Formole d'interesse semplice e composto. Applicazioni (2^a classe d'Istituto Tecnico)
ESITO: approvato
CON PUNTI: 28/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 06/07/1910. N° di matricola: 31.13
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Ricaldone Paolo, nato a Mirabello Monferrato, prov. di Alessandria, p. 32
TEMA: Applicazioni dell'Algebra alla Geometria.
ESITO: approvato
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 06/07/1910. N° di matricola: 28.196
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Mosca Pietro, nato a Moncalieri, prov. di Torino, p. 33
TEMA: Misura della circonferenza e della superficie di un cerchio.
ESITO: approvato
CON PUNTI: 28/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 06/07/1910
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Fortunato Ernesto, nato a Velletri, prov. di Roma, p. 33
TEMA: Problemi di massimo e di minimo.
ESITO: approvato
CON PUNTI: 30/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 14/07/1910
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Gramegna Maria, nata a Tortona, prov. di Alessandria, p. 34
TEMA: Area della zona sferica e della sfera.
ESITO: approvata
CON PUNTI: 38/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1910, N° di matricola: 31.98
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Fileti,⁶ Parona.

Mago Vincenzo, nato a Pinerolo, prov. di Torino, p. 34
TEMA: Regola del tre semplice e composta.
ESITO: approvato
CON PUNTI: 22/30

⁶Michele Fileti (1851-1914), chimico, nel 1881 fu professore di Chimica presso l'Università di Torino dal 1881 fino alla morte e rettore dal 1900 al 1903.

DATA DELL'ESAME: Torino, 19/07/1910. N° di matricola: 31.89

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Osimo Alice, nata a Borgonovo, prov. di Piacenza, p. 37

TEMA: Frazioni ordinarie.

ESITO: approvata

CON PUNTI: 24/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 05/07/1911

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Greggi Giovanna, nata a Aglié, prov. di Torino, p. 40

TEMA: per la terza classe liceale, Numeri irrazionali ed operazioni su di essi.

ESITO: approvata

CON PUNTI: 20/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 16/12/1911, N° di matricola: 31.172

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Sterponi Berardo, nato a Teramo, p. 41

TEMA: Figure omotetiche.

ESITO: approvato

CON PUNTI: 22/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 06/07/1912

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Togliatti Eugenio Giuseppe, nato a Orbassano prov. di Torino, p. 41

TEMA: Teorema d'Eulero sui poliedri convessi. Qualche applicazione, ad esempio per la ricerca dei poliedri regolari euclidei.

ESITO: approvato

CON PUNTI: 30/30 con lode

DATA DELL'ESAME: Torino, 06/07/1912

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Frisone Rosetta, nata a Novi Ligure, prov. di Alessandria, p. 44

TEMA: Figure Numeri primi. Scomposizione di un numero in fattori primi.

ESITO: approvata

CON PUNTI: 36/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 27/02/1913

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Camerano,⁷ Fileti, Segre.

Vesin Virginia, nata a Torino, p. 45

TEMA: Intersezioni di sfere con rette, piani, sfere.

ESITO: approvata

CON PUNTI: 36/40

⁷Lorenzo Camerano (1856-1917), zoologo, fu professore di Anatomia comparata dell'Università di Torino e rettore dal 1907 al 1910. Diresse anche il Museo di Zoologia.

DATA DELL'ESAME: Torino, 27/02/1913
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Camerano, Fileti, Segre.

Beltrami Anna, nata a Torino, p. 45
TEMA: Proporzionalità fra segmenti. Poligoni simili.
ESITO: approvata
CON PUNTI: 30/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 27/06/1913
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Bognetti Assunta, nata a Alessandria, p. 46
TEMA: Sistemi di più equazioni di 1° grado con altrettante incognite (3^a classe tecnica)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 11/07/1913
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Quarra Paolina, nata a Torino, p. 46
TEMA: Angoli nel cerchio. Cerchi iscritto e circoscritto ad un triangolo
ESITO: approvata
CON PUNTI: 28/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 06/12/1913
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Fileti, Segre, Parona.

Allais Vittorio, nato a Saluzzo, prov. di Cuneo, p. 47
TEMA: Logaritmi
ESITO: approvato
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 06/12/1913
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Fileti, Segre, Parona.

Dusi Teresa, nata a Torino, p. 47
TEMA: Grandezze direttamente ed inversamente proporzionali
ESITO: approvata
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 13/12/1913
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Fileti, Parona.

Tealdi Evangelina, nata a Guspini, prov. di Cagliari, p. 49
TEMA: Prime proposizioni sull'equivalenza dei poligoni (5^a classe ginnasiale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 16/01/1914

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Fileti, Parona.

Roggero Ettore, nato a Torino, p. 50

TEMA di lezione: Problemi di massimo e minimo

ESITO: approvato

CON PUNTI: 25/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 02/05/1914, N° di matricola: 32.14

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Vercellin Raffaele, nato a Lillianes, prov. di Torino,⁸ p. 50

TEMA di lezione: Relazioni fra 4 elementi (lati ed angoli) di un triangolo sferico

ESITO: approvato

CON PUNTI: 25/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 02/05/1914, N° di matricola: 30.1

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Fritzsche Maria Paola, nata a Roma, p. 52

TEMA della lezione. Sui metodi per la risoluzione dei problemi geometrici

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 04/07/1914, N. di matricola: 31.171

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Murineddu Antonio, nato a Sassari, p. 53

TEMA della lezione: Divisione di un numero in parti proporzionali a numeri dati

ESITO: approvato

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 04/07/1914, N. di matricola: 32.61

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Castelli Teresa, nata a Edolo, prov. di Brescia, p. 53

TEMA della lezione: Proprietà trigonometriche dei triangoli rettilinei (3^a classe liceale)

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 14/07/1914, N. di matricola: 32.88

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Comi Tersilla Leonarda, nata a Pieve di Cadore, prov. di Belluno, p. 54

TEMA della lezione: Concetto di numeri razionali. Prime operazioni fra questi (5^a ginnasiale)

ESITO: approvata

CON PUNTI: 28/30

⁸ Attualmente Lillianes è un comune della Valle d'Aosta.

DATA DELL'ESAME: Torino, 14/07/1914, N° di matricola: 32.89

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Segre Amalia, nata a Torino, p. 54

TEMA della lezione: Concetto di numero negativo. Prime operazioni fra i numeri col segno (1^a cl. liceale)

ESITO: approvata

CON PUNTI: 28/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 14/07/1914, N° di matricola: 32.100

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Pagliano Luigi Pietro, nato a Penango,⁹ prov. di Alessandria, p. 55

TEMA della lezione: Omotetia nel piano

ESITO: approvato

CON PUNTI: 21/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 18/07/1914, N° di matricola: 30.113

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Bruzzone Marianna, nata a Mondovì Piazza, prov. di Cuneo, p. 57

TEMA della lezione per la 3^a classe tecnica: Avendo già svolti i p.ⁱ 1 e 2 del progr. di Geometria e di quello di calc. letter. Faccia una lez.^{ne} di esercizi o problemi in applicaz.

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 10/11/1914, N° di matricola: 32.94

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Cordero di Montezemolo Elena, nata a Mondovì, prov. di Cuneo, p. 57

TEMA della lezione per la 2^a cl. liceale: Alc. problemi geom. od algebrici, che conducono ad equazioni riducibili ai primi due gradi: loro riduzione

ESITO: approvata

CON PUNTI: 30/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 10/11/1914, N° di matricola: 32.10

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Garrone Laura, nata a Alessandria, p. 58

TEMA della lezione per la 3^{cl}. Normale: Rette e piani e loro rapporti di posizione nello spazio

ESITO: approvata

CON PUNTI: 30/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 10/11/1914, N° di matricola: 32.60

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

⁹Il comune di Penango attualmente è nella provincia di Asti.

Bonferroni Carlo Emilio, nato a Bergamo, p. 58

TEMA della lezione per la 3^a cl. del liceo Moderno: Cenno sull'integrale definito ed ovvie applicazioni.

ESITO: approvato

CON PUNTI: 30/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 10/11/1914, N° di matricola: 32.89

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Del Vecchio Ettore, nato a Ancona, p. 59

TEMA della lezione per la 3^a Cl. del liceo Moderno: Concetto di limite. Sue applicazioni geometriche, tangente ad una curva e lunghezza di un arco.

