

C. Segre 1863-1924 Prof. di geom sup 1888-
in poi. Fu ai suoi tempi uno dei massimi
cultori degli studi geomci in Italia, e
in geom ha operato in campi e secondo indir-
izzi diversi, cosicch  studiando come fa-
remo alcuni dei suoi lavori, avremo occa-
sione di occuparci di varie parti della
geometria.

I lavori che studieremo saranno solo a
cuni

E' in corso la pubbl delle Opere di C
Segre (I Geom algebrica II Geom diff e
geom degli elti immaginari III, IV Geome-
tria proi ipersp. La class   un po' vaga,
p.e. tra I e III-IV)

Si potrebbe temere che prendendo come
filo conduttore una persona, risultasse
corso poco vario. Ma non  : S. si   occupa-
to di indirizzi svariati, e con metodi sva-
riati. Per dirlo in due parole, ~~per~~ spesso
ha lavorato in estensione pi  che in pro-
fondit . Leggere quanto scrive Castelnuo-
vo in comm lincea (Q p.1)

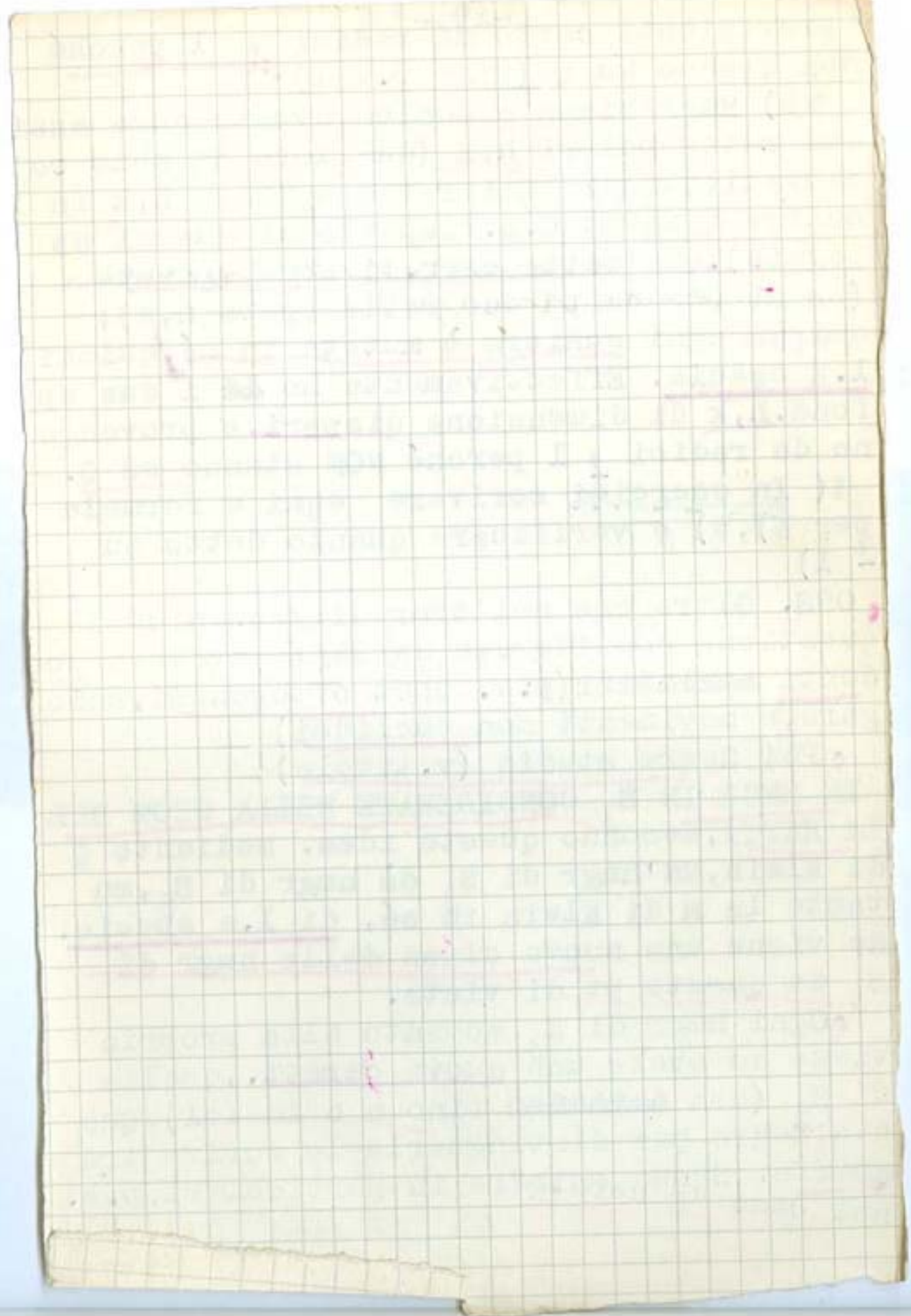
Per notizie d'insieme su Segre, v.

Castelnuovo cit (Lincai 2  sem 1924)

Coolidge Bull Am math Soc 1927 (scrive
che il "risorgimento" geometrico in Italia
  il risultato degli sforzi di alcuni
grandi maestri, tra cui appunto C. Segre)

Loria Ann di mat (4) II 1924

Berzolari RIL LVII 1924



Fano Ann Un Torino 1924-25

Suppl Rend Circ Palermo XV; 26-28

Baker Journ of the London math Soc I,
1926 (No. 1. Nov. 1926) (con. univ.)

Terracini Jahresb d. D M V 35, 1926

Severi Pref. al vol. I delle Opere

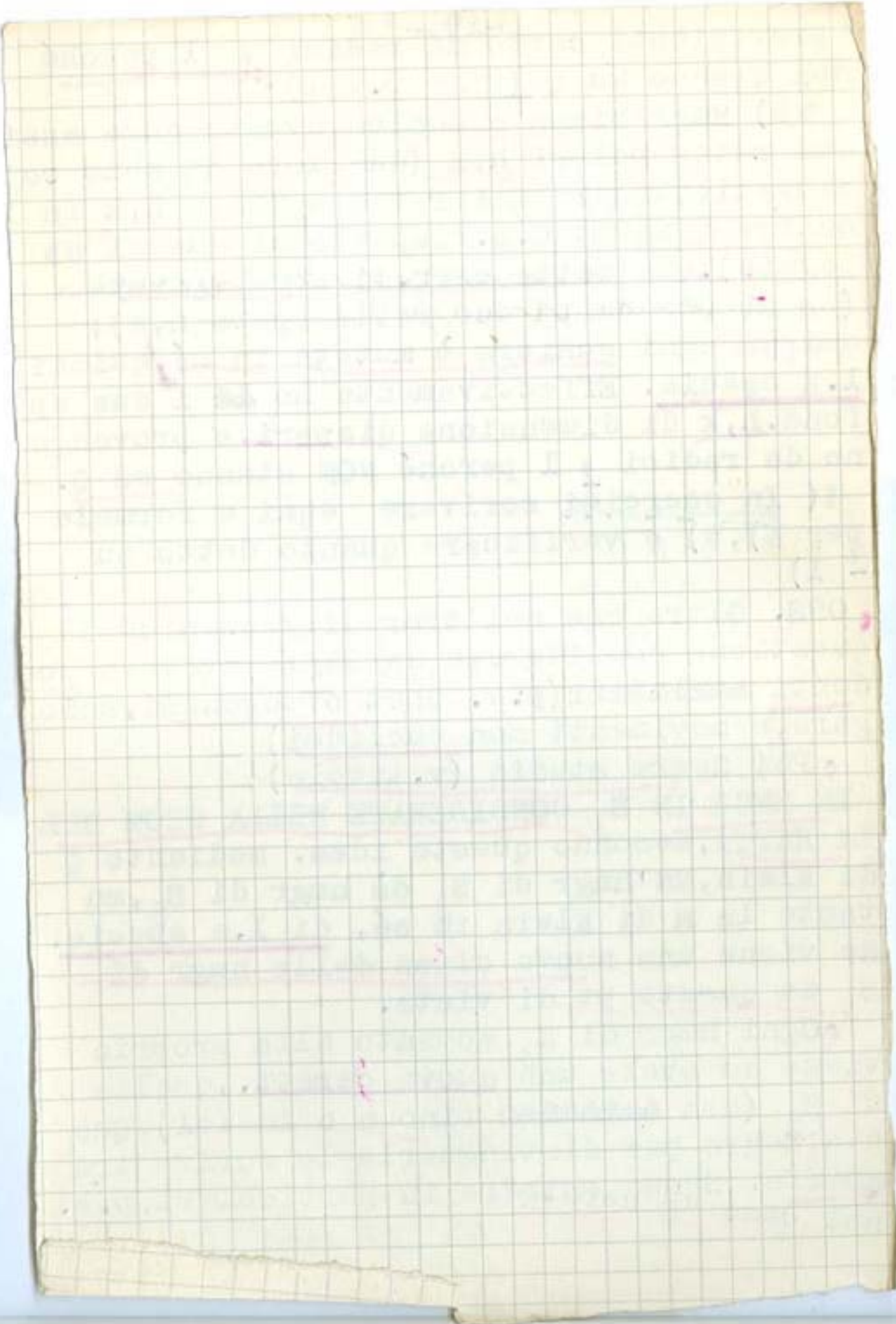
SU UNA TRASF IRRAZ DELLO SPAZIO E
SUA APPL ALLO STUDIO DEL COMPL QUADR DI
BATTAGLINI E DI UN COMPL LIN DI CONICHE
ISCRITTE IN UN TETRAEDRO (Giorn di mat
vol. 21, 1883)

Comincio con questo lavoro tra i piú
givanili, non tra i piú importanti, ma che
si presta per introdurre alcuni concetti
tra l'altro di G.d.R. che cosí avremo poi
a disposizione.

Questo lavoro risente della tendenza
affermatasi durante il secolo scorso di
introdurre trasformazioni che permettano
di applicare a figure nuove prtá ~~esse~~ già
studiate per fig. precedenti.

L'idea si può applicare bene o male.
Male quando si tratta di trasfni ovvie
che conducono a ptá dedotte subito con
cambiamenti di parole. Bene quando la tra
sformne è riposta, e allora si realizza un
effettivo progresso.

Naturalmente il fatto che una trasfne si



ovvia o no dipende dal momento storico, P
diamo p.e. la DUALITA. Il momento in cui s
è riusciti a stabilirla su basi sicure
ha costituito un vero progresso. A parti
r da quel momento ha perso ogni interes
se la sua applicazione a ogni caso parti
colare. Bast sapere che si può fare

Dedurre una ptá nuova da una vecchia
con una trasfne nota è quella che D'Ovi
dio chiamava tic-tac geometria.

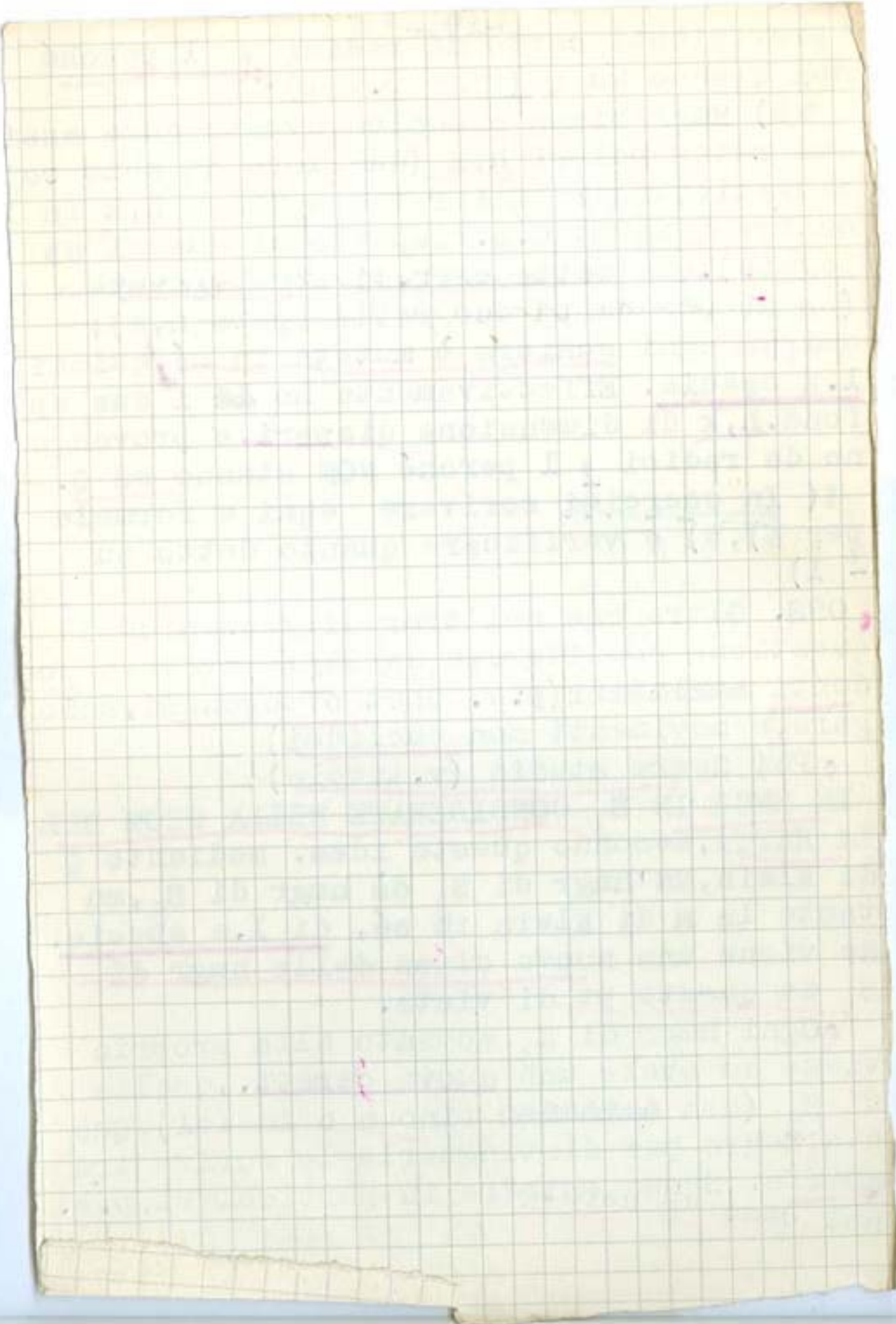
Invece ideare una nuova trasf.ne che l
gi campi fino allora ~~giacenti~~ ^{andati} costitui
sce un effettivo progr sso, vuol dire
creare la possibilità di studiare una qu
stione sotto aspetti diversi, in modo da
scegliere ogni volta il pm facile, o in
tuitivo

Dico subito che la molteplicitá di in
terpretazioni di uno stesso problema è
sempre stata presente a Segre. Varie sue
oss generali a questo proposito si legga
no in "~~alcuni~~ Su alcuni indirizzi nelle
investigazioni geometriche Riv di mat I
1891, variamente tradotto.

Venendo allavoro in esame, la trasfne
(non ^{v. l. h.} correttamente detta irrazionale...
spiegare) tra S, S' è

$$(1) \quad \boxed{z' = z, \quad y' = y, \quad x' = x}$$

Si può pensare a coord cart magari ort
o se no a proiettive non omogenee. La
T è (8,1) Se uso coord hom, hanno uno



stesso con gli 8 pt $(\pm 2, \pm 2, \pm 2, (\pm) x_1)$

In coord. cart. orb. ho una sola
corra a partire da P di S o da: non
simmetrica (rispetto a ...). In coord. orb
ho P e i suoi corr⁵

1) sulla 4 ovale armonica di centro A_1
e piani A_2, A_3, A_4

2) sulla 3 hyper bianc. ip. armonica
ovanti con assi spigoli opposti $gl\ 8\ pt\ in$
(H. un by di unghi, col' alt.) EQUIL

Ogni P fa parte di un Γ_8 di 8 pt egol
(gen. assymt.)
o $\infty \rightarrow$ costant P!

Un' opra piana. Un' opra rotte (genici)

Stando ai pt. si può dire che gli 8 di Γ_8
si collegano da uno di essi con le unghi
del by indotti

È un by abeliano. In H) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$

K) x_1, x_2, x_3, x_4 ($\varepsilon_i = \gamma_i \cdot \beta_i$) x_1
 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ $ho\ H \cdot K = K \cdot H$) $\varepsilon_1, \gamma_1, \beta_1$

* Da queste costatazioni (negative) si
 concludono i punti. Due pt. eg. di P
esp. le in due dir. U_1, U_2, U_3, U_4 sono
tra loro eg. rispetto a G_2 .

In $P \xrightarrow{U_1} A \quad P \xrightarrow{U_2} B$

$A \xrightarrow{U_1^{-1} U_2} B \equiv A \xrightarrow{U_1 U_2^{-1} U_2} B \quad c. d. d.$

Perciò gli 8 pt. eg. di P.

G_2 si ripartisce in due

quadranti: quello ~~superiore~~ e quello

inferiore eg. tra loro in G_2 .

p. c. (one) $\left. \begin{array}{l} U_5 U_1 = U_4 \\ U_6 U_1 = U_3 \\ U_7 U_1 = U_2 \end{array} \right\} (1)$

$\underline{U_1}$ $\underline{U_2}$ $\underline{U_3}$ $\underline{U_4}$ $\underline{U_5}$ $\underline{U_6}$ $\underline{U_7}$ $\underline{U_8}$
 (1, 2, 3, 4) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \end{pmatrix}$

le altre due

$$\underline{U_5} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \end{pmatrix} \quad \underline{U_6} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{U_7} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \end{pmatrix} \quad \underline{U_8} = \text{ult.}$$

Una p.c. $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \underline{U_7}$
 $\underline{U_5} \underline{U_6} = \begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \end{pmatrix} = \underline{U_7}$

e a:

$$\underline{U_5} \underline{U_7} = \underline{U_8} \quad \underline{U_6} \underline{U_7} = \underline{U_8}$$

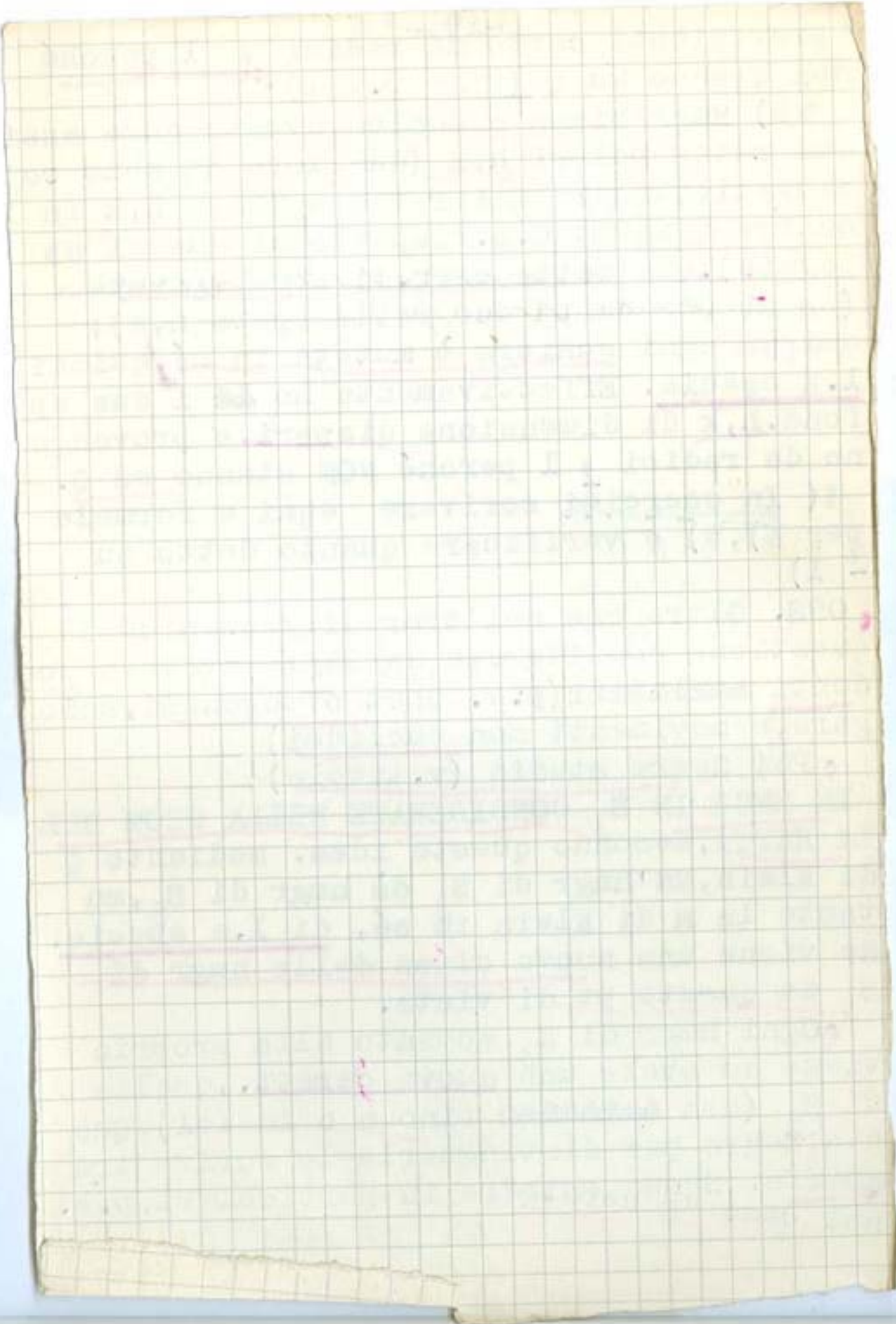
Complete per $\underline{U_8}$
 la tavola si vuole
 plagar **xx**

And $\underline{U_5} \underline{U_6} \underline{U_7} \underline{U_8}$ cattivano un sottogruppo G_4

$\underline{U_1} \underline{U_2} \underline{U_3} \underline{U_4}$ non p.c.

$$\underline{U_1} \underline{U_2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \end{pmatrix} = \underline{U_7} * \quad \boxed{U_i = I}$$

Venendo un momento alle rette, le otto ~~rette~~ a cui una è "EQUIVALENTE" rispetto al G_8 , si dividono in due quaterne, collocando in una stessa quaterna quelle EQVTI rispetto al G_4 . Ebbene, due rette di una stessa quaterna sono sghembe, di diverse quaterne incidenti



Prima di vederlo digressione su COORD
DI RETTA (radiali; indici cplari; eq
cond.; cond. incidenza)

Retta eq. rispetto a b_1 (y_1, y_2, y_3, y_4) p.e. linee e le
sue con. in V_1

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -y_1 & y_2 & y_3 & -y_4 \\ -z_1 & z_2 & z_3 & -z_4 \end{vmatrix}$$

Parallela p alle p' lasciando tutto invariato

sech $p'_{11} = -p_{14}$, $p'_{22} = -p_{23}$ sping. 1°

cond. d. incidenza:

$$p_{11} p_{22} + p_{13} p_{24} - p_{14} p_{23} - p_{22} p_{13} + p_{21} p_{14} + p_{24} p_{11} =$$
$$= -4 p_{11} p_{22} \neq 0 \text{ garant.}$$

sono sghembe rispetto a b_1

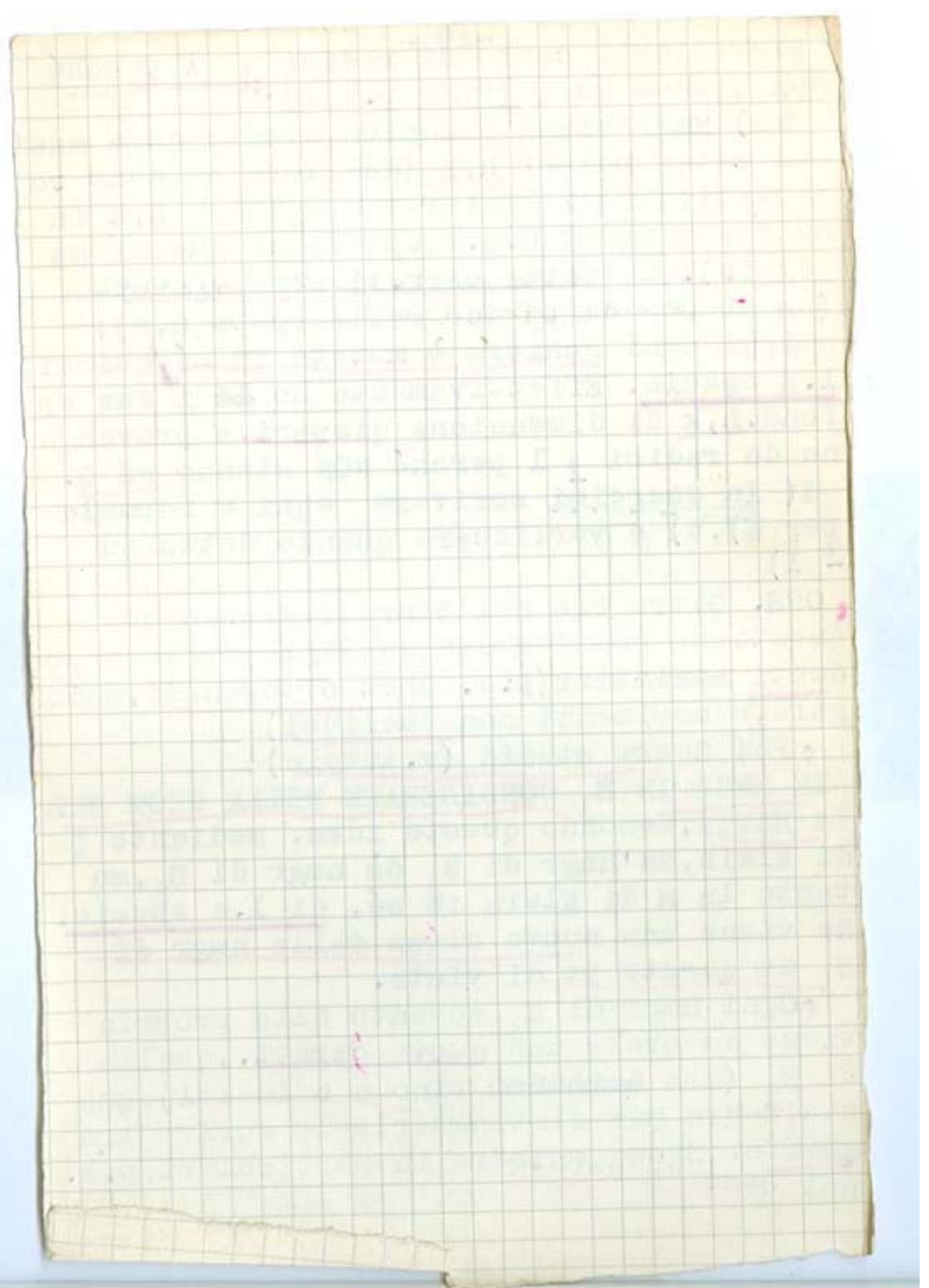
Retta con eq. b1 p.e. linee e loro p.e.

le sue con. in V_1

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & -y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & -z_4 \end{vmatrix} \text{ con}$$

$$p'_{11} = -p_{14}, \quad p'_{22} = -p_{23}, \quad p'_{33} = -p_{34}$$

$$1^{\circ} \text{ caso} = -p_{11} p_{22} - p_{12} p_{21} + p_{13} p_{24} + p_{23} p_{14}$$
$$+ p_{32} p_{13} + p_{34} p_{11} = 0 \quad \frac{\text{inc. d. d.}}{\text{c. d. d.}}$$



Quindi 8 rette eqvti rispetto al G_3
appartengono sempre a una quadrica, quat
RO IN CIASCUNA SCHIERA (Fare)

Tornando alle 8. ple di punti eqvti,
 aggiungo un'oss che non si trova in Segre,
 ma in un lavoro di Veronese di poco
 precedente, citato da Segre. Formo il
 tetraedro avente per vertici un pt e i
 suoi eqvti rispetto al G_4 , e, sia M , e
 quello, sia N avente per vertici gli
 altri 4 eqvti a P (i quali, p. 8, sono TRA
LORO ancora eqvti rispetto al G_4). E sia
 T il tetraedro di riferimento. Ebbene,
 i tre tetraedri M, N, T sono desmici (cioé
 le quattro quaterne di piani danno 3
 F^4 di un fascio; situazione analoga a
 trilateri sizigetici nel piano).

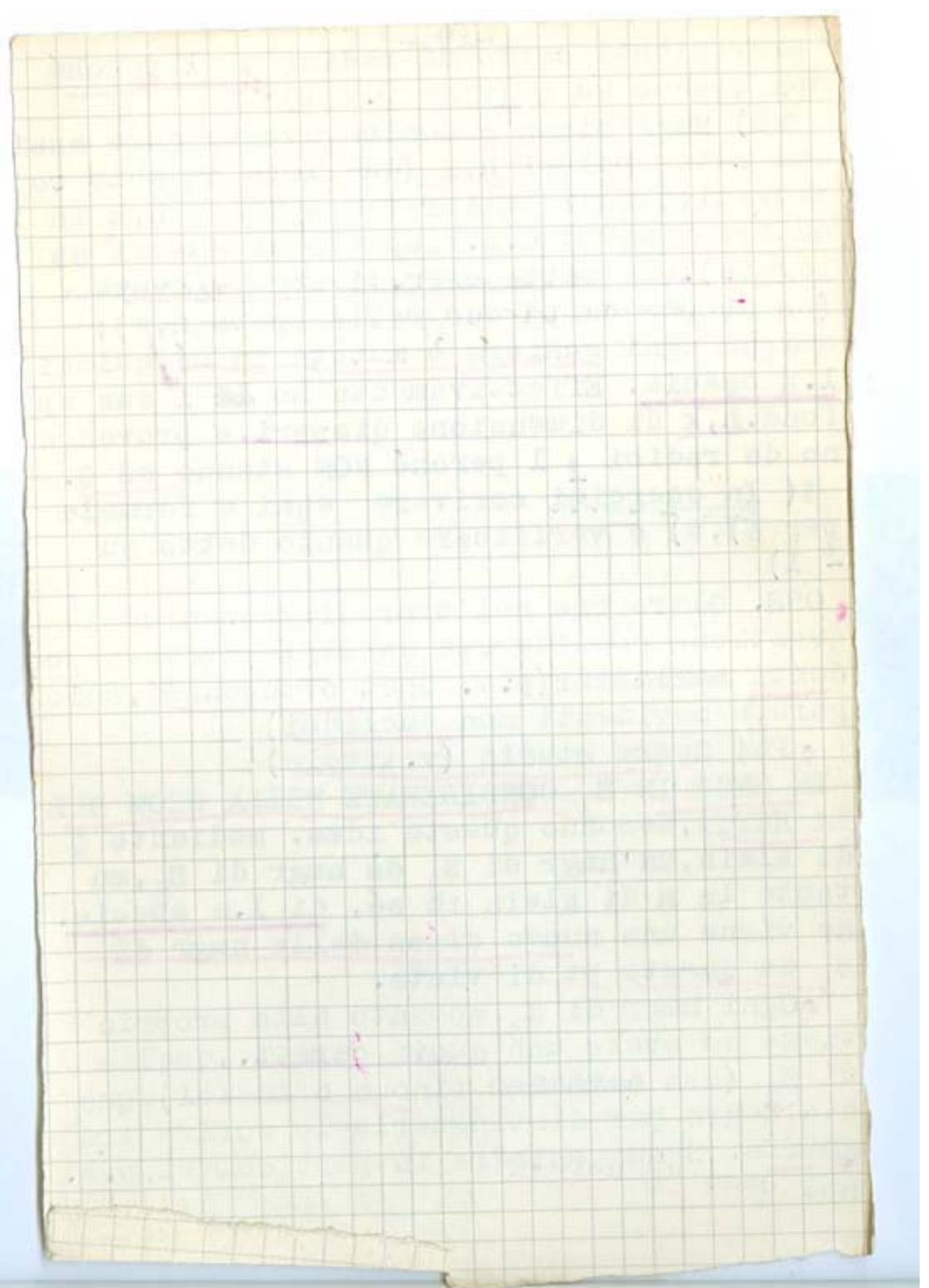
Per verificarlo, suppongo di avere scelt
 to il pt unitá in P , lecito, e pongo
 $P = (1, 1, 1, 1)$ $P_1 = U_1 P = (-1, 1, 1, 1)$ e cos' i
 via cioé

$$P_2 = (1, -1, 1, 1), P_3 = (1, 1, -1, 1), P_4 = (1, 1, 1, -1)$$

$$P_5 = U_5 P = (-1, 1, 1, -1), P_6 = (1, -1, 1, -1), P_7 = (1, 1, -1, -1)$$

$$P_8 = U_8 P = P$$

Verifichiamo anzitutto che i sept piani
 contengono i pt. sotto i lct



$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\
 -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\
 x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\
 x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\
 x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\
 -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\
 x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\
 x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 P_5 & P_6 & P_7 \\
 \hline
 P_1 & P_3 & P_4 \\
 \hline
 P_1 & P_3 & P_4 \\
 \hline
 P_1 & P_2 & P_6 \\
 \hline
 P_1 & P_2 & P_3 \\
 \hline
 P_6 & P_4 & P \\
 \hline
 P_5 & P_4 & P \\
 \hline
 P_5 & P_6 & P
 \end{array}$$

(parti circa el pt. per la pt. ma mi l'ave
 alle ungue)

Altre le F^4 e Altre M he per fare i peni -

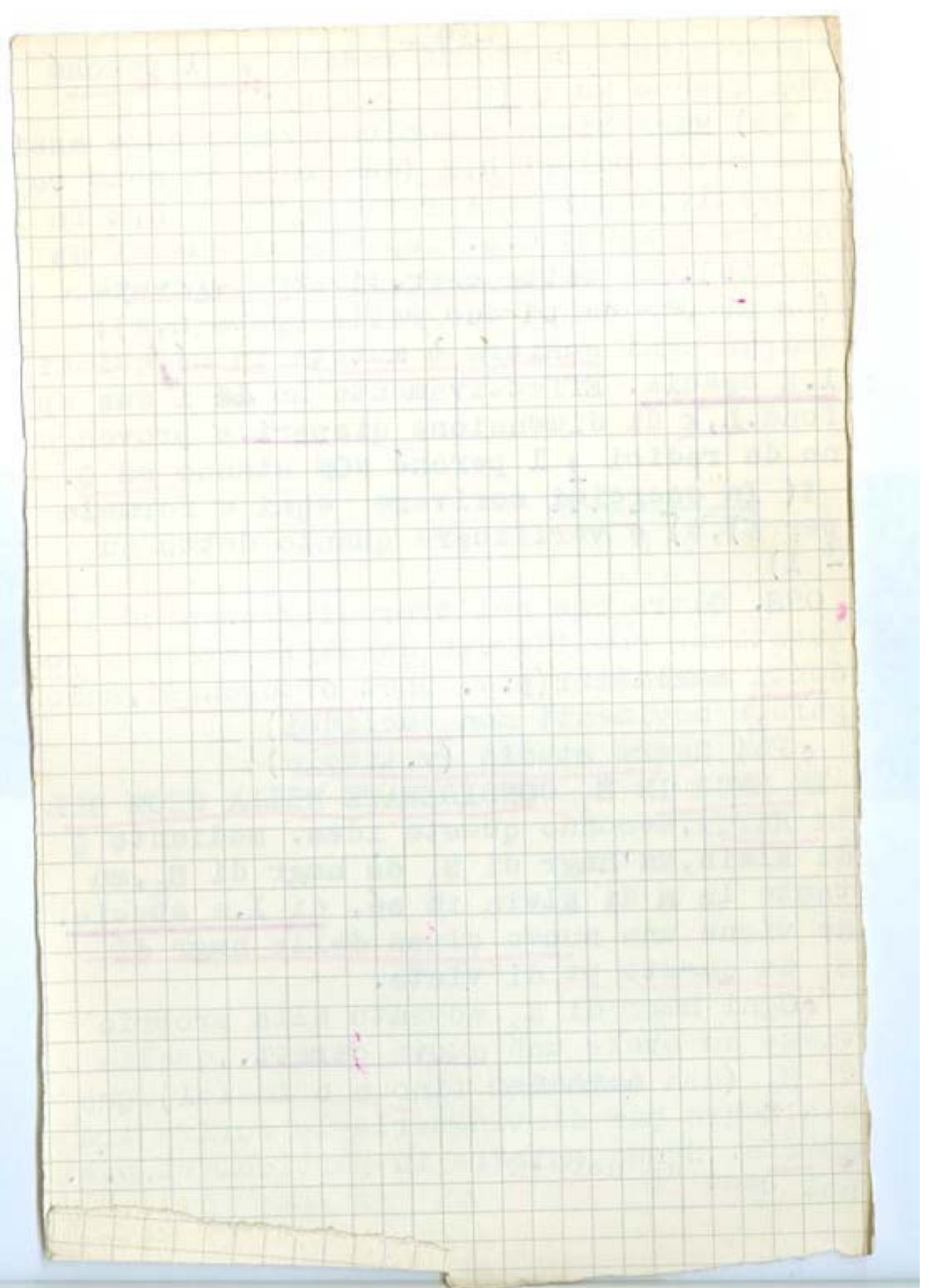
Ni peni = Que le lie F^6 non pu e q' e

$$(a^{10}) [(x_1 + x_2)^{-} - (x_3 + x_4)^{-}] [(x_5 - x_6)^{-} - (x_1 - x_2)^{-}] = 0$$

$$(a^{20}) [(x_3 + x_4)^{-} - (x_1 - x_2)^{-}] [(x_1 + x_2)^{-} - (x_3 - x_4)^{-}] = 0$$

$$(3) x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$$

$$(9) \underbrace{(x_1 + x_2)}_3 \underbrace{(x_3 - x_4)}_3 + \underbrace{(x_3 + x_4)}_3 \underbrace{(x_1 - x_2)}_3 - \underbrace{(x_1 - x_2)}_3 - \underbrace{(x_3 - x_4)}_3$$



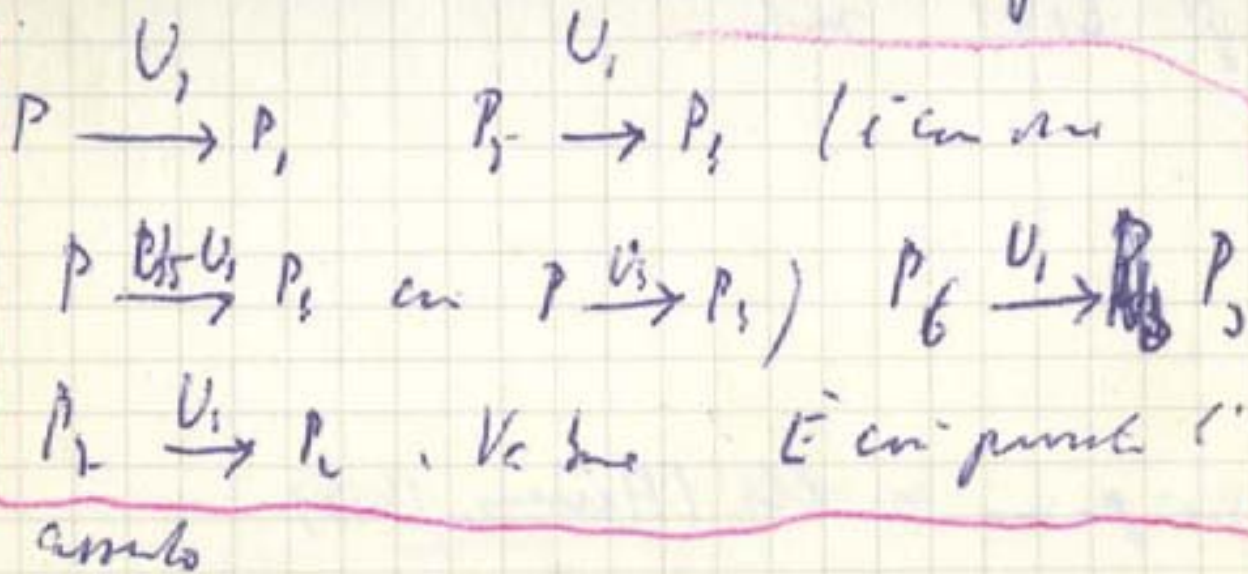
4) ~~...~~

$$\frac{(x_1+x_2)^2(x_3+x_4)^2 + (x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2}{2} - \frac{(x_1-x_2)^2}{2} - \frac{(x_3-x_4)^2}{2} =$$

$$\Psi - \Phi = (x_1+x_2)^2 \cdot 2x_3x_4 + (x_1-x_2)^2 \cdot (-2x_3x_4) =$$

$$= 2x_3x_4 \cdot 2x_1x_2 = 4x_1x_2x_3x_4 \quad (1, 2, 3, 4)$$

A) I due tetraedri M, N sono omologici in 4 modi diversi (e cioè nelle 4 omologie $U_j, j=1, 2, 3, 4$). Infatti le 8 hmgr del G_8 mantengono la coppia M, N; tra esse quelle del G_4 mutano M in sé e N in sé (p. 13). Invece le 4 omologie scambiano i due tetraedri: lo verifico p.e. per U_1 servendomi della tabella (γ) p. 8.