ESITO: approvato

CON PUNTI: 30/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 10/11/1914, N° di matricola: 32.90

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Serra Caterina, nata a Torino, p. 59

TEMA: Rapporti e proporzioni. Lezione per la II^a Normale

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 21/11/1914, N° di matricola: 32.18

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Segre Vittorina, nata a Torino, p. 60

TEMA per la 3^a Cl. Normale. Rette e piani paralleli

ESITO: approvata

CON PUNTI: 24/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 21/11/1914, N° di matricola: 32.64

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

De Giorgis Giorgina, nata a Acqui, prov. di Alessandria, p. 60

TEMA della lezione per la 5^a Cl. ginnasiale «Poligoni regolari»

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 22/12/1914, N° di matricola: 32.11

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Durando Diva, nata a Viù, prov. di Torino, p. 61

TEMA della lezione per la 5^a Cl. ginnasiale «Alcuni problemi relativi alla costruzione di cerchi tangenti a date rette o cerchi»

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 22/12/1914, N° di matricola: 32.91

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Bachi Elsa, nata a Brescia, p. 61

TEMA della lezione per la 2^a Cl. liceale: Volume della Sfera

ESITO: approvata

CON PUNTI: 30/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 23/06/1915, N° di matricola: 33.9

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Quaglia Giuseppe, nato a Vigevano, prov. di Pavia, p. 62

TEMA per la 2^a Cl. d'Istituto Tecnico: Numeri irrazionali

ESITO: approvato

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 23/06/1915, N° di matricola: 33.66

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Cassisa Elena, nata a Pasturana, prov. di Alessandria, p. 65

TEMA della lezione: Discussione di problemi di 2° grado (per la 2^a Classe di Istituto Tecnico)

ESITO: respinta

CON PUNTI: 20/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 08/12/1915, N° di matricola: 32.87

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona, Ponzio¹⁰.

Muggia Natalia, nata a Cirié, prov. di Torino, p. 67

TEMA della lezione: «I poligoni regolari»

ESITO: approvata

CON PUNTI: 40/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 17/03/1916

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona, Ponzio.

Boffa - Tarlatta Ortensia, nata a Cuneo, p. 67

TEMA della lezione: «Proprietà della sfera»

ESITO: approvata

CON PUNTI: 32/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 15/04/1916

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Parona, Segre, Ponzio.

De Stefanis Maria, nata a Parma, p. 70

TEMA della lezione: Equivalenza di tetraedri fra loro e con prismi (per la 2^a classe di Liceo Moderno)

ESITO: approvata

CON PUNTI: 28/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1916

¹⁰Giacomo Ponzio (1870-1945), chimico, fu professore di Chimica generale ed inorganica dell'Università di Torino.

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Guglielmi Amalia, nata a Martina Franca, prov. di Lecce, p. 70
TEMA: Problemi di 1° grado (per la 1ª classe di Istituto Tecnico)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 25/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1916
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Oxilia Francesca, nata a Piacenza, p. 71
TEMA: Problemi numerici relativi alle misure delle superficie e volumi del cilindro del cono rotondo e della sfera (lez.^{ne} per la 3ª classe tecnica)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 25/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1916
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Perotti Severina, nata a Torino, p. 71
TEMA: Principi di analisi indeterminata di 1° grado (lez.^{ne} per la 3ª classe liceale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 24/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1916
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Casetta Gemma, nata a Torino, p. 72
TEMA: Rapporto dei perimetri e delle aree di poligoni simili (Lez.^{ne} per la 1ª Cl. liceale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 24/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1916
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Paglieri Rosa, nata a Recanati, prov. di Macerata, p. 72
TEMA: Teoria delle disuguaglianze di 1° e di 2° grado (Lez per la 3ª classe di Ist.^o Tecnico-sez. fisico - matem.)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 24/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1916
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Scarzello Maria Teresa, nata a Fossano, prov. di Cuneo, p. 73.
TEMA: Logaritmi (Lez.^{ne} 3ª Classe Liceo Moderno)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 24/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1916

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Sertorio Emilia, nata a Colonia Veneta, prov. di Verona, p. 73.

TEMA: Triedri, loro proprietà, casi di uguaglianza (lez.^{ne} per la 2^a Classe d'Ist.^o Tecnico)

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1916

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Castellaro Cristina, nata a Pinerolo, p. 74.

TEMA della lezione: «Frazioni continue»

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 04/11/1916, N° di matricola: 33.79

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Camerano, Ponzio.

Capra Tullia, nata a Asti, p. 75.

TEMA della lezione: «Proprietà dei coni e cilindri rotanti» (per la 1^a Classe liceale)

ESITO: approvata

CON PUNTI: 28/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 18/11/1916, N° di matricola: 33.29

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Meroni Maria, nata a Como, p. 75.

TEMA della lezione: «Moltiplicazione e divisione dei polinomi. Casi particolari notevoli» (per la 3^a classe della Scuola Tecnica)

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 18/11/1916, N° di matricola: 33.78

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Boverio Ernesto, nato a Casale Monferrato, p. 79.

TEMA della lezione: «Derivata di una funzione; interpretazioni geometriche e meccaniche»

ESITO: approvato

CON PUNTI: 36/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1917, N° di matricola: 35.173

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Puccianti,¹¹ Parona, Ponzio.

¹¹Lugi Puccianti (1875-1952), fisico, vinto il concorso a cattedra, nel 1915 fu chiamato dall'Università di Genova come professore di Fisica sperimentale, ma l'anno successivo passò all'Università di Torino per tornare nella città natale Pisa nel 1917. Diede contributi significativi soprattutto nel campo della spettroscopia, ma si distinse per alcune ricerche nel campo dell'ottica e dell'elettromagnetismo. Cfr. la biografia a cura di Paolo Rossi in <http://osiris.df.unipi.it/~rossi/Direzione%20Puccianti.pdf>.

Mancinelli Maria, nata a Urbino, p. 80.

TEMA della lezione: «Teorema di Eulero sui poliedri convessi- Applicazioni»

ESITO: approvata

CON PUNTI: 40/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1917, N° di matricola: 34.10

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Puccianti, Parona, Ponzio.

Pelizzari Elena, nata a Calcinato¹², p. 81.

TEMA della lezione: «Rappresentazione grafica della funzione $y = ax^2$. Applicazioni meccaniche»

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/00

DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1917, N° di matricola: 34.13

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Puccianti, Ponzio.

Savio Maria Consolata, nata a Chieri, p. 81.

TEMA della lezione: «Esercizi sulla discussione dei problemi di 2° grado»

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 21/07/1917, N° di matricola: 33.82

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Migliorero Caterina, nata a Lemie, prov. di Torino, p. 83.

TEMA della lezione: «1^a lezione sulle frazioni ordinarie» (per la 5^a classe ginnasiale)

ESITO: approvata

CON PUNTI: 30/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 13/11/1917, N° di matricola: 33.80

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Viglezio Elisa, nata a Lucca, p. 86.

TEMA della lezione: «Esercizi relativi alle misure delle superficie e dei volumi del cilindro, del cono e della sfera»

ESITO: approvata

CON PUNTI: 40/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1918, N° di matricola: 34.19

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino,¹³ Parona, Ponzio.

Rossi Maria Anita, nata a Bobbio,¹⁴ prov. di Pavia, p. 89.

TEMA della lezione: I numeri negativi

ESITO: approvata

¹²Comune in provincia di Bergamo.

¹³Alfredo Pochettino (1876-1953), fisico, fu professore di Fisica sperimentale dell'Università di Torino e rettore dal 1924 al 1928.

¹⁴Oggi risulta in provincia di Piacenza.

CON PUNTI: 28/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 20/07/1918

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Campetti¹⁵.

Bertacchi Maria, nata a Saluzzo, p. 90.

TEMA della lezione: «numeri decimali periodici. Frazioni ordinarie che li generano» (per la 5^a ginnasiale)

ESITO: approvata

CON PUNTI: 28/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 14/11/1918

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Segre Annetta, nata a Vercelli, p. 90.

TEMA della lezione: «Divisibilità dei numeri interi» (per la 4^a classe ginnasiale)

ESITO: approvata

CON PUNTI: 40/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 26/02/1919

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Poli Luigi, nato a Torino, p. 91.

TEMA della lezione: «Similitudine delle figure piane» (per la 1^a classe liceale)

ESITO: approvato

CON PUNTI: 36/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 26/02/1919

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Gianasso Severino, nato a Baldissero d'Alba, prov. di Cuneo, p. 92

TEMA della lezione: «Disuguaglianze di 2° grado» (per la 3^a classe della sezione fisico - matematica dell'Istituto Tecnico)

ESITO: approvato

CON PUNTI: 37/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 04/04/1919

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Gandiglio Maria, nata a Carignano, p. 92.

TEMA della lezione: «Divisione di un numero in parti proporzionali a numeri dati (problema di ripartizione). Applicazioni»

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 15/04/1919

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Troucana Elgisa, nata a Torino, p. 93.

¹⁵Adolfo Campetti (1866-1947), fisico, fu professore di Fisica sperimentale dell'Università di Torino.

TEMA della lezione: «Formule di bisezione per le funzioni goniometriche» (per la 2^a classe liceale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 28/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/04/1919
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Gambera Giovenale, nato a Dogliani, prov. di Cuneo, p. 93.
TEMA della lezione: «teorema di Pitagora. Applicazioni»
ESITO: approvato
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 16/05/1919
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Bruera Stefano, nato a Torino, p. 94.
TEMA della lezione: «Equivalenza di prismi» per la 2^a classe di Istituto Tecnico
ESITO: approvato
CON PUNTI: 36/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 04/04/1919
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Gonella Giovanni Battista, nato a Bologna, p. 94.
TEMA della lezione: «Cenno sull'integrale definito ed ovvie applicazioni»
ESITO: approvato
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 28/05/1919
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Barla Eugenio, nato a Cesio, prov. di Porto Maurizio,¹⁶ p. 95
TEMA della lezione: «Equazioni e sistemi di equazioni riducibili al 1° e 2° grado» (per la 2^a classe liceale)
ESITO: approvato
CON PUNTI: 24/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 21/06/1919
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Ghigi Luisa, nata a Fossano, p. 96.
TEMA della lezione: «Il metodo della riduzione all'unità nella regola del tre» (per la 3^a classe di Scuola Normale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 25/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1919, N° di matricola: 34/9

¹⁶Il comune di Cesio ora risulta in provincia di Imperia.

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Ponzio.

Pisa Angiolina, nata a Guastalla, p. 97.

TEMA della lezione: «Relazione fra gli angoli e i lati di un triangolo rettilineo» (per la 3^a classe liceale)

ESITO: approvata

CON PUNTI: 28/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1919, N° di matricola: 34/71

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Ponzio.

Rucci Francesco, nato a Panni, prov. di Foggia, p. 97.

TEMA della lezione: «1^a lezione di trigonometria» (per la 1^a classe liceale)

ESITO: approvato

CON PUNTI: 18/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1919, N° di matricola: 34/113

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Ponzio.

Travaglini Irmo, nato a Licciana¹⁷, p. 104

TEMA della lezione: «Esempi di discussione di problemi di 2° grado» per la 2^a classe di Istituto Tecnico

ESITO: approvato

CON PUNTI: 25/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 16/10/1919, N° di matricola: 34-107

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Braggio Caterina, nata a Acqui, prov. di Alessandria, p. 105

TEMA della lezione: «Poligoni regolari» (per la 5^a classe ginnasiale o 1^a liceale)

ESITO: approvata

CON PUNTI: 36/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 17/12/1919, N° di matricola: 34.59

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Locchi Pia, nata a Torino, p. 106.

TEMA della lezione: «Pentagono e decagono regolare» (incluso sezione aurea di un segmento) per la 1^a liceale

ESITO: approvata

CON PUNTI: 40/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 17/12/1919, N° di matricola: 34/67

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Cassina Ugo, figlio di Opimio, nato a Polesine, prov. di Parma, p. 106

TEMA della lezione: «Analisi indeterminata di 1° grado» Pel 2° biennio di Istituto Tecnico

¹⁷Licciana Nardi si trova in provincia di Massa Carrara.

ESITO: approvato

CON PUNTI: 40/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 17/12/1919, N° di matricola: 35.178

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Maccone Adriano, nato a Barbania, prov. di Torino, p. 107

TEMA della lezione: «Concetto di limite. Sue applicazioni geometriche» Per la 3^a classe di liceo moderno

ESITO: approvato

CON PUNTI: 40/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 17/12/1919, N° di matricola: 34.135

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Daniele Maria, nata a Dronero, prov. di Cuneo, p. 107

TEMA della lezione: «1^a lezione sulle frazioni continue» pel 2° biennio d'Istituto Tecnico

ESITO: approvata

CON PUNTI: 30/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 27/12/1919, N° di matricola: 34.129

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Ambrosetti Maria Teresa, nata a Castegnato, prov. di Brescia, p. 109

TEMA della lezione: «Prime proprietà della sfera»

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 12/05/1920, N° di matricola: 34.125

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino.

Mongini Jeannette, nata a Caselle Torinese, prov. di Torino, p. 110

TEMA della lezione: «Progressioni geometriche. Applicazione al calcolo dell'interesse composto»

ESITO: approvata

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 12/05/1920, N° di matricola: 34.138

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino.

Rigrillo Giuseppe, nato a Rionero in Vulture, prov. di Potenza, p. 110

TEMA della lezione: «Posizione reciproca di due cerchi in un piano»

ESITO: approvato

CON PUNTI: 27/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 12/05/1920, N° di matricola: 33.61

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino.

Bandiera Attilio, nato a Livorno, p. 112

TEMA della lezione: «Volume della sfera»

ESITO: approvato
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 09/07/1920, N° di matricola: 38.30
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Bobba Maria, nata a Cigliano, prov. di Novara, p. 113
TEMA della lezione: «Prisma e cilindro» per la 3^a normale
ESITO: approvata
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 16/07/1920, N° di matricola: 35.223
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Stipa Linda, nata a Norcia, prov. di Perugia, p. 113
TEMA della lezione: «Numeri complessi» per la 3^a classe complementare
ESITO: approvata
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 16/07/1920, N° di matricola: 34.75
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Tizzani Emilia, nata a S. Salvatore Monferrato, prov. di Alessandria, p. 115
TEMA della lezione: «Circolo» per la 1^a classe normale
ESITO: approvata
CON PUNTI: 38/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 16/07/1920, N° di matricola: 35.247
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Vernero Carlo, nato a Solero, prov. di Alessandria, p.115
TEMA della lezione: «Derivata di una funzione di 2° grado e di a/x » per la 3^a classe di liceo moderno
ESITO: approvato
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 16/07/1920, N° di matricola: 34.18
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Grassi Enrico, nato a Firenze, p. 117
TEMA della lezione: «Frazioni ordinarie» per la 1^a tecnica
ESITO: approvato
CON PUNTI: 32/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1920, N° di matricola: 34.66
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Hidalgo Laura, nata a Alessandria, p. 117
TEMA della lezione: «Logaritmi» per la classe liceale
ESITO: approvata
CON PUNTI: 40/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1920, N° di matricola: 35.232

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Luzzi Guido, nato a Arezzo, p. 119

TEMA della lezione: «Esempi di equazioni riducibili al 1° o al 2° grado» pel liceo od Istituto Tecnico

ESITO: approvato

CON PUNTI: 40/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1920, N° di matricola: 33.77

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio, Pochettino.

Mesturini Camilla, nata a Montiglio, prov. di Alessandria,¹⁸ p. 120

TEMA della lezione: «Proprietà dei parallelogrammi» per la 4^a o 5^a ginnasiale

ESITO: approvato

CON PUNTI: 40/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1920

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Raynaud Dario, nato a Mondovì Piazza, p. 120

TEMA della lezione: «Perimetri ed aree di poligoni simili» per Liceo

ESITO: approvato

CON PUNTI: 24/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 27/11/1920, N° di matricola: 32.141

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Taverna Teresa, nata a Alba, prov. di Cuneo, p. 122

TEMA della lezione: «Numeri primi»

ESITO: approvata

CON PUNTI: 36/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 08/12/1920

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Ponzio, Parona, Pochettino.

Villavecchia Angela, nata a Alessandria, p. 123

TEMA della lezione: «Rette e piani perpendicolari»

ESITO: approvata

CON PUNTI: 36/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 08/12/1920

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Ponzio, Parona, Pochettino.

Carmarino Maria Teresa, nata a Torino, p. 126

TEMA della lezione: «Teorema di Pitagora e sue applicazioni» per Scuole Medie Superiori

ESITO: approvata

¹⁸Il comune di Montiglio ora è denominato Montiglio Monferrato ed è nella provincia di Asti.

CON PUNTI: 28/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 23/03/1921, N° di matricola: 34.128

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Poisetti Eugenio, nato a Racconigi,¹⁹ p. 127

TEMA della lezione: «Esercizi su problemi di 2° grado» per l' Istituto Tecnico

ESITO: approvato

CON PUNTI: 30/30

DATA DELL'ESAME: Torino, 23/03/1921, N° di matricola: 34.14

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Musso Clotilde, nata a Asti,²⁰ prov. di Alessandria, p.127

TEMA della lezione: «Problemi su grandezze direttamente od inversamente proporzionali, col metodo della riduzione all'unità» (3^a classe normale)

ESITO: approvata

CON PUNTI: 32/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 19/07/1921, N° di matricola: 34.11

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Palomba Margherita, nata a Cagliari, p. 128

TEMA della lezione: «Proprietà della sfera» per la 2^a classe d'Istituto Tecnico

ESITO: approvata

CON PUNTI: 32/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 19/07/1921, N° di matricola: 35.239

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio

Amadio Maria, nata a Vittorio,²¹ prov. di Treviso, p. 128

TEMA della lezione: «Sistema di due equazioni di 1° grado a due incognite» (Per la 1^a classe liceale)

ESITO: approvata

CON PUNTI: 34/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 19/07/1921, N° di matricola: 36.70

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Pellerino Palmira, nata a Saluzzo, prov. di Cuneo, p. 131

TEMA della lezione: «Poligoni equivalenti» per liceo

ESITO: approvata

CON PUNTI: 32/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 18/07/1922

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

¹⁹Racconigi è un comune di Torino.

²⁰Attualmente Asti è capoluogo di provincia.

²¹Il comune ora è denominato Vittorio Veneto.

APPENDICE 2

I registri relativi ai corsi di Geometria superiore del 1890-1891 e di Matematica alla Scuola di Magistero

a cura di Livia Giacardi

*1. Registro delle Lezioni di Geometria superiore dettate dal Sig. Prof. Corrado Segre nell'anno scolastico 1890-91, Uto-ACS, Registri delle lezioni.*²²

5 Nov.^e 1890

Introduzione alla geometria sugli enti algebrici semplicemente infiniti.

Cap. 1° Preliminari.