B) Un'altra proprietà dei tetraedri M, N è che ogni coppia di spigoli opposti dell'uno si appoggia a una coppia di spigoli opposti dell'altro. Prendo infatti

Pf. ca

⊗ In Veronae 1880- l'oss. che i lib-
MNT che per ripresenta con
desmia (lesione fessile).

Tutte desmiata suoi stati corrispondenti
di Stytenus (1879) che ha solo il
len. grande che è da cui i 4 su-
nulle co. dell'alt. lesione. esistente.

cf. Nyctalan Enc III C II
n. 97

P. 2101 n. 883.

Fi. gr. piana in altri (Herrmann, 1877)

$M \equiv P P_5 P_6 P_7$, $N \equiv P_1 P_2 P_3 P_4$
e sono due a noni d. p. l. p. l.

$$P P_5 \xrightarrow{U_1} P_1 P_4 , \quad P_6 P_7 \xrightarrow{U_1} P_3 P_2$$

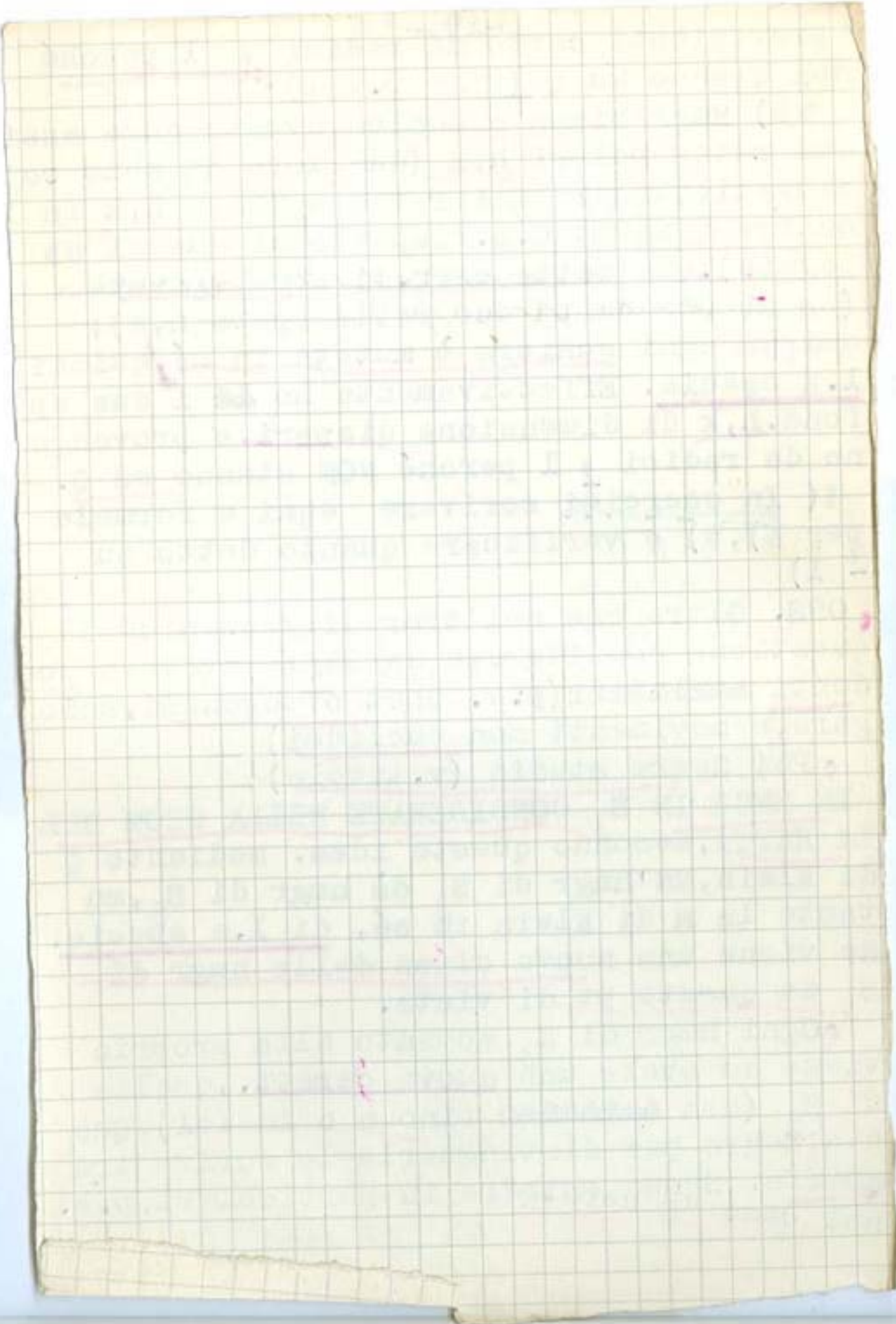
Nello stesso modo si verifica che in U_3
alle due ~~rette~~ rette ~~corrispondono~~
 $P P_5, P_6 P_7$ corrispondono (in ordine ora scam-
biato) le $P_3 P_2, P_1 P_4$ (non faccio) cioè

$$P P_5 \xrightarrow{U_3} P_3 P_2 \quad P_6 P_7 \xrightarrow{U_3} P_1 P_4$$

Quindi (alle curve in omologia di Taylor (per piano
di omologia)) ciascuna delle $P P_5, P_6 P_7$ (spigo

li opposti di M) sega ciascuna delle
 $P_1 P_4, P_3 P_2$ (spigoli opposti di N). E così
via. Il teor. B) è provato

A p. 13 ho definito terna di tetr desmi-
ci. Ma si può già definire COPPIA id id
per due tetraedri, quando sussiste la ptá
B). E allora si prova (eserc., cfr p. e. SVERI
Epti geom proi. pp. 43-47) che dati DUW
tetraedri desmici, ne esiste un(solo) desmic
con entrambi, e che due qualunque dei tre
sono omologici in 4 modi diversi, coi centri
e piani di omologia coincidenti coi vertici
e faccie del terzo tetraedro (risultandone
cosí già quanto verificato sotto A)). (1)



• Superf di S invarianti per il G_8 (Segre dice simmetriche) sono evidte quelle ~~per~~ nella cui equazione compaiono solo potenze pari di ogni x_i , p.e. le F^2

(1) $\sum k_i x_i^2 = 0$ (es. p.e. $x_1 = 0$)

che hanno T come autopolare. Tale è p.e. la quadrica che (p. 13) contiene una retta e le sue eqvti (la sua trasfita in ogni hmgr del G_8 contiene le stesse 8 rette e quindi coincide. Del resto si verifica materialmente che la Q (1) contiene una retta $p=yz$, per cui dunque

$\sum k_i y_i^2 = 0 \quad \sum k_i z_i^2 = 0 \quad \sum k_i y_i z_i = 0$

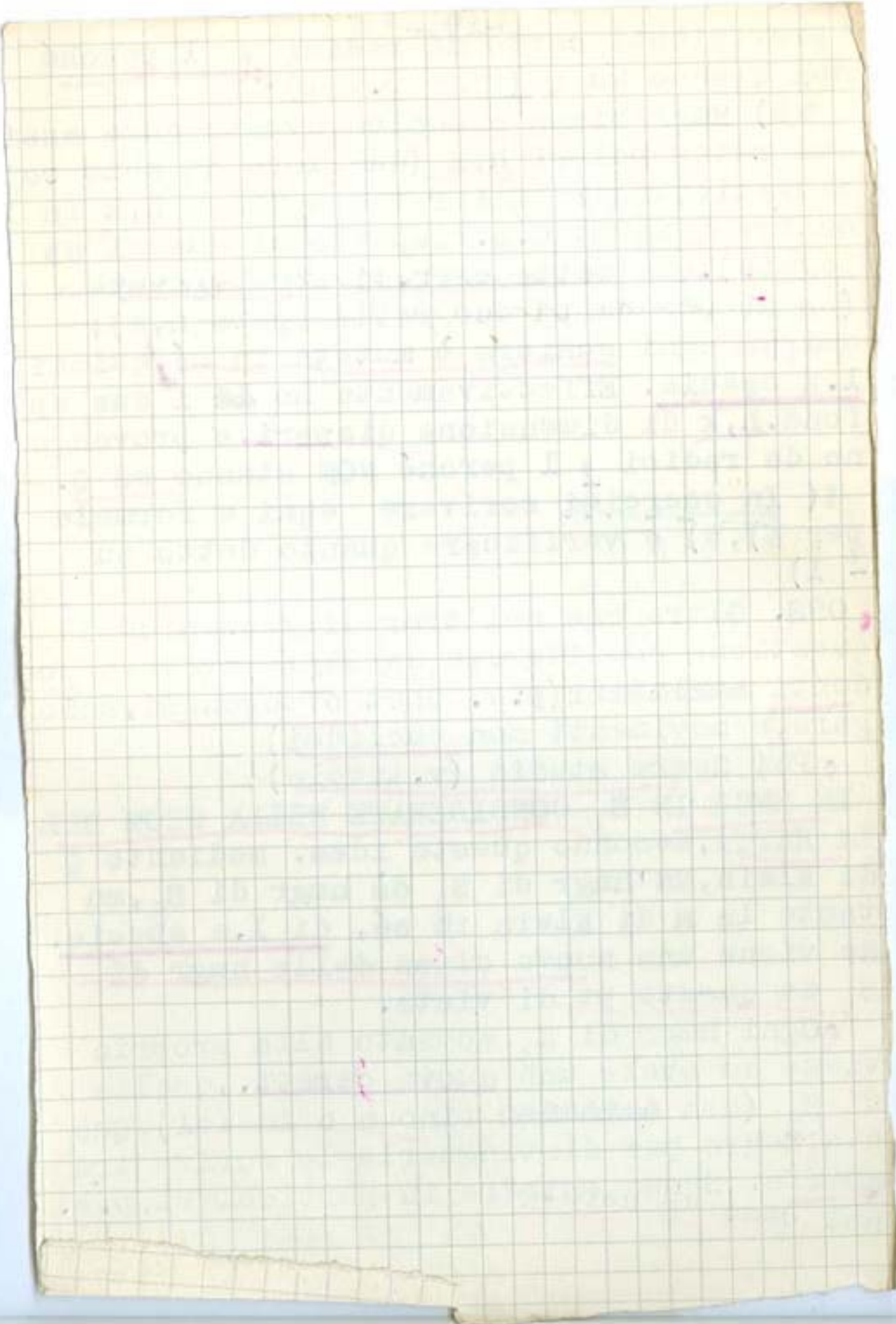
contiene le sue eqvti, perché le eq ora scritte non mutano cambiando di segno qualche y_i, z_i)

• Complessi quadratici invti per il G_8 (spiegare cplesso di grado n, e vari significati di n). Ricordando come si mutano le p_{ik} per le varie omografie di G_8 (o cambiano di segno due con coppie complementari, o le tre con un indice comune) è chiaro che ogni complesso di Battaglioni

$\sum a_{ik} p_{ik} = 0$

(somma estesa alle 6 coppie di indici..) è invariante. Diciamo ogni compl che sia di Battagl. rispetto a T come tetraedro fond.

Anche ogni complesso tetraedrale rispetto a T è invariante (ricordare cpl. tetraed.



eszi (teor Staudt); imponendo $(M_1 M_2 M_3 M_4) = k$, viene l'equazione

$$(2) \quad p_{12} p_{34} + k p_{13} p_{24} = 0$$

che equivale a $\lambda Q = 0 \rightarrow Q = p_{12} p_{34} + k p_{13} p_{24}$

$$(2) \quad \lambda p_{12} p_{34} + (1+\lambda) p_{13} p_{24} + (k+\lambda) p_{14} p_{23} = 0$$

del tipo:

$$(3) \quad a p_{12} p_{34} + b p_{13} p_{24} + c p_{14} p_{23} = 0$$

Viceversa ogni (3) fissata è riducibile alla

fun (2) prendendo $a = Q \rightarrow$

$$(b-a) p_{13} p_{24} + (c-a) p_{14} p_{23} = 0$$

cioè:

$$k = \frac{c-a}{b-a}$$

d'inversamente (3) è sempre un cono di tipo di

piccolo con vertice cplio, due linee p con un vertice

Comune (con data p. 21).

Viceversa ogni cplesso quadratico invte per il G_0 o è di Battaglioni, oppure tetraedrale

le. Per dimostrarlo osservo:

o a) nell'eq. di un cplesso quadr C, sia $F=0$ vi è una certa indeterminazione, in qua to posso sostituirla con

$$(4) \quad \mu F + \lambda Q = 0, \text{ con } \lambda \text{ arbitrario}$$

(già si applicò quassù per C tetraedrale)

24

* In verde, più brevemente, sottinteso
quanto si può.

Però $G \cap mF \equiv 0$, $\therefore G \cap mF \equiv lR$

$G = -mF + lR$ c. d. d.

b) nell'eq. di C non vi è altro ind. la equazione
con n b h e l e q $F=0$ $G=0$ quest'equazione

considera un'eq. (4) - la quale $G=0$ è un'altre

eq. prende una retta p' non di C e dettami

la cond. in cui un'altre $G(p') + m F(p') = 0$

Allora l'eq. $G + m F = 0$ è soddisfolta da p' e da

tutte le rette di C. ~~In ogni fascio di rette di~~

con fascio parte p' ho tre rette

in C e due tutte. Per cui

$G(p) + m F(p) = 0$ (detti due condizioni)

queste di C è soddisfolta da) tutte le rette

appoggiate a p' . Se (3) non è identica vuol dire

che C contiene con parte di eq. l. e parte di

distinta da p' . Allora ~~C è appoggiate a p'~~ Da

anche a C è appoggiate in due eq. l. ha sempre

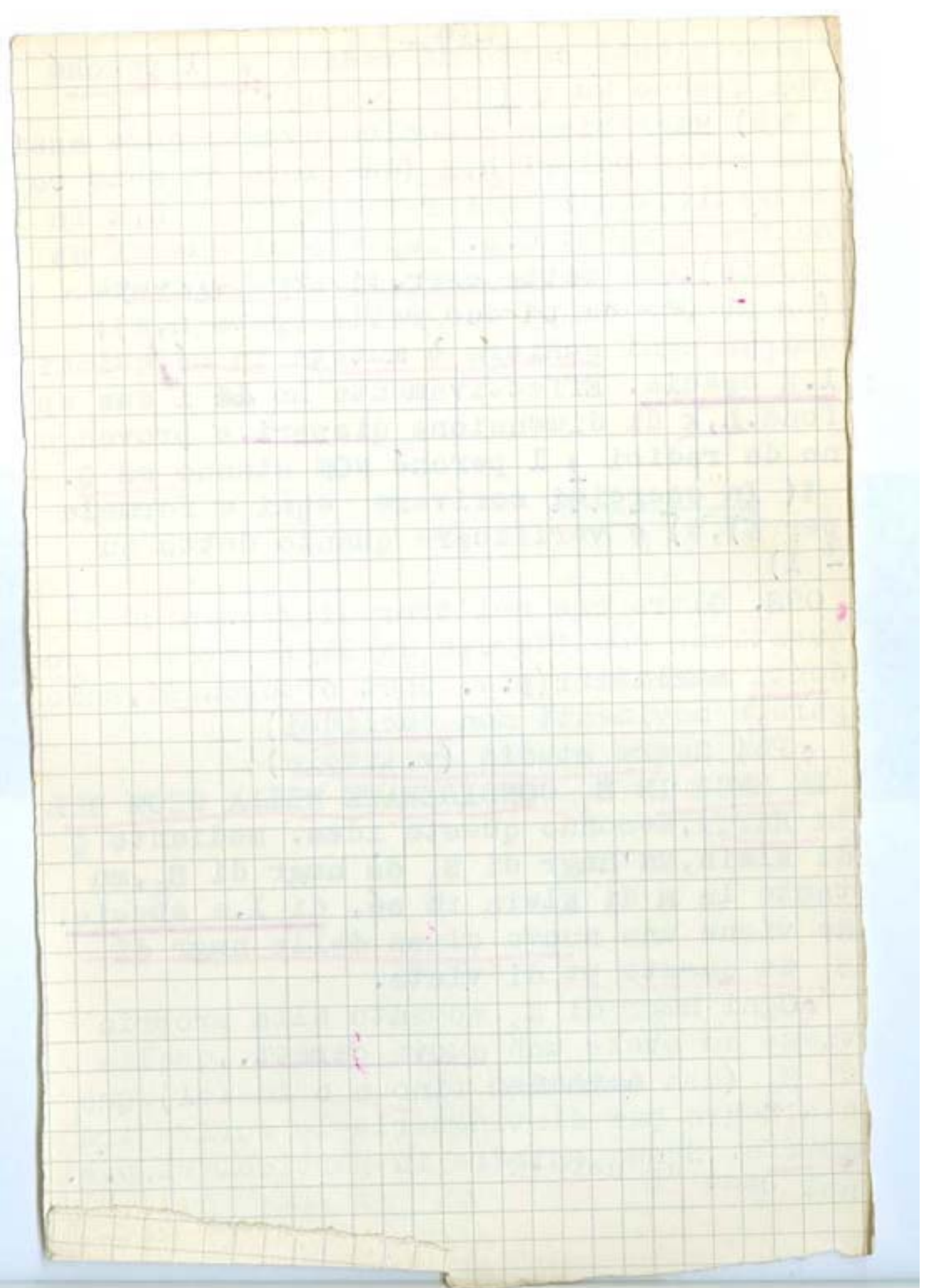
specie, parte p' per altre loro partecipi

condizioni (4) è identica. Ma altre eq. di

$P=0$, cui

$G(p) + m F(p) = l \Omega = G = -m F(p) + l P$

e. d. ?



Allora, per ogni \vec{p} ^{il cui} \vec{p} ^è \vec{p} ^{ogni} \vec{p} . Se $F(\vec{p}) = 0$ in
 C si può trovare una coppia di vari
coordinati, p.e. p_1, p_2 che sono in F i termini
per quelle coppie per le quale si ha il valore 0 e
quale si ha il valore 0. Se non è 0 in

$$\Phi + \Psi = 0$$

~~l'eq. da cui~~ Per l'esempio l'eq. da cui
 con le $\Phi - \Psi = 0$

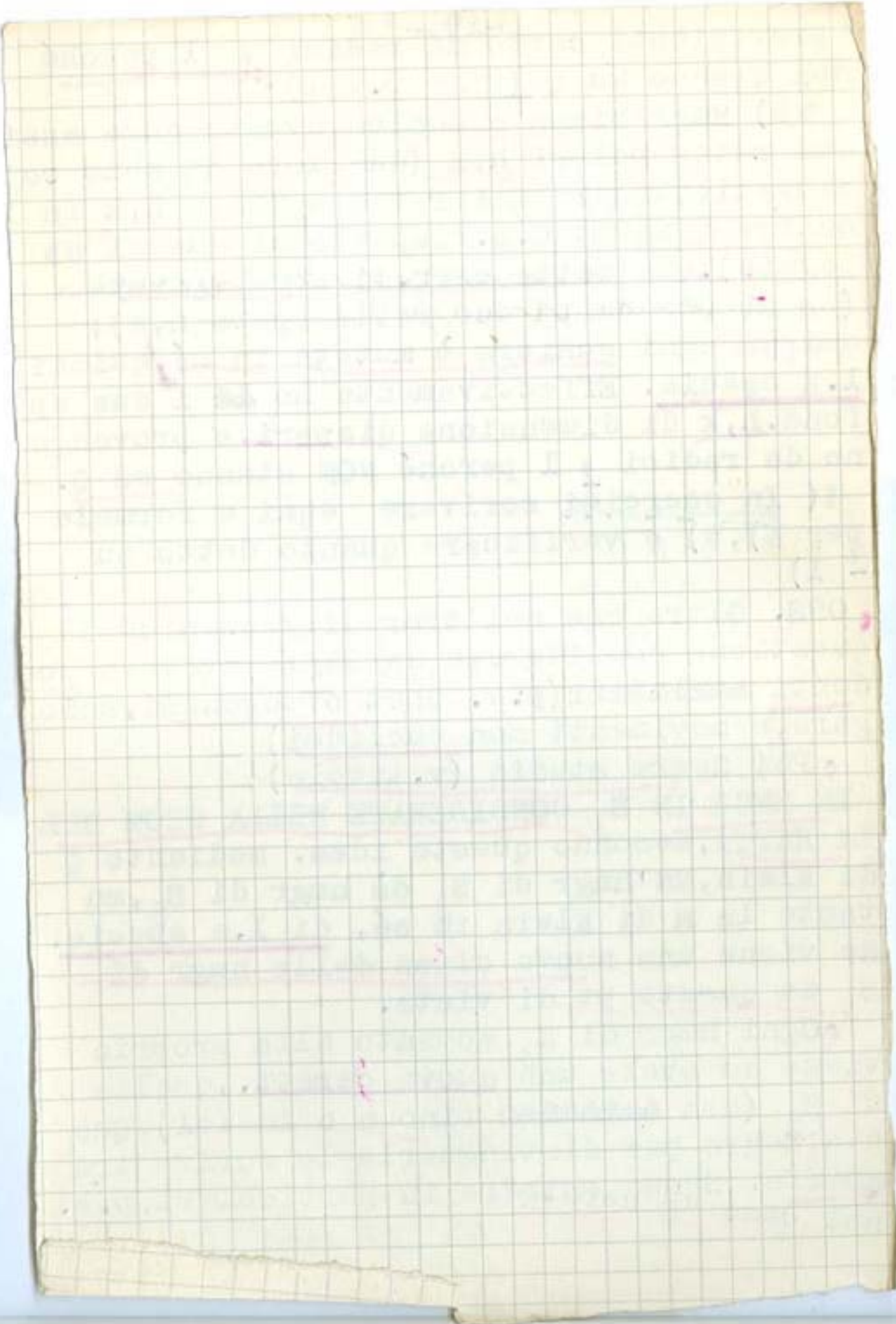
Che non può d. C. è $\Phi = 0, \Psi = 0$ Allora

1) se $\Psi = 0$ è identica, le F costanti, nel
 termini per i p_1, p_2 .

2) se $\Psi = 0$ non è identica, allora l'eq. di quello
avvicina l'eq. di quello si può scrivere in modo
che si opra termini si ha il valore 0 e una
soluzione delle coord. p_1, p_2 .

Stato 1), supponendo che non si verifichi per
le due coppie di coordinati, d'is. in C

(6) $\sum a_{ik} p_{i1} p_{i2} + A p_{11} p_{21} + B p_{12} p_{22} + C p_{11} p_{22} = 0$
 (ogni due term. dei termini si ha il valore 0)



$$* \left(x_1 = \frac{y_1 + y_2}{\sqrt{A}} \quad x_2 = y_1, x_3 = y_2 \right)$$

$$x_3 = \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{B}}$$

vi

$$* * * * * \\ P_{10} P_{30} - P_{10} P_{40} = 0$$

che possiamo con p 2) di $a=1, b=-1, c=0$

$$k = \frac{c-a}{b-a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

xx Delle tre. è evidente che f è
 moto in p' di verso e non corretto. Non
 le me due. etc. etc. Contin. v. Q. 36

† (All'altro caso si penserebbe con

ricordi di ind. $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}$

repp² e (in terzo piano di $A \cap A'$ non tutti vuoti)

$$p_{12}(A p_{13} + B p_{24}) + p_{34}(A' p_{13} + B' p_{24}) = 0$$

Cambiando a segno \rightarrow p_{13}, p_{24}, p_{34}

$$p_{12}(A p_{13} - B p_{24}) - A' p_{34} p_{13} + B' p_{34} p_{24} = 0$$

Le due eq. (annunciando in entrambe $p_{12} p_{34}$)

dimostrano i coefficienti \dots costanti o \rightarrow $A = B = 0$ o $A' = B' = 0$

Ho allora C

$$A p_{12} p_{13} + B' p_{34} p_{24} = 0$$

$$(\text{oppure } B p_{12} p_{24} + A' p_{13} p_{34} = 0) \quad \text{Ray}$$

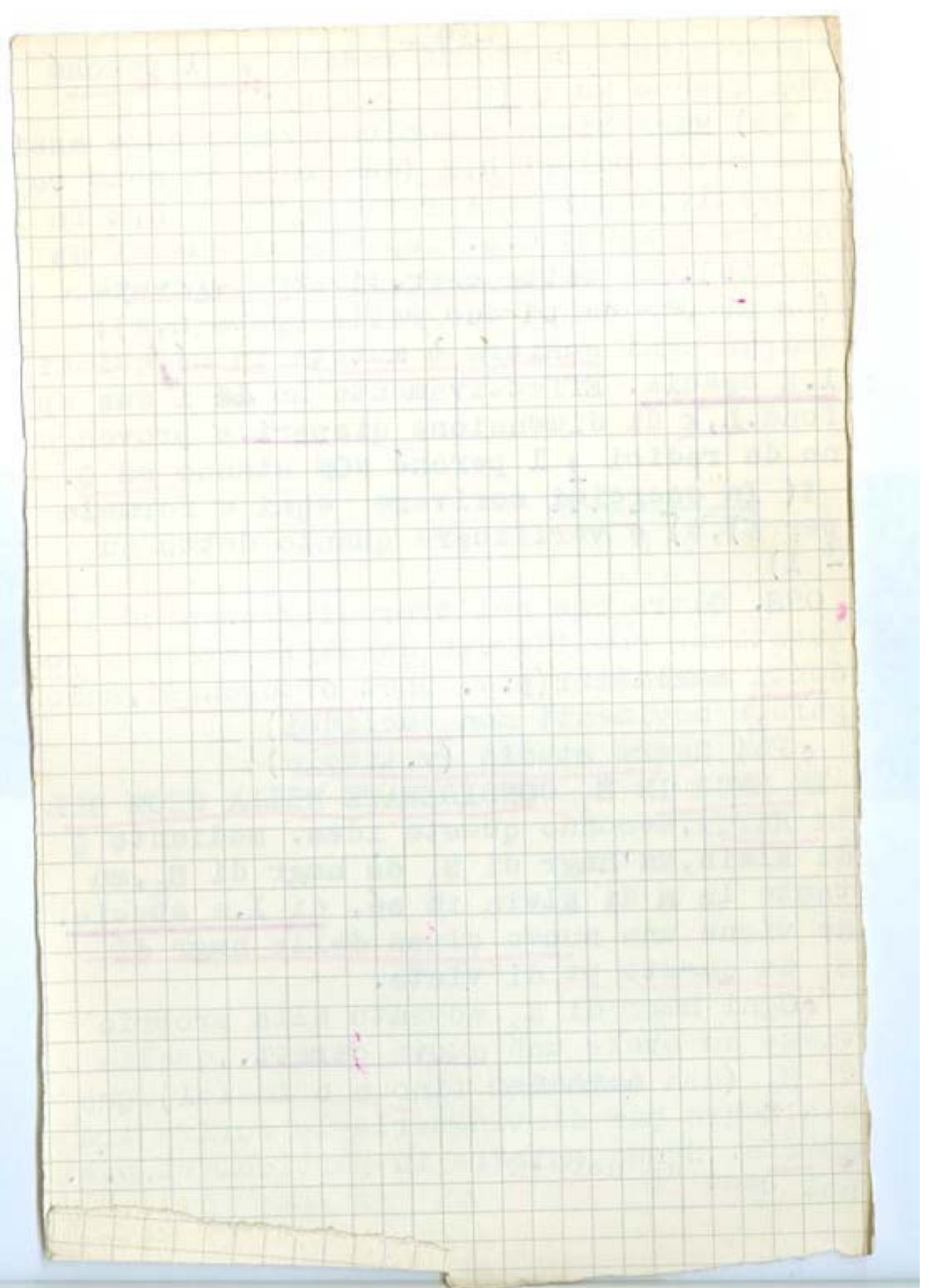
se (8) \rightarrow Le due eq. non danno lettere né di
cpl. Betti. né di tetraedri rispetto T . Per
con cambiare variabile (esegui \star Q. 15-11) risulta

che i cpl. lett. (bis \rightarrow $\frac{1}{2}$) rispetto ω sono

tetraedri \rightarrow lettere di p. 2) \rightarrow dimostrati **XX**

• Studio della CORRZA tra S, S' definita dalle (1) p. 5^{na} (della quale S si occupa nella II Parte della sua Mem., divisa in tre parti). Ai piani di S' corrispondono in S le quadriche con T autopolare \rightarrow cui $k = 1$.

$$\text{e che siano } x_i' = k_i \cdot x_i \quad (i = 1, \dots, 4)$$



(1) p. 21. Comincio ³³ia tabella p. 37.

A retta generica di S' (intsz..) corre in $S...$, cioè quartica di prima specie (di cui si può aggiungere che sta su cono quadrico avente per vertice ogni vertice di T , perchè da

$$\sum k_i x_i = 0 \quad \sum h_i x_i = 0$$

segue p.e.

$$h_1 (k_2 x_2 + \dots) - k_1 (h_2 x_2 + \dots) = 0$$

● E quadrica generica F^2 di S che corre ha? Ragiono per F^n generica: è incontrata in $4n$ pt dalle predette C^4 ; quindi F^{4n} ; (2) in tabella.

Non è però F^{4n} qualunque., bensì tgte a ogni faccia di T' secondo una C^{2n} .

Infatti ai pt (p.e.) $x_4 = 0$ corrispondono i pt. $x_4 = 0$; e alla C^{n-4} traccia di F^n su $x_4 = 0$ corrisponde con le

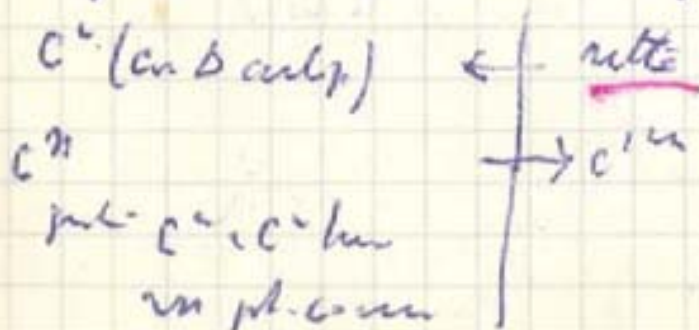
$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1'' : x_2'' : x_3''$$

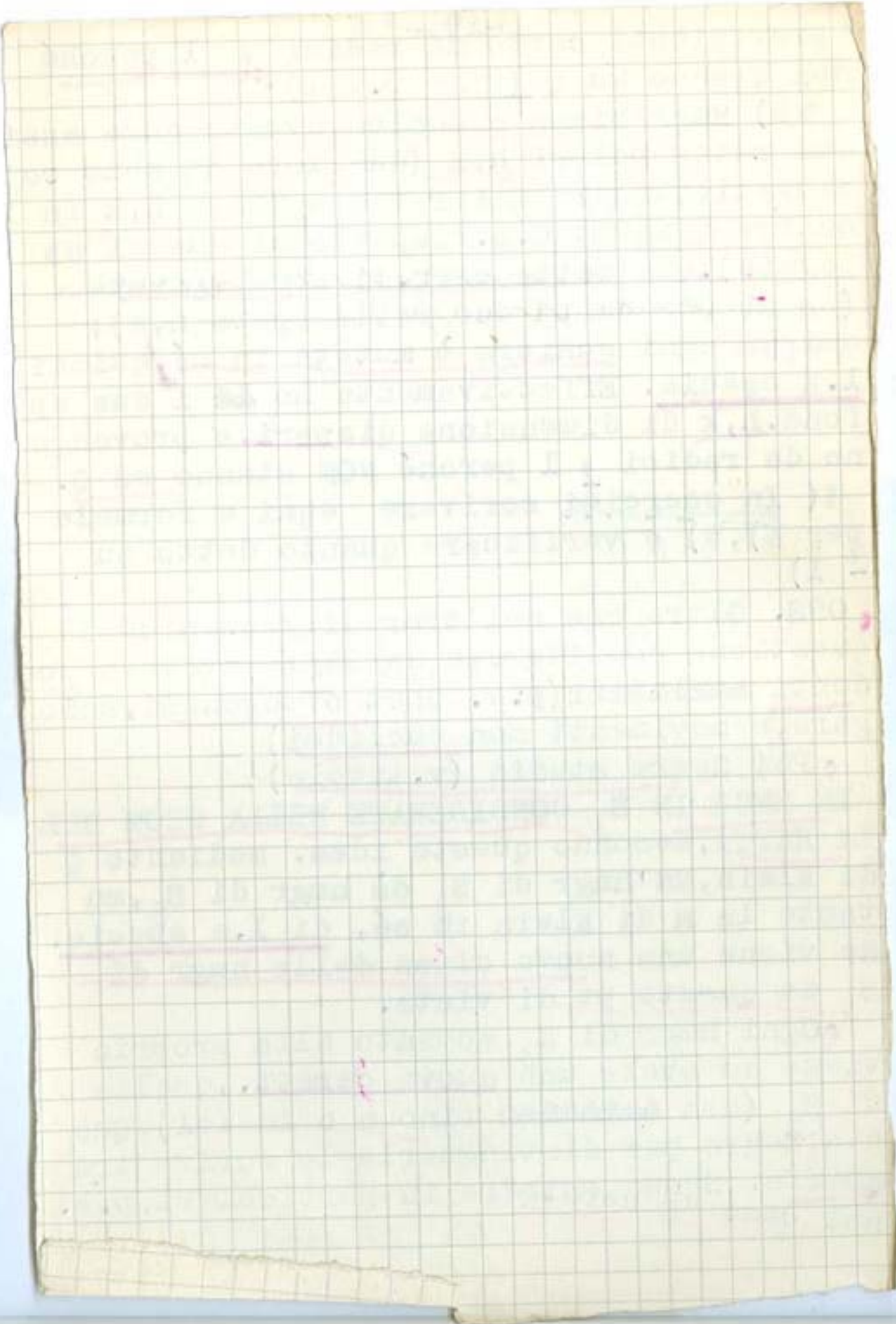
una C^{n-4} che quindi converte l'volta nel l tipo di F^{4n} con $x_4 = 0$

~~Nel caso~~ Φ^{1m} di S' part

in S Φ^{2m} (chiam). Una F^{4n} Φ^{1m} con

è riguardando le piace analogie del a. spezi.





1) \bar{F}^n una delle due \bar{F}^n double al

G_3 et che stabilisce l'acub) discando

$n=2$ per $n=1$ genicio $\rightarrow F^4 = \varphi^4$ vale

in \bar{F}^1 (gli altri (un solo punto) $\in \varphi^4$)

Verona Steiner (3)

* Chiamasi φ^4 di Steiner una sup. raz del 4° ordine (spiegare) rappresentata su un piano mediante coniche (spiegare). Qua

φ^4 proviene da un piano π di S , e la corr. za tra le due sup. risulta gente bi univoca, perché gli altri 7 pti corrti a P^1 di φ^4 non stanno su π , pensí sugli altri 7 piani in cui π si trasforma col G_3 . Quindi intanto φ^4 è raz. Poi alle sue sez. piane corr. no le intsz del piano π con le sup. omologhe dei piani, che secondo (1) sono quadriche, dunque coniche. Quindi φ^4 è proprio una sup. di Steiner.