Considerazioni generali sulle relazioni fra Geometria ed Analisi. Due modi di concepire la geometria. Coordinate elementi complessi. Coordinate proiettive

7 Nov.^e 1890

Elementi complessi. Coordinate proiettive. Cenno sulle curve piane algebriche. Polarità. Punti multipli. Relazione a cui questi soddisfano se la curva è irriduttibile.

10 Nov.^e 1890

Genere di una curva piana. Altri caratteri. Formule di Plücker.

28 Nov.^e 1890

Cenno sulle superficie algebriche sui complessi algebrici di rette, sui complessi algebrici di elementi qualunque.

1 Dic.^e 1890

Tutti gli enti enumerati si determinano con coordinate. Definizione di varietà ∞^k (due significati); casi particolari. Varietà algebriche.

3 Dic.^e 1890

Varietà razionali. Varietà o sistemi lineari di forme: determinazione di un sistema lineare ∞^r mediante $r + 1$ forme linearmente indipendenti.

5 Dic.^e 1890

Continuaz. Sistemi lineari contenuti nel sistema primitivo Esempi.

10 Dic.^e 1890

Sistema lineare comune a due sistemi. Minimo sistema lineare in cui questi son

²²Per quanto riguarda i nomi di autori e gli scritti citati nel registro, si rimanda alle note relative contenute nell'edizione del quaderno corrispondente.

contenuti Casi particolari; generazione successiva dei sistemi lineari di dimensione crescente.

12 Dic.^e 1890

Considerazioni speciali relative alle involuzioni e sist.ⁱ lineari di curve e superf. d'ord. n . Proprietà particolari relative ai punti base e fondamentali di tali sistemi. Fasci e reti di curve e sup.

15 Dic.^e 1890

Sist.ⁱ lineari con punti base straordinari. Sist.ⁱ lineari con una parte fissa. Sezione di un sist.ⁱ lin. con una retta ed un piano.

Cap.2° Iperspazi.

Come dalle cose esposte finora si giunga naturalmente agl'iperspazi.

17 Dic.^e 1890

Le varie nozioni, analitica, geometrica in senso largo, e geometrica in senso ristretto (fisico), d'iperspazio. Definizioni delle varietà subordinate. Vantaggi dell'uso degl'iperspazi.

19 Dic.^e 1890

Obbiezioni mosse contro tale uso, e loro insussistenza.

Cenno storico e bibliografico sulla geometria (proiettiva) degl'iperspazi. Avvertenze ai giovani che vorranno fare ricerche intorno a questi.

2 Genn.^o 1891

Spazi contenuti in un S_r . Loro definizione e prime proprietà. Loro interazioni. Iperpiani di S_r : loro equazioni e coordinate.

5 Genn.^o 1891

Dualità fra i punti e gl'iperpiani in S_r . Generazioni duali degli spazi di S_r . Alcune proprietà che vi si riferiscono.

7 Genn.^o 1891

La varietà degli S_k di S_r . Coordinate degli S_k . Forme geom.^e fondam.^{li}. Proiezione e sezione. Elementi fondamentali in S_r . Corrispondenza lineare e proiettiva fra due S_r : corrispondenza fra gli spazi subordinati.

12 Genn.^o 1891

Continuaz. Uguaglianza dei birapporti omologhi. Le coordinate come birapporti. Trasformaz.^e di coordinate. Di un modo sintetico per giungere alla geometria degl'iperspazi.

14 Genn.^o 1891

Altre proprietà delle proiettività. Proiettività degeneri. Collineazioni in S_r . Punti uniti. Collineazioni assiali. Involuzioni.

16 Genn.^o 1891

Proiettività in S_r . Polarità. Sistemi nulli. Quadriche e loro generazioni.

19 Genn.^o 1891

Varietà M_{r-1} d'ord. n di S_r . Coefficienti. Punti semplici e multipli e con tangenti. Polarità.- Interazioni di varietà. Sistemi lineari di varietà: proprietà diverse.

21 Genn.^o 1891

Varietà algebriche di dimensione $k < r + 1$. Loro proiezioni. Loro ordini (teor. relativo) Rappresentaz. di una tal varietà mediante trasformazione razionale di una M_k di S_{k+1} .

23 Genn.° 1891

Consideraz. su tale rappresentazione. Numero delle intersezioni di due varietà M_k , M_{r-k} ecc. ecc. Varietà luoghi di ∞S_i ; coni di varie specie e dimensioni. Caratteri di una curva di S_r .

26 Genn.° 1891

Cenno sulle formole di Cayley e Veronese. – Caratteri di una superficie e di una varietà: piani e spazi tangenti ecc. Varietà appartenenti ad S_r e normali. Teorema di Clifford sul massimo spazio a cui appartiene uno C^n e sua estensione a varietà qualunque.

28 Genn.° 1891

La C^n appartenente ad S_n : sue generazioni proiettive. – Generazioni proiettive delle rigate d'ord. $n - 1$ di S_n .

30 Genn.° 1891

Estensione alle ∞^1 di S^i d'ordine $n - i$ appartenenti ad S_n . Alcune applicazioni della geometria degl'iperspazi. 1° alla geometria della retta; teor. di Clifford applicato alle rigate.

2 Febbr.° 1891

2° ai sistemi di forme di qualunque indice contenuti in un sist. lineare. Altro modo di applicare gl'iperspazi nello studio di un sist. lineare ∞^r di forme di un S_k ($r \geq k$). Questo sist. rappresenta una M_k di S_r e viceversa; ecc. ecc.: caso di $k = r$, rappresentazione di due S_k l'uno sull'altro.

4 Febbr.° 1891

Considerazioni varie. – Se un sist. lineare è contenuto in un altro. le M_k che li rappresentano son proiezz. l'una dell'altra. Applicaz. alle curve razionali ed alla C^n di S_n . Applicaz. alle superf. rappresentabili.

13 Febbr.° 1891

Cap 3°. Oggetto della geometria su una ∞^1 algebrica.

I punti di vista nelle varie geometrie. La geometria su una ∞^k algebrica. Corrispondenze algebriche. Definizioni.

16 Febbr.° 1891

Proprietà e rappresentazioni delle corrispondenze algebriche. Corrispondenze univoche in particolare. Corrispondenze fra varietà razionali. La geometria su una varietà razionale.

18 Febbr.° 1891

Serie lineari di gruppi di punti su una curva. Come entrino nella geometria sulla curva. Definizioni e legami col sistema lineare di varietà che le definiscono. Prime proprietà. Esempio: serie date da curve aggiunte sulla curva piana.

20 Febbr.° 1891

Continuaz. Prime proprietà delle serie così definite.

Come una serie g'_n definisce una C^n di S_r che la rappresenta. Legame colla trasformazione univoca di una curva. Studio di questa quistione.

23 Febbr.° 1891

Esempio: trasformaz.^e univoca di una curva piana. Ragione dell'uso delle curve

aggiunte per definire le serie lineari sulle curve piane. – Rappresentazione di una g_n^r composta mediante una ∞^1 di gruppi di μ punti con una C_n^μ di S_r .

25 Febbr.° 1891

Continuaz. – Serie lineari contenute in una serie data. Le curve corrispondenti son proiezioni della curva rappresentante di queste.

27 Febbr.° 1891

Continuaz. Serie complete e serie parziali. Importanza delle serie lin.ⁱ. Problemi relativi ad esse e loro equivalenza coi problemi relativi alle curve dei vari spazi. Applicazioni. Cenno storico e bibliografico sulla geometria sull'ente algebrico e particolarmente delle serie lineari. Altri problemi.

2 Marzo 1891

Cap.4°. Geom. sugli enti razionali

Gli enti razionali. Le serie lineari su essi sono le involuzioni. Proprietà.

4 Marzo 1891

Principio di corrispondenza sull'ente razionale. Soluzioni multiple. – Applicazioni del principio allo studio delle corrispondenze. Curva generata da due fasci di rette in corrisp. $(\alpha.\alpha')\dots$

6 Marzo 1891

Altre applicazioni del principio di corrispondenza a curve e rigate. Elementi doppi di una I_n^1 . Elementi $(r+1)$ -pli di una I_n^r . Applicazioni.

9 Marzo 1891

Formula di Jonquières sul numero dei gruppi di un'involuz. aventi molteplicità qualunque date. Applicazioni.

11 Marzo 1891

Seguito. Applicazioni della C^n razionale normale alla geom. sull'ente razionale. – Teorema di Clifford sulla polarità di S_n data dalla C^n .

13 Marzo 1891

Applicazioni. Gruppi coniugati od armonici di n elementi. Involuzioni armoniche e loro relazioni. Polarità rispetto ad un gruppo di n elementi.

16 Marzo 1891

Seguito. Gruppi apolari rispetto ad un dato gruppo di n elem.ⁱ; rappresentaz.ⁱ analitiche e geometriche. Le involuzioni di ordine $n+1$ sulla C^n . Piramidi iscritte nelle curve raz.^{li} normali.

18 Marzo 1891

Altri problemi sulle involuzioni. Cap.5°. *Le serie lineari ∞^1 . Genere degli enti algebrici.* Le serie lineari ∞^1 in un ente algebrico qualunque. Funzioni razionali dell'ente. Costanza della differenza fra in numero degli elem.ⁱ di diramazione e il doppio dell'ordine di una serie lin. ∞^1 . Genere. Sua invariabilità.

20 Marzo 1891

Elem.ⁱ di diramazione multipli. Cenno sui moduli. Genere di una curva piana con singolarità qualunque. Applicaz.ⁱ della curva piana alle g_n^r . Numero degli elementi $(r+1)$ pli di una g_n^r sull'ente di genere p .

3 Aprile 1891

Caso di una serie composta. Rappres.^e dell'ente algebrico con una curva piana con

sole singolarità ordinarie (o soli nodi). Tutte le serie lineari si hanno allora mediante curve agg.^{te}. Per una g_n^r completa è $n - r \leq p$.

6 Aprile 1891

Quando $n > p$ si può sempre assumere ad arbitrio un gruppo e si ha $r > 0$. – Serie speciali e non speciali. Esempi di serie speciali colle agg.^{te} di ord. $m - 3$. Applicazioni alle curve, speciali e non speciali, normali e non. – Rappresentazioni particolari degli enti di genere 1, 2, 3.

8 Aprile 1891

Rappres. di un ente con una g_n^1 ed una $g_m^{1'}$. Cioè con due funz.ⁱ razionali s, z di gradi n, m . Procedimento analitico. Procedimento geometrico: curva piana di ordine $m + n$. Applicazioni.

10 Aprile 1891

Abbassamento nell'ordine di quella curva. Applicazione alle g_2^1 . Enti con due g_2^1 : $p = 0$ o $p = 1$; distinzione. *Enti ellittici ed iperellittici*. Si rappresentano con curve piane di gen. p e ord. $p + 2$ con punto p -plo; od analiticamente con $W^2 = R(z)$ polinomio di grado $2p + 2$ o $2p + 1$.

13 Aprile 1891

Moduli degli enti iperellittici di genere p . Caso degli enti ellittici: le ∞g_2^1 danno lo stesso birapporto; applicazioni alle cubiche piane, corrispondenze $(2, 2)$ fra enti razionali ecc. – *Serie lineari speciali* sugli enti iperellittici. Sono le involuzioni entro la g_2^1 : son fra loro residue rispetto all'unica g_{2p-2}^{p-1} , ecc.

15 Aprile 1891

Cenno sulla via da tenersi in seguito.

CAP 6°. Formola di Zeuthen. Varietà ∞^1 di spazi e loro applicaz.ⁱ.

Elem.ⁱ diram. in una corrispondenza $(1, \mu)$ fra due enti. Applicazioni. Generalizzazione. – Formola di Zeuthen.

17 Aprile 1891

Elem.ⁱ diram.^e di una ∞^1 di gen. π di gruppi di m punti di una γ_p ; varietà ∞^1 di gen. π di spazi. Caso della rigata: formola che le lega ad una sua curva qualunque.

20 Aprile 1891

Formola di Schubert pel numero dei gruppi di un'involuz. d'ord. m (e genere π) su una γ^n di S_r con 2 punti coincidenti.

22 Aprile 1891

Formola fondamentale che lega i caratteri di quell'involuzione a quelli della curva. Applicazioni. Numero dei gruppi di $r + 1$ p.ⁱ comuni ad una g_n^r e ad un'involuzione qualunque. Varietà M_{k+1} di $\infty^1 S_k$: varietà normali, speciali e non.

24 Aprile 1891

I gruppi di una g_Q^q su una curva speciale stanno in S_{Q-q-1} . Applicazioni. Per una g_n^r speciale è $n \geq 2r, r \leq p - 1, n \leq 2p - 2$. Conseguenze. La g_{2p-2}^{p-1} segata sulla γ^m piana dalle ϕ^{m-3} aggiunte.

27 Aprile 1891

Curva e serie *canonica*. Per suo mezzo la geom. *sull'ente* si riduce alla geom. *proiettiva* (della curva armonica). Teorema di Riemann e Roch. Sue varie forme, analitiche e geometriche.

29 Aprile 1891

Considerazioni sull'importanza e la fecondità del teorema di Riemann e Roch. Serie g_{2r}^r speciali. Applicazioni alle rigate speciali. Le rigate di genere $p > 0$ e d'ord. n di S_{n-p+1} sono coni. In generale quelle di $S_{n-p-i+1}$ hanno una curva direttrice speciale.

1° Maggio 1891

Seguito: caratteri di quella direttrice. Applicazione alle rigate di S_{n-p} , S_{n-p-1} , ...

CAP. 7°. Serie complete. Serie residue. Curve agg.^{te}. Applicaz.ⁱ.

Le due serie d'ord. n fanno un gruppo comune, esse son contenute in una stessa serie.

4 Maggio 1891

Continuaz. Conseguenze. Applicaz. alle serie complete. Una serie completa è individuata da un suo gruppo; ecc. I resti di uno o più elementi rispetto ad una serie completa formano una serie completa. Applicazione alle curve aggiunte di una γ^m piana.

6 Maggio 1891

Le serie complete ottenute mediante le curve aggiunte. Il Restsatz. – Le curve agg.^{te} che nei p^i s-pli di γ hanno p^i s-pli hanno fuori di questi una serie completa. Applicaz. ai sist.ⁱ lineari di curve piane ed alle superf. razionali normali. Casi dei generi 0 e 1.

8 Maggio 1891

Serie residue rispetto ad una data serie completa. Applicaz. a precisare meglio il teorema Riemann-Roch. Teorema di reciprocità di Brill e Nöther per due serie residue risp. alla serie canonica. – Applicaz. del teor. R.-R. alle γ^n piane proiezz.ⁱ di C^n di S_r .

11 Maggio 1891

Cap. 8°. Il metodo algebrico di Brill e Nöther. Il teorema $Af + Bq$ di Nöther. Teorema del resto. Applicazione alle serie complete, residue, ecc. Teorema di riduzione di Nöther.

13 Maggio 1891

Sue varie applicazioni alle serie speciali. La g_{2p-2}^{p-1} ; ecc. Teorema di Riemann e Roch. Inverso del teor. di riduzione: condizioni perché una serie completa abbia un punto fisso. Applicazione alle C^n di S_r . Applicazione funzionale.

15 Maggio 1891

Applicazione al Lückensatz di Weierstrass ed alla generalizzazione fattane da Nöther. Ecc.

Cap. 9°. Rappresentazioni reali dell'ente alg.^o. Il metodo funzionale di Riemann.

L'ente algebrico come ∞^2 : sua natura. Analogie con una superficie (reale) chiusa. La questione della rappresentabilità. Caso dell'ente razionale: piano e sfera. Caso generale $F(s, z) = 0$. Piano e sfera di Riemann.

18 Maggio 1891

Superficie di Klein per rappresentare gli enti algebrici: esempi. Altre superficie che servono per tali rappresent.ⁱ. Superficie chiuse ed aperte, bilatere e unilatero.

L'Analysis situs. I tagli di una superficie. Numero fondam.^{le} e genere di una superficie chiusa. Applicaz.ⁱ.

20 Maggio 1891

Seguito. Importanza ed applic.ⁱ del genere. Le *funzioni complesse* su una superficie. Legame fra loro e con una forma diff.^{le} quadratica definita $ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$ Parametri differ.^{li} relativi a questi. Equazioni differ.li a cui soddisfano le funzioni complesse su una sup. Ecc.

22 Maggio 1891

Interpretazione geometrica dell'equaz. $ds^2 = 0$ e delle cose precedenti. Come e quando le funz.ⁱ complesse di una sup. si mutano in funz.ⁱ complesse su un'altra in corrispondenza con quella. Rappresentazioni *conformi* delle superficie fra loro. Applicaz.ⁱ. Legame coi *flussi stazionari* della fisica matem. Come ad ogni tal flusso corrisponda una funz. complessa sulla sup.

25 Maggio 1891

Le funz.ⁱ univoche con soli poli su una superficie. Son legate algebricam. Danno le funz.ⁱ razionali dell'ente algebrico. – I loro integrali (Abeliani). – Proprietà caratteristiche di tutte queste funz.ⁱ. Teorema di esistenza di Riemann: cenno sulla questione e sulla sua storia. Il principio di Dirichlet. Il metodo fisico di Klein.

27 Maggio 1891

Applicazioni del teorema di esistenza di Riemann. Integrali di 1^a e 2^a specie Loro espressioni mediante quelle normali. Espressione di Riemann di una funzione dotata di soli poli (funz. raz.^{le} dell'ente algebrico) mediante somma di integrali di 2^a sp. Applicaz. alla dimostraz. del teor di Riemann-Roch. Teorema di Abel per gli integr.ⁱ di 1^a specie.

29 Maggio 1891

Sua applicazione ad una dimostraz. del teor. Riemann-Roch. Come questo teorema e precisam. i gruppi speciali di punti compaiono pure nel problema d'inversione di Jacobi e quindi nella questione dell'annullarsi identico delle funzioni θ . Teor. geometrico, relativo alla determinaz. di una classe di enti mediante i val.ⁱ di diramaz. di una g_n^1 , in cui si traduce il teor. d'esistenza ecc.

1° Giugno 1891

Cenno sulla rappresentaz.^e delle funz.ⁱ raz.^{li} dell'ente come funz.ⁱ *uniformi* di un parametro. Funzioni di Poincaré, Klein ecc.