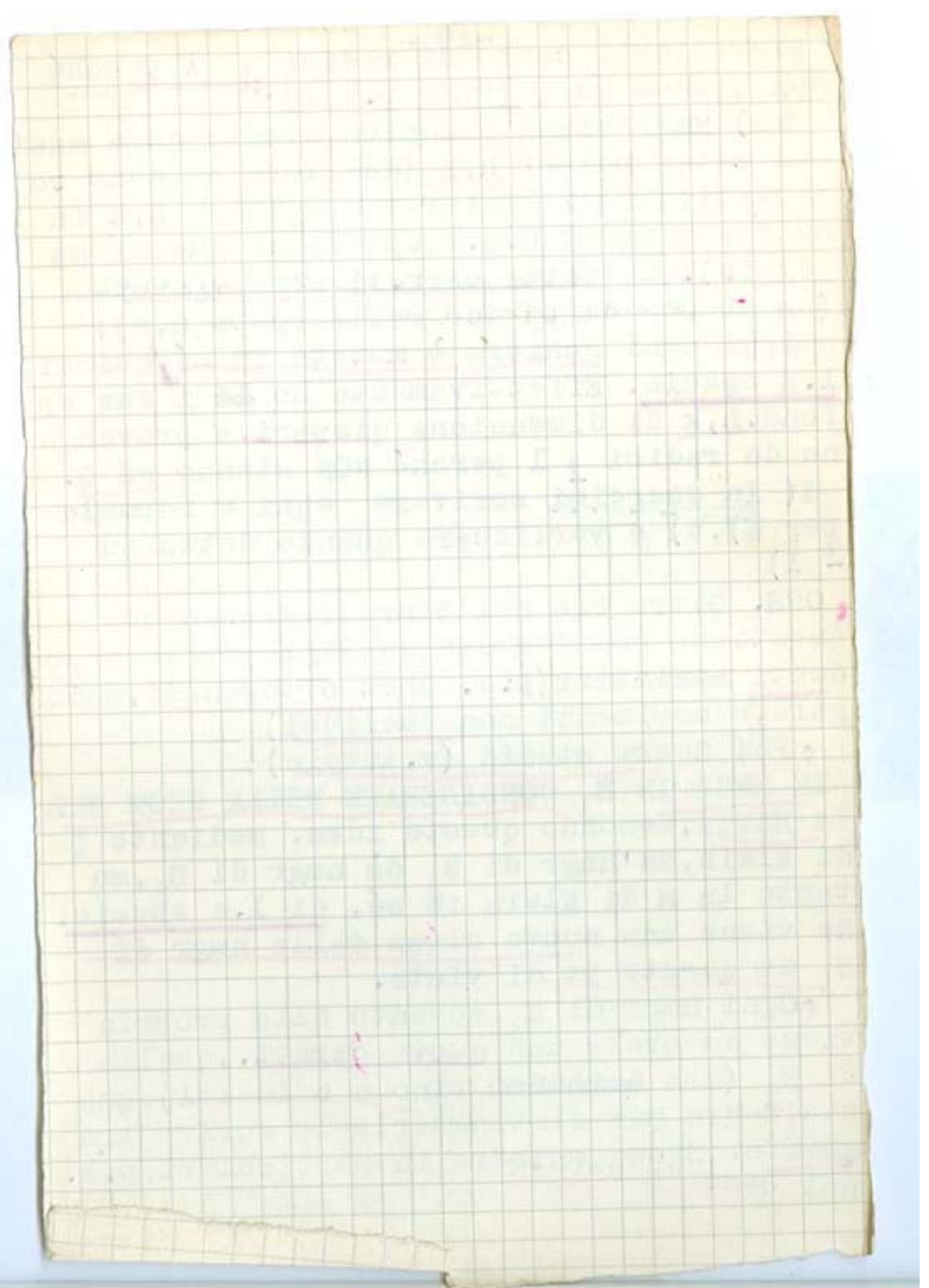
DIGRESSIONE SULLA F^4 DI STEINER.

1) Quanto dico vale non solo per la φ^4 che ci si è presentata, avente ovviamente l'eq. ne (scrivo coordte y_i in luogo delle x_i)

$$(1) \varphi: \sum a_i y_i = 0 \quad a_1, a_2, a_3 \neq 0$$

ma per la piú generale sup di Steiner per la quale si prova che ammette la stessa eq. ne

(v. a p. 29)



\mathbb{R}
 \mathbb{R}^n

\int
 \mathbb{R}^n
 \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^n on T centro per \leftarrow piano (1)

\mathbb{R}^n (car. \mathbb{R}^n) \leftarrow nella \mathbb{R}^n (2)

\mathbb{R}^n (car. \mathbb{R}^n) \leftarrow \mathbb{R}^n piano (3)

\mathbb{R}^n generici \rightarrow \mathbb{R}^n tipo che fanno di T senso del \mathbb{R}^n (4)

(risulta in T)

piano generici \rightarrow \mathbb{R}^n di T senso \mathbb{R}^n (5)

\mathbb{R}^n generici \rightarrow \mathbb{R}^n tipo che fanno di T (6)

* Ciò spiega i quattro piani facce di
T' tgni alla sup di Steiner secondo co
niche. Per dualità a un pt doppio (conico)
corrisponde appunto piano tgte doppio,
tgte lungo conica non degenerare.

I) La sup. di Steiner è la duale di F^3 con 4 pt doppi conici (cioè se formo l'eq. invppo e sostituisco alle coordinate di piano coord di punto, ho F^3 c.s.)

Il pl gli x e y ha coordinate

$$(1) \quad \xi_i = \left(\frac{\partial S}{\partial y_i} \right) = \frac{a_i x}{2 y_i}$$

Per avere l'eq. inv. devo elevare le y_i in (1)

(1) $\cdot 110$

$$\bar{y}_i = \frac{a_i x}{2 \xi_i} \quad \text{e per } \sum \frac{a_i}{2 y_i} = 0$$

con

$$a_1 \xi_1 \xi_2 \xi_3 + \dots = 0$$

e sostituisco con il pt

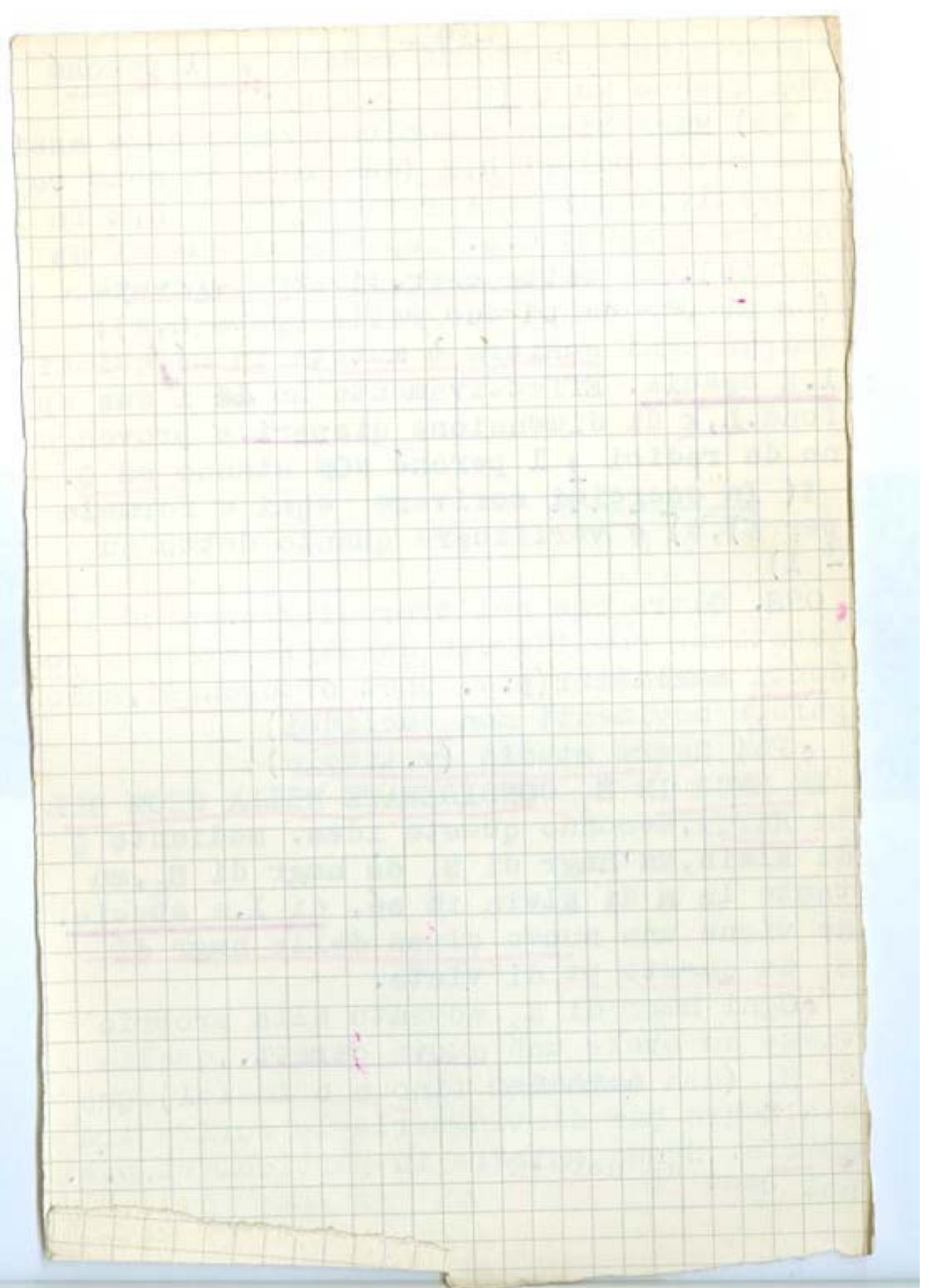
$$\left(\frac{a_1}{y_1}, \frac{a_2}{y_2}, \frac{a_3}{y_3}, \dots \right) = 0$$

il che prova l'asserto (il caso quando ξ_i per a_i è

$$a_1 \frac{y_1}{y_2} + a_2 \frac{y_1}{y_3} + a_3 \frac{y_1}{y_4} = 0$$

inv. d. ~~la~~, ~~il~~ \ast

2) La sup di Steiner ha tre rette doppi (non complanari) uscenti da un pt triplo. Lo verifico sulla (1) p. 35 che razionalizzo. Suppongo senza restr (cambio U) le $a_i = 1$



$$(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2})^2 = (\sqrt{y_3} + \sqrt{y_4})^2 \quad (5)$$

$$y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = 2\sqrt{y_3 y_4} - 2\sqrt{y_1 y_2}$$

$$(y_1 + y_2 - y_3 - y_4)^2 = 4(y_3 y_4 + y_1 y_2) - 8\sqrt{y_1 y_2 y_3 y_4}$$

con

$$\text{per } \Sigma y_i^2 = \Phi, \quad \Sigma y_i y_j = \Theta \quad (i \neq j)$$

$$\Phi - 2\Theta = -8\sqrt{y_1 y_2 y_3 y_4}$$

$$G \equiv (\Phi - 2\Theta)^2 - 64 y_1 y_2 y_3 y_4 = 0$$

si si si si si. Ho p.c.

$$\frac{\partial G}{\partial y_1} = 2(\Phi - 2\Theta)(2y_1 - 2y_2 - 2y_3 - 2y_4) - 64 y_2 y_3 y_4 \quad (-5)$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial G}{\partial y_1} = (\Phi - 2\Theta)(y_1 - y_2 - y_3 - y_4) - 16 y_2 y_3 y_4 \quad (-15)$$

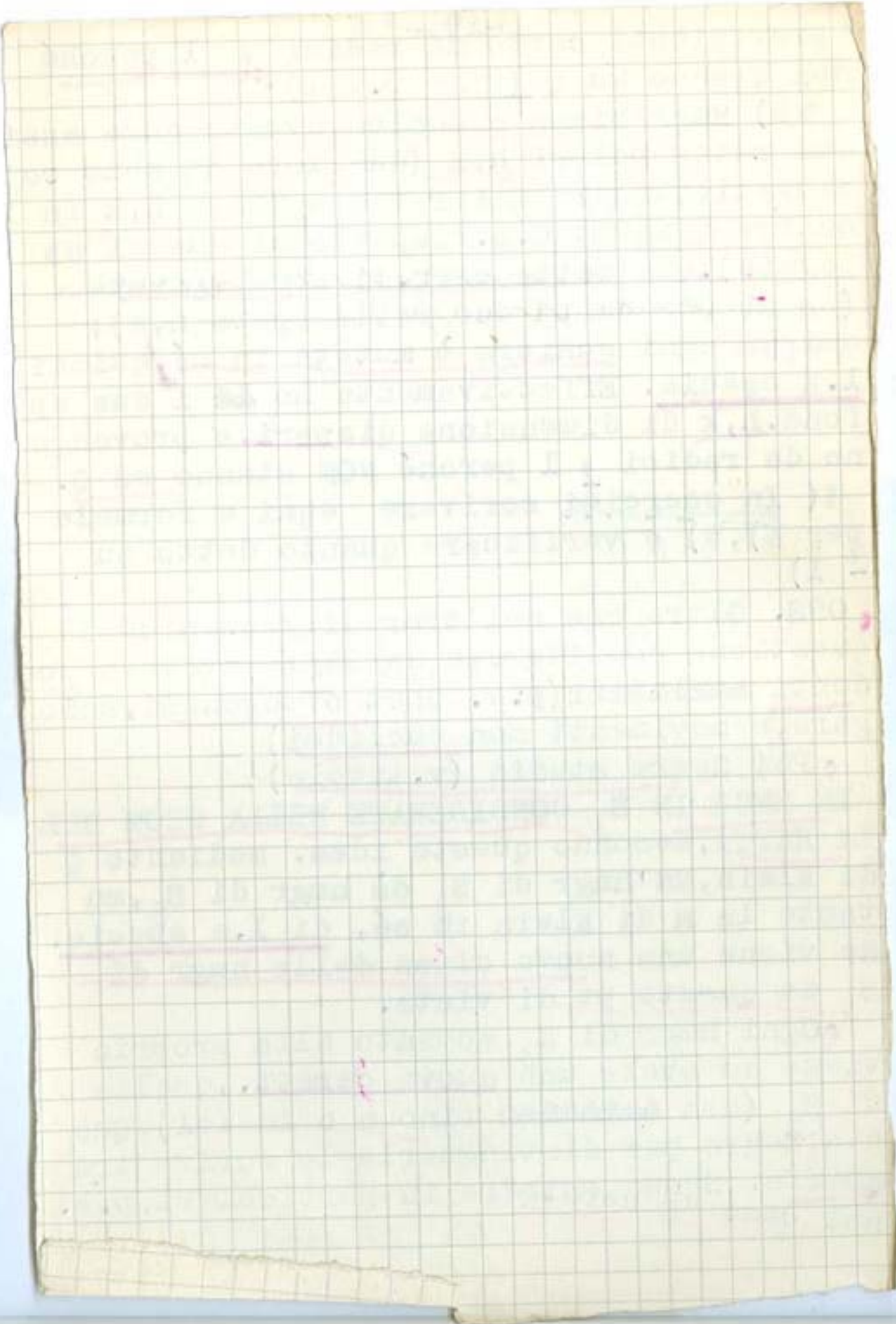
$$\text{(e analogo) per } \frac{1}{4} \frac{\partial G}{\partial y_2} = (\Phi - 2\Theta)(-y_1 + y_2 - y_3 - y_4) - 16 y_1 y_3 y_4 \quad (16)$$

da cui $y_1 = y_2 = y_3 = y_4$ e si trova il valore

$$\text{calcolando } \Phi(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha) = \Phi \text{ che è } 4\alpha^2$$

$$\Phi = 2(\alpha^2 + \alpha^2) \quad \Theta = \alpha^2 + \alpha^2 + 4\alpha^2$$

$$\Phi - 2\Theta = -8\alpha^2$$



$$\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial y_1} = (-8\alpha\beta)(-2\beta) - 16\alpha\beta = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial y_2} = (-8\alpha\beta)(-2\beta) - 16\alpha\beta = 0 \quad \text{etc.}$$

Concludo così che sono doppie le tre rette

- r) $y_1 = y_2, y_3 = y_4$;
- r') $y_1 = y_3, y_2 = y_4$;
- r'') $y_1 = y_4, y_2 = y_3$.

• Il piano delle due prime e

$$y_1 - y_2 - (y_3 - y_4) = 0$$

che non contiene r''; quindi non complanari (chiaro geomte; l'intsz col piano..)

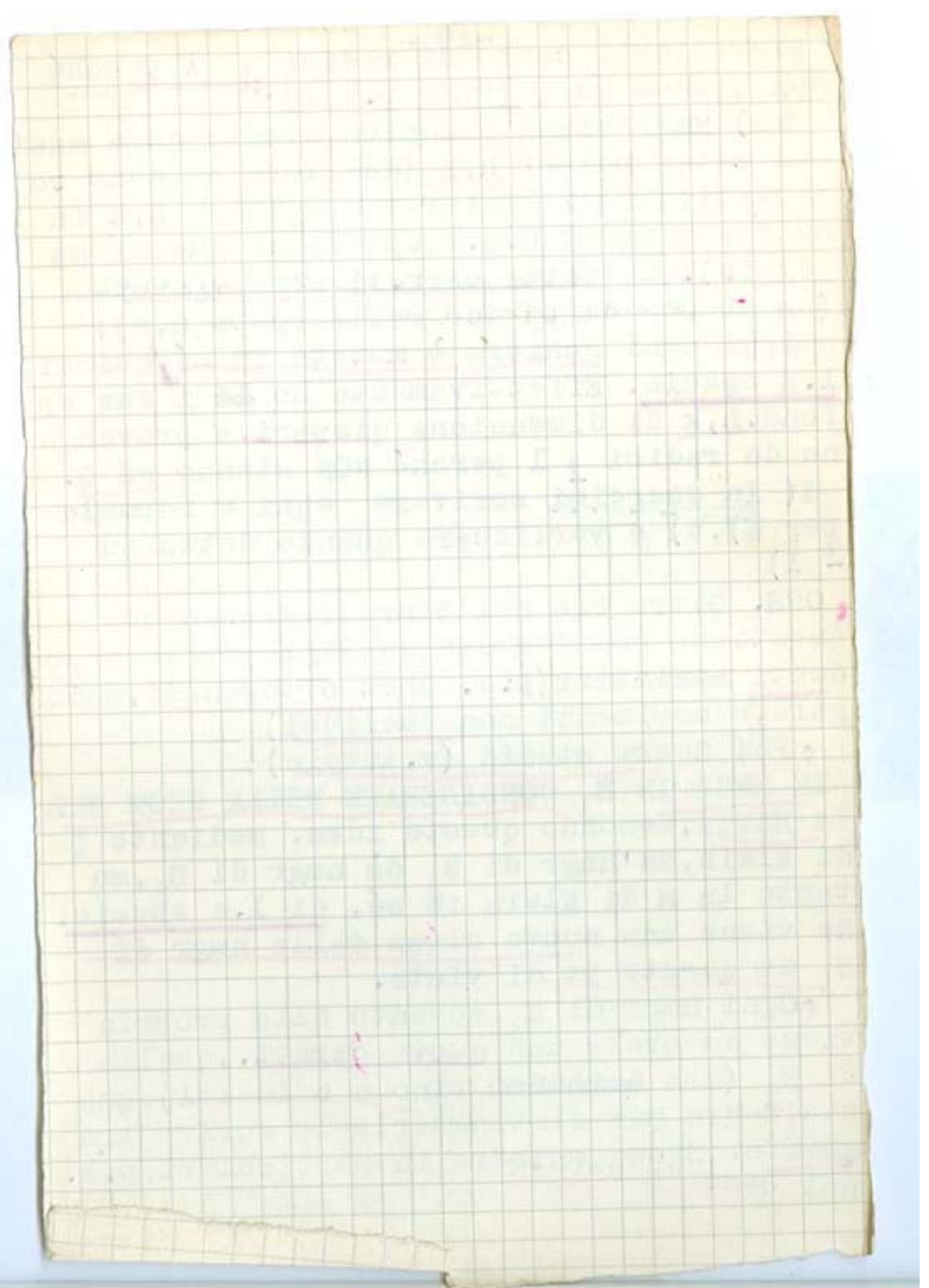
• Le r, r', r'' concorrono evdte del punto U(1,1,1,1), il quale è triplo. Infatti

1) geomte: le rette dei tre fasci rr' etc hanno in U incontro con la sup. piú che bipunto. Se U fosse solo doppio, i tre piani rr' etc formerebbero parte del cono quadrico tgte, assurdo

2) Si verificherebbe analyt. te calcolando le derivate seconde di G. Non faccio

• OSS. Viceversa un F^4 con tre rette doppie uscenti da un pt triplo U è F^4 di Steiner (perch'è proiettandola, .. monoide, trsf. ne quadratica..)

Fui più che di persona.



Chiusa la digr. torno alla corr.za tra S, S' e alla tabella di p.37. A c^n generica di S ~~corrisponde in S' una c^{2n}~~ corrisponde in S' una c^{2n} (perch'è incontra un piano in tanti pt in quanti in S la c^n è incontrata da una quadrica). E perfeziono (6) osservando che c' è tate in n punti a ogni faccia di T' (perché le sue intsz dis con tale faccia sono solo i suoi n pt corrti& agli n pt...)

In particolare a retta generica di S corrisponde una "conica iscritta in T' "

(7) La quale conica proviene dalla retta e dalle sue altre 7 eqvti rispetto al G_8 ; la quadrica autop rispetto a T contenente le 8 rette (p. 13,9) ha per corrti in S' il piano della conica ~~...~~. Le coniche iscritte in T' sono inf/4 (una schiera in ogni piano) come le rette di S' il che lascia già intendere, anche senza verificarlo in modo più esatto che OGNI conica iscritta in T' proviene da una (anzi 8) retta di S .

Non mi fermo su tutte le particolarità studiate da S in questa II parte. Noto solo:

1) Segre usa la sua trasfne per dedurre proprietà della sup. di Steiner. P.e. verifica come segue che due sup. di Steiner iscritte in uno stesso tetraedro (T') si segano in otto coniche (p. 6. due su T' ; note, d

Primo (Eckhardt) - Le due T_1, T_2 provengono dalla
 con la sua lista di due piani T_1, T_2 , T_3 , T_4 ,
 T_5, T_6 , e 7 altri equi, e con T_8 . Nessuna
64 rette d'altro di piano equi T_1 , con piano
 equi T_2 , che insieme con ogni retta di T_1
 danno la sua equi. Quando saranno 8 ret. di 8
 equi. E opera di geometria di equi con T_1 .

Agile 8 con una sola retta in T_1

2) Per questo, in S' , conviene definire
 delle "coordinate" per le coniche. Conviene
 considerare una conica come quadrica in
 viluppo degenerare (spiegare):

$$(0) \sum \alpha'_{ik} z_i z_k = 0 \quad |\alpha'_{ik}| = 0$$

Ci si può allora domandare di esprimere
 in fz delle coordinate p_{ik} di una retta
~~generica~~ generica di S quelle della cor-
 rispondente conica (iscritta in T') di S
 E Segre trova

$$(1) \alpha'_{ik} = p_{ik} \quad \text{per } i \neq k; (\alpha'_{ii} = 0)$$

(e allora si vedono che il denom.
 i. per non lo sviluppo in modo
 parti "inter" o (oltre Ω). $*$

una per φ^2 di Ω in "qualche" di p_{ik}
 p_{ik}

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$ (from the δ (Dirac) function in
 physics $\delta(x)$ from Delta on p. 417)

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$
 Delta $\sum_{i=1}^n c_i \delta(x - x_i)$

6) A un cplesso di rette di S corrisponde un "cplesso" di coniche iscritte in T' . P.e. le (1) mostrano che a un complesso di Battaglioni corrisponde un "complesso lineare" di coniche iscritte in T' (e viceversa). In questo modo i cplessi di Battaglioni si rappresentano in cplessi lin di c^2 iscritte in T' , e le proprietà di questi si trasportano convenientemente a quelli).

d'è il qd. lin. d. c. f. $\sum \epsilon_{ik} \alpha_i \alpha_k = 0 \quad (i, k)$

Dico subito che lo scopo di Segre è di arrivare a provare per la sua via che un complesso di Battaglioni si può considerare come l'insieme delle rette che segano due quadriche fisse in coppie armoniche.

1) Egli vi giunge così. Detto Γ un cpl lin di c^2 iscritte in T' , domandiamoci se esiste qualche coppia di piani fissi α', β' seganti le c^2 di Γ in coppie armoniche (sulle coniche). I piani α', β'

si possono dire "coniugati rispetto alle c^2 del sistema che costituiscono Γ ". Con questa definizione, α', β' sono propri coniugati rispetto a questo sistema.

Per verificare premetto che se A, B son

50.

Q

evium

due pt nel pl. di γ' e con. rispetto γ' , la coppia di pt. di contatto delle Lt di A, B alle γ' sono armoniche



(l'inv. di centro B, di pt. doppi H, K ha LM con. corrisp.)

~~Puntello de V e orientato~~

~~prodotto di~~ Puntello alle form

el' r' contenuto delle Lt e γ' , per

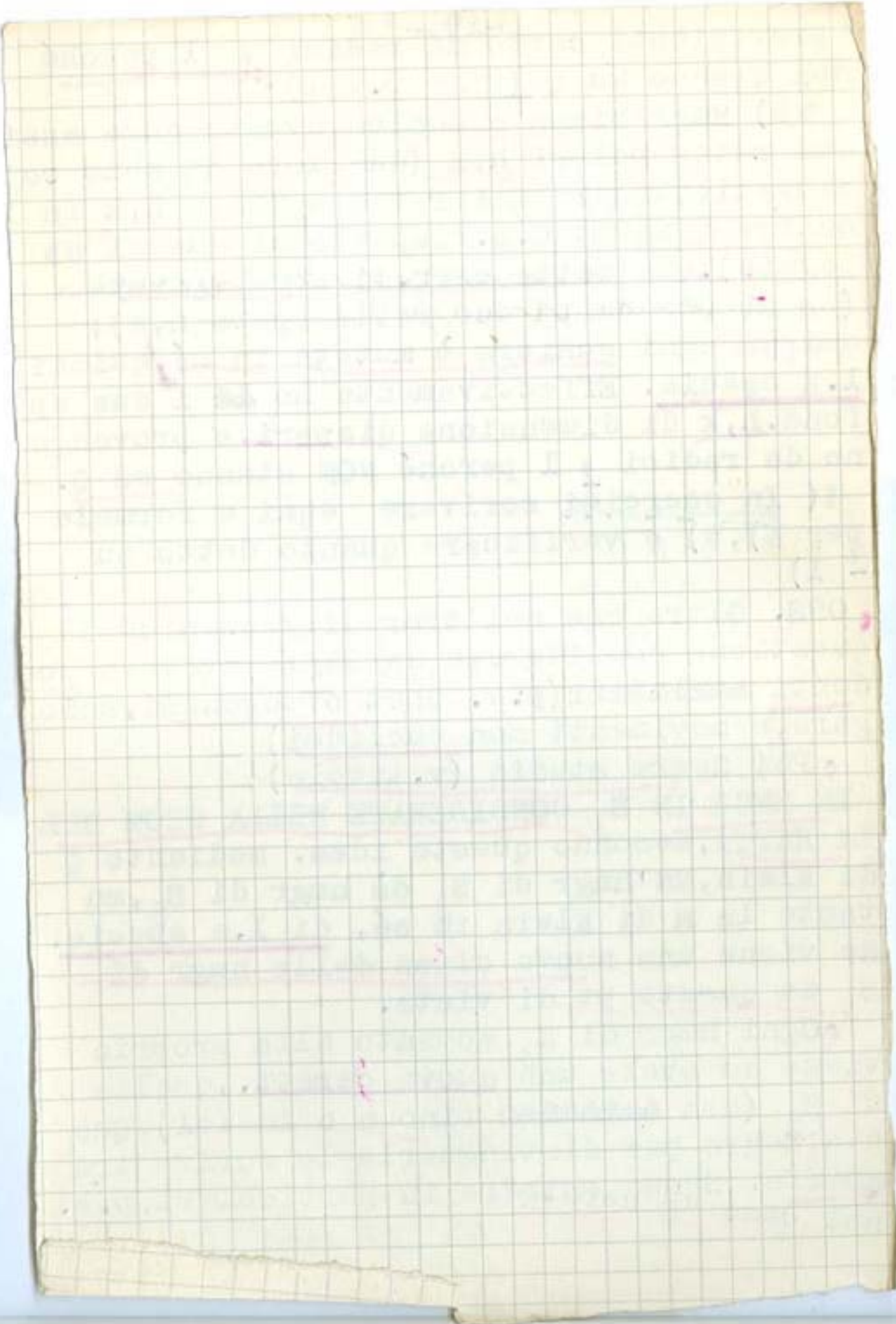
anche due che le Lt in LM sono armoniche e quest in H, K.

Puntello de V e (orientato) cioè prodotto

(e cono quadric) in un punto preso cono quadrico, nella forma elre dei suoi piani tngti, se prendo due pt A, B conti rispetto al cono, la coppia di piani tngti per VA e quella per VB sono armoniche.

Dualizzando, presa conica considerata come quadrica de genere, se α' , β' sono piani coniugati rispetto alla quadrica le coppie di pt segate da α' , β' sulla conica sono armoniche, che è quello che volevo far vedere, (e viceversa)

Quindi quello che Segre sta cercando è una coppia di piani α' , β' coniugati e armonici rispetto a tutte le coniche di γ' considerate come quadriche inv. degen



-5)

4. Seja cerca alora la forma α'β' tra le
Q spa lungo spigoli "opolaris" a tutte quelle
di T' (deg. spicanti ly. Demana).

Le spc α' di T', considerate come Q deg i
sono dete dalle de eq

$$(3) \sum_{i \neq k} \alpha'_{ik} z_i z_k = 0 \quad (\text{v. d. p. 51})$$

con
(4) $\sum \beta_{ik} \alpha'_{ik} = 0 \quad (\text{v. d. p. 59})$

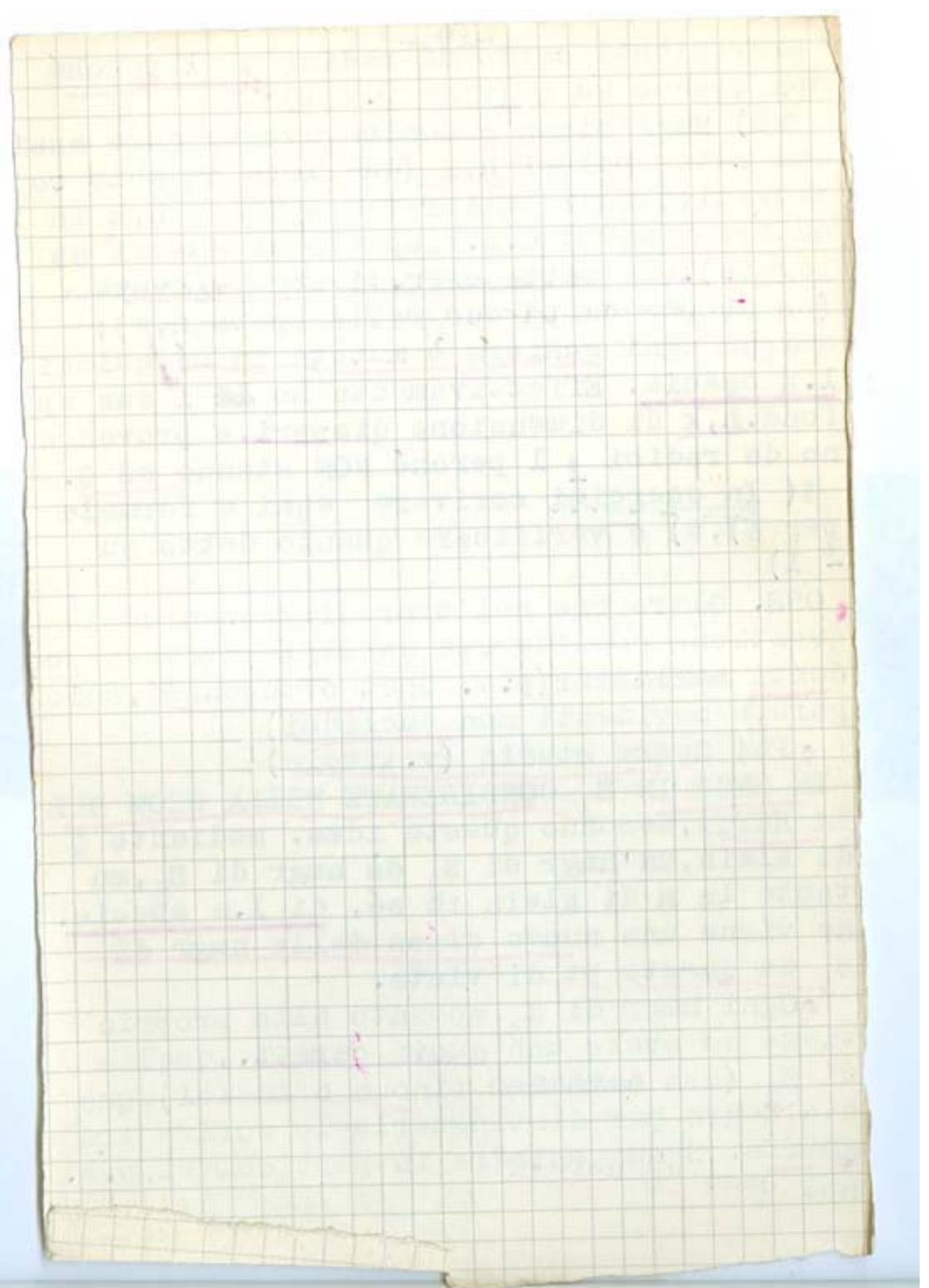
Prendo tutte le sol (3) / me occurre dalle
|α'_{ik}| = 0 / soddisfacenti alle (4) : costituisco
un sub. lin. inv. sol. Prendo il sub. Σ
sol della Q lungo spigoli (e poi cerchio in
esso le Q spigoli in due piccini). Σ
conten inv. le Q

$y_i = 0, y_j = 0, y_k = 0, y_l = 0 \quad \sum \beta_{ik} y_i y_k = 0$
ed i sono ridotti de inv. Q Σ i

$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4 + \lambda \sum \beta_{ik} y_i y_k = 0 \quad (5)$

Si tratta di cerca sub. Σ (5) quasi costituita
de due piccini α'β'.

$$\sum a_i y_i = 0$$
$$\sum b_i y_i = 0$$



- 55 -

Affronti ciò avvenge i nec. e rull. de esse
p. tal. du

$$(1) \quad a_i b_k + a_k b_i = p \cdot c_{ik} \quad (i \neq k)$$

(ricordi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono arb. i valori a_i, b_i non
sono legati da un'equazione di nessun cd.)

Le (1) sono 6 eq. non lineari nelle

$$\begin{cases} \text{un. } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \\ a_1, a_2, a_3, a_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{" } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{cases}$$

(es.) Per arrivare allo scopo Segue che
le b_i con. P. e. di

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 = p \cdot c_{12}$$

$$a_1 b_3 + a_3 b_1 = p \cdot c_{13}$$

moltiplicate per a_3, a_4, a_1, a_2 e sommando le

$$a_3 a_1 a_2 b_1 + a_1 a_2 a_3 b_2 + a_1 a_2 a_3 b_3 + a_1 a_2 a_3 b_4 =$$
$$p (c_{12} a_3 a_1 + c_{13} a_1 a_2) \quad (6)$$

Procedo analogamente si ha lo stesso 1° m. e. (6)

$$= p (c_{13} a_3 a_1 + c_{12} a_1 a_2) =$$

$$= p (c_{12} a_1 a_2 + c_{13} a_3 a_1)$$

Paragonando i termini si elimina le b_i e k

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{10} a_2 a_4 + \mathbb{E}_{14} a_1 a_4 &= \mathbb{E}_{11} a_1 a_4 + \mathbb{E}_{13} a_2 a_4 = \\ (H) &\pm \mathbb{E}_{14} a_2 a_4 + \mathbb{E}_{13} a_1 a_4 \end{aligned}$$

Prendi le $a_1 \dots a_4$ soddisfacenti alle (7) per
sistema $b_1 \dots b_4$ ha le b_i eq. l. h.