CAP 10°. I moduli. Le serie lineari sugli enti generali.

La questione delle corrispondenze univoche fra due enti o su un sol ente, e la questione dei moduli. Casi $p = 0, 1$. Come per $p > 1$ si fissi una particolare g_m^1 .

3 Giugno 1891

Applicazioni. In un ente $p > 1$ non vi posson essere infinite corrispondenze univoche. Corollari. Numero dei moduli di un ente qual. Dimostraz. di Riemann. Applicazioni alle rappresentazioni conformi di superficie di gen. p .

5 Giugno 1891

La questione delle g_n^2 su un ente di genere p . Se i moduli son generali, sarà $(r + 1)(n - r) - rp \geq 0$ l'ord. d'infinità di tali serie. Le γ_p^n di S_r ; in partic. le curve

sghembe di S_3 . – Applicaz alle serie minime ∞^1 e ∞^2 . Curve piane dei minimi ordini rappresentanti un ente generale.

6 Giugno 1891

Metodo del Castelnuovo per risolvere la questione delle g_n^r su un ente dato. Come in casi particolari si possa risolvere completamente tale questione. Esempio. Esercizi.

2. Registro delle lezioni della Scuola di Magistero dettate dal sig. Prof. Cav.^r Corrado Segre nell'anno scolastico 1907-908. ASUT, Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali, Scuola di Magistero, Registri delle lezioni e relazioni finali, 1907-08.²³

30 Nov^e 1907

La Matematica e l'esperienza

7 Dic^e

La Matematica in relazione colle applicazioni. La Matematica logico-deduttiva. Scopi dell'insegnamento elementare della Matematica. L'intuizione e i postulati.

14 Dic^e 1907

Seguito. Non occorre l'indipendenza dei postulati. Il rigore. Come si concilia colle altre esigenze didattiche. Osservazioni varie sul metodo.

21 Dic. 1907

Norme per gli esercizi di matematica. Sulla discussione delle figure (col sig. Artom). Indicazioni bibliografiche varie.

11. I. 1908

I numeri negativi (sig^{na} Peyroleri) (*L'Univ^a era chiusa nei giorni 25 I e 1 II*)

18. I. 1908

Seguito (Sig^{na} Cairo)

8. II. 1908

Problemi elementari di massimi e minimi (Artom)

15. II. 1908

Seguito (Artom)

22. II. 1908

Divisibilità dei numeri (Sig^{na} Baggi)

7. III. 1908

Seguito (Baggi). Numeri primi. Massimo comun divisore (Fracchia)

12. III. 1908

Seguito. Minimo comune multiplo (Fracchia) Sui programmi esteri di riforma dell'insegnamento delle matematiche elementari (D^r Rovetti)

21. III. 1908

Seguito. Analisi di alcuni sviluppi contenuti in un trattato elementare del Tannery (D^r Rovetti)

²³Per quanto riguarda i nomi di autori e gli scritti citati nel registro, si rimanda alle note relative contenute nell'edizione del quaderno corrispondente. Per notizie concernenti gli studenti citati si rimanda alla *Appendice 1*.

28. III. 1908

Trigonometria piana (Marnetto)

2. IV. 1908

Seguito (Marnetto). Proiezioni dei vettori. Formola di $\cos(a + b)$ (Cartasegna)

25. IV. 1908

Altre dimostrazioni delle formole fondamentali trigonometriche (Cartasegna)

2. V. 1908

Analisi indeterminata di 1° grado (Ricaldone)

9. V. 1908

Seguito (Ricaldone). Approssimazioni numeriche (decimali) (Capitelli)

16. V. 1908

Seguito (Capitelli). Cenni sulle *Leçons élémentaires* di Lagrange (S.C.)²⁴

23. V. 1908

Cenno sulle cautele da usare nella trattazione delle equazioni irrazionali (S.C.).

Sistema di 2 equazioni di 1° grado a 2 incognite (Artom)

30. V. 1908

Seguito (Artom). Considerazioni varie a proposito del libro di M. Simon «*Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik.*»

²⁴Si tratta della sigla di Segre Corrado.

FONTI ICONOGRAFICHE

1. Corrado Segre studente all'Università di Torino (UTo-ACS)
2. Corrado Segre nel 1899 (UTo-ACS)
3. Corrado Segre negli anni Venti (BMP-Segre)
4. Corrado Segre e la moglie Olga Michelli (UTo-ACS)
5. Lapide in onore di Corrado Segre (Dipartimento di Matematica, via C. Alberto, 10 Torino)
6. Gino Loria (in centro) e Corrado Segre (secondo da destra) con Luisa Pochintesta, Adelina Pochintesta, Sofia Rolandi-Meroni, Rachele Meroni, Pierino Meroni, Teresa Lorenzi-Galante, Guicciardini-Vaj e Carla Marchesi-Taddei. (BMP-Segre)
7. Pagina tratta da [*Appunti relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero*] (BMP-Segre)
8. Registro delle lezioni di Corrado Segre di Geometria superiore del 1890-1891 (UTo-ACS)

INDICE DEI NOMI

Abel, Niels Henrik 73 e n, 74, 157
Adler, August 117
Ahrens, Wilhelm 113, 114
Alasia, Cristoforo 118, 127
Alighieri, Dante 99 e n
Allais, Vittorio 136
Allio, Renata xxi
Amadio, Maria 150
Amaldi, Ugo 98n, 105, 116, 118, 123, 126
Amanzio, Domenico 118, 120
Ambrosetti, Maria Teresa 147
Amici, Nicola 119, 122
Amodeo, Federico vii, viii e n, xi
Amoroso, Luigi 96 e n
Amplatz, Micaela xxv
Andrade, Jules 124
Archenhold, Friedrich Simon xx, 112
Argand, Jean R. 61 e n
Artom, Emilio 133, 158, 159
Arzelà, Cesare 112, 118, 121
Ascoli, Marcel 108
Ascoli, Guido 117
Assunta, Bognetti 136
Avellone, Maurizio xi e n
Bachet De Méziriac, Claude 114
Bachmann, Paul 116
Badiale, Marino xxv
Baggi Sig.^{na} 158
Baker, Henry Fredrick vii e n
Baltzer, Richard 119, 121, 123
Bandiera, Attilio 147
Bardey, Ernst 127
Barla, Eugenio 145
Baroni, Ettore 119, 121

Bassani, Anselmo 124
Basso, Giuseppe xii
Battaglini, Giuseppe xii
Behrendsen, Otto 107
Beke, Emanuel 110
Beltrami, Anna 136
Beltrami, Eugenio xii, 65 e n, 68n
Bemporad, Azeglio 111
Benedetti, Piero 125
Bertacchi, Maria 144
Bertini, Eugenio v, x, xi e n, 4, 14, 37 e n, 39
Bertrand, Joseph 112, 121
Berzolari, Luigi vii e n
Bettazzi, Rodolfo xxii, 109, 111, 126
Betti, Enrico xii
Birkemeier, Wilhelm 111
Bobba, Maria 148
Boffa-Tarlatta, Ortensia 140
Bompiani, Enrico vii
Bonferroni, Carlo Emilio 139
Bonghi, Ruggero xii
Bonola, Roberto 123
Borel, Emile xx, xxii, 92n, 93n, 97, 101 e n, 102n, 108, 115, 125
Borghino Sinleber, Giuliana xxv
Bortolotti, Ettore 116, 120, 121, 124, 126, 127
Bottomley, James 119
Bourlet, Carlo 112, 120, 121, 125, 126
Boutroux, Pierre 107, 114
Boverio, Ernesto 142
Boyer, Jacques 113
Braggio, Caterina 146
Braunmühl, Anton Edler von 113, 119
Brigaglia, Aldo ivn, vin, xin, xxiin, xxv
Brill, Alexander v, viii, ix, x, xi, 3, 26 e n, 54, 57 e n, 156
Brioschi, Francesco viii
Bruera, Stefano 145
Bruzzone, Marianna 138
Burali-Forti, Cesare 121
Burkhardt, Heinrich 116
Cairo, Emma 133, 158
Cajori, Florian 114
Calvino, Italo iii e n
Camerano, Lorenzo 135, 136, 142
Campetti, Adolfo 144
Cantoni, Giovanni xii