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = p \mathbb{E}_{10}$$

$$a_3 b_3 + a_4 b_4 = p \mathbb{E}_{14}$$

$$\mathbb{E}_{11} a_2 b_1 + a_1 b_2 = p \mathbb{E}_{13} \quad (\sim)$$

$$a_3 b_1 + a_1 b_3 = p \mathbb{E}_{13}$$

(Le altre due (5) sono vere anche \downarrow)

Quindi basta prendere (con arbitrarietà) il
piano α' soddisfacente alle (7) e poi si trova
il piano β' . (Le a_i, b_i sono coord. di

piano) Le (7) dicono che il piano
si può scegliere entro una certa sviluppa-
bile di 4.a classe (spiegare) (iscritta
in T')

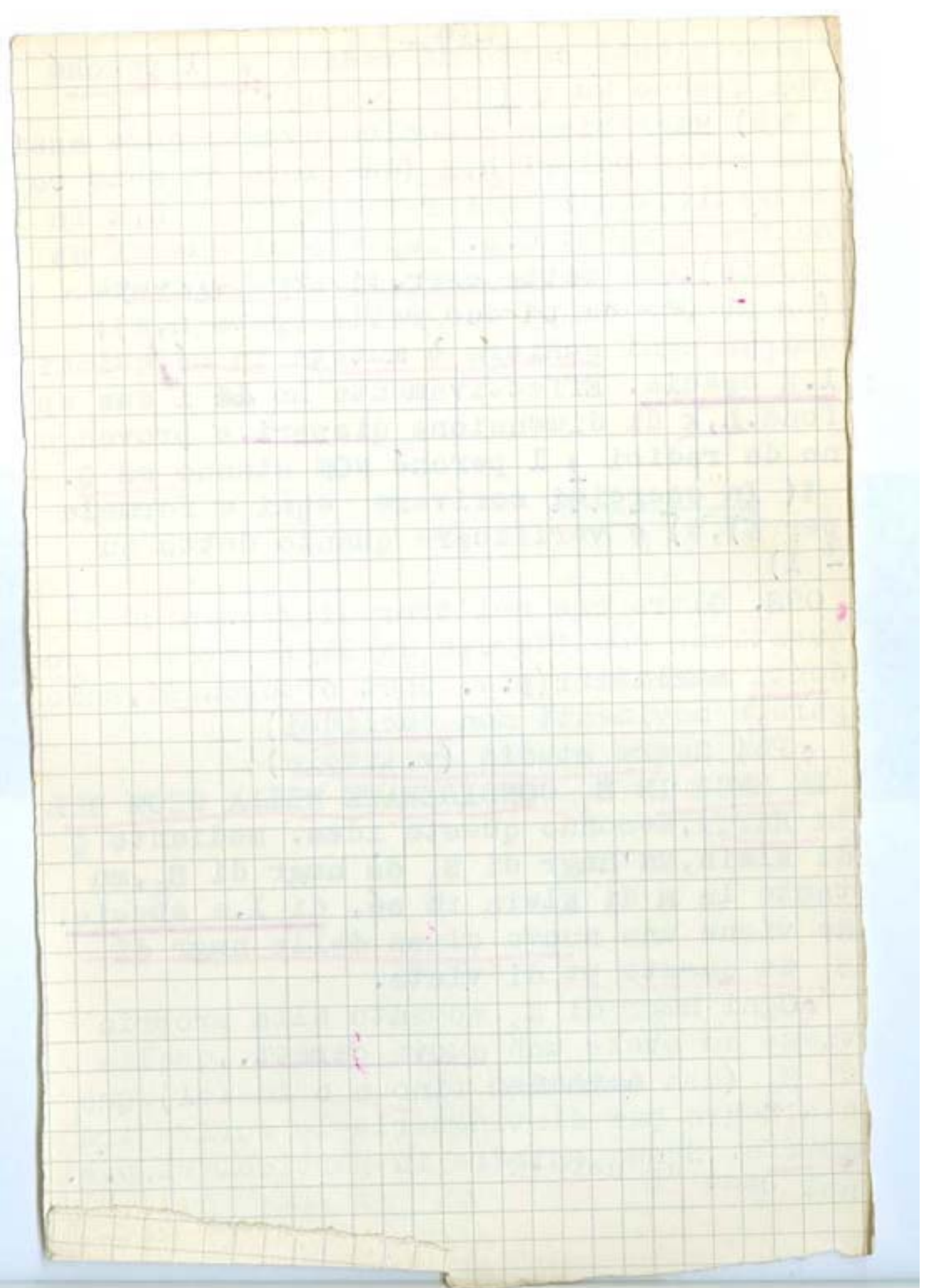
3) Sept. l. T' si può costruire definito con

sceglte di β' (in un modo) l. s. $\alpha' = (a_i) \beta' = b_i$

T' è l'inviluppo delle C^2 uscite in T' rispetto

o in $\alpha' \beta'$ senso omologo. Infatti una C^2 uscente

da T' (con α' riga) è C^2



delle

$$\sum \alpha'_{ik} \beta'_{ik} = 0$$

- 57. $(\alpha'_{ii} = 0)$
 $(|\alpha'_{ik}| = 0)$

Ma da i con ϵ a α'_{ij} = appla mto
 alle cippi α'_{ij} con

$$\sum \alpha'_{ik} (a_i b_k + a_k b_i) = 0$$

con ϵ (F)

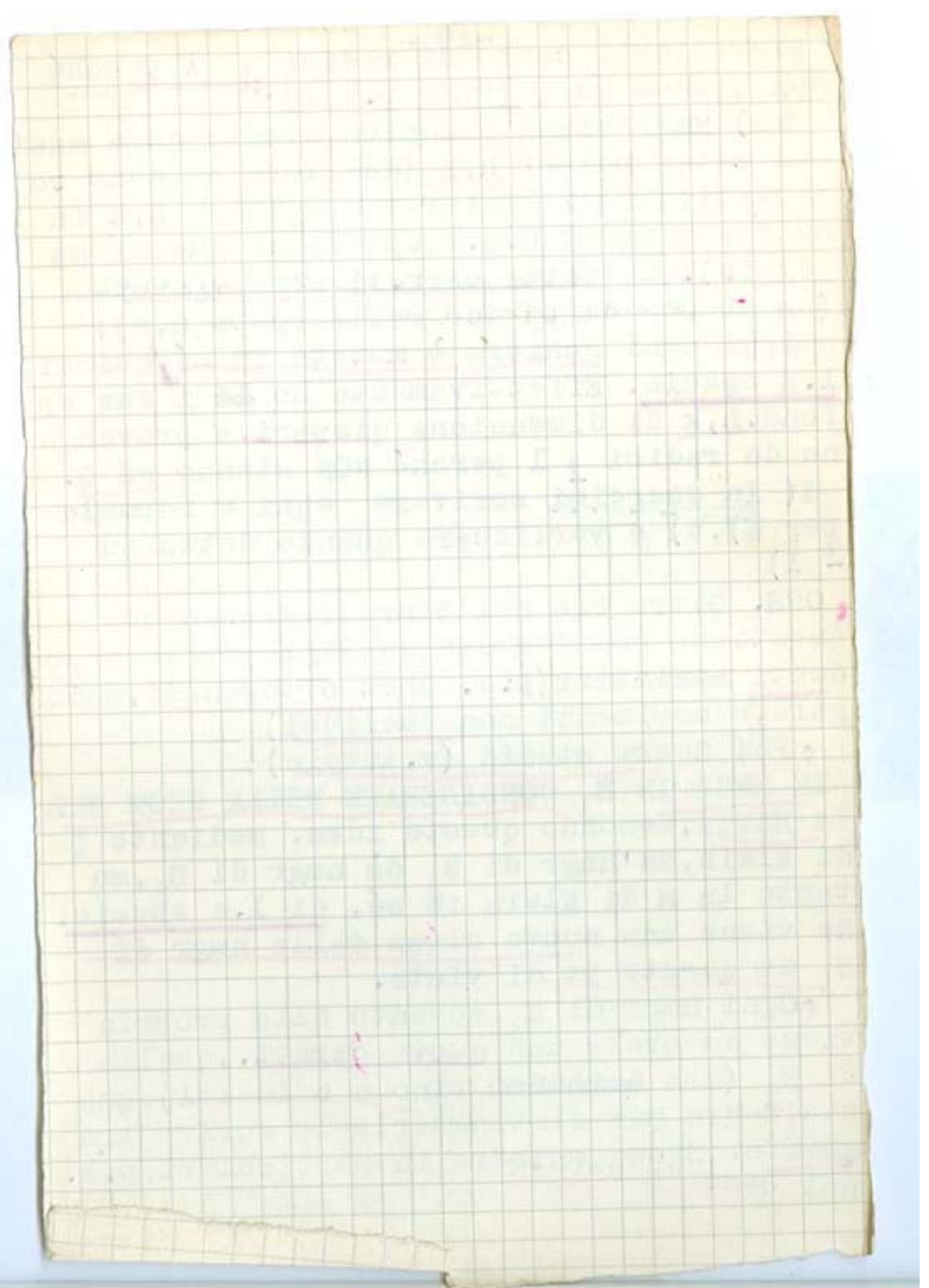
$$\sum C_{ik} \alpha'_{ik} = 0$$

che è appunto l'eq. di Γ'

(dicendo "coniugate" ciò si può intendere nel senso di p.49).

• Ciò premesso, applico con Segre al G di Battaglioni, comprendendo la trasfne di Segre. Ai piani α' , β' di S' corrispondono (p.37 (1)) in S due quadriche α , β (aventi T autopolare). A una retta r del G corrisponde una conica ρ'' del Γ' trasformato. Ai punti r_α, r_β corrispondono i pt $\rho''_\alpha, \rho''_\beta$. Questi ultimi formano su ρ'' due coppie armoniche. E allora anche su r le due coppie omologhe (perché tra r, ρ'' la trasfne ~~con~~ subordina una corra birazionale - gli altri 7 pt ~~con~~ di S corrti a uno di ρ'' stanno al solito sulle rette eqvti a r rispetto al G_8).

(con p. 111)

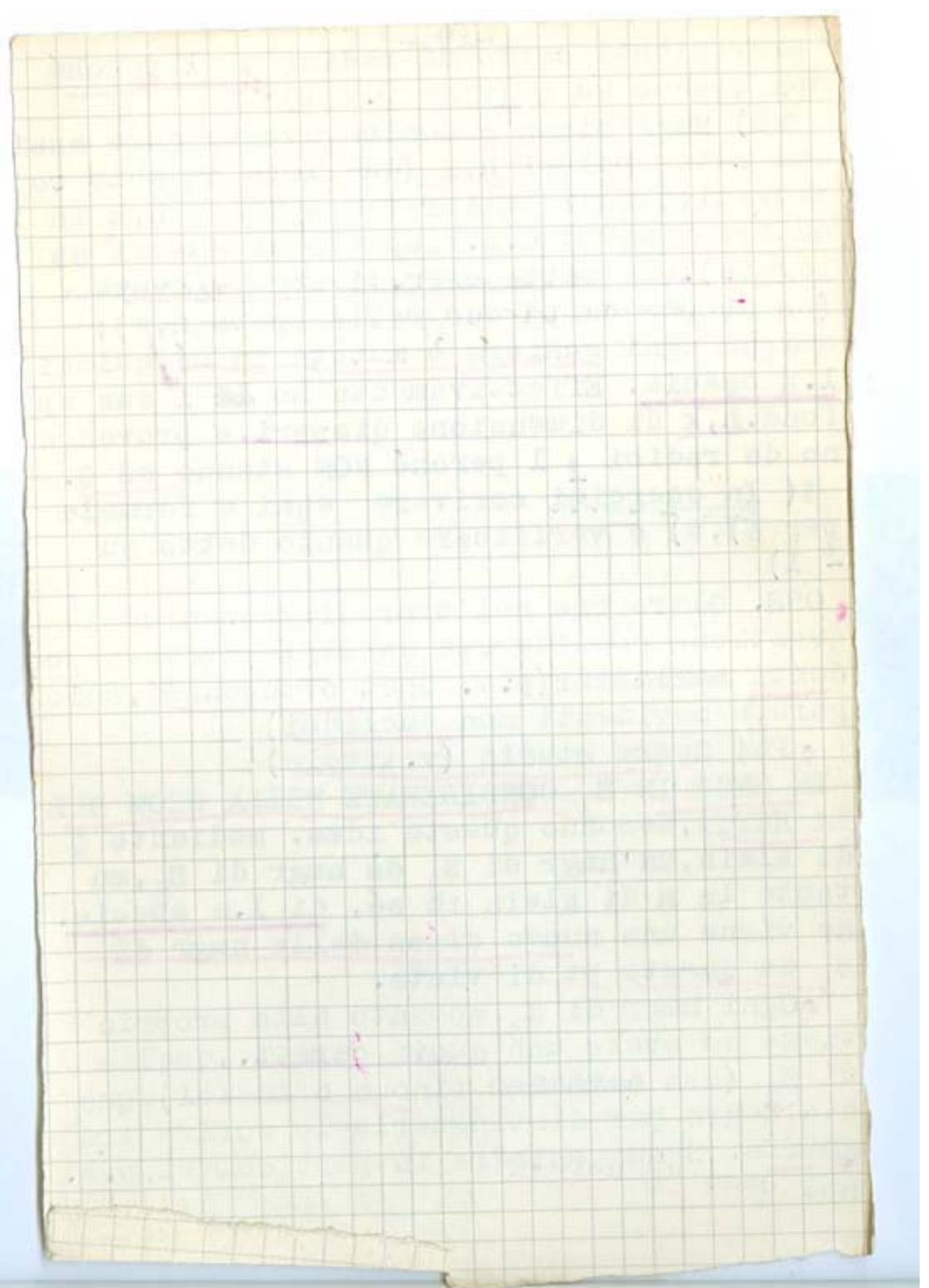


Segre ha così dimostrato che un C di Battaglioni si può considerare come costituito dalle rette che segano in coppie armoniche due quadriche. E viceversa perché il ragionamento si inverte sempre che le due quadriche siano "in posizione generale" nel senso di "avere un tetraedro autopolare comune" (spiegare)

I complessi quadrici "armonici" cioè ottenuti come ora detto da $2 F^2$ erano stati considerati da Aschieri. Il caso "più generale" di un cpl armonico è dunque quello di Battaglioni; ma vi sono altre possibilità per posizioni particolari delle Q. Anzi Segre e Loria in un lavoro di quel periodo (Math Ann 23, 1883) hanno classificato tutti i tipi di cpl armonici, trovandone 23 tipi.

Il ragto fatto da Segre e da noi riprodotto prova anzi che un complesso è Battaglioni è armonico in inf./1 modi (per la scelta arbitraria di α nella sviluppabile di 4.a classe, p. 57.)

OSS SUL C DI BATTAGLIONI. Secondo quanto precede, dipendono da parametri in n.º di $9+9-1=17$ (perché ognuno è armonico & in inf. modi). Il C quadr generale da 19 (nella $F(p)=0$ $6+15=21$ coeffti omogenei, e poi la possibilità....) Ciò fa capire che non ogni C quadr è di Battaglioni, cioè non è vero che la



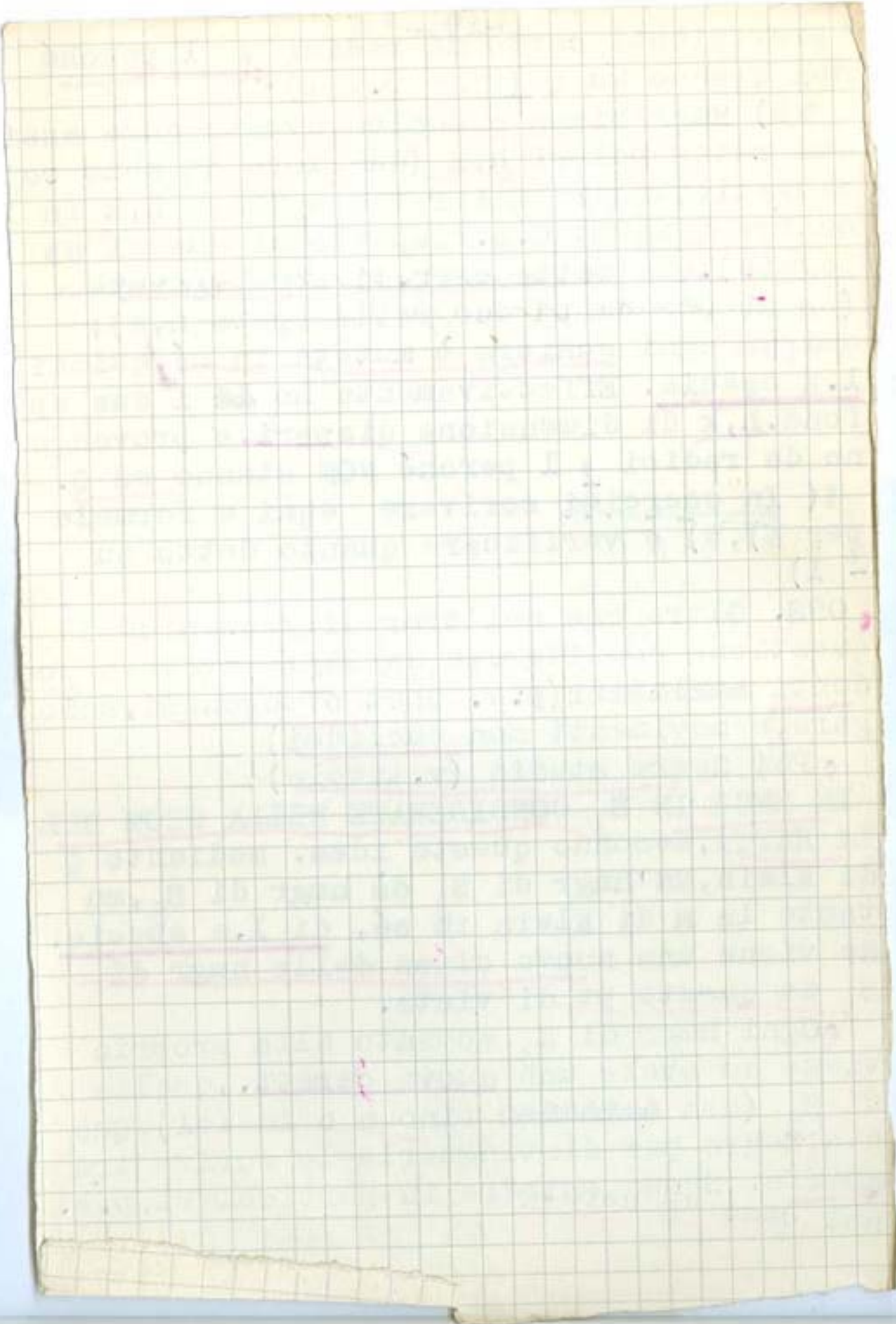
6)

$$(\circ) \quad \Sigma C_{16}^{16} = 0$$

ne eq. canonica di iperquadriche coniche:

ricambi a quanto aveva affermato Battaglini 1868, fondandosi sul ragto sbagliato: la (\circ) dipende da 5 parametri, il sist di riferimento da 15 (vertici e U, o trsine lin), in tutto 20, che paio&no anche troppi. Ma questi ragionamenti fondati su computo di parametri non reggono, vanno bene euristicamente, ma possono condurre a risultati errati. Quello stesso computo di parametri va corretto perché U non c'entra come si vede subito. Nonostante il suo errore il lavoro di Battaglini è importante, perché è il primo sui C quadr con certa generalità, prima di Plücker (1868-69) e di Klein, 1868.

Non seguirò qua Segre in altri risultati. Solo dico che con la sua trasformazione trova anche la Sup singolare (luogo di pt singolari, e invppo di piani tgti sing, spiegare) di C di Battaglini. Scrivo la sua eq. ne senz'altro



$$\begin{vmatrix} \cdot & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \cdot & c'_{35} & c''_{32} & c'''_{15} \\ \lambda_2 & c'_{35} & \cdot & c''_{14} & c'''_{13} \\ \lambda_3 & c''_{32} & c'''_{14} & \cdot & c''_{12} \\ \lambda_4 & c'''_{15} & c''_{13} & c'_{12} & \cdot \end{vmatrix} = 0 \quad \forall$$

con

$$c' = c_{15}c_{32} - c_{11}c_{13}$$

$$c'' = c_{15}c_{13} - c_{12}c_{35}$$

$$c''' = c_{12}c_{35} - c_{13}c_{32}$$

Le sup. simple è deg. 4, che è un tetraedro (d. Cayley)

• Ancora valie con 6 pt. doppi, situate 4 a 3 nella faccia d

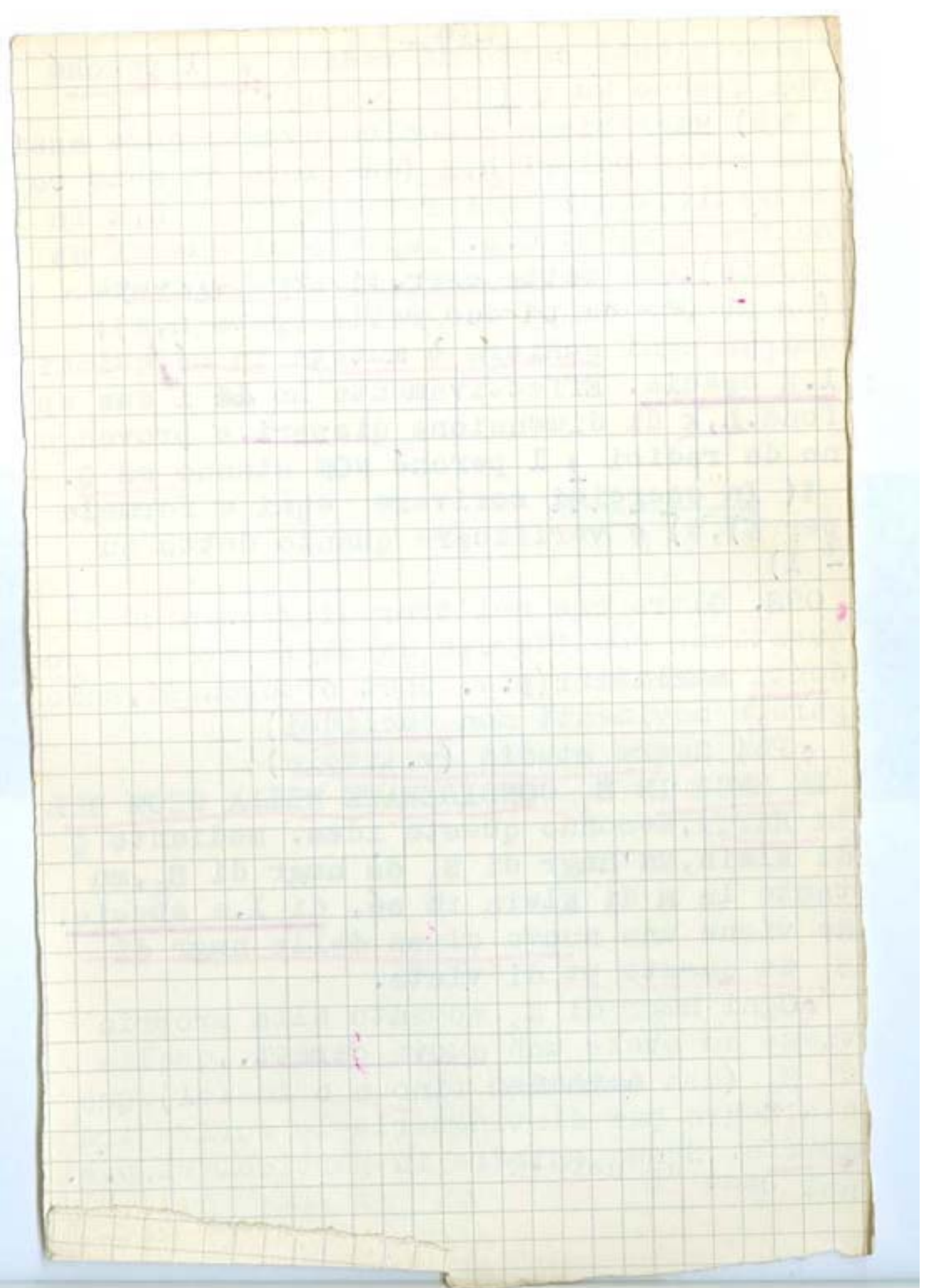
• Questi 6 sono parti delle sup. di Klein

(max. n° di pt. doppi in un n° n è $n(n-1)/2$)

• Le particelle comuni in due di esse

tetraedro, vicine della cur. piana in

ordine 4, (vertici di una quadr. pl. completa d



con la direzione dei vettori in velle delle
geod. (i.e. le geodesiche delle "sup"
delle curve. a Presunt. in i. l'ho...)

● GENERALIZZAZIONE DELLA TRASFORMAZIONE DI SEGRE DOCUTA A S. LIE. Questi (Geom der Ber. Transf) ha ~~considerato~~ considerato pi u in generale la trasf. ne tra S, S' che scrivo
(1) X=x^m, Y=y^m, Z=z^m con m cost. che per m=2 dà la trasi studiata da Segre. Se prendo m=1/2 ho la stessa con S, S' invertiti. Lie ha osservato quanto segue in relazione con le linee di un complesso tetraedrale

$$(2) a p_{11} p_{22} + b p_{12} p_{33} + c p_{13} p_{24} = 0$$

~~Le~~ consideriamo le linee le cui lgt appartengono

a C. le lgt sono in forma X=x(t), Y=y(t), Z=z(t)

per cui si ha

$$p_{ik} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ dx & dy & dz & dt \end{vmatrix}$$

e la condizione per il che si ha il v

$$a(x dy - y dx) (-dt) + b(x dz - z dx) dy + c(y dz - z dy) dt = 0$$

$$(b-a) x dy dz + (a-c) y dx dz + (c-b) z dx dy = 0$$

per cui per un punto si ha X=x(t), Y=y(t), Z=z(t)

z=z(t) ● Le involupe del ruolo in questi forma

(da p.67) Prima di lasciare i lavori di Segre in relazione col complesso di Batt. aggiungo due ossi relative a altri due lavori di S.

• OSS I • In un altro lavoro giovanile di Segre (Sur un cas particulier de la surface de Kummer. Lettre à M. Rohn, Leipz Ber 34, 1884), egli si è occupato delle sup. che si possono considerare tetr^{di} in più modi. Rohn aveva indicato la possibilità di 2, 3, 4 modi diversi. Segre ha fatto vedere che possono esserlo anche in 6 modi: indico solo l'idea. Rohn aveva fatto vedere che la questione si riconduce a questa: in quali 6 casi possono 6 elti di una forma di prima specie ripartirsi in più modi in coppie di ~~due~~ involuzioni. Ovvio è il caso di UNA; per due posso p.e. prendere 3, 4, 5, 6 arbitrari e poi 12 come coppia comune alle (45, 36), (35, 46). Per avere ~~QUATTRO~~ PTHO inv. posso prendere come sostegno un cerchio, e iscrivervi due triangoli eqi 135, 246. Allora le terne 12, 45, 36; 14, 23, 56; 16, 25, 34 appartengono a invni (rette parallele; p.e. essendo i due triangoli eqi individuati da 1, 2, tutta la figura è sym rispetto al diam perp 12, etc). Ho così TRE invni. Se poi prendo i due triangoli sym rispetto al centro, p.e. 1 e 2,

3, 4; 5, 6 ho nuove invni 14, 25, 36 con pub nel centro

Così si ha con Rohn la possibilità di sup. di Kummer che sono 1,2,3,4 volte tetraedroidi. Segre ha trovato che vi è una (sola) ulteriore possibilità: in SEI modi. Se infatti prendo tre coppie di pt su r AB, CD, EF adue a due armoniche (p.e. parto da AB, CD armoniche, e vengono EF ; non saranno tutti reali, ma non importa) i 6 pt possono ripartirsi in SEI modi in coppie di una inv. Infatti p.e. l'inv (AC, BD) muta la coppia AB nella CD e viceversa; quindi la coppia EF in sé. Ma non muta E, F ciascuno in sé (se no E, F sarebbero c.a. rispetto ad A, C mentre il c.a. di A rispetto EF è B e non C), quindi E va in F e F in E . Ho così inv

<u>AC</u>	<u>BD</u>	<u>EF</u>
-----------	-----------	-----------

Ragionando in modo analogo vengono le altre inv

AD	BC	EF
AE	BF	CD
AF	BE	CD
AB	CE	DF
AB	CF	DE.

• Un altro modo, sostanzialmente equivalente per arrivare alle sestuple di pt considerate è questa. Stendo r complessa sul piano di Gauss, e poi sfera di Riemann per proi stereogr. Allora prendo sulla sfera 6 pt vertici di un ottaedro

Regolar $ABCDEF$. p.e. $CDEF$ vertici di un tetra

-67 IV-

inverte in centro max, AD ~~stato~~ stato

di cui \perp . Allora rot. spez. 180° intorno ad



\perp CD, EF parte l'altro in

si. Di questi rotazioni di 180°

ne ho 6 (p.e.c.o. e l'altro)

anche per CF; e per altre 2 coppie

oppe volte (e volte opposte). Ognuna di queste

rotazioni, con si può vedere, è un'op. di

una permutazione di 2 in 2, che sono uno

di cui in base a formule di Cayley (Klein)

Ikos. p. 25, Bianchi, leg. sulle linee di

gr. di simmetria, p. 119 con nome di spec. 20/2

sono cui op. rotazione (con un 180°)

della spec. di Klein con π e $\pi/2$

$$Z' = \frac{AZ + B}{-BZ + A}$$

$$A\bar{A} + B\bar{B} = 1$$

e per un'op. di $\pi/2$.

-62 v.

Lezione - H. ci. L. 6 liv.

(Tommaso)

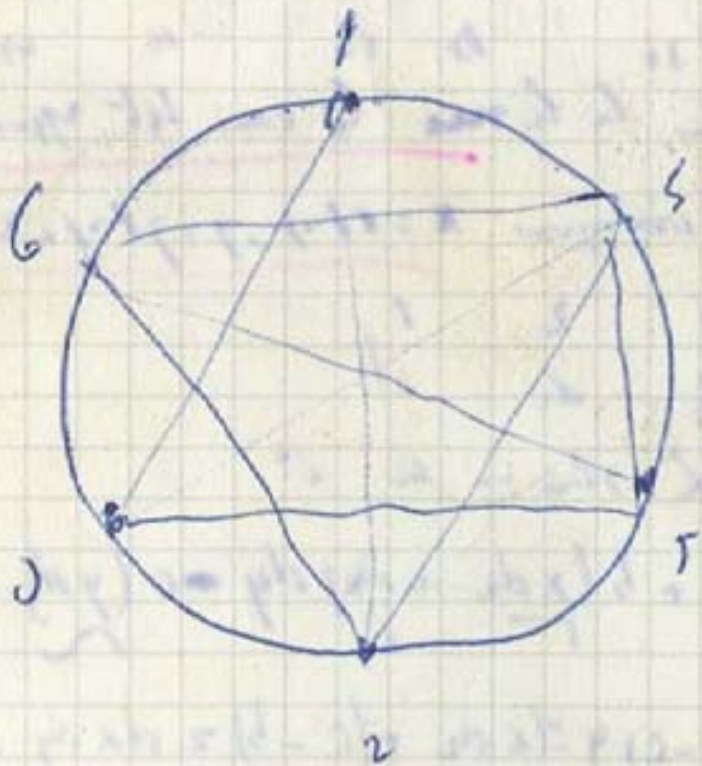
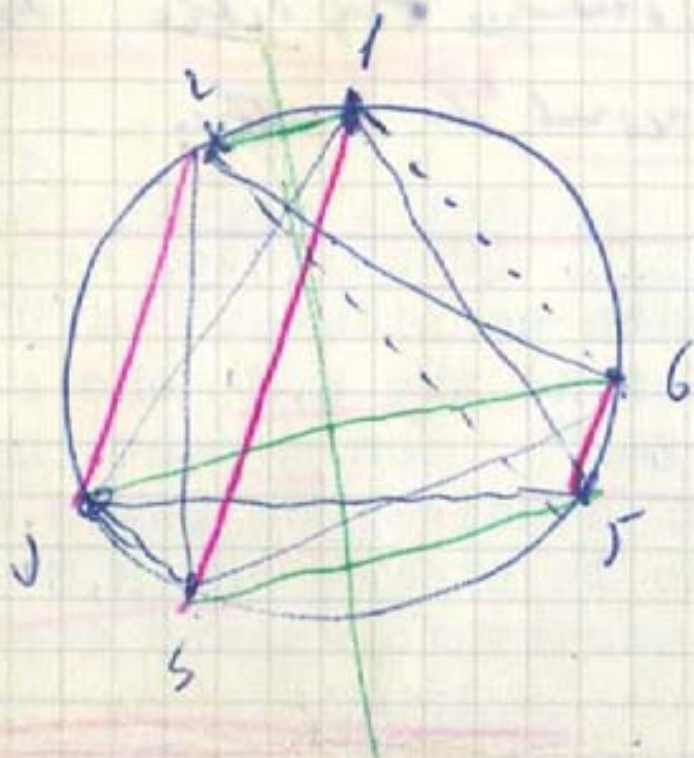
OSS II. Molti anni dopo Segre ha dato una notevole generazione diversa del complesso di Battaglioni (Su una generazione dei complessi quadratici di rette del Battaglioni, Rend. Palermo 42, 1917). Parto da due quadriche ~~α, β~~ α , β e più precisamente da due loro schiere, o regoli A, B; e impongo a una retta r (in sostanza che la quaterna di pt $r\alpha$, $r\beta$ sia proiettiva a quella dei piani tgi da r, ma per precisare l'ordine delle quaterne diciamo con Segre cos'ì): siano ~~α, β~~ m, n le rette di A, s, t quelle di B incontrate da r; imponiamo

quat punti $r(m, n, s, t) \pi$ quat pl $r(, \dots)$
 Il luogo di r è un complesso di Battaglioni, e ogni complesso di Battaglioni si può generare così.

(Tommaso sp. 61)



68



alla quale sfuggono alcune linee particolari del complesso

$$\oint \frac{F(z) dz}{c-z} \Big|_y = \int \frac{F(t) dt}{b-t} \Big|_z = \int \frac{F dt}{a-t}$$

con $F(t)$ continua. (Ecc. la parte di
1° m° ...)

$$\Sigma (b-a) \frac{dy}{y} \frac{dz}{z} = \frac{F(z)}{(b-a)(c-z)}$$

$$= \frac{F(z)}{(a-z)(b-z)(c-z)} [(b-a)(c-z) + (a-c)(b-z) + (c-b)(a-z)] = 0$$

• Ora la osservo che le linee (1) - una parte
perché $S=1$ - ovvero la (1) e (2) in
z. Infatti:

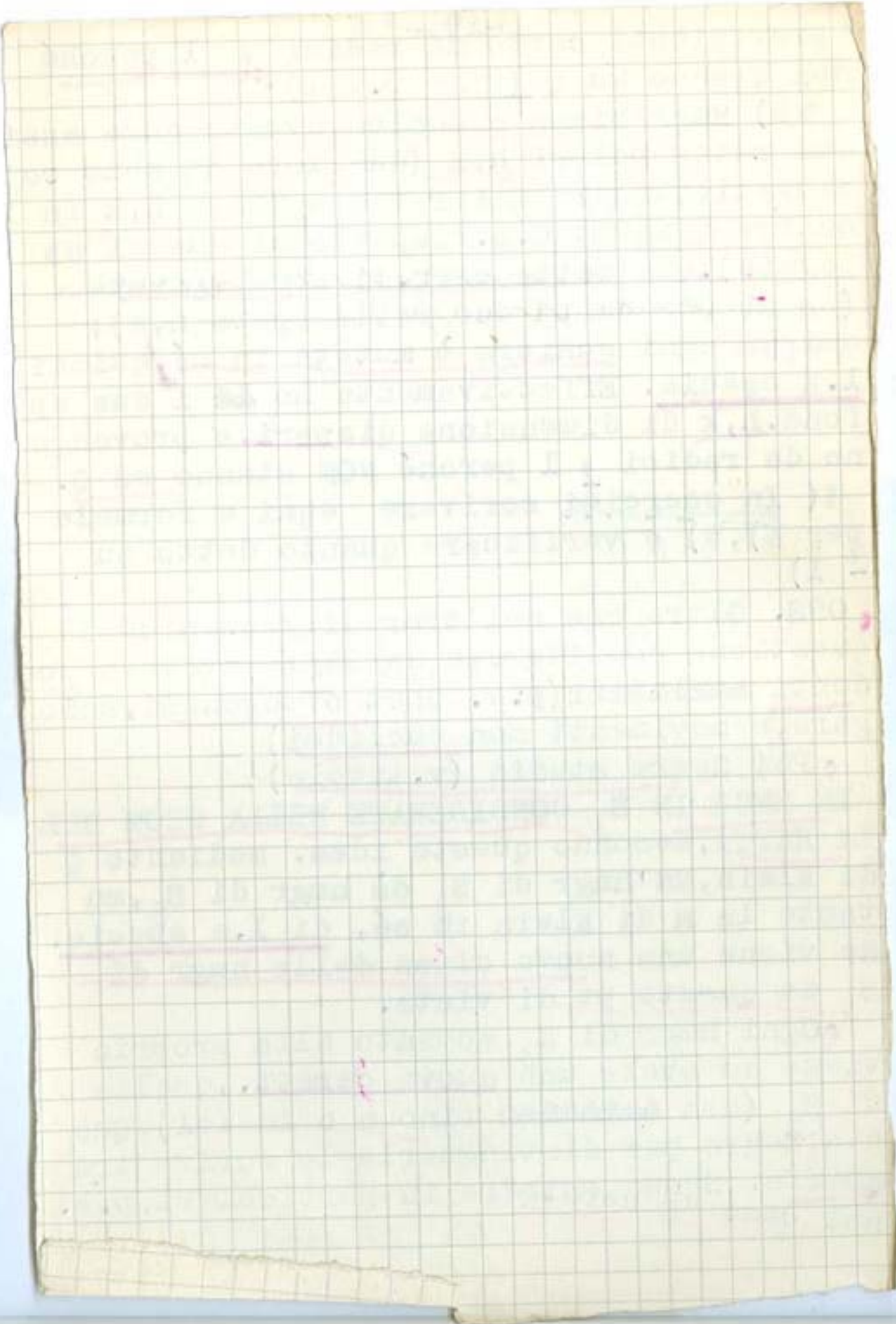
$$(b-a) x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} d^3 y d^3 z \dots = 0$$

$$\text{con } (b-a) x d^3 y d^3 z \dots = 0$$

Così con (1) ovvero la parte di ogni C (2)
in z tipici linee della stessa C tipici

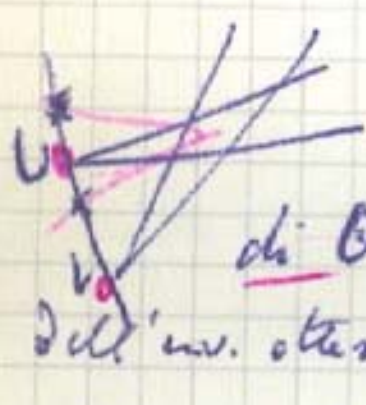
• E allora la appre ciò alle dolce
manipolazione della assistentia (Spiega)
della rep. tetraedrica (della de Governo)

(Spiega art: in ban che gli paragochi; o alle
manipolazione per me: gli ... (Spiega dei ...)



• Non espongo questa ricerca di Lie. So lo osservo che per $m=1/2$ dá le asintoti che della sup. di Steiner (giá note prima di Lie). E invece spiego direttamente queste come trovate da Cremona.

• La rappresento su piano π , con sist. lin di coniche inf. 3. Queste (luogo) sono apolari a una schiera di coniche Θ , che considero nelle cond pi' u ge nerali (quattro rette base, lati di quadrilatero). E ricordo (less. Dub. di



Derangues. Steiner) da pa. M'

generici di π passano due c' di Θ , le cui gt in M' sono i raggi della

inv. ottenuta proiettando da M' le tre coppie di

vertici opposti. Ora h, k sono p.e. UV in π

e. o. sulla UV, de. cui sono conjugati

rispetto alle c' in π da M' in UV, de.

Qui le coppie h k e' in Σ_3 . E' altrettanto

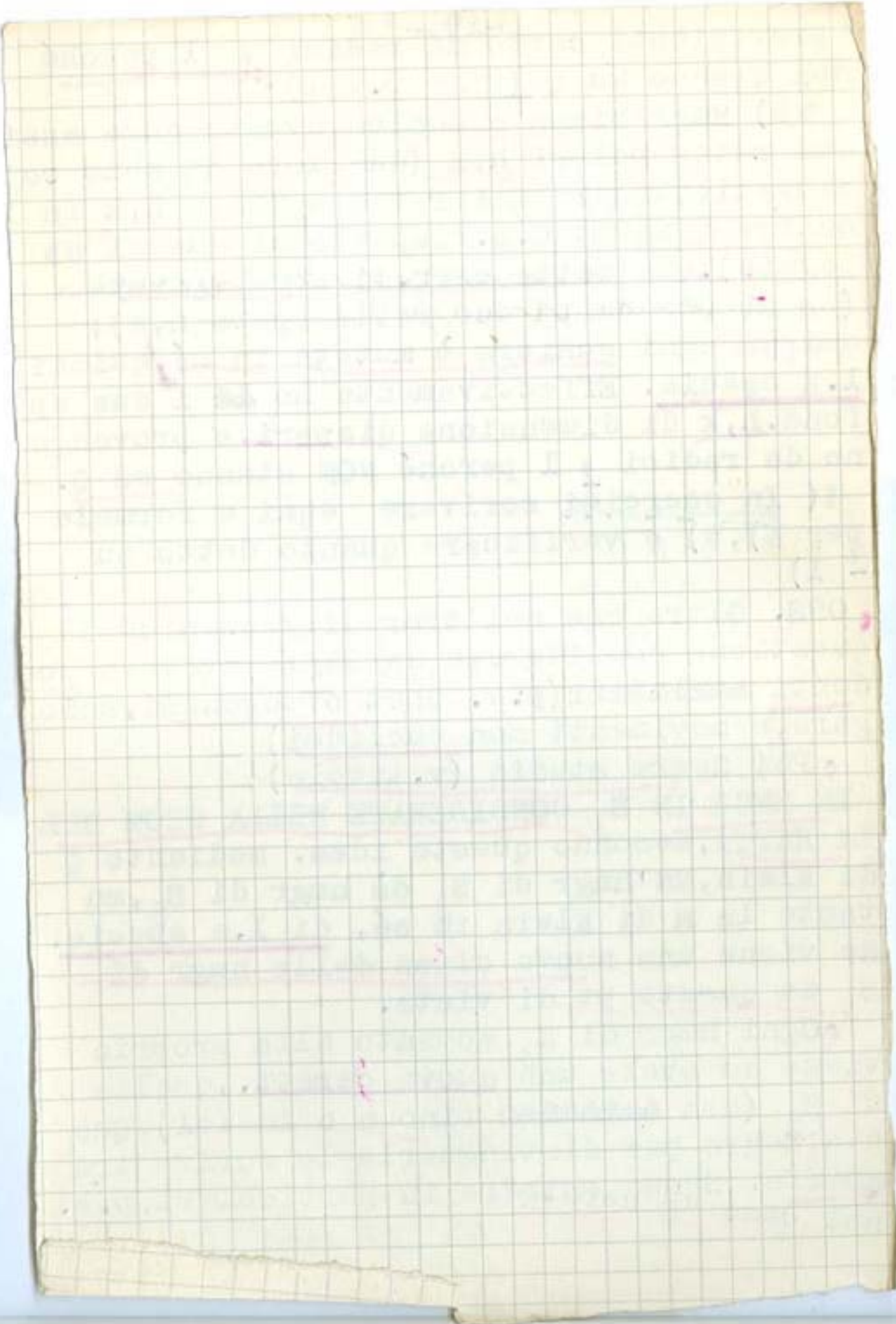
il pt. h k alle sup. in M' tre coppie di coniche

per M' (spiegare) e l'inv. il quale e' una

c' con pt. doppi in M', cuii spigola in Σ

oltre per M' contanti e' di Σ_3 : e' la h k

Le diriz. sup. Σ uscenti da M sono tutte da c'

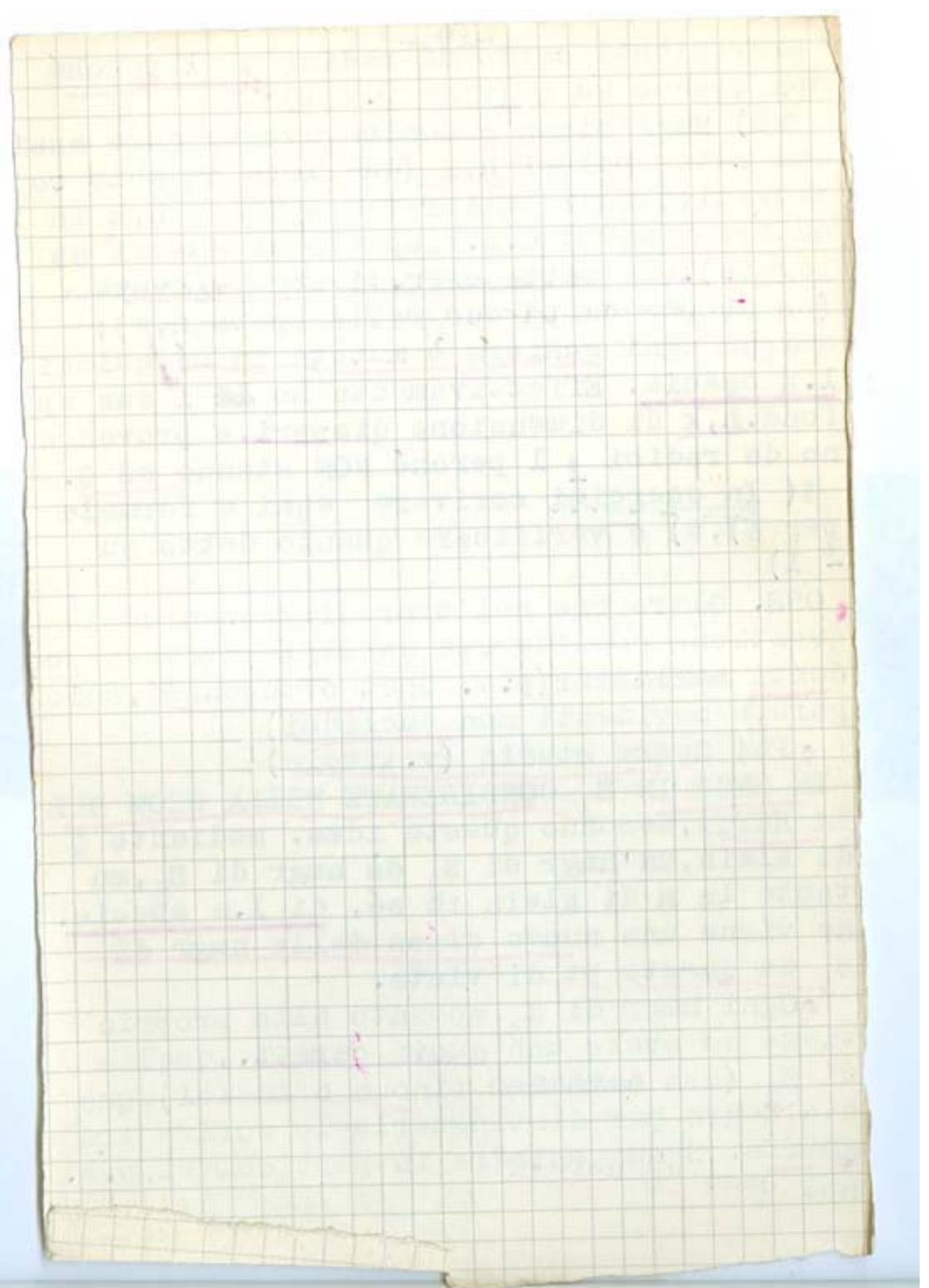


-75-
hans per imp. le dir. d h, le usate de M'
casi le gt princ. in M de' le h, k.

Quel ~~as~~ ~~di~~ ~~si~~ ~~non~~ ~~de~~ ~~2~~ ~~o~~ ~~di~~ ~~0~~ ~~sono~~
opri C^2 di Θ (con le 2 ant de M) he su

gt imp. d gt princ. - cioè è img di asinto
tica. Le asintotiche delle sup. di Ste-
ner hanno per img le coniche di Θ

(e sono perciò quartiche, razionali,
dunque di 2.a specie)



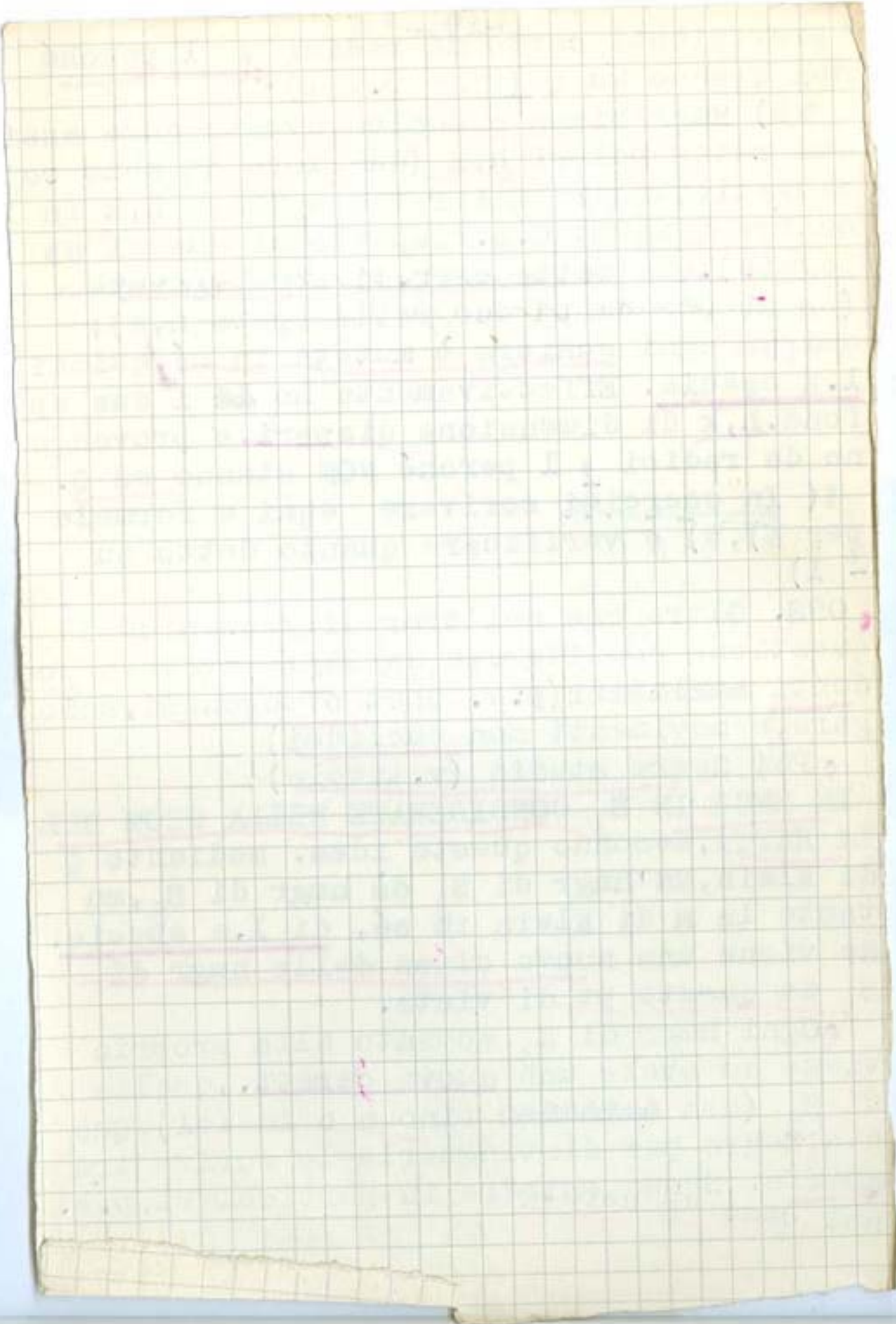
• PREMESSE SUGLI IPERSPAZI PROIETTIVI

Una notevolissima parte della produzione di Segre, a partire dai primi anni è di g. proi ipersp., alla quale anzi egli ha dato un fortissimo contributo a cominciare della sua tesi di laurea, di cui diró poi. Questa è divisa in due Mem "Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ~~qualsiasi~~ ad un numero qualunque di dimensioni" e "Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche" (entrambe in Torino Mem xxxvi 1884). In una introd. a queste Segre sviluppa alcune generalitá, che già allora si dovevano ritenere note sugli iperspazi.

• Preferisco accennare direttamente e in modo indep a queste prime nozioni per spiegarle brevemente, in modo diverso.

(yves) Spazio numerico proi N_r ; i suoi punti numerici (x_0, \dots, x_r) . Omografia di N_r in sé. (100 anni)

(yves) • Si definisce spazio proi a r dim S_r come totalitá di "punti" P in corr.za biun coi pt P' di N_r ($T = P \rightleftharpoons P'$) - e allora le coordte r di P' si dicono coordte di P -, completando in modo essenziale la df. come segue. Se in N_r considero un'omografia $U P' P''$, ho una nuova corrza biun tra S_r e N_r



$- \lambda_1$
 che è la TV. di $P'' = (y_0, \dots, y_r)$ in base a quelle
 2° corr. per i vettori e_i e P le nuove coord. y_i . \forall
 un-altri met. di coord per P di S_r . Tutti i v.
 stessi di coord costanti si dicono ammissibili.

La nozione prima incompleta di S_r
 va appunto completata così, nel fissa
re come detto i sistemi di coordinate
ammissibili. Ciò va tenuto presente
per tutte le df che si danno in cui in
tervengono pt. Bisogna sempre stabilire
che valgono in tutti i sist. di coord
ammissibili. Lo faccio p.e. per la nozione
 di dipendenza (o indep) lineare
di più pt

$x^{(1)}, \dots, x^{(m+1)}$. Dip. lin se esis
 tono coeff non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 x_1^{(1)} + \dots + \lambda_{m+1} x_{m+1}^{(1)} = 0 \quad (\alpha = 0 \dots r)$$

Effettua ricorrendo alle coord. ammissibili

y_i con λ

$$y_p = \sum_{j=0}^r c_{pj} x_j \quad (p=0 \dots r)$$

$$\sum_i \lambda_i y_p^{(i)} = \sum_i \lambda_i \sum_j c_{pj} x_j^{(i)} = \sum_j c_{pj} \left(\sum_i \lambda_i x_j^{(i)} \right) = 0$$

$$= \sum_{j=0}^r c_{pj} \left(\sum_i \lambda_i x_j^{(i)} \right) = 0 \quad (j=0 \dots r)$$

Se non $\lambda_i = 0$

$$(i) \quad \lambda_1 x_1^{(1)} + \dots + \lambda_{m+1} x_{m+1}^{(1)} = 0$$

78 (2002)
 19 p. 81 Infatti determino S_h

$$x^1 \dots x^{h+1} \text{ l.i.}$$

è ~~altro~~ S_a con

$$x^1 \dots x^{h+1}, y^{h+1} - p^{h+1} \text{ l.c.}$$

è S_b con

$$x^1 \dots x^{h+1}, z^{h+1} - p^{h+1}$$

3 pt x, y, z sono l.i. (se no
 an

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_{h+1} x^{h+1} + \lambda_{h+1} y^{h+1} + \lambda_{h+1} z^{h+1} =$$

dato il 1° m.° sta in S_a , e quindi
 anche il 2°; e allora è un pt. di S_h
 cioè

$$1^\circ \text{ m.}^\circ = \sum p_i x^i + p_{h+1} x^{h+1}$$

e allora il 1° m.° si può anche
 etc - quindi, per x, y, z addividi $(a+1 + b - h - y)$

Se mance S_h ha 1° $y^1 \dots y^{h+1}$

$$z^1 \dots z^{h+1} \text{ etc c.d.}$$

Q.E.D.

e la relazione (1) vale per ogni indice, in ogni sist di coord ammissibili.

• E' ovvio che indza lin dei pt considerati vuol dire che la matrice

$$\begin{pmatrix} z'_0 & \dots & z'_r \\ \vdots & & \vdots \\ z'_{m-r} & \dots & z'_{m-1} \end{pmatrix} \text{ ha rank } \boxed{m+1}$$

• Quindi in S_r non esistono piú di $r+1$ lin. ind. • Esistono però $r+1$, p.e. i pt

$$A^0 = (1, 0, \dots, 0), A^1 = (0, 1, \dots, 0) \dots A^r = (0, \dots, 0, 1)$$

(Naturalmente, che i pt A^i abbiano tali coordte vale solo in un sist. di coordte ammissibili. I pt A^i si chiamano i vertici del simplesso di rifto (in que sistema)

• Spazi subordinati. Dati $m+1$ pt lin ind x^i ($i = 0, \dots, m$) le univ. d. pt x ha

cb. lin

$$(x) \quad x = \sum_{i=0}^m \lambda_i x^i$$

si dipen ovviamente in un sub. d. c.c. e è triviale per le pt dati.

• Le tabele de pt (1) nelle una S_m per altro (cond le λ_i , e gale tabe ...)

si divi in spazi subordinati (d de m m) , S_0 , S_1 (retta) S_2 (pa) . S_{m-1} (ipresen)

1 con S_k in uno spazio sottile

1 $m + r - h - 1 - r'$ da r' è la dim. di
 spazio congegnato $S_m \cap S_{r-h-1}$ da per
 la via $i = r$, che la traccia è $(m-h-1)$.

Quasi come volte i' congegnato e S_h di
 (m) . Quasi basta contare gli $(m-h-1)$

di S_{r-h-1} da, per l'oss. 1.2.2

$$\infty \binom{r-h-1-(m-h-1)}{(m-h-1+1)} =$$

$$\infty \binom{r-m}{(m-h)} \quad (1.2.2)$$

P.e. i vertici del n -simpleso danno luogo a rette, piani, S_2 , etc (faccie, o spigoli; coppie opposte)

Dati due spazi subordinati S_a, S_b si trova che: (line) (sp. intersezione $S_a \cap S_b$)
i pt comuni costituiscono (se ci sono) uno spazio subordinato S_c (che si può ridurre a spazio vuoto, al quale conviene attribuire convenzionalmente la dim -1) esiste uno spazio (minimo) congiungente, spazio subordinato (che può coincidere con lo S_r) contenente tutti i loro pt), S_h
e che

$S_h = S_c \cup S_b$
PT

(1) $a + b = c + h$

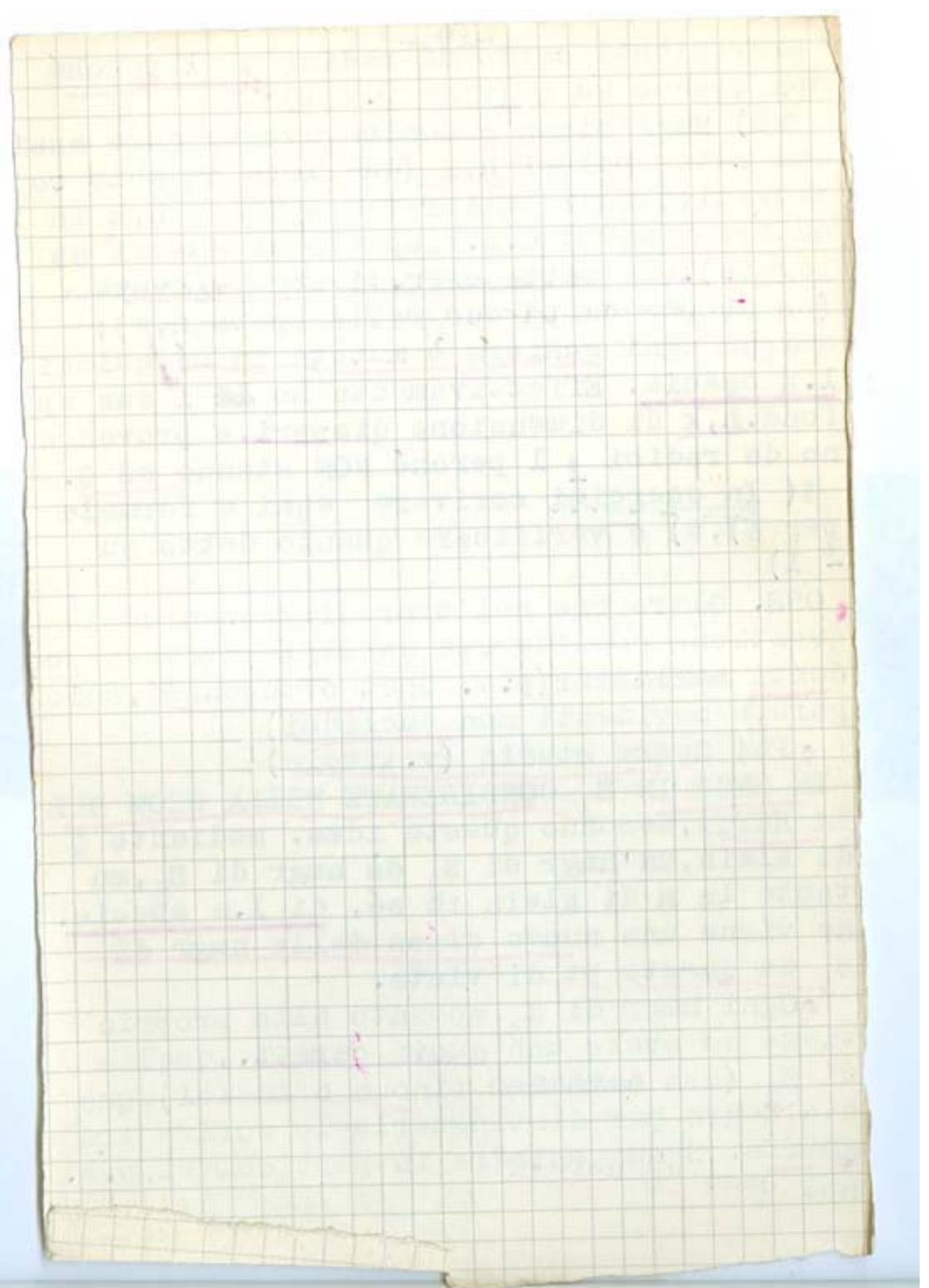
(Dato n man l'altro c: -1: pt. retta spigolo
in S_2)

Dim - 1. Se S_a di S_r in ∞ (r-u) (u-u)
(separati con m (r-u) generici) pt. le
rette di S_a, S_r, S_r in $\infty^2, \infty^3, \infty$... S_u di S_r ∞^9

1) S_m di S_r in S_h in ∞ (r-u) (u-h)
(separati con S_{r-h-1} "piano", due spigoli gen⁴

spazio di dim. $r-h-1$ a $r-h-1$. Dato
~~di quest'ordine e S_h gli è coint. de S_a . Si separa l' ∞~~

~~questo dato dopo intersezione con S "spigolo con S_h e poi
con S_h contenente ∞ spigolo di S [r-h+1+h-1]. (1)
con la S_{r-h-1} minima del S di S non si tratta~~



* 3) Quando x varia su retta per A^0 , varia solo x_0 (perché (x_1, x_2, \dots, x_r) ...).
 Quando varia in S_2 per A, A^1 variano solo x, x_1 etc etc

Dato iper piano, posso costruire una sua eq

$$(4) \sum x_0 \dots + \dots = 0$$

soddisfatta in tutti e soli i suoi pt. Basta imporre che lo sia nei pt individuati l'iperpiano:

$$\sum \lambda_a x_a = 0 \quad (7)$$

il che dà per le λ_a eq l.h. con matrice non nulla: i rapporti sono individuati. Il ragionamento si inverte: data (4) essa individua iper piano.

• Fissato il sist di rifto (per i pt) ho corr.za buin tra gli S_{r-1} e le $(r+1)$ ple

$$(\lambda_0 \dots \lambda_r)$$

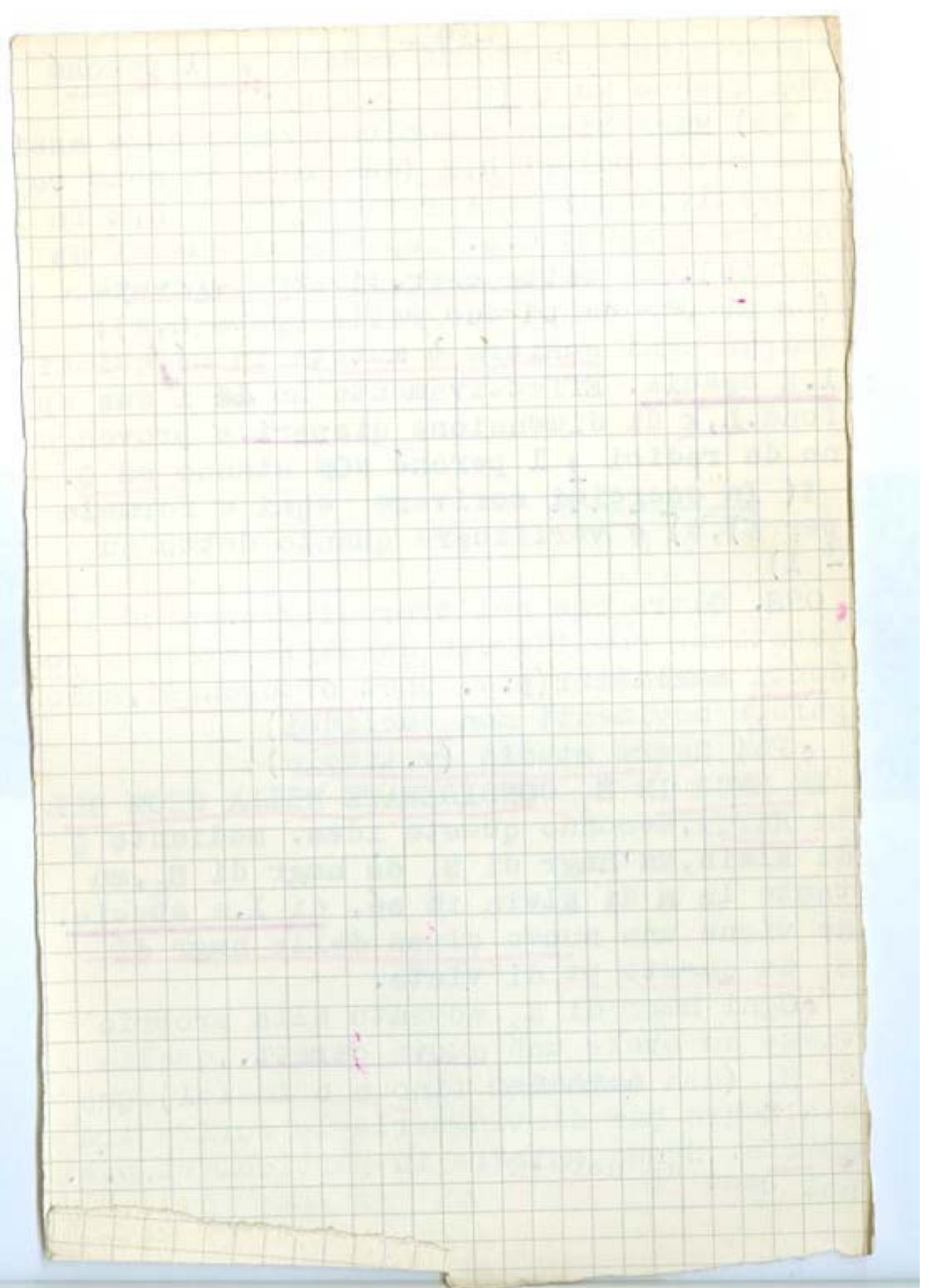
E si vede subito che cambiando il sistema di rifto per i pt le λ_a subiscono trasf l. h. (a dtrm non nullo). Quindi gli iperpiani di S_r costituiscono un altro S_r proiettivo di cui sono i "pt", con le coordinate ammissibili già dette. Σ_r

• Quindi anche per gli iperpiani noz di dipendenza lineare o meno.

Se chiamo Σ_r lo S_r degli iperpiani, posso considerare gli analoghi degli spazi subordinati. Parto da λ ip. ni l.i.

$$\lambda^1 \dots \lambda^h$$

essi individuano un Σ_{h-1} sul Σ_r , con h. ni l.i. iper



ipiani

$$\lambda_1 z'_\alpha \dots = \lambda_h z'_\alpha$$

con $d \alpha_j^2$

$$\sum_\alpha (\lambda_1 z'_\alpha \dots = \lambda_h z'_\alpha) \alpha_\alpha = 0$$

Essi costituiscono un sist lin di iper
 piani la cui base 'e uno $[r-h]$: infatti per
 l'ind lin degli iperpiani (matrice coord
 aratt. h) le equazioni

$$\sum z'_\alpha x_{\alpha 1} \dots = \sum z'_\alpha x_{\alpha 2} = 0$$

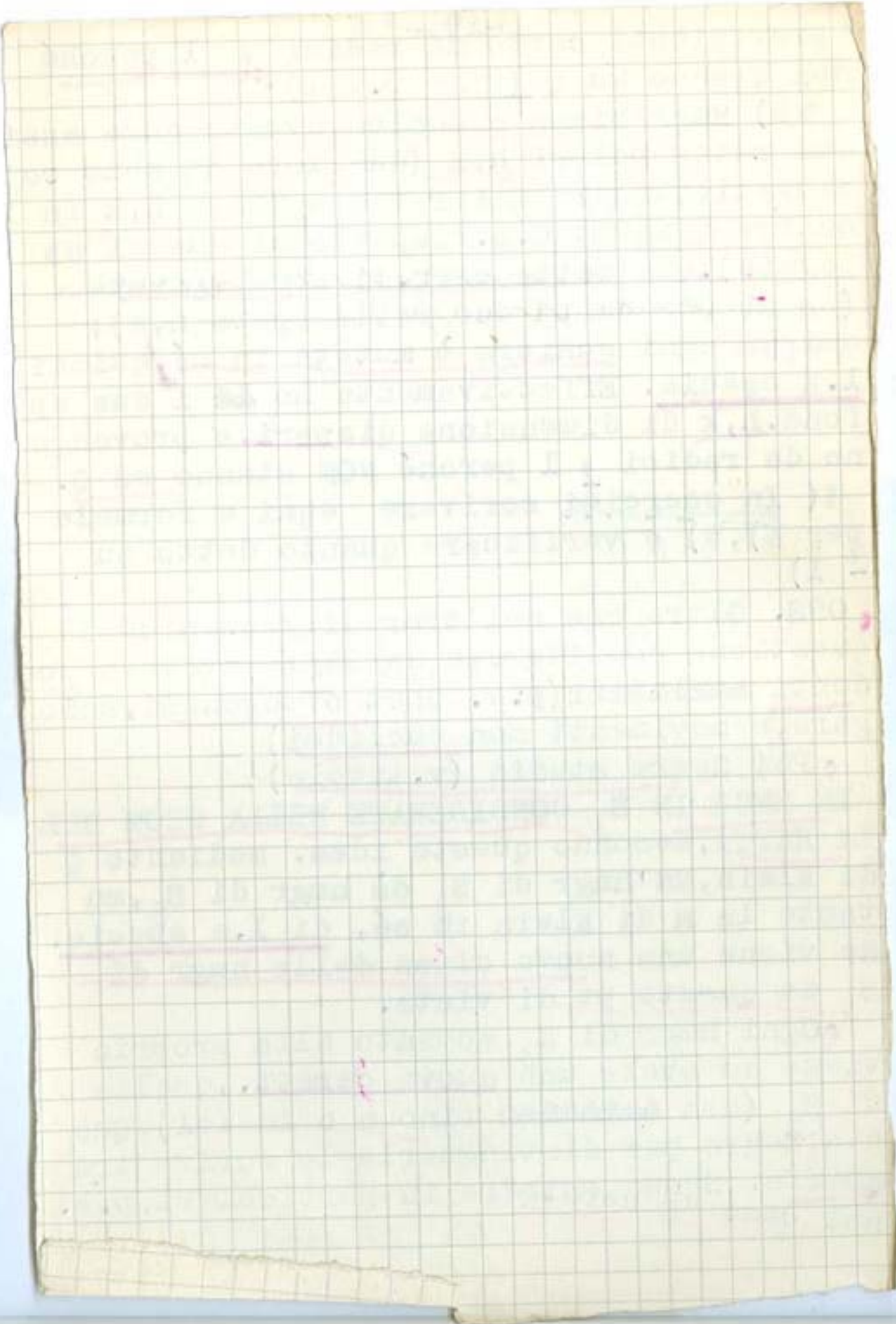
analisi i) hanno $r+1-h$ soluz lin ind. coord
 di altrettanti pt lin ind che stanno sulla
 base, insieme con le loro cb lin.

Quindi un Σ_{r-h} è formato dagli iperpiani
 per uno S_{r-h} , e -come risulta-viceversa.

Ogni spazio subordinato si può perciò
 considerare in due modi, cioè come insieme
 di pt, o degli iperpiani per esso, e come
 tale, se si tratta di uno S_{r-h} , come quass'u
 rappresentarsi con un sist. di h eq l.h. nel
 le x . Se si tratta di uno S_p , si rappresen
 ta dunque con $r-p$ eq l h (lin ind.)

Il fatto che Σ_r 'e definito come uno
 S di iperpiani porta a una legge di dualità
 r , in cui si corrispondono

S_0	$\Sigma_{r-1} = S_{r-1}$	(domande simili - 1)
S_1	$\Sigma_1 = S_{r-2}$	
S_2	$\Sigma_2 = S_{r-3}$	
S_m	$\Sigma_m = S_{r-1-m}$	



8)

Prin. e sp. in S_r si dicono con int. S_1, S_2 in base alle
opere di sp. congruente o ubi.

• P.e. i P si possono proiettare da O
su iperpiano non per O; o da o_1 su S_{r-2}
sghembo. Ecc. • P.e. se prendo come "centro
di proiezione" \mathcal{F}_1 la faccia

$$W_k = \underline{A^0 \dots A^{k-1}}$$

del triang. di int. e punti sulle facc. opposte
(di y^i $x_0=0, \dots, x_k=0$) e p^k e r punti
in $(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_r)$ con r vert. detto
p.e. p. 8) 0 no. 0)

• Ho parallel pt. rne " per un' altra
retta.

• Df ipersup. alg V_{r-1}^n . Signif ORDINE. Si
hanno per ints con spazi subordinati e
nunciati ovvi. p^k multiple e no. det. (certo)

• Prima di definire V_k^n alg, due paro
le su V_k in generale. Comincio con $k=1$;
df parametrica LINEA

$$(1) \quad p^k = f(t) \quad (t: 0 \dots r) \quad (f: \text{am. due})$$

a rett. e un' altra con u

$$\begin{vmatrix} f_0 & \dots & f_r \\ g_0 & \dots & g_r \end{vmatrix} \neq 0$$

pt. diversi
 $t: (1)$

rette. ~~...~~ elementi di p. x_i in d

88

di V_1 o V_k appartiene a Γ e...