Cantor, Georg xxi
Cantor, Moritz vi
Capelli, Alfredo 104 e n
Capitelli 159
Capra, Tullia 142
Capuzzo, Silvia xxv
Caramelli, Olga 131
Carmarino, Maria Teresa 149
Cartasegna 159
Casetta, Gemma 141
Casnati, Gianfranco ivn
Casorati, Felice viii, xii
Cassani, Pietro 118, 120
Cassina, Opimio 146
Cassina, Ugo 146
Cassissa, Elena 140
Castellaro, Cristina 142
Castelli, Teresa 137
Castelnuovo, Guido iv e n, v, vi e n, vii, viii e n, ix, x e n, xi, 27 e n, 30n, 36, 39, 46, 49, 81, 93 e n, 108, 158
Castle, Frank 119
Catania, Sebastiano 101 e n, 112, 120, 121, 126
Cattaneo, Paolo 127
Cauchy, Augustin Louis 5 e n, 64, 69
Cayley, Arthur x, 15 e n, 17 e n, 153
Chasles, Michel 21 e n, 28
Chevrel, Georges 125
Chini, Mineo 116
Chisholm, Grace vii, xviii e n
Ciamberlini, Corrado 111
Ciliberto, Ciro vin, viin
Clairaut, Alexis 122, 125
Clebsch, Rudolf Alfred 11 e n, 26 e n, 71, 72 e n, 74
Clifford, William 16n, 31, 48, 49, 153, 154
Coen, Salvatore viin
Colombo, Ofelia 133
Comberousse, Charles de 125
Comi, Tersilla Leonarda 137
Concina, Umberto 120
Conte, Alberto ivn, viin, xiii, xvi
Conti, Alberto 104 e n, 120
Coolidge, Julian vii
Cordero di Montezemolo, Elena 138
Court, Planel 122
Cremona, Luigi viii, 18 e n, 28

Crespi-Baccin, I. 127
Croce, Benedetto xii
Cytron, Abram 134
Cytron, Davide 134
D'Ovidio, Enrico iii, v, viii, xii, 11 e n, 103 e n, 122
D'Ocagne, Maurice 115
Daniele, Maria 147
De Benedetti, Estella iii
De Franchis, Michele 118, 119, 124
De Morgan, Augustus 111
De Paolis, Riccardo 63n, 122
Dedekind, Richard viii
Del Pezzo, Pasquale 15 e n, 16n, 19 e n, 55
Del Vecchio, Ettore 139
Deruyts, François 30n
Desargues, Girard 9 e n
Di Sieno, Simonetta xxii
Dickstein, Samuel vi
Dieck, Wilhelm 111, 115
Dirichlet, G. Lejeune 69 e n, 70 e n, 157
Diva, Durando 139
Druetti, Maria Carmela 132
Duhamel, Jean Marie C. 108
Dusi, Teresa 136
Elsa, Bachi 140
Engel, Friedrich 123
Enriques, Federigo vii, 97n, 98n, 105, 116, 118, 123, 126
Euclide 87 e n, 95, 102, 109
Euler, Leonhard 122
Faà di Bruno, Francesco xii
Fano, Gino v e n, vii, x, xi e n, 133
Färber, Carl 107
Fazzari, Gaetano 113, 120
Fehr, Henri 110
Fileti, Michele 134, 135, 136, 137
Finzi, Cesare xii
Fitzpatrik, J. 125
Fontanari, Claudio xxv
Fortunato, Ernesto 134
Fourrey, Emile 114, 115
Fracchia 158
Frattoni, Giovanni 111, 116, 118, 119, 121
Frère Gabriel-Marie 126, 127
Fricke, Robert 27 e n, 69n, 70, 71, 72 e n
Frisone, Rosetta 135

Fritzsche, Maria Paola 137
Frobenius, Ferdinand G. iv
Fuà, Daniele xxv
Fuà, Silvano xxv
Fuchs, Lazarus 77
Furinghetti, Fulvia xiin
Furlani, Giacomo 111
Gaido, Margherita 132
Gallucci, Generoso 118
Gambera, Giovenale 145
Gamboli, Dionisio 113
Gandiglio, Maria 144
Garbieri, Giovanni 118
Garbolino, Laura xxv
Gario, Paola xxiin, xxv
Garrone, Laura 138
Gatto, Letterio ivn
Gauss, Carl Friedrich 61 e n, 68n, 70 e n
Gebhardt, Martin 114
Gee, William W. Haldane 119
Gheri, Italo 103 e n, 113
Ghigi, Luisa 145
Ghione, Franco xiin
Giacardi, Livia iii, ivn, vin, viin, xiin, xiii, xvi, xxin, xxiin, 151
Giambelli, Zeno vii
Gianasso, Severino 144
Giebel, Karl xviii, 117
Giorgi, Giovanni 124
Giorgina, De Giorgis 139
Giovanna, Greggi 135
Giuseppe, Quaglia 140
Godfrey, Charles 110
Gonella, Giovanni Battista 145
Gordan, Paul 26 e n, 71, 72 e n
Götting, Eduard 107
Grassi, Enrico 148
Grassmann, Hermann 89n, 121
Guglielmi, Amalia 141
Guichard, Claude 119, 125
Günther, Siegmund 112, 115
Gutzmer, August 110
Hadamard, Jacques xx, xxii, 109, 124
Halphen, Georges 15 e n
Halsted, George B. 124
Hawkins, Thomas vin

Heath, Thomas 124
Heis, Eduard 125
Helmholtz, Hermann L. von 67 e n
Henrici, Julius 123
Herbart, Johann Friedrich 104 e n
Hermite, Charles 93 e n
Hidalgo, Laura 148
Hilbert, David xviii, 89 e n, 92 e n, 122
Hjelmslev, Johannes 105n, 106, 117
Hobson, Ernst W. 120
Höfler, Alois 66
Hoüel, Jules 112, 115, 119, 123
Hovestadt, Heinrich 109, 119, 124
Hudson, Hilda Phoebe 117
Hugues, Luigi 96 e n
Hurwitz, Adolf 73 e n, 77 e n
Ingrami, Giuseppe 123
Jacob, J. 110
Jacobi, C. Gustav 74 e n, 157
Javelot, R. 127
Jonquières, J.-Ph. Ernest 28 e n, 29 e n, 154
Jordan, Camille 64n
Karpinski, Louis Charles 113
Kempe, Alfred 117
Killing, Wilhelm 109, 119, 123, 124
Kilpatrik, Jeremy xxn
Klein, Felix v, vi, viii, xx e n, xxin, xxii, 19 e n, 27 e n, 62 e n, 63 e n, 64, 68, 69n, 70, 71, 72 e n, 77, 78, 88n, 89 e n, 101 e n, 102 e n, 105n, 108, 109, 110, 119, 156, 157
Kronecker, Leopold v, viii, 5n, 70
Lacroix, Sylvestre F. 111
Lagrange, Joseph-Louis 159
Laisant, Charles-Ange xx, xxii, 97 e n, 107, 108, 125
Lamé, Gabriel 65 e n
Lazzeri, Giulio 124
Legendre, Adrien Marie 120, 125
Leibniz, Gottfried Wilhelm 63 e n
Leoncini, Michele 121
Leoni, Carlo 91n, 104, 111
Lerch, Mathias 29n
Lesser, Oskar 107, 109
Levi, Beppo vii
Liard, Louis 107
Libri, Guglielmo 113
Lietzmann, Walther 109, 111, 113, 124
Lindemann, C. Louis Ferdinand 71 e n, 72 e n, 74

Lo Monaco-Aprile, Luigi 107, 122
Locchi, Pia 146
Loewy, Alfred 121
Loria, Gino 101 e n, 113
Lucas, Édouard 113
Luciano, Erika ivn, vin, xxin, xxv
Lüroth, Jacob 28 e n
Luzzi, Guido 149
Mac Mahon, Percy Alexander 115
Maccone, Adriano 147
Maennchen, Philipp 114
Mago, Vincenzo 134
Maillet, Edmund 116
Mancinelli, Maria 143
Mannoury, Gerrit 111
Marchisio, Marina ivn
Marcolongo, Roberto xviii, 117, 119
Maria, De Stefanis 140
Maria, Gramegna 134
Marnetto, Antonietta 133, 159
Marotte, Francisque 101 e n, 108
Martini Zuccagni, Aroldo 119
Mascheroni, Lorenzo 117
Medici, Siro 107, 119, 122
Menghini, Marta xxii
Méray, Charles 115, 120, 123
Meroni, Maria 142
Mesturini, Camilla 149
Meyer, W. Franz vii, 32 e n, 107
Mieli, Aldo 114
Migliorero, Caterina 143
Mignosi, Gaspare 116
Miller, George A. 114, 115
Minio-Bisson, Ersilia 109
Mo, Vittoria 132
Möbius, August Ferdinand 62 e n, 63n
Mohrmann, Hans vii
Molk, Jules 115
Mongini, Jeannette 147
Moore, Clarence Lemuel vii
Moreux, Theophile (Abbé) 117
Moritz, Robert Edouard 114
Mosca, Pietro 134
Mougin, Émile 119
Muggia, Natalia 140

Müller, Felix 115, 123
Müller, Hubert 123
Murineddu, Antonio 137
Musso, Clotilde 150
Naccari, Andrea 126, 131-142
Nagel, Christian Heinrich 127
Natucci, Alpinolo 116
Neppi Modona, Angelo 120
Netto, Eugen 107
Neumann, Carl Gottfried 63 e n, 68 e n, 70, 74
Newton, Isaac 88 e n
Nöther, Max v, viii, ix, x, xi, 3, 26 e n, 34 e n, 35, 37 e n, 54, 57 e n, 58 e n, 59, 60, 61n, 77 e n, 156
Novaria, Paola ivn, xiii, xvi, xxv
Oddone, Silvia xxv
Oneglio, Teresa 132
Orlando, Emanuele xiiin
Ortu-Carboni, Salvatore 118, 126
Osimo, Alice 135
Oxilia, Francesca 141
Ozanam, Jacques 114
Padoa, Alessandro 116
Pagliano, Luigi Pietro 138
Paglieri, Rosa 141
Palatini, Francesco 120
Palomba, Margherita 150
Panizza, Francesco 127
Pareto, Vilfredo 96 e n
Parona, Carlo Fabrizio 131-150
Pascal, Blaise xviii, 100 e n
Pasch, Moritz 92n, 105n, 122
Pasquier du, Louis Gustave 116
Peano, Giuseppe xxi, 89n, 121, 122
Peirce, James Mills 119
Pelizzari, Elena 143
Pellerino, Palmira 150
Perotti, Severina 141
Perregaux, Charles 114
Perron, Oskar 116
Perry, John 101
Pesci, Giuseppe 119
Petersen, Julius 119, 125
Peyroleri, Margherita 133, 158
Piccini, Orietta xxv
Picco, Annetta 131