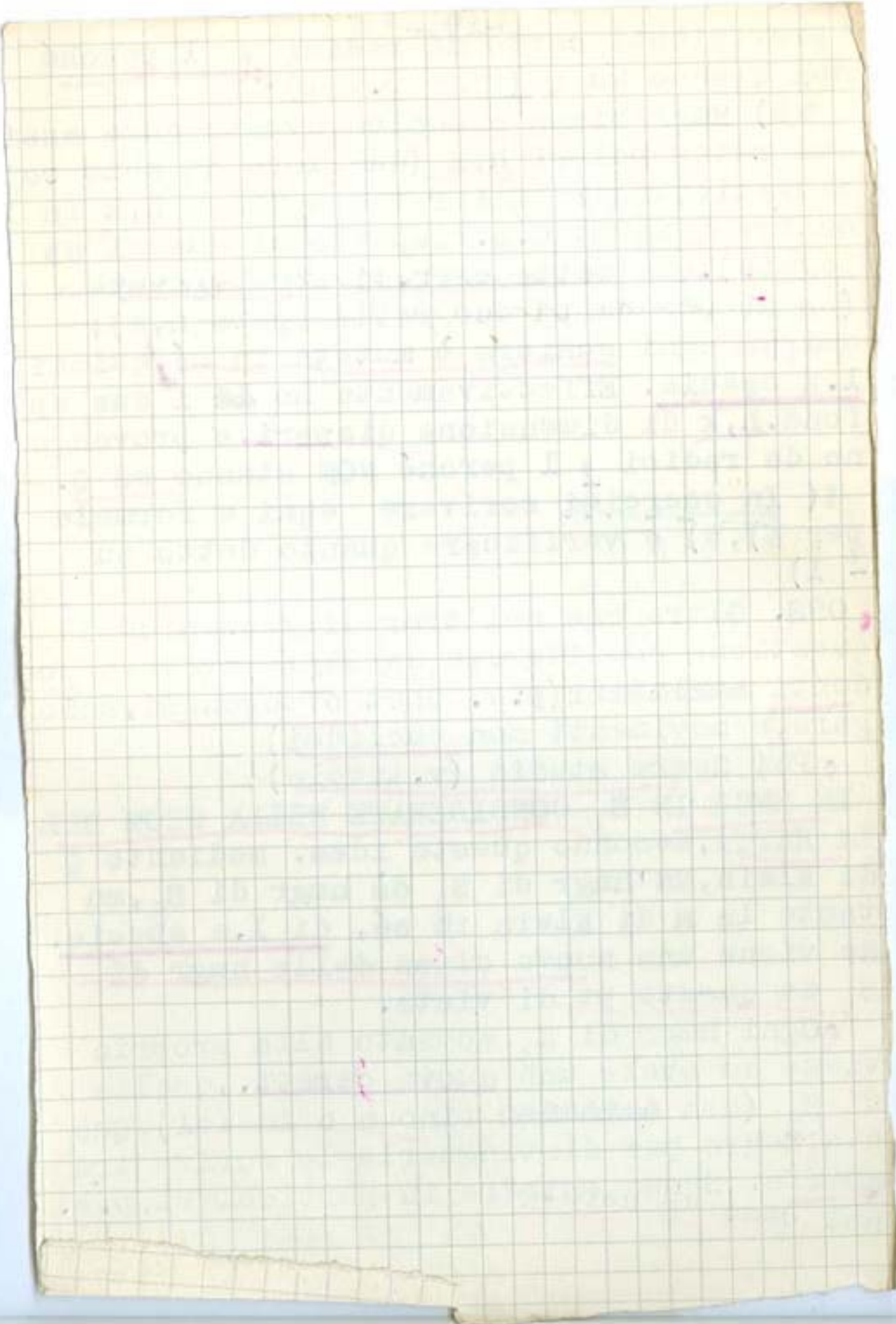
(82) con $i=1, \dots, r$ le cd. pte

$$f(x) = 0$$

abbz in $(x_0 \dots x_r)$ in pt doppo ch

$$i \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} = 0 \quad (i=0 \dots r)$$

(si pone nelle stesse note)



Alla \mathbb{P}^r data V_k di \mathcal{L}

$\rho x_i = R_i (y_0, \dots, y_{k+1})$ (1)

Cui corrisponde l'eq. (1). Si semplificano le cose supponendo (e così sottintendendo) che la corr.za tra i pt delle V_k, U_k sia biunivoca, cioè che un pt generico della V_k provenga da UN punto della U_k . Risulta per la V_k un ~~ORDINE~~ ORDINE n , e si scrive

col significato che la V_k e uno S_{r-k} generico hanno in comune n punti,

• Più generalmente:

a) la V_k e uno $S_{k'}$ generico ($k' > r-k$) hanno in comune una

$V_{k+k'-r}^n$

b) in generale una V_k^n e una $V_{r-k}^{n'}$ hanno in comune nn' punti

(e se di più, almeno una linea) (Niente)

c) sempre in generale,

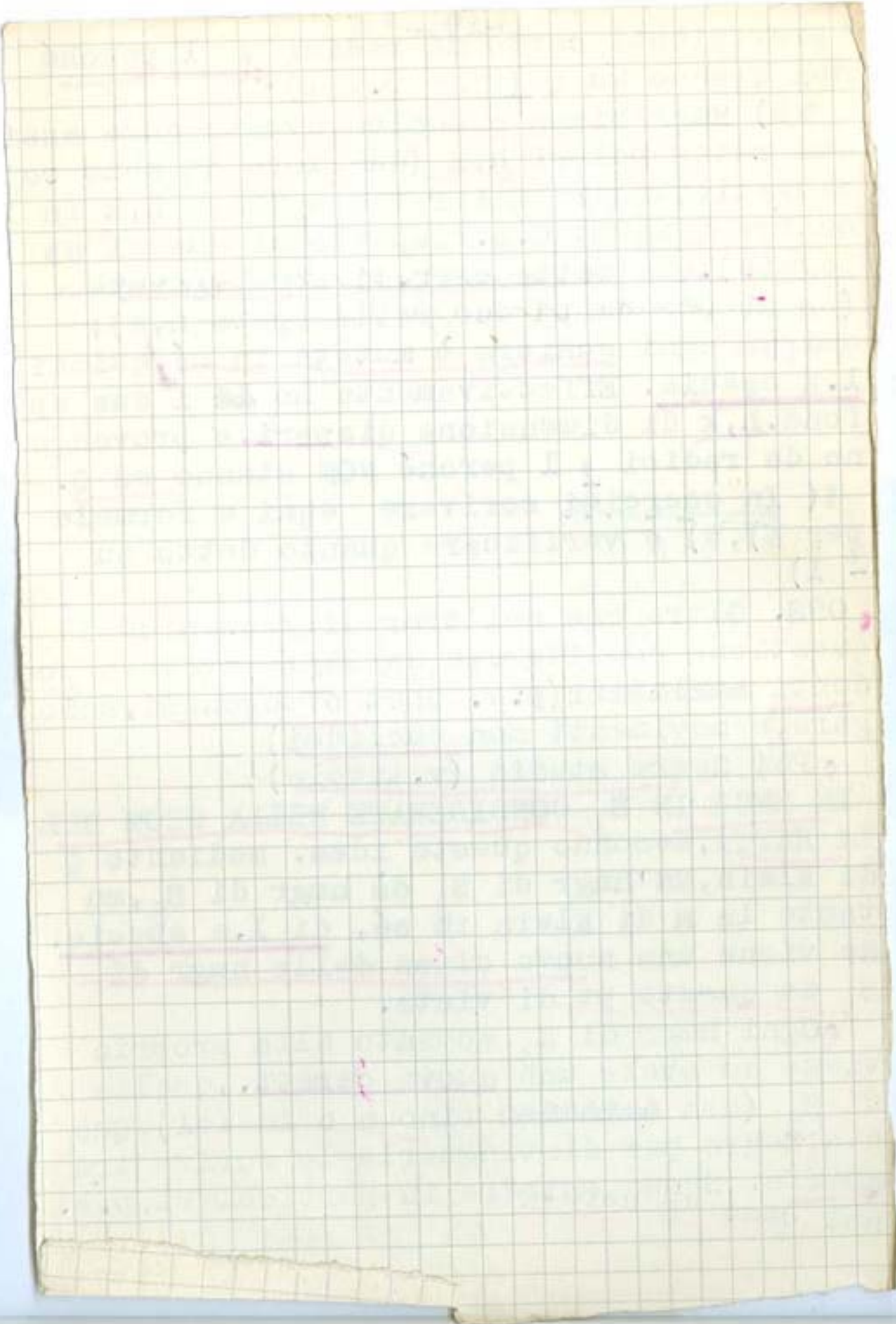
V_k^n e $V_{k'}^{n'}$ con $k+k' > r$

hanno in comune una

$V_{k+k'-r}^{nn'}$

(ma possono in casi particolari avere a comune anche una varietà di dim. maggiore)

• d) V_k^n appartiene a \mathcal{L} se $\begin{cases} n \geq r+1-k \\ n \leq r+k-1 \end{cases}$



p.e. per $k=1$

$$m \geq r \quad r \leq n$$

ovvero curve C^m non più appoggiate a S_{m-1}, S_{m-2}, \dots

(curve C^1 piano, curve C^2 in S_1 , etc. etc.)

curve C^m definite normale ellittiche, chiameremo normale

una varietà che non può essere proiezione di altra dello stesso ordine appartenente a spazio più ampio.

Per $k=2$ ho

$$m \geq r-1; \quad r \leq n-1$$

cioè V_2^m appoggiate a S_{m-1}, S_{m-2}, \dots ; m

S_{m-1} è curva normale (cioè V_2^m in S_1 , V_2^3 in

S_2 etc.)

è cinque.

• Terminazione dei lavori di S_{2r} .

è in particolare che due lavori collocati

" visano anche altre curve normali (o varietà) p.e. le curve piane ellittiche

94.

conv^{ca} hull. $\mu \neq 0$.

* for $\sum a_i x_i \dots$ also of which
a convex simplex contains $\mu \neq 0$

$\Rightarrow \sum x_i \dots$

the simplex will contain

convex

• Quanto riguarda una singola quadrica (v_{r-1}^2) è troppo elementare perché valga la pena di trattenervisi:

• equazione

$$(d) \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0 \quad \text{discr } A.$$

coi suoi termini in n. di

$$r+1 + \binom{r+1}{v} = \binom{r+1}{r} r(r-1) \frac{r(r-1)}{v} = \frac{r(r-1)(r+1)}{v}$$

cosicché le quadric formano un sist. lin.

$$\text{inf.} / \frac{r(r+3)}{2}$$

(inf. / 14 in S_4 , inf. / 20 in S_5 ecc.)

• la teoria della polarità: il pt x ha l'iperpiano polare

$$(1) z_i = \sum_j a_{ij} x_j \quad (i: 0 \dots r)$$

e se x sta su Q, l'ip polare = ip tgte. *

• possibilità di considerare la Q come "inviluppo" degli iperpiani tgti; eq invppo

$$\sum A_{ij} z_i z_j = 0$$

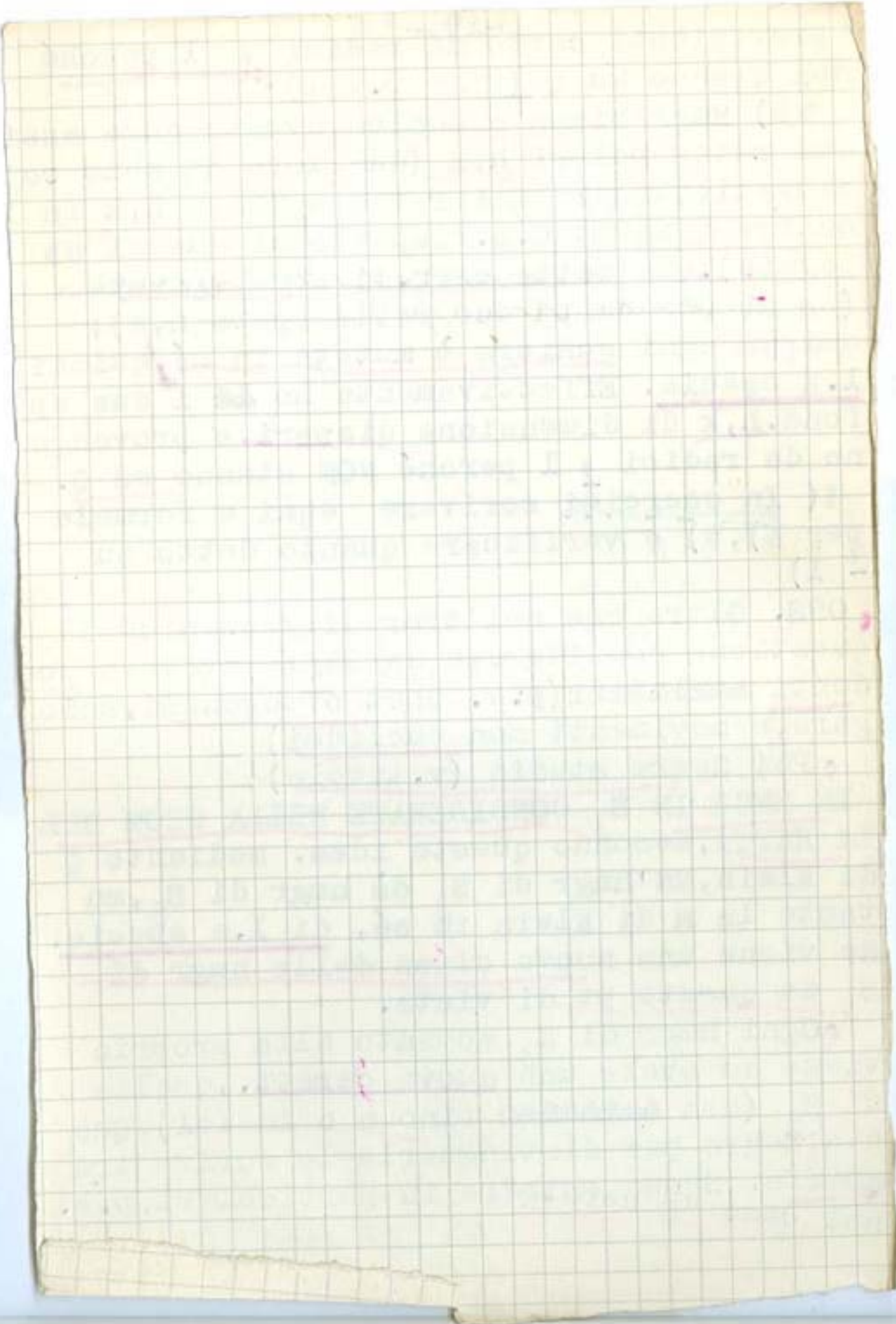
• tutto ciò se Q è non specializzata, cioè se il discrte A è non nullo.

• Possibilità che la Q si specializzi (una o più volte). Ciò avviene se ha pt doppi (per la cui esistenza p. 87 retro da la comp. del sist. omogeneo)

$$(2) \begin{cases} a_{00} x_0 & \dots & + a_{0r} x_r \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r0} x_0 & \dots & + a_{rr} x_r \end{cases}$$

Ciò equivale
(1)

$$A = 0.$$



Se il sist. (2) ha UNA soluz. A ha caratt. r . La quadrica è specializzata una volta. È un cono col vertice nel pt doppio V , ed è un (cono quadrico) di vertice V (perché la retta che congiunge V con pt P della Q ha tre pt comuni, e sta sulla Q).
 Se taglio Q con iperpiano, ho come traccia una Q di questo

$$(V_{r-2}^2 \text{ di } S_{r-1})$$

la quale risulta NON specializzata. E allora la data è cono proiettante da V tale Q .

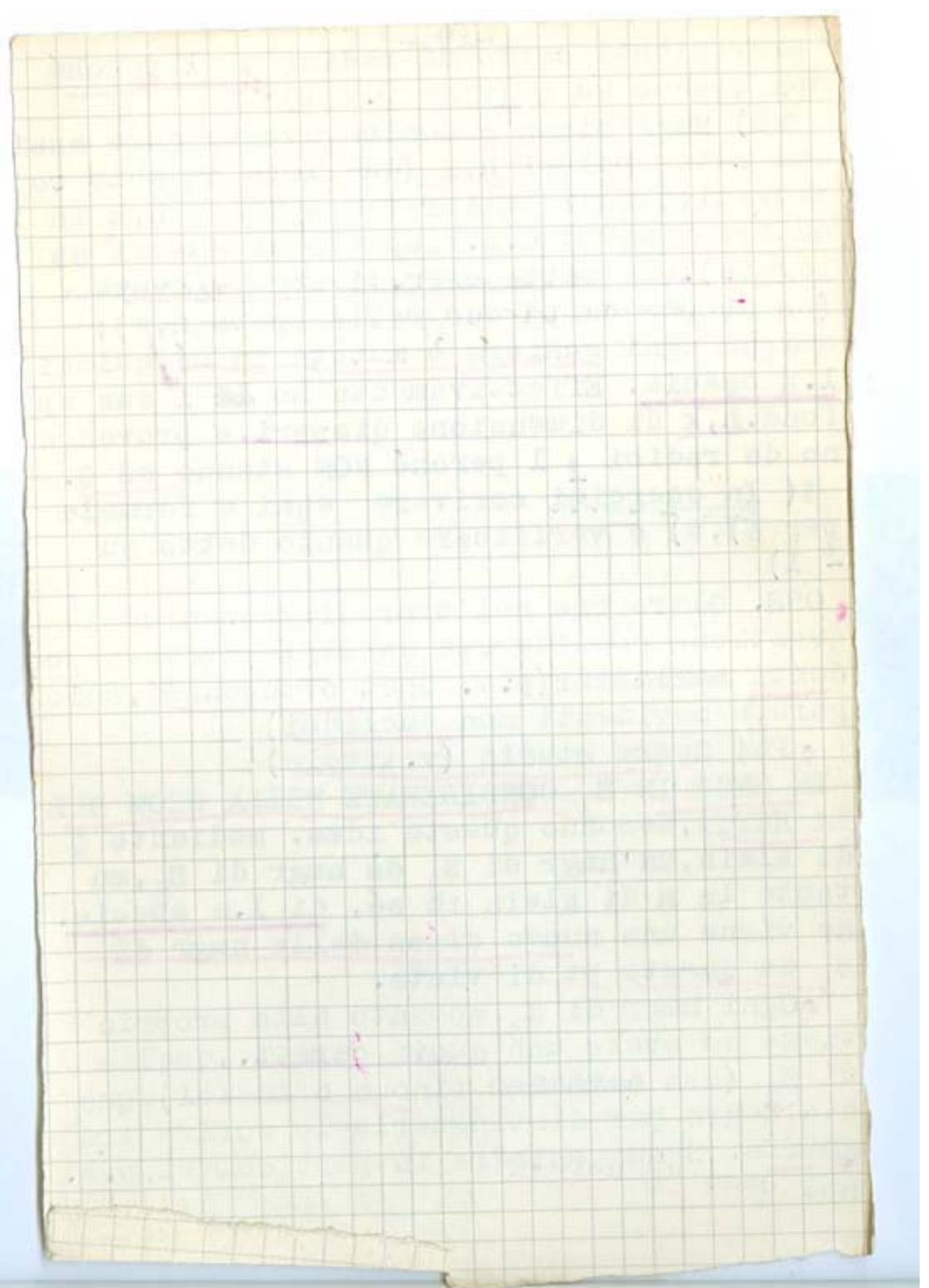
Se invece (2) ha due soluz distinte (A caratt. $r-1$), la Q ha retta doppia (i due pt e quelli loro cb lin); diciamola v_1 . La Q è specializzata due volte e risulta luogo di piani per v_1 (cono S_1 -cono quadrico), come si vede p.e. assumendo $A^0 A^1$ sulla v_1 . (Allora il sist. (2)

è soddisfatto in quei due pt, e ne viene

$$Q_{0i} = Q_{1i} = 0 \quad (i=0, 1, \dots, r)$$

Quel (1) contiene solo x_{r-1} ; se un pt sta sulla Q , anche tutti quelli del piano $A^0 A^1 x_{r-1}$ di che punto l'avevo

Adesso la Q appena ottenuta proietta e si vede V_{r-1} di S_{r-1} (con vertice nel pt, non specializzato).



E cosí via : la Q è specializzata h volte

$$1 \leq h \leq r$$

se A è nullo di caratteristica

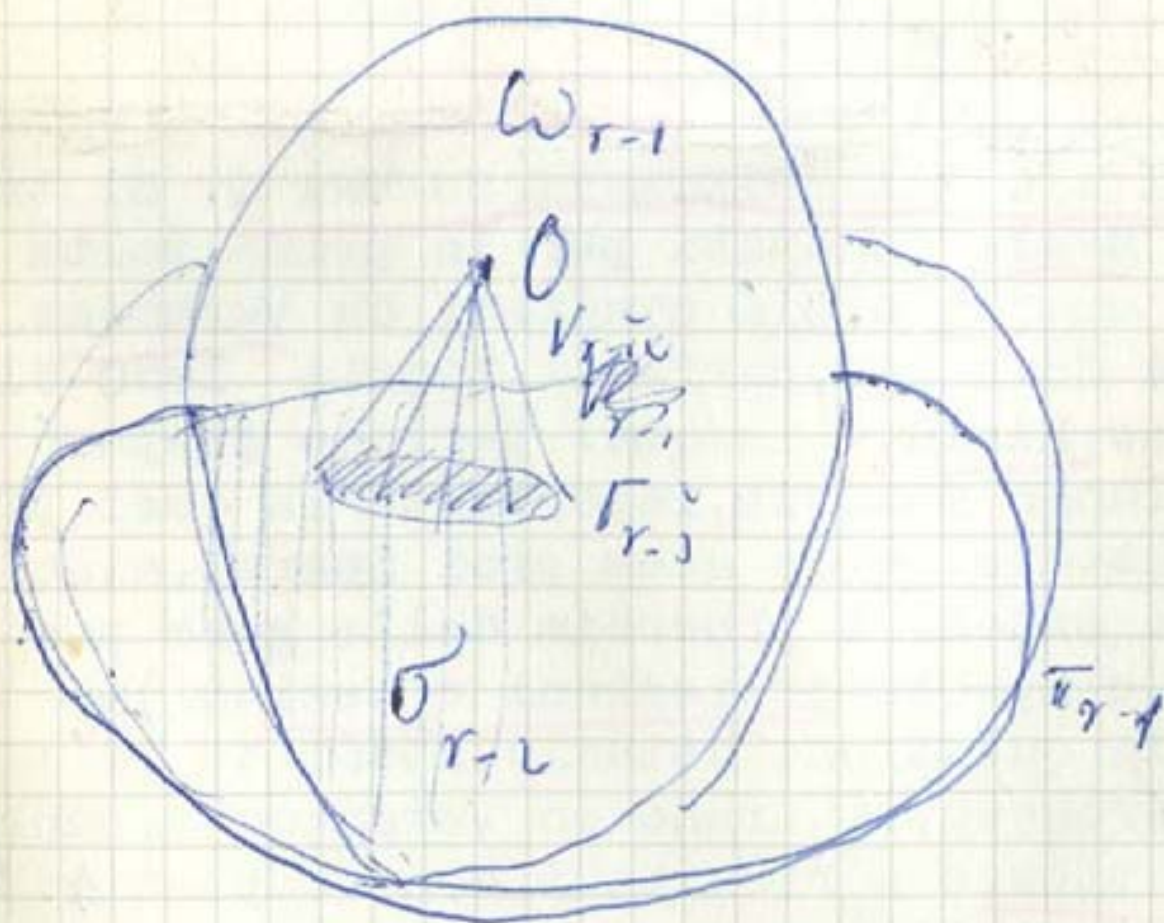
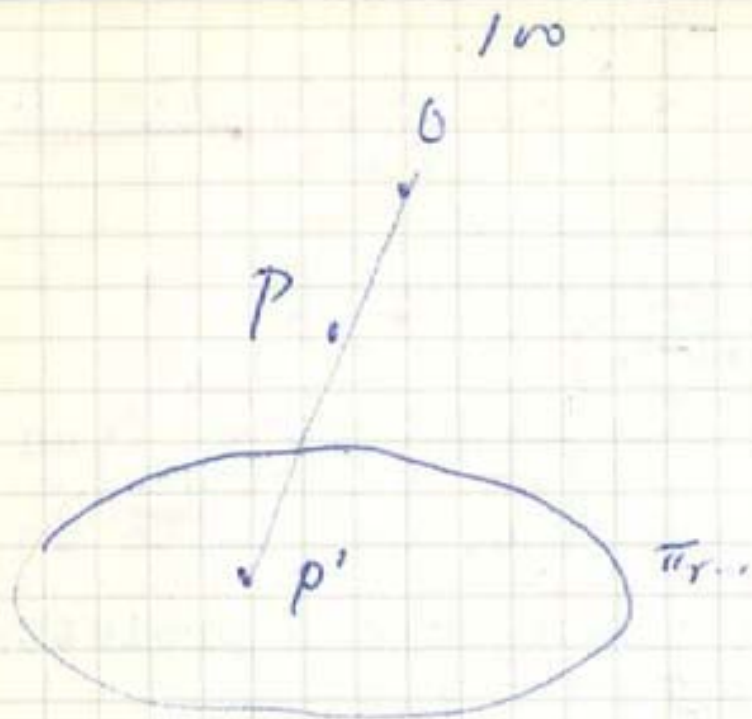
$$r+1-h$$

e allora ha uno spazio doppio v_{h-1} ed è uno S_{h-1} -cono quadrico, costituito da S_h per v_{h-1} (che si ottengono proiettando da v_{h-1} una v_{r-h-1}^2 di uno S_{r-h} , non specializzata). Quest'ultima() cade per $h=r$: allora la Q è un iperpiano contato

due volte (e per $h=r-1$ la Q è ipotesi in due spazi distinti)

• SPAZI LIN MAX ESISTENTI SU UNA Q. Si trovano in Segre studiati per la prima volta in modo completo. Giá studiati da Veronese (n. 1854 Chioggia, perfez. a Lipsia 1880-81 presso Klein; e in quel periodo preparó una lunga Memoria, importante in quel primo momento della geom proi ipersp, alla quale estese i procedim della geom proiett, e specie proiezioni e sezioni) ma per la questione attuale, studiata giá da Veronese, vi erano in Veronese alcune inesattezze e risultati non completi.

• Ci limitiamo a Q non specializzate perché la questione degli spazi esistenti sulle altre se ne deduce facil



mente. P.e. per S una Q^1 di S_4 specialz
 zata una volta, è ovvio che contiene
 due sistemi di piani per V , ottenuti...

• Prendo dunque Q^2 non spec. di
 S_r . Osservo subito che per ogni suo P
passano inf. rette, perché la intsz della
 Q con l'iperp. tgte in P ha pt doppio
 in P (si vede come in S_3), cioè è cono
di vertice P .

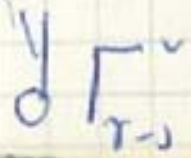
La ricerca degli spazi esistenti su
 Q si fa con la "proiezione stereogr"
 di Q su un iperpiano π_{r-1} eseguita da
 pt O di Q : $P \rightarrow P'$, e viceversa (salvo ec
 cezioni di cui dirò), cosicch'è si ha
 corr.za biun tra i pt di Q e quelli di

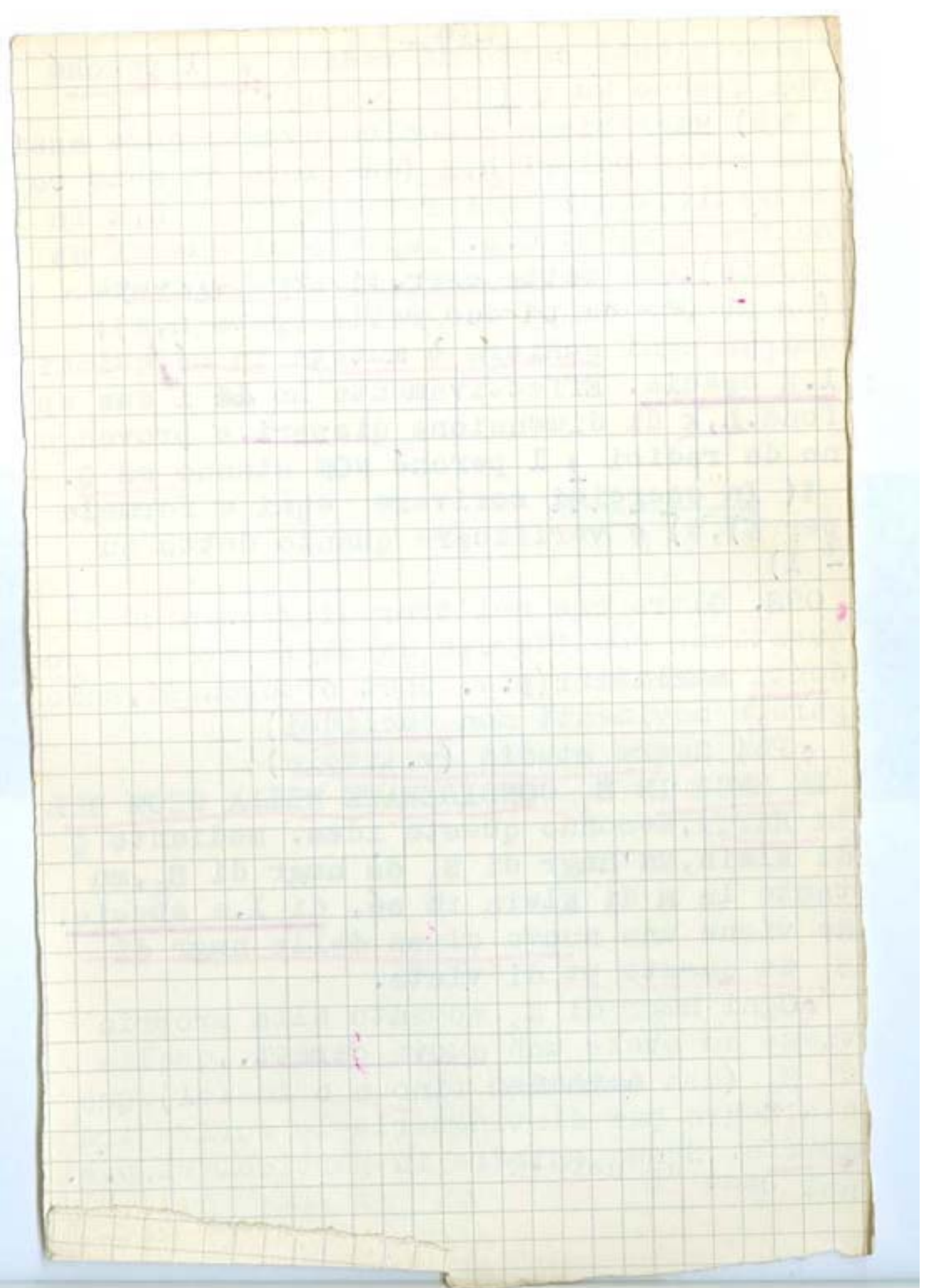
π_{r-1} Vediamo le eccezioni: dato P' , ho
 eccezione se e solo se OP' ha comuni
 don Q almeno due pt fuori di O ; allora
 OP' è retta di Q per O . Effettivamente
 (v. sopra) queste rette esistono e sono
 le generatrici dello S_0 -cono quadrico

$Q \cdot \omega_{r-1}$ (chiamando ω_{r-1} l'iperpiano tgte
 a Q in O); è un cono V_{r-2}^2 , che sega

π_{r-1} in una quadric non spec. V_{r-2}^2 (della
 S_{r-2} $\omega_{r-1} \equiv \pi_{r-1} \cdot \omega_{r-1}$). Sono due ecce:
Zivneli su π_{r-1} tutti i pt P' di tale Γ_{r-2}

Ogni P' ha per con. su Q tutti i pt. P
 una volta per O .





Eccezioni in sensò inverso. Se $P \neq O$ tutto va bene. Se $P=O$ il raggio proi. è indeterminato. Si possono però assegnare per continuità dei corrti a O prendendo come tali i $\lim P'$ quando $P \rightarrow O$. Allora il raggio $OP \rightarrow$ a una retta tgte in O , e questa dà come $\lim P'$ la sua traccia. Così il pt eccezionale O viene a avere infiniti corrti, e sono tutti quelli del ~~l'insieme~~ Γ di σ_{r-1} (già considerata) $O \rightarrow \sigma_m$

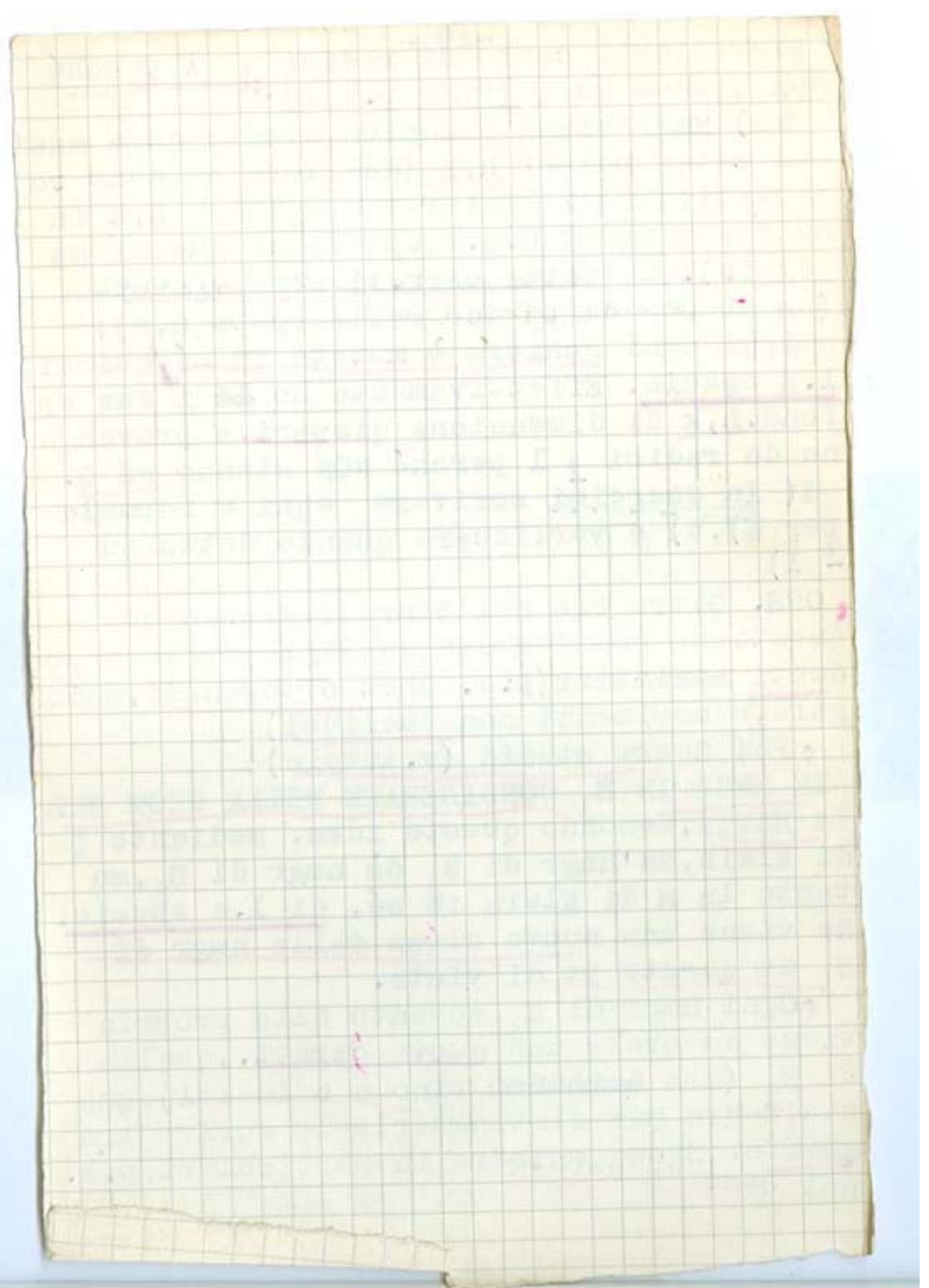
(richiamo S_2) ap. 101

Con tale proi stereogr. si trovano gli spazi esistenti su Q . Se S_m è tale (non per O) si proietta in S'_m , ma particolare in π_{r-1} . Invero S_m sega ω_{r-1} in uno S_{m-1} , situato sulla Q e quindi sul cono v^2_{r-2} ; questo S_{m-1} si proietta perciò in uno S'_{m-1} della Γ . Perciò S_m di Q si proietta in S'_m di π_{r-1} segante passante per uno S'_{m-1} della Γ . E, come si vede viceversa.

viene così che per avere gli S_m della Q si devono prendere gli S'_m di π_{r-1} passanti per spazi S'_{m-1} della Γ .

Si ha così un proc ricorrente per avere gli spazi di Q da quelli di π_{r-1} . P.e. nel primo caso nuovo: $r=4$. Ho

Γ_1 è come molte più $\sigma_i = \sigma_{r-1}$.
 Queste con spazi S'_{m-1} ho le S'_m .



Quindi trovo S_1 della Q , aventi come immagini rette di π_3 passanti per pt della conica Γ_1 . Ho inf. / 3 rette di Q in S_4 ma non ho piani.

Faccio $r=5$. Allora rappresento la Q su π_4 , dove ho le curve

Γ_2 di σ_3 .

Queste curve sp. S_1 due pure pure con S_{m-1} e altre $gt S_2$ di σ_3 per rette di Γ_2 una una, a S_2 delle Q di S_1 .
(una una S_3 di Q).

Dunque una V_4^2 non spec di S_5 con tiene piani: due famiglie inf. / 3 date dai piani di π_4 che passano per uno S_1 di Γ_2 dell'uno o dell'altro sistema (in π_4 S_2 per S_1 una una)

Ho fatto dipendere la ripartizione dei piani di Q in due famiglie dalla proiezione stereografica eseguita, ma essa ha carattere intrinseco in quanto due piani della stessa famiglia si segano in un pt (i piani loro img in π_4 hanno un pt comune, ma non su Γ_2 dove essi segano due rette di stessa schiera [e si può dire in non più di un pt, se no starebbero in S_3 , che sarebbe allora non sarebbero img di piani]). Invece due piani di famiglie opposte hanno come il pt sono gen. e sghembi, però le loro img.

in π_4 hanno come il pt. come alle gen. e sghembi

-106-

* (noter le diff. en l. (l. d. - l. s.))

opposto di Γ , ⁻¹⁰⁷⁻ le cui sono vicine
addirittura in retta (punti Γ e Γ' con Γ)

hanno con un Γ primo di Γ , in A'

hanno in comune le rette $\Gamma A'$ etc.) In definitiva
piani di stessa famiglia sono incti
(in pt), di opposte generalmente sghembi
(e quando si incontrano hanno addirittura
una retta comune) *

• E così si segue per ricorrenza.

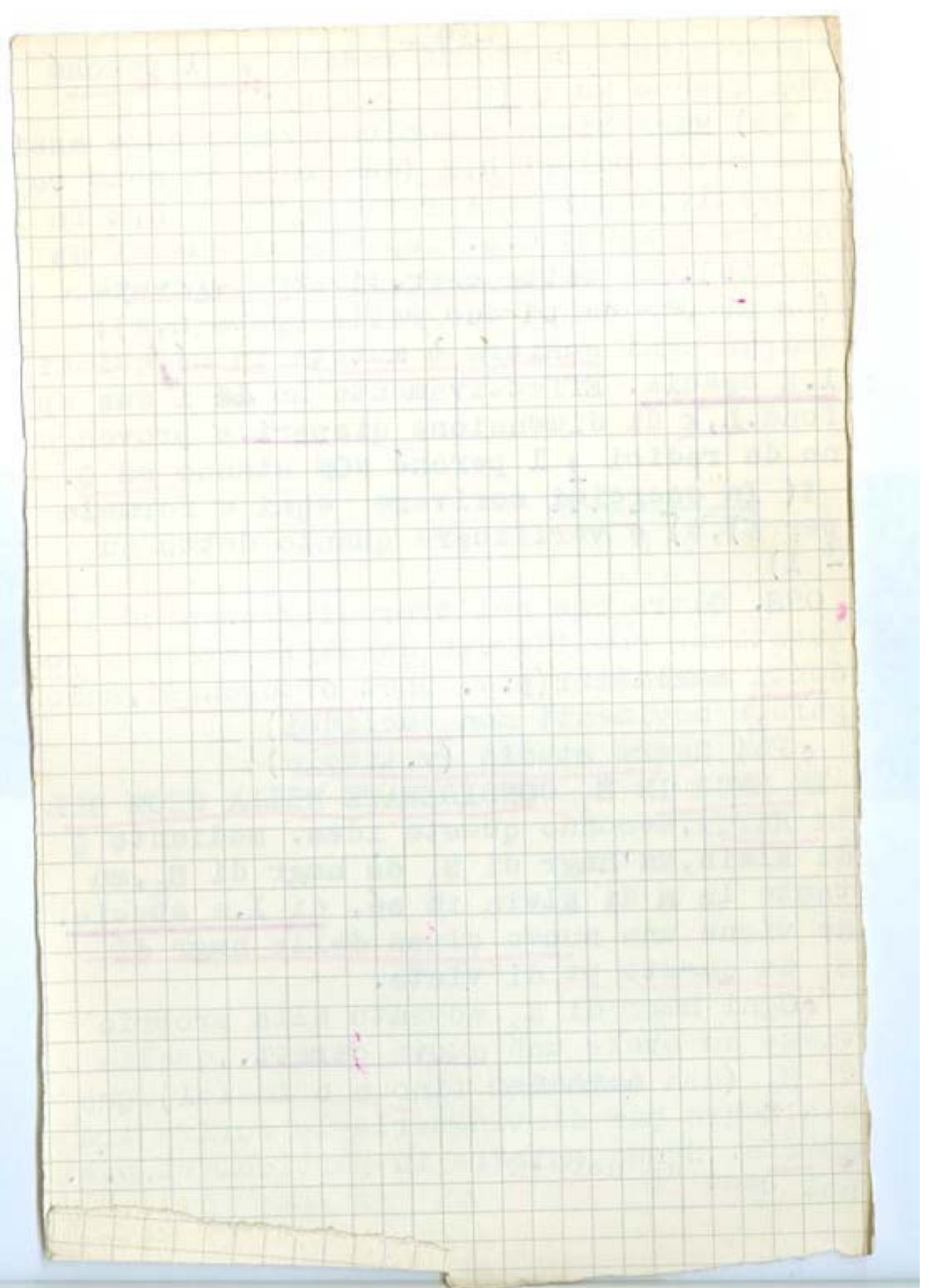
In S_6 vengono come spazi massimi inf./6
piani costituenti un solo sistema. In S_7
spazi max degli S_3 , ripartiti in due sist.
inf/6; quelli di uno stesso sist general-
mente sghembi (come in S_3) e se incti, in
 S_6 . Di opposti, sempre incti, gente in un p
a avetualmente in piano. • Così continuando
risulta che:

• se r è pari $=2q$, gli spazi massimi sono
 S_{q-1} , e costituiscono UN sistema
inf/ $q(q+1)/2$

• se r è dispari $=2q+1$, gli spazi max
sono S_q , e si ripartiscono in DUE
sist

$$\text{inf/ } q(q+1)/2$$

• Come già visto per $r=3, r=5$, vi è
ancor differenza secondo la parità
di q . Se q è DISPARI, gli S_q di
uno stesso sistema opposti si tagliano sempr
, e di sistemi diversi stesso sistema generalmente
no. Se q è pari, viceversa



• Il caso $r=5$ era del resto già ben noto grazie all'interpret della geom della retta di S^3 sulla M^2_4 di Klein: si prendono le p_{ik} con coord di pt p di S^5 il cui luogo è la M^2_4

(1) $p_{12}p_{34} + \dots = 0$

E' NON SPECIZZATA (si forma subito A)

• Date in S^3 due rette incti pp' , le

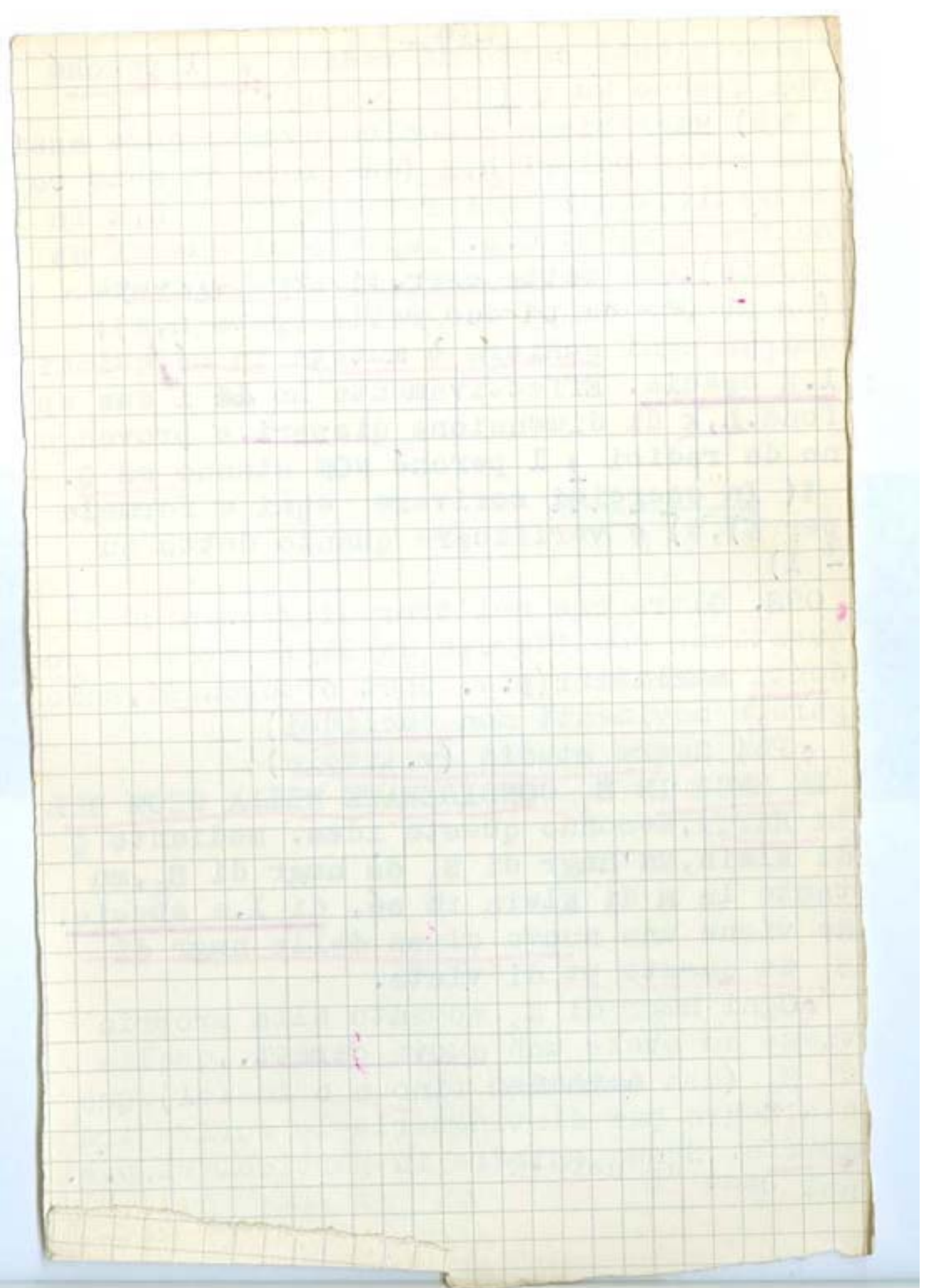
$\lambda p_{ic} + \mu p'_{ic}$
sono coord. te di rette, del loro fascio. Quindi fascio rette \rightarrow retta di M .

• Se in S^3 prendo tre rette a due a due inc p, p', p'' , le

$\lambda p_{ic} + \mu p'_{ic} + \nu p''_{ic}$
sono coord. te di retta. Ho così piani della M , di due famiglie, corr. ti alle stelle e ai piani rigati. E si verifica subito l'incidenza o meno.

• Il pt di vista introdotto da Klein è ~~usato~~ adottato sistematicamente da Segre, come dirò, nella sua II Mem; e Segre prende appunto come epigrafe la frase di Klein secondo cui la geom della retta di S^3 è la stessa cosa della geom di una M di S^5 .

• Quanto detto sugli spazi massimi prescinde dalle questioni di realtà. Si può considerare la stessa questione nel campo reale, e allora le cose vanno come segue (come osserva S in una nota a pie di p. di altro lavoro Etude des différentes surfaces du 4. e ordre



à conique double M.A. 24, 1884). Riduco
l'eq a forma canonica, e metto prima
tutti i coeffti positivi, e poi gli altri
 scrivendo

(2) $a_0 x_0^2 + \dots + a_k x_k^2 - b_{k+1} x_{k+1}^2 - \dots - b_r x_r^2$
 Fisso le idee supponendo che il n.º dei
primi non superi quello degli altri,
 cioè è $k+1 \leq r-k$ (se no cambierei
 tutto di segno). Raccogliendo il primo
 po col primo neg ecc. scrivo

$$(a_0 x_0^2 - b_{k+1} x_{k+1}^2) + \dots + (a_k x_k^2 - b_{r-k} x_{r-k}^2) -$$

$$b_{r-k+1} x_{r-k+1}^2 - \dots - b_r x_r^2 = 0$$

Altre lo spago in 4. dyl spago

$$\sqrt{a_0} x_0 - \sqrt{b_{k+1}} x_{k+1} = 0 \dots, \sqrt{a_k} x_k - \sqrt{b_{r-k}} x_{r-k} = 0$$

$$x_{r-k+1} = 0 \dots x_r = 0$$

sta i reali e sta nelle Q. 3.º spago in

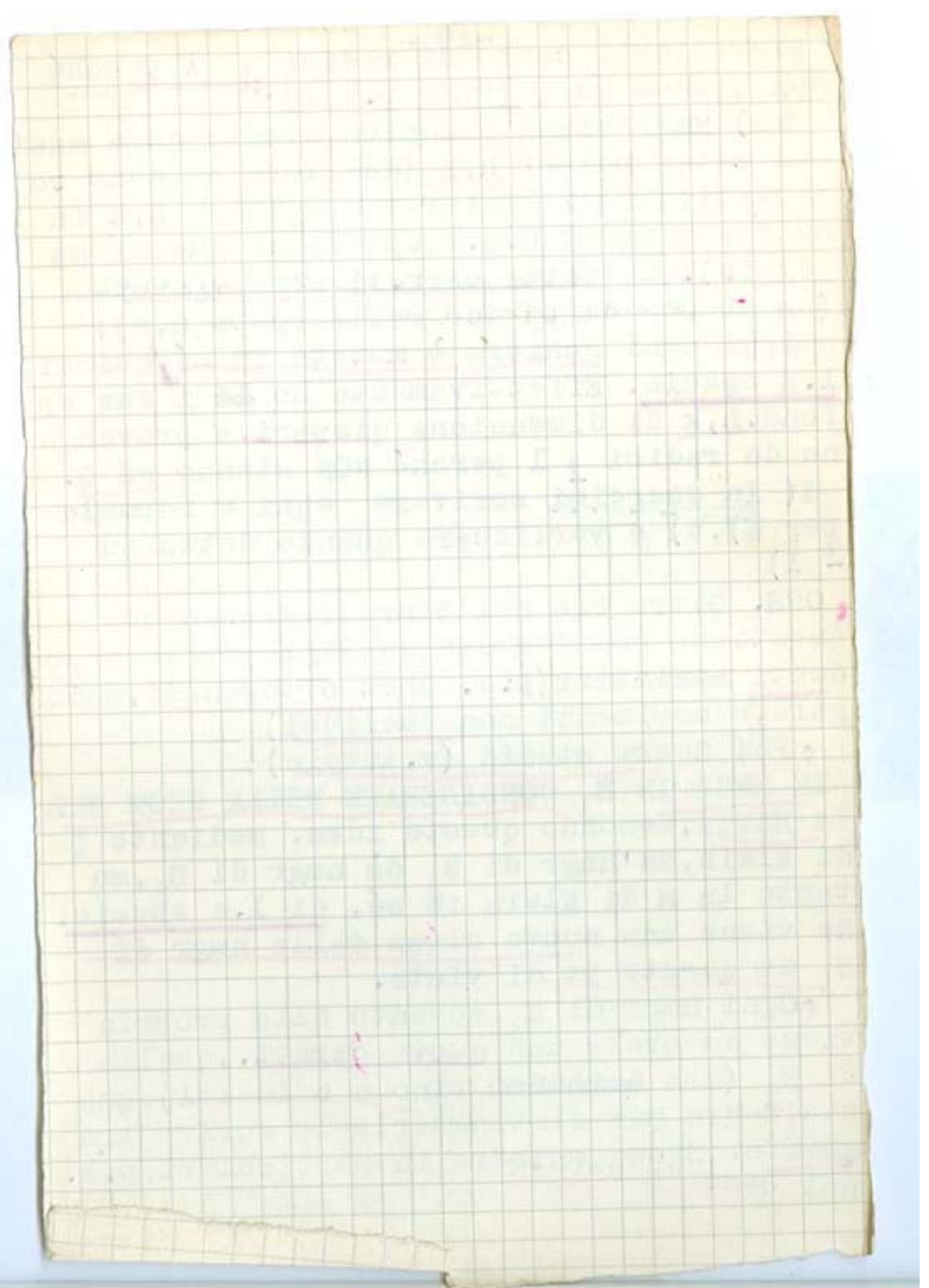
$$k+1 + (r-2k-1) = \underline{r-k}$$

e sono l.º i (ogni fa almeno coord. divisi)

Quel si spaga

$$[r - (r-k)] = [k]. \text{ dyl}$$


Perciò le quanti (r) coord. S_k reali. Ma



la Q non contiene S_{k+1} reali: se ne contenesse uno, segnandolo con lo $[r-k-1]!$
 $x_0 = \dots = x_k = 0$ troverei un punto (almeno) reale soddisfacente alla

$$b_{k+1} x_{k+1}^2 + \dots + b_r x_r^2 = 0$$

assurdo.

 Si arriva così alla conclusione che gli spazi reali massimi sono dei $[k]$ a partire dalla segnatura (cambio tutto segno)

$$r - k - (k+1) = r - 2k - 1$$

OSSNI.

• 1) Per la M di Klein la segnatura è zero (spiegare); quindi $r - 2k - 1 = 0$, $k=2$, e ho S_2 reali (come ovvio)

• 2) I ragti geomci fatti provano che k è indipendente dalla scelta della forma canonica (simplesso auto polare), e quindi la segnatura è la stessa per tutte le forme canoniche (legge d'inerzia di Sylvester, An. I)

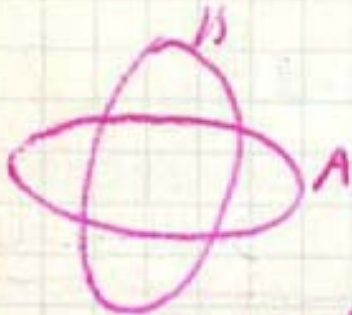
~~Ita&ta&ta&ta&ta&ta&ta&ta&ta&ta&ta&ta&ta&ta&ta&ta&ta&ta~~ Ancora nella Memoria I di Segre egli studia il sistema di due Q , il che è naturale per applicare poi nella Mem II ai cpl quadratici, per i quali si hanno da considerare assieme la Q di Klein e l'eq quadratica del K (cioè in sostanza la v_4 loro ints, immagine del K sulla M di Klein). Qui Segre studia le cd per l'eqvza proiettiva di coppia di Q

Spazio

* Diamo al caso $\gamma \cdot \alpha$. Qui per



con una per. equt. Me ad γ



Vi sono ed. γ il br. di γ in A

Deve essere = a quello in γ in A' .

(diciamo A, B e A', B'). * Il pt di partenza di Segre è un teor di WEIERSTRASS sulle cond di equivalenza per ~~tre~~ lin di coppie di forme quadratiche.

Il teor di Weierstrass è fondato sulla teoria dei divisori elementari. Parto da due forme quadr

$$\sum a_{ij} x_i x_j \quad \sum b_{ij} x_i x_j \quad \begin{matrix} (ij) \\ (0 \dots r) \end{matrix}$$

e considero il discr. te $|a_{ij} - \rho b_{ij}|$ di una qualsiasi forma quadratica del loro fascio. Scriviamo l'eq.

$$(1) \Delta(\rho) \equiv |a_{ij} - \rho b_{ij}| = 0$$

che dá le forme del fascio con discrinante nullo (suppongo non sia identica; del caso in cui è identica, geomte del caso di un fascio di quadriche tutte specializzate diremo piú avanti in occasione di un altro lavoro di Segre).

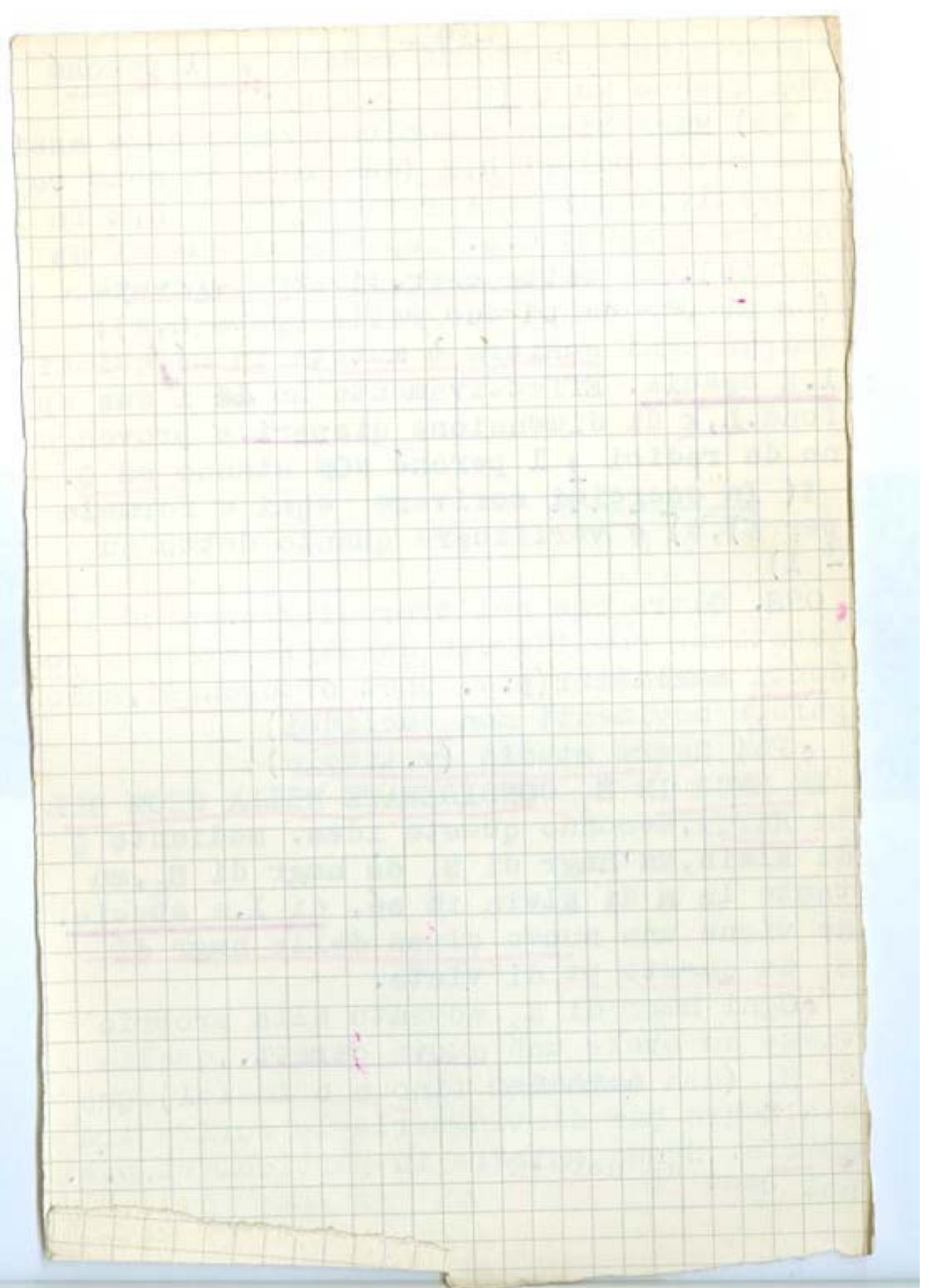
Per ogni radice $\rho^{(i)}$ dell'eq consideriamo la possibilità che essa annulli anche i minori di ordine

$r, r-1, \dots, r-2+h$, (e poi basta)

~~.....~~ Supponiamo

$\Delta(\rho)$	divisibile per	$(\rho - \rho^{(i)})^{\mu_1}$
$i D_r$	per	$()^{\mu_2}$
$i D_{r-1}$	per	$()^{\mu_3}$

$i D_{r-(h-2)}$	per	$(\rho - \rho^{(i)})^{\mu_h}$
$(i) \dots$		$()^0$



Ove $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 \dots > \mu_h$
Diciamo p.e. $\mu_1 > \mu_2$ per cui $|G_{ij}| = \Delta^r$ di

$$\Delta^r \mid \cancel{\mu_1} (p-p^i)^{r-1} (r-1) \mu_2$$

con $\cancel{\mu_2} (p-p^i)^{\mu_2 r} \mid (p-p^i)^{(r-1) \mu_2}$

$$\mu_1 \geq \frac{r-1}{r} \mu_2 > \mu_2 \quad \text{c. d. d.}$$

Qui le diff.

$$e_1 = \mu_1 - \mu_2, \quad e_2 = \mu_2 - \mu_3, \quad \dots, \quad e_{h-1} = \mu_{h-1} - \mu_h, \quad e_h = \mu_h$$

sono positive. Le esprimi

$$(p-p^i)^{e_1}, (p-p^i)^{e_2}, \dots, (p-p^i)^{e_{h-1}}, (p-p^i)^{e_h}$$

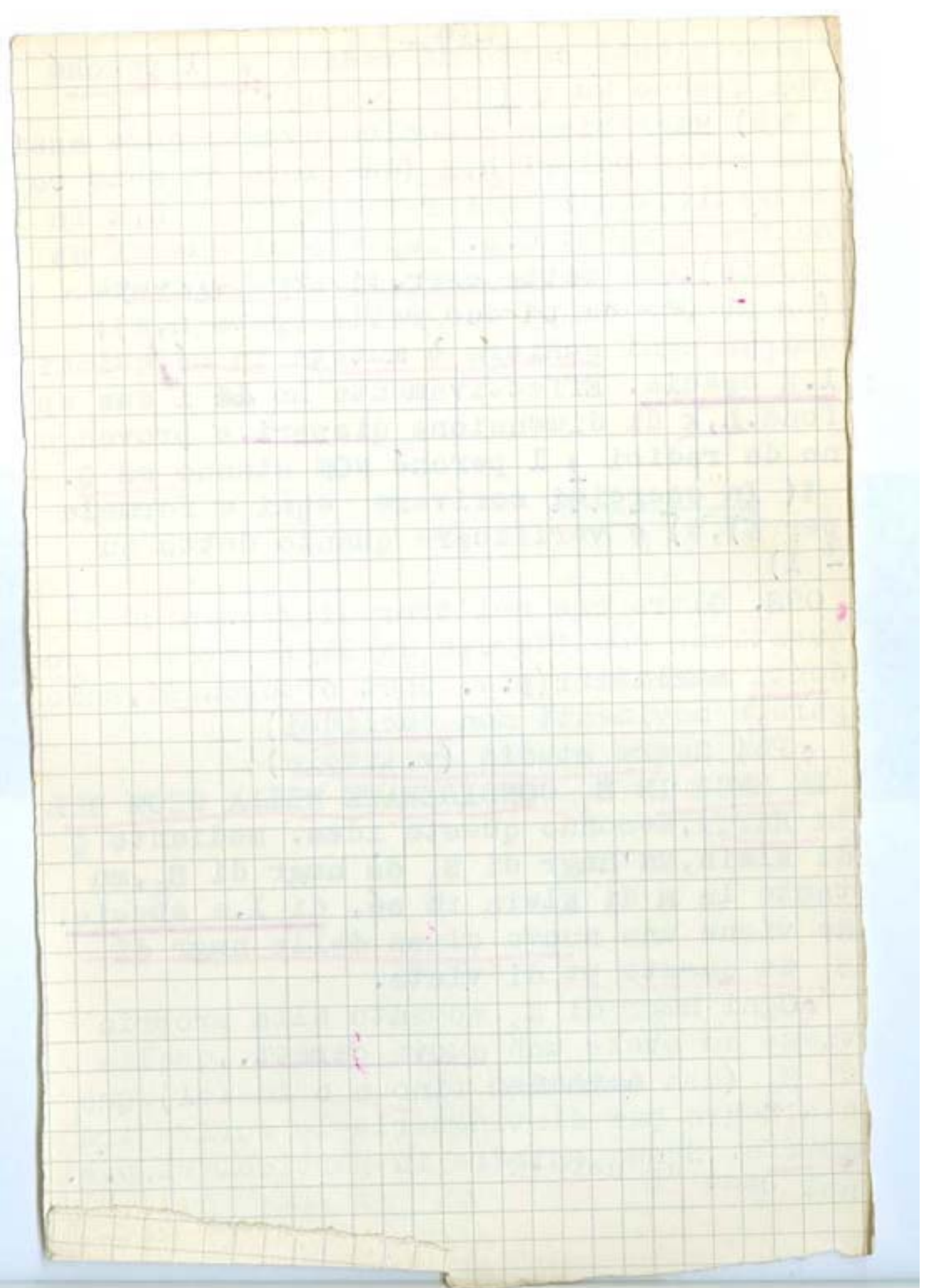
sono divisori di Weierstrass i div
el. di $\Delta(p)$ con alle radici p^i

$$\begin{aligned} \mu_1 &= e_1 + e_2 + \dots + e_h \\ \mu_2 &= e_2 + \dots + e_h \\ &\vdots \\ \mu_h &= e_h \end{aligned}$$

(meglio
della ristruzione
 $\Delta(p)$)

(h-dimensione per cui da

$$e_1 \geq e_2 \geq e_3 \dots \geq e_h)$$



Orbene il teor di Weierstrass dá come nec e suff per l'eqvza di A, B con A', B' che le due matrici che indico con

$\Delta(p)$ $\Delta'(p)$
abbiano gli stessi divisori elementari (cioé occorrono le stesse radici ρ^i e poi gli stessi esponenti e_1 etc in corrispondenza a ciascuna di esse)

Si chiama caratteristica l'espressione $(e_1, e_2, \dots, e_n) \dots ()$

formata con i vari esponenti. Osservo di passaggio che si dimostra che in ogni $()$ si ha $e_1 \geq e_2 \dots \geq e_n$

Osservo per che (da p. 117)

$$e_1 + e_2 + \dots + e_n = \mu_1$$

Quindi la somma di tutte le e vale

$$\sum_{i=1}^n \mu_i$$

somma delle molteplicitá delle radici di $\Delta(p) = 0$, e quindi $= r+1$.

Nel teor di Weirstr. si parla di eqvlz di coppie di forme quadratiche. Se si parla di eqvza omografica di coppia di quadriche $A=0, B=0$, etc. ognuna delle forme (cioé i suoi coeffti) si può moltiplicare per fattore arbitrario. Allora le ρ^i si moltiplicano per uno stesso fattore. Quindi l'eqvza di coppie di quadriche è che i due fasci abbiano la stessa caratteristica e che le radici delle eq. caratt stiano proporzionali.

[Faint, illegible handwriting on graph paper]

-121-

D_{3h} - Comentata i-Defin (p 114)
stato 2 du coppie



e vedo due manere pi A
Le condiz. delle due coppie ce. D_{3h}

per 1° (punti...)
 $a x_1, x_2 + b x_1, x_2 + c x_1, x_2 \dots$
 $a x_1, x_2 + b x_1, x_2 + c x_1, x_2 \dots$

$$\begin{vmatrix} c-pc' & b(1-p) \\ c-pc' & a(1-p) \\ b(1-p) & a(1-p) \end{vmatrix} = 2ab(1-p)^2(c-pc')$$

De rivelle per (1-p)°

Quel $\mu_1 = 2; e_1 = 2,$

$$\text{Carth. } [2 \ 1]$$

$$\left(\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right)$$

Per l'altro simbolo al D' aut type

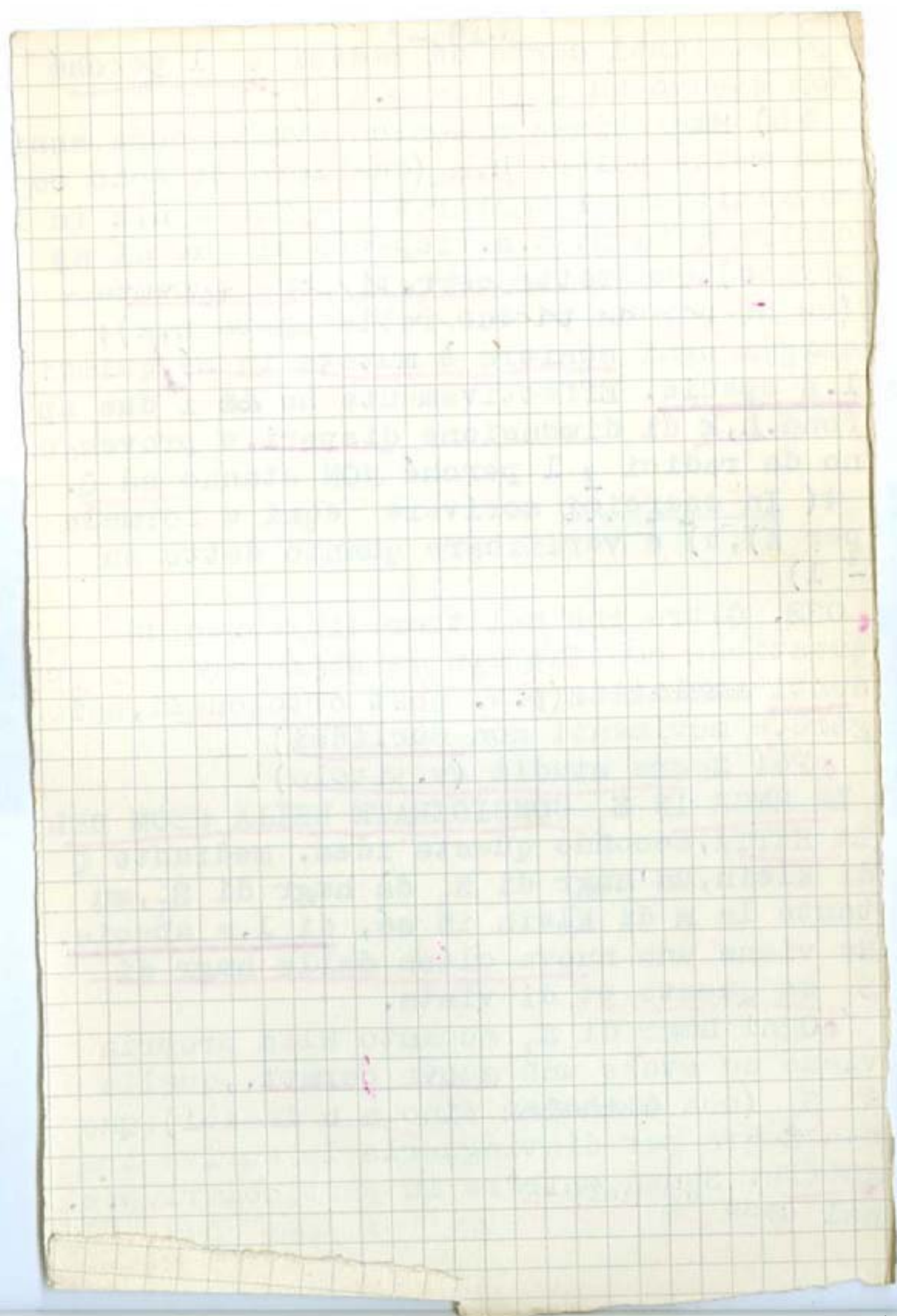
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

$$\left| \begin{matrix} a_1 & p b_1 \\ & a_2 & p b_2 \\ & & a_3 & p b_3 \end{matrix} \right|$$

Le tre rivi ridotti $p' = \frac{2}{3}$ al. Qu $[1 \ 1 \ 1]$

Ho carth. di D_{3h}



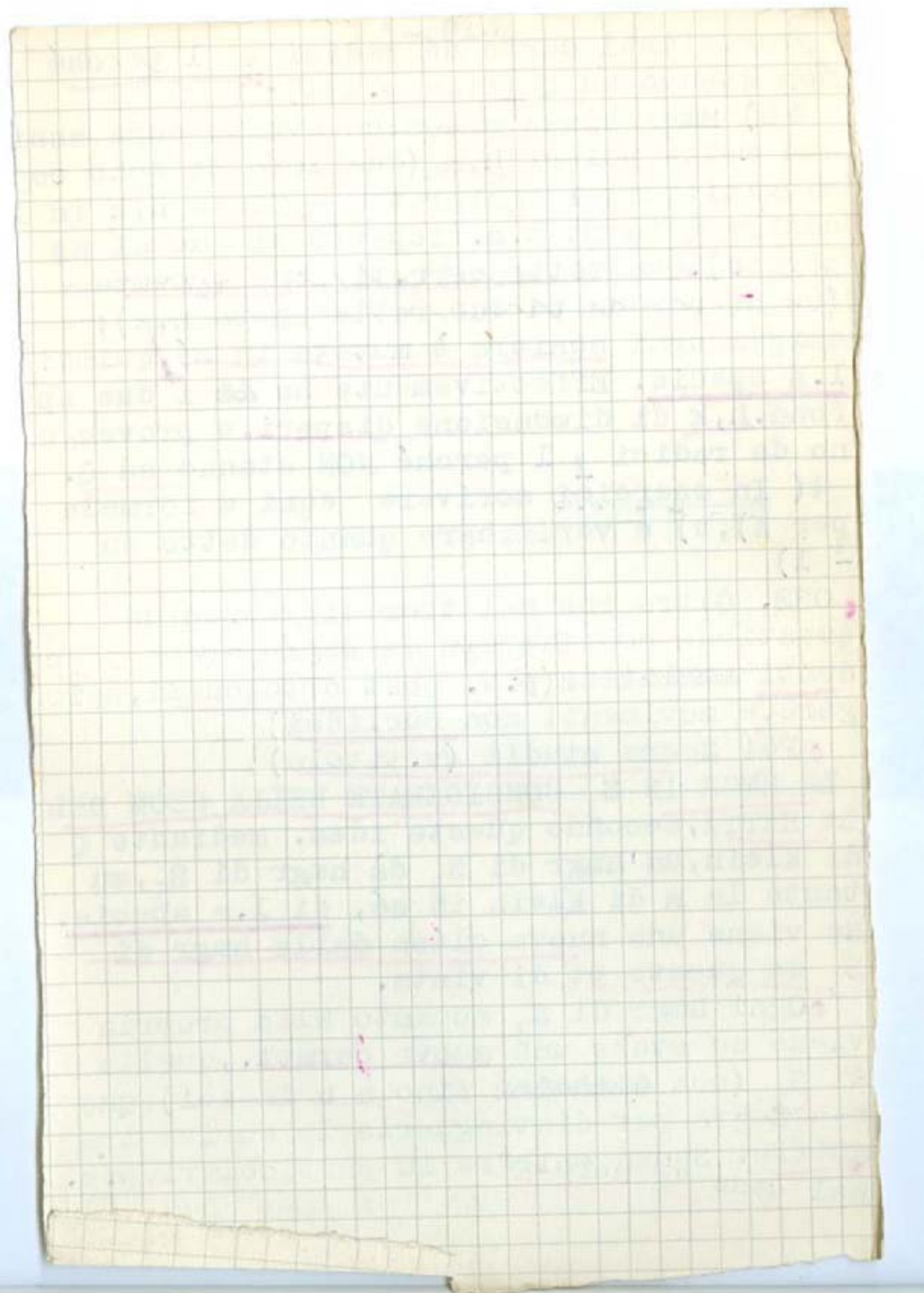
• Tornando al risultato generale di p.
Segre non se ne accontenta, ma spiega come
si possa dargli un aspetto piú geometri-
co. Non lo espongo. E nemmeno espongo co-
me nella 2.a memoria applica i risultati
trovati alla classificazione dei cplsi
quadratici. E' ovvio come K lineare si
rappresenta nella sezione di M_4 con un
iperpiano, non tgte o tgte secondoché
il cpl è non speciale o speciale (si
v. de facilmente). In genere la M di Klein
dà modo diverso di studiare tutta la
geom della retta; p.e. rigata diventa
linea; R^n (che sega g in n pt cioè
ha n rette nel cplso lin spec di dir g)
diventa c^n (che ha n pt comuni con un i-
perpiano, in particolare tgte a M), R di
cplesso lin dá c di S_4 , di cgr lin
dá c di S_3 , etc. • Uno sviluppo notevole
ha la teoria dei K quadratici, il cui
studio equivale a quello di un facio
di Q in S_5 . • Segre ne dá una class compl
ta' in base alla caratt.ca, la quale
conduce a ben 49 specie. Solo per dare
un es. pio delle cose dette cercio p.e.
la caratt. per complesso tetraedrale

di un dip

$$a p_1 p_2 p_3 + b p_1 p_2 p_4 + c p_1 p_3 p_4 + \dots$$

$$Q \quad \Delta(p) =$$

per via di un de genito sic. gen. de Walter, e
corrispond. de un altro



$$\begin{array}{l}
 14) \\
 24) \\
 34) \\
 44) \\
 54) \\
 64) \\
 74) \\
 84) \\
 94) \\
 104) \\
 114) \\
 124)
 \end{array}
 \left| \begin{array}{cccc}
 \cdot & a-p & \cdot & \cdot \\
 a-p & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & b-p \\
 \cdot & \cdot & b-p & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & c-p \\
 \cdot & \cdot & \cdot & c-p \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array} \right|$$

Se p le radici a ha $\Delta(p=0)$

$p_1 | p-a$. Quindi $\left[\begin{matrix} (11) \\ (11) \\ (11) \end{matrix} \right]$.