Pieri, Mario vi, 15 e n, 122
Pincherle, Salvatore 112, 120, 121, 127
Pisa, Angiolina 146
Pizzarelli, Chiara ivn
Platone 103 e n, 109
Plücker, Julius 4 e n
Pochettino, Alfredo 143-150
Poincaré, J. Henri xx, xxi, xxii, 75 e n, 77 e n, 108 e n, 118, 122, 157
Poirée, Jules 125
Poisetti, Eugenio 150
Poli, Luigi 144
Ponzio, Giacomo 140, 142-150
Predella Longhi, Lia 126
Puccianti, Luigi 142, 143
Quarra, Paolina 136
Radford, Ernest M. 127
Raffo, Raffaella 132
Ramorino, Angelo 121
Raspanti, Maria Anna xiin, 131
Raynaud, Dario 149
Rebière, Alphonse 114
Reidt, Friedrich 98 e n, 103, 104, 109
Reye, Theodor vi,
Ricaldone, Paolo 134, 159
Riecke, Eduard 108
Riemann, Bernhard viii, x, 3, 5 e n, 18, 33n, 39, 49, 50, 51, 55, 56, 59, 61, 62, 64, 68, 69
e n, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 77, 78, 155-157
Rigrillo, Giuseppe 147
Ritt, Georges 125, 127
Riva, Francesco 132
Rivard, Dominique 119
Rivelli, Alfonso xviii, 117
Rivera, Alberto Romano 126
Roch, Gustav x, 49n, 50 e n, 55, 56, 59, 61, 73 e n, 74, 155-157
Roero, C. Silvia ivn, vin, xxin, xxv, 131
Roggero, Ettore 137
Rossi, Maria Anita 143
Rouché, Eugène 125
Rouse Ball, Walter W. 98n, 112, 113
Rovetti, Carlo 132, 158
Rowe, David ivn
Royer, Maurice 122
Rucci, Francesco 146
Sallent Del Colombo, Emma viin, 133
Salmeri, Antonio xxv

Salmon, George 32 e n
Sannia, Achille 103 e n, 122
Savio, Maria Consolata 143
Scarcia, Giulia xxv
Scarzello, Maria Teresa 141
Schimmack, Rudolf 101 e n, 109
Schotten, Heinrich 123
Schubert, Hermann 32 e n, 33n, 46, 108, 112, 113, 115
Schubring, Gert xx
Schülke, Albert Martin 125
Schwab, Karl 107
Schwarz, Karl Hermann Amandus 70 e n, 76 e n, 77
Schwarzschild, Karl 88n
Schwering, Karl 109
Scorza, Gaetano vii, 118, 124
Segre, Abramo iii
Segre, Amalia 138
Segre, Annetta 144
Segre, Corrado *passim*
Segre, Vittorina 139
Semeraro, Giuseppe xxv
Sernesi, Edoardo vin
Serra, Caterina 139
Serret, Joseph Alfred 119
Sertorio, Emilia 142
Severi, Francesco v e n, vii, xi
Siaci, Francesco xii
Simon, Max xxii, 98 e n, 103n, 108, 112, 123, 159
Sisam, Charles Herschel vii
Smith, David Eugene xxii e n, 110, 113, 117
Socci, Antonio 118
Socrate 103 e n
Solustri, Alfredo 127
Sommerfeld, Arnold 89 e n
Stäckel, Paul 123
Staudt, Karl Christian von vi, 12 e n, 62
Steiner, Jacob 19 e n
Stéphanos, Cyparissos 32 e n
Sterponi, Berardo 135
Stickelberger, Ludwig 57n
Stipa, Linda 148
Study, Eduard 99 e n
Sturm, Rudolf vi
Suppantshitsch, Richard 110
Tannery, Jules 101 e n, 107, 115, 119, 158

Tannery, Paul 113
Tanturri, Alberto vii
Taragna, Antonella xxv
Taverna, Teresa 149
Tealdi, Evangelina 136
Teixeira, F. Gomes 117
Terracini, Alessandro vii, x
Testi, Giuseppe M. 118
Thieme, Hermann 107, 124, 127
Thompson D'Arcy, Wentworth 114
Timerding, H. Emil 117
Tizzani, Emilia 148
Todhunter, Isaac 119, 127
Toffoletti, Carlo 115
Togliatti, Eugenio Giuseppe vii, 135
Toisoul, J. 114
Tolomei, Giulio 118
Travaglini, Irmo 146
Treutlein, Peter Paderborn xx, xxii, 117, 123
Tricomi, Francesco xix
Trier, Viggo 113
Tropfke, Johannes 112, 119
Troucana, Elgisa 144
Vaccaro, A. 115
Vahlen, Karl Theodor 5n, 116
Vailati, Giovanni xviii, 97 e n, 108, 110
Veblen, Oswald xi
Vercellin, Raffaele 137
Vernero, Carlo 148
Veronese, Giuseppe v, 15 e n, 19 e n, 35, 36n, 118, 122, 153
Verra, Alessandro ivn,
Vesin, Virginia 135
Viglezio, Elisa 143
Villavecchia, Angela 149
Viriglio, Luisa xviii
Vivanti, Giulio 122
Volterra, Vito vi
Voss, Aurel 57n
Vuibert, Henry 114, 117
Weber, A. 114, 124
Weber, Heinrich viii, 107, 112
Weierstrass, Karl iv, v, xxi, 33n, 38, 57n, 60, 61, 70, 76, 89n, 156
Wellstein, Joseph 107, 124
Wieleitner, Heinrich 115, 116
Witting, Alexander 114

Wolstenholme, Joseph 127
Wrapson, James P. 119
Wulliet, Giuseppe 127
Young, J. Wesley xvi, 111
Young, William H. vii, xviii e n
Zanotti-Bianco, Ottavio 126
Zappulla, Carmela xin
Zeuthen, Hieronymus G. 3, 28 e n, 41, 42 e n, 52, 63, 112, 155

Fra i maggiori artefici del 'risorgimento geometrico in Italia', Corrado Segre offre uno degli esempi più alti del ruolo di maestro nella storia della matematica. I suoi corsi universitari sono una vera fucina di futuri ricercatori. La migliore testimonianza del suo duplice ruolo di caposcuola e di educatore è rappresentata dai 40 quaderni manoscritti in cui sviluppava con cura, ogni estate, l'argomento del corso che avrebbe tenuto nell'autunno successivo.

Emblematici sono i due quaderni che qui presentiamo, che raccolgono rispettivamente le lezioni del corso di Geometria superiore del 1890-91 e quelle del Corso di matematica che Segre tenne per quasi vent'anni alla Scuola di Magistero dell'Università di Torino. Il primo, dedicato alla geometria sulla curva algebrica, costituisce la base della sua fondamentale memoria del 1894, Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito, che, come scrive l'allievo Francesco Severi, contiene 'le radici' della geometria algebrica italiana. Nel secondo, Segre, partendo da alcune considerazioni sulla natura della matematica, sugli scopi dell'insegnamento, sull'importanza dell'intuizione e sul rigore, propone un approccio innovativo alla formazione degli insegnanti, legato da un lato al suo modo peculiare di fare ricerca e frutto, dall'altro, di un attento esame delle recenti riforme e delle problematiche didattiche dibattute in Europa.

Corrado Segre (Saluzzo 1863-Torino 1924), leader della Scuola italiana di geometria, ricoprì presso l'Università di Torino la cattedra di Geometria superiore dal 1888 fino alla morte, e la carica di preside della Facoltà di scienze dal 1909-10 al 1915-16. Sotto la sua guida, fra il 1891 e il 1912, prese avvio a Torino la Scuola italiana di geometria algebrica che annoverava matematici di alto livello fra i quali G. Castelnuovo, F. Enriques, F. Severi e G. Fano, e che portò l'Italia ad assumere una posizione di primo piano (*führende Stellung*) sulla scena internazionale. La sua attività scientifica si esplicò in varie direzioni e in ciascuna di esse egli aprì nuove strade: la geometria proiettiva iperspaziale e i suoi fondamenti, la geometria birazionale, la geometria numerativa, la geometria proiettiva differenziale degli iperspazi e la geometria proiettiva nel campo complesso. Il corposo articolo *Mehrdimensionale Räume* (1921) per la *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, sugli spazi a più dimensioni, è un modello di chiarezza e di eleganza.