• Opp^{te}! Se si esaminano in segno e gruppo
caratt. corrispondenti alle varie specie, si trova
 che nessuna contra per () Conti per di
tre ordini. Perché? In gusto per qualche n po di

($e_1 \dots e_h$) valore di p $|a_{ik} - p^{\delta} b_{ik}| = 0$

per $p = p_0$ ha nulla l'ordine $r-h+1$ (p. 115)

Allora le guste di per

$$A - p^{\delta} B = 0$$

Casi caratt.
 $r+1-h$

non sol è come me test (p. 99) è speciale

h volte con ha una spazio doppio v_{h-1} .

Se (iso.) $h = r-1$ esse è gruppo di iperpiano

! Basta usare de la rule yr abh. cmlu

cu

$$\sum a_i (y_i - tz_i)^2 = 0 \quad \text{rde } t \text{ de } \mu$$

cu

$$\left(\sum a_i y_i z_i \right)^2 = \sum a_i y_i^2 \cdot \sum a_i z_i^2 \quad \text{cu}$$

$$a_1 \cancel{y_1^2 z_1^2} + 2a_1 a_2 y_1 z_1 z_2 \dots = a_1 \cancel{y_1^2 z_1^2} + a_1 a_2 (y_1 z_1 z_2 z_1 z_2)$$

cu

$$a_1 a_2 (y_1 z_1 - z_1 z_1)^2 = 0$$

Quindi si nel fascio non vi è coppia di iper-
piani p° in cui $h < r-1$.

Per $r=5$, si nel fascio si ha coppia di iper-
piani irriducibili, spogliati in
coppie di opl. lin. Affinchè non avvenga due
in $h < 4$ cioè $h \leq 3$, il che giustifica

che nella class di Segre, che contiene solo
i K irriducibili non vi siano parente
si con più di tre indici.

2) Sempre pensando alla varie caratt
il caso per così dire più generale e
[111111] .ma esaminando la class di
Segre si vedranno le varie possta, p.e.
anche di () con tre indici. Per limitarmi
caso molto semplice, cito

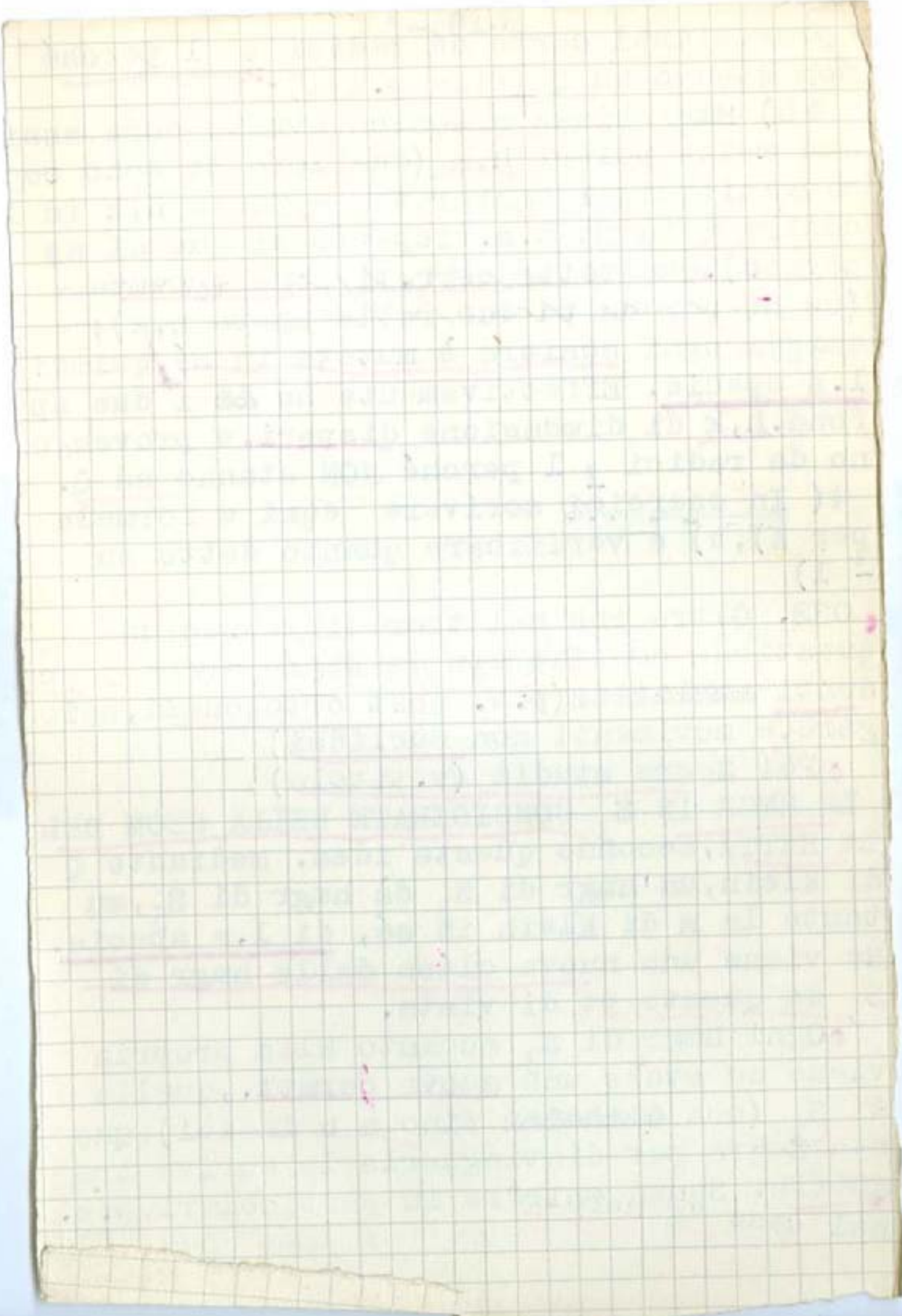
$$[(111) (111)]$$

che si trova per il K quadratioo delle
tgni di Q₆ generale. Accenno come si vede
si parte da Q di S₃

$$\sum a_i x_i = 0$$

e si cerca l'eq del K delle sue rette
tgni. Si trova facilmente (esercizi)

$$\sum a_i a_k p_{ik} = 0$$

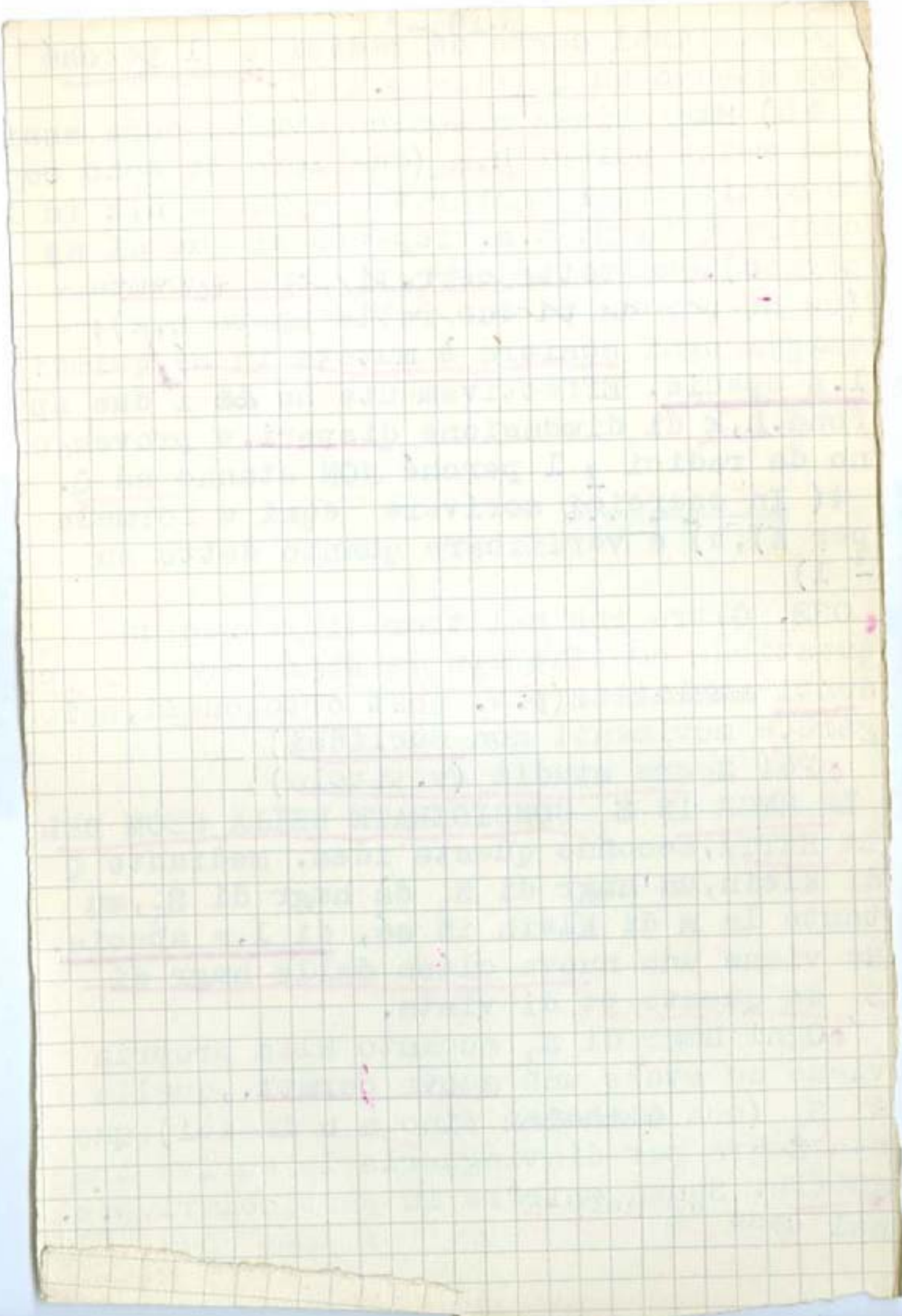


$$\begin{array}{l}
 1) \quad a, a, -p \\
 2) \quad -p, a, a \\
 3) \quad a, a, -p \\
 4) \quad -p, a, a \\
 5) \quad a, a, -p \\
 6) \quad -p, a, a
 \end{array}$$

$$(a, a, a, a, -p)^2 = 0 \quad H_0 \text{ ha } 2 \text{ radici} \\
 \text{multiple } p = \pm \sqrt{a, a, a, a}$$

Si veda i D, etc. come [(111)(111)].

FASCI DI QUADRICHE TUTTE SPECIALIZZATE,
 Prima si è supposta l'eq $\Delta(p) = 0$
 non identica. In altro lavoro "Ricerche
sui fasci di coniche quadrici in uno spa
 zio lineare qualunque" Torino Atti vol. 2
 19, 1884 Segre ha studiato il caso oppo
 sto. tra i fasci di coniche, vi sono intan
 to ovviamente quelli col vertice comu
ne, ma non sono i soli. Per fare un caso
 ovvio, in S_2 posso individuare un fascio
 di coniche riducibili con due coppie
 di rette per M (e allora per cb lin



no coppie di un'invne (pensare a M origine) ~~Ma~~ ho anche un altro caso; se prendo due coniche spezzate con una retta comune.... (p.e. $x_3 x_1 = 0, x_3 x_2 = 0 \dots$). Meno ovvio è in S_3 : se parto da due coni di vertici V, V' ottenuti proiettando una stessa c^2 in modo che VV' sta generatrice comune (appoggiata alla c^2 in H) il fascio



due coniche

è tutto di coniche. Anche senza scrivere eq. ni, si vede geometricamente così: in ogni pt di VV' le coniche hanno lo stesso piano tgte ($VV'.h$), esso è dunque tgte anche alle

altre quadratiche del fascio, quindi ogni tale quadrica ha piano tgte fisso lungo la VV' , e non può che essere cono (se no la polarità dá corr biun...), e precisamente cono di vertice su VV'

Critullicano per esempio cono 16 P_{16}

$\gamma \wedge \pi_0 = 0$ eq. $2x_1 x_2 + x_3^2 = 0$ (per A', A')

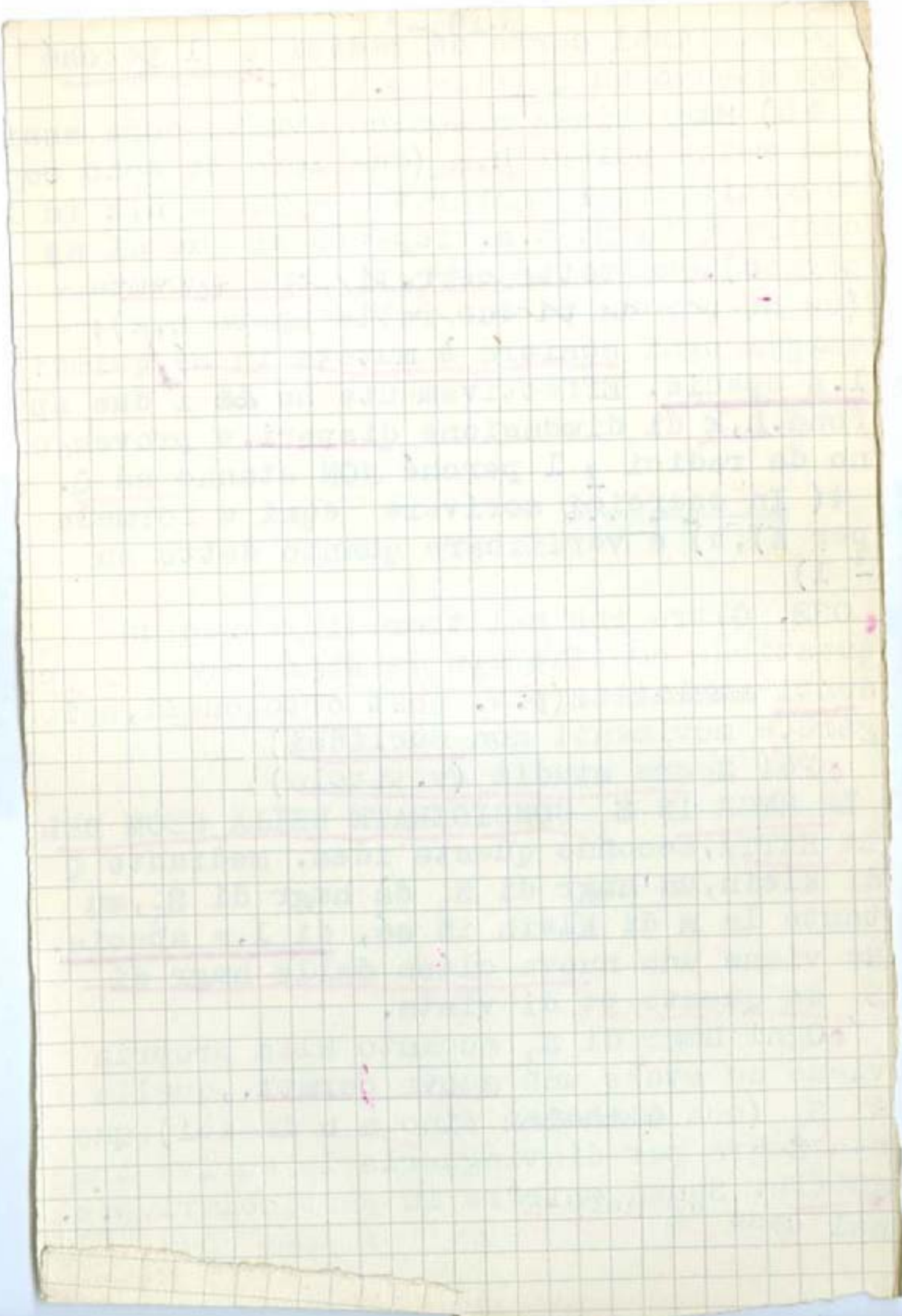
$V \equiv A' \downarrow \rightarrow F$ $2x_1 x_2 + x_3^2 = 0$ $\downarrow H \equiv A'$

Per F' cono col vertice su $A_2 A_1$. La co. di

F'' per per j di

$2x_2(ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4) + 2x_1 x_2 + x_3^2 = 0$

che se cono ~~col vertice~~ col vertice su $A_2 A_1$ in $(1 \dots 1) i$.



(Dove)

133

$$ax_1 + 2x_2 = 0$$

$$bx_1 + 2x_3 = 0$$

$$cx_1 + 2x_4 = 0$$

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + 2dx_4 = 0$$

$$\text{cioè } a=0, b=0, c+2d=0, a+2d=0$$

$$\text{cioè } a=b=d=0. \text{ Allora}$$

$$F) \quad -2lx_2x_3 + 2x_1x_2 + x_3^2 = 0$$

$h_i (1, 0, 0, 1)$

Quindi tutte le V_i si fanno le eq. delle ste-

fame, con due valori per l , e due per

l'angolo (c.d.)


(p. 142)

Anzi, risulterà dal seguito che è questo in S_3 il solo caso possibile di fasci di conici a vertice variabile.

Segre considera anche il caso più generale in cui h (in S_r) il cono generico del fascio è una Q specializzata h volte. Al limite al caso $h=1$ (coni di prima specie). Supponiamoli senz'altro NON col vertice comune (se no si ottengono proiettando da V un fascio di Q non specializzate di un iperpiano). Consideriamo la linea L luogo dei vertici dei conici generici del fascio. Attualmente, con le notazioni di prima la

$$|a_{ik} - pb_{ik}| = 0 \quad \text{è identica}$$

(p.133)


 $p \cdot e \cdot \mu - 2\rho x_1 x_2 + \underline{2x_1 x_2} + \underline{x_2^2} = 0$

$$\left| \begin{array}{cccc}
 \cdot & & 1 & \cdot \\
 \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
 1 & \cdot & \cdot & -\rho \\
 \cdot & \cdot & -\rho & \cdot
 \end{array} \right| = \begin{array}{l}
 \dots -\rho^2 : 0 : 0 : -\rho \\
 = \rho : 0 : 0 : 1
 \end{array}$$

even

Per ogni p il vertice x si trova valutando il m.t. di r eq. l. h. (complete) in $r+1$ var.

$$(a_{j0} - p b_{j0}) x_0 + (a_{j1} - p b_{j1}) x_1 + \dots + (a_{jr} - p b_{jr}) x_r = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, r)$$

Però x è un punto di r eq. l. c. viene la x_i .. ai cpl't degli x_j di una eq. del dolo $D(p)$, cioè a polinomi di grado r nel

parametro p . Perciò in un fascio di conici a vertice variabile la L luogo dei vertici è linea algebrica razionale di ordine

(y) $m \leq r$

(dico $m \leq r$ e non $= r$ perché possono i pol' di grado p r avere a com. un fattore di grado m e allora ho $r-m$ pol' di grado $r-m$.)

Oss. Se come detto si riducono i polinomi ai secondi membri a non avere fattori comuni, e allora sono di grado m in p la L è proprio una L^m (non sarebbe vero solo se la corr.za tra i punti di L e i valori di p non fosse biunivoca, ma allora avrei un punto vertice di due conici, e quindi di tutti)

"(che è fatto a posteriori, c. r.)

138

(e de $d \leq m \leq r$ non viene visto. Trovare
 un po' di limitazioni espresse
per d) (Se in questa regione non vi è
 un d)

(per il problema AC, con
 i) (il problema $\sum a_{ij} x_j = 0$, $\sum b_{ij} x_j =$
 il problema $\sum a_{ij} x_j = 0$ in cui con. con x_j

$$\sum_{i,j=1}^r (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}) x_j = 0$$

$$\sum_j x_j \sum_i (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}) x_i = 0$$

~~per A ha 22 e solo 2 cubi 2 doppi~~
 per C ha \setminus e resto espone per

(prima di aver polari; non è lo stesso)

• La L^m (evidentemente razionale) appartiene a uno S_d con $d \leq m$ (p. 93)

(in realtà, ^{nel lavoro di 14} come poi dirò, $d=m$, cioè la L^m è razionale normale). ~~Comunque...~~

• Provo anzitutto che la L^m sta su tutti i conici del fascio (cioè sulla varietà base) (ciò risulterebbe anche da un teorema più generale di Bertini, ma qua lo si prova direttamente). Se infatti x è un punto della L , vertice di un cono C del fascio, x ha lo stesso iperpiano polare rispetto a tutti gli altri conici del fascio (spiegare). Ma l'ipno polare di x rispetto a altro cono A passa per il vertice di A . Quindi passa per tutta L (in un primo momento, escluso forse x , ma per continuità anche per x) Detto Σ l'ipno polare fisso di x di cui si è detto (in particolare rispetto ad A), vuol dire che x è autoconto nella polarità rispetto ad A , e quindi sta su A . Quindi x sta su tutte le quadriche del fascio (coni). Il teorema è provato.

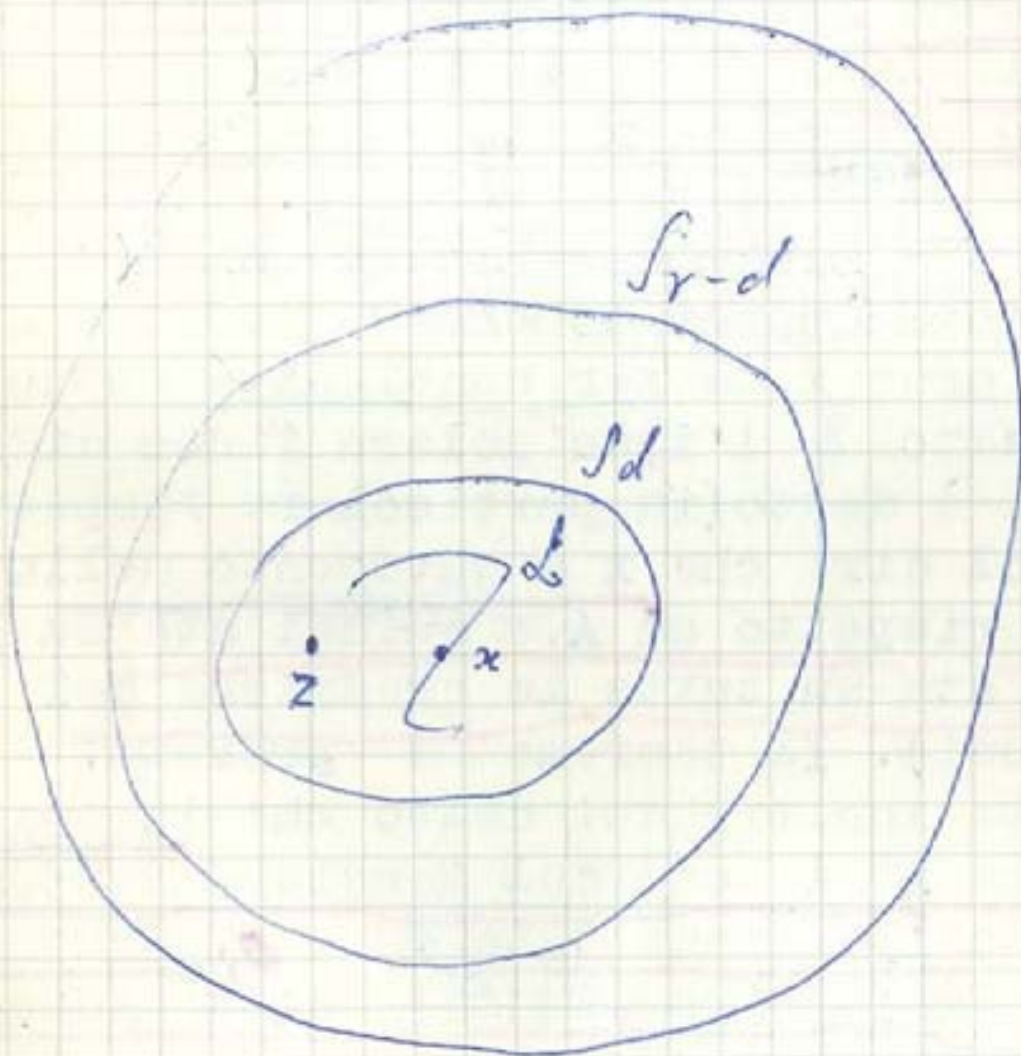
• Risulta inoltre dal detto che in ogni pt x della L^m i conici del fascio ammettono uno stesso iperpiano tgte Σ , e che tutti gli infiniti iperpiani Σ contengono la L^m . quindi ovviamente lo S_d .

• Provo ora che sta su tutti i conici del fascio addirittura lo spazio S_d di appartenenza delle L^m .

138

* Notion exacte de S_{r-d} obtenue
par une pompe de S_d par point
respecté à tous les points

3



• Convieni in quanto segue tener presente che nella polarità rispetto a cono di 1. specie (che qua sarà il cono A , di vertice y) tutti i punti di S_1 per y hanno lo stesso iperpiano polare, e quindi nella polarità di corrispondono

S_2 per y ---- $\rightarrow S_{r-2}$ (per y) (intsz degli ip. polari dei pt di quello S_2)

S_3 per y ---- $\rightarrow S_{r-3}$ c.s.

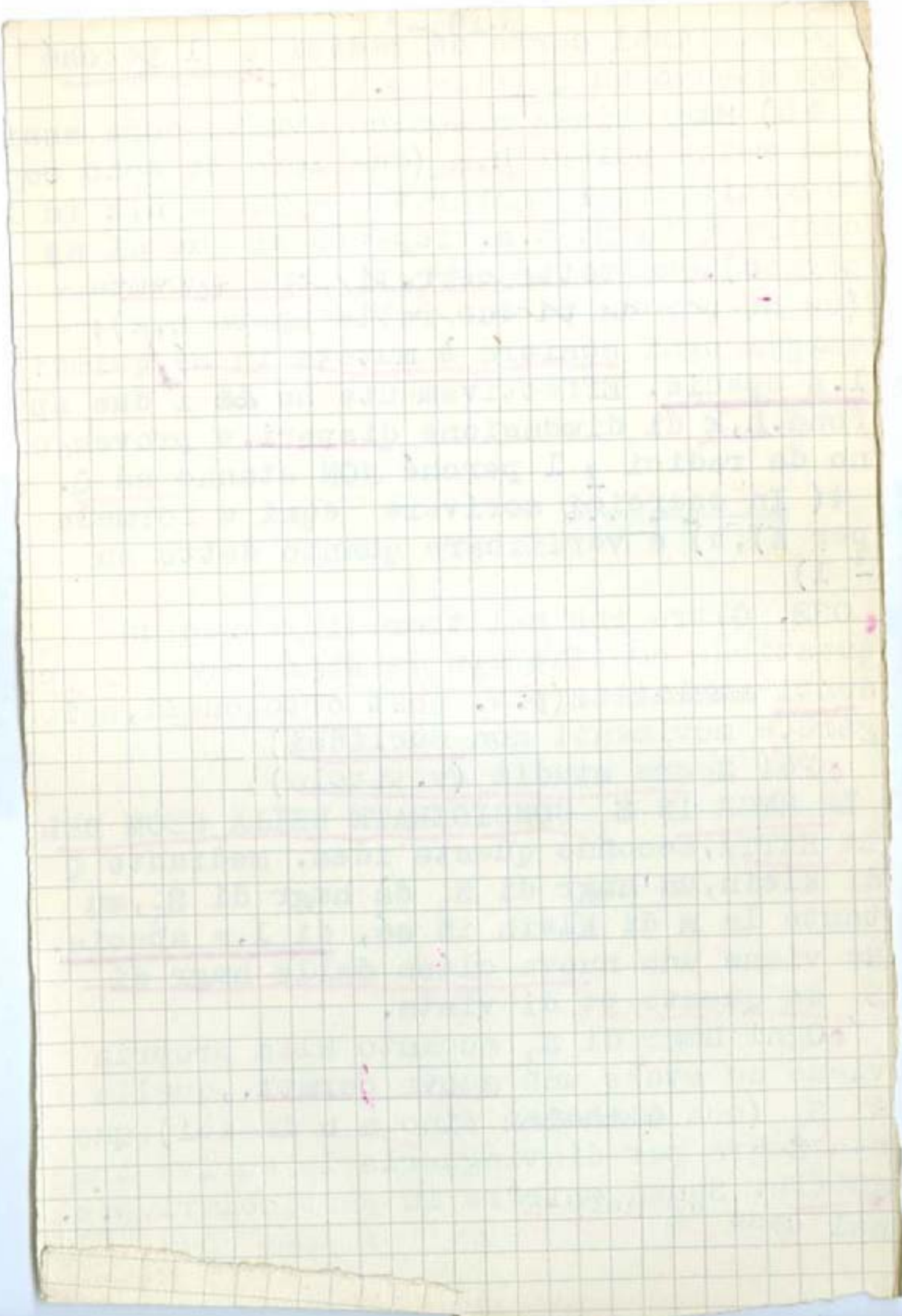
S_d per y ---- $\rightarrow S_{r-d}$ c.s.

Per avere S_{r-d} basta prendere ~~alcuni~~ $d+1$ pt lin ind di S_d (e poi l'intsz dei loro ip.ni polari). Se tra quei $d+1$ pt prendo y , l'ip no polare è indto, e allora prendo altri d pt di L e i loro ip/ni polari e viene appunto S_{r-d} . * Ogni altro pt di S_d è cb lin dei $d+1$ considerati, e quindi il suo ipno polare passa sempre per S_{r-d} .

• D'altro lato S_{r-d} contiene S_d (perché l'ip no Σ polare di x rispetto ad A , cioè tgte alla A in x contiene S_d , p. prec)

• E allora preso un pt z di S_d (anche non sulla L), il suo ipno polare passa per S_{r-d} , e quindi per S_d , e quindi per z . Dunque z (punto qualunque di S_d) è auto conto rispetto ad A , sta su A c.d.d.

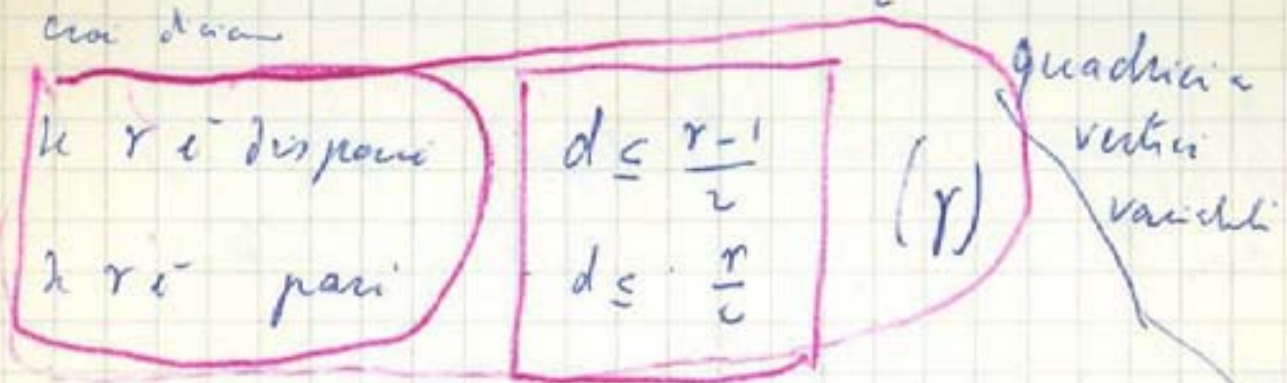
"evanesce x e L , sep. l'amb.



• Quanto detto prova anche che per un qualsiasi cono del fascio loperpendicolare tgte in un pt qualunque dello S_d passante per lo spazio S_{r-d} (perché ipno tgte=ipno polare).

• E adesso possiamo arrivare a conclusioni più concrete. Anzitutto si ha una limitazione per d, in quanto S_d sta su cono di prima specie. Secondo con iper piano generico si ha che la V_{r-2}^2 traccia di cono, non specializzata, contiene uno S_{d-1} . Quindi:

se $r-1$ è pari, " $d-1 \leq \frac{r-1}{2}$ $[d \leq \frac{r+1}{2}]$
 " " " dispari $d-1 \leq \frac{r-2}{2}$



• Inoltre, assunto d come ora detto, si ha il modo di trovare tutti i fasci di cono (corr. ti a quel valore di d). Parto da due cono quadrici per uno stesso S_d , pas-

" Ricordo per S_h di V_{r-r}^2 (de p. 102)
 per $r=2g$ $h \leq g-1$
 $r=2g+1$ $h \leq g$

- 142 -

♪ [petitissimo in Sol] Coppia di pt.
con Costes S₁₀₁ 4to. gent. - bellissimo
di S₁₀₁ - croc. in una chiavina gentile

sante per i loro vertici (perché S_d conteneva L) e tali che gli iperpiani tnti nei pt di S_d passino per uno stesso S_{r-d} ; si assume poi il fascio individuato da quei due con.

La condizione è anche sufficiente. Siano infatti A, C i due con dati, e Q una quadrica generica del loro fascio. Ovviamente Q passa per S_d ; inoltre l'iperpiano tgte a Q in un pt Z generico di S_d appartiene al fascio individuato dai due iperpiani tnti in Z alle A, B e passa perciò per S_{r-d} . Quindi gli ipni tnti a Q nei pt di S_d , sono tra gli ipni per S_{r-d} , che sono

$$\infty^{(r-1)-(r-d)} = \infty^{d-1}$$

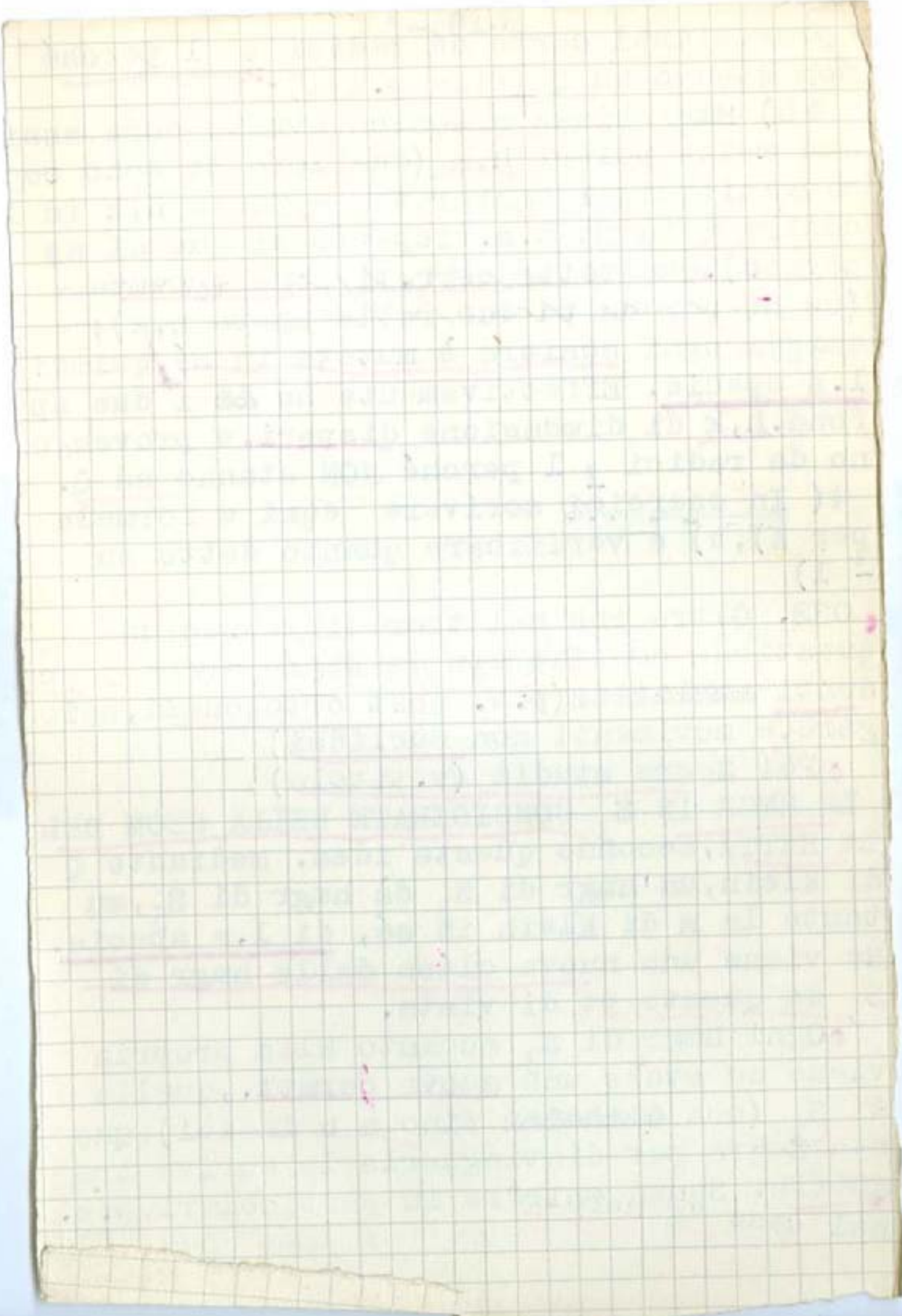
Quindi non c'è corrispondenza biuniv. tra i pt di S_d e i relativi ipni tnti a Q , cosicché Q è specializzata, cioè cono (e anzi viene cono col vertice ~~con~~ in S_d) c.d.d.

Applichiamo p.e. ai primi valori di r cominciando con

$r=3$. Le (I) danno $d=1$. Il luogo dei vertici è una retta. Nella costr generale di quassù devo partire da A, B con gence comune e tnti lungo essa. L'Intsz residua è una conica γ , e si ricade su p. 131.

$r=4$. Le (I) danno $d \leq 2$. Ho quindi due

possibili
a) $d=1$. Partire da due con V_1 con rette comuni e tnti lungo con ($r-d=3$).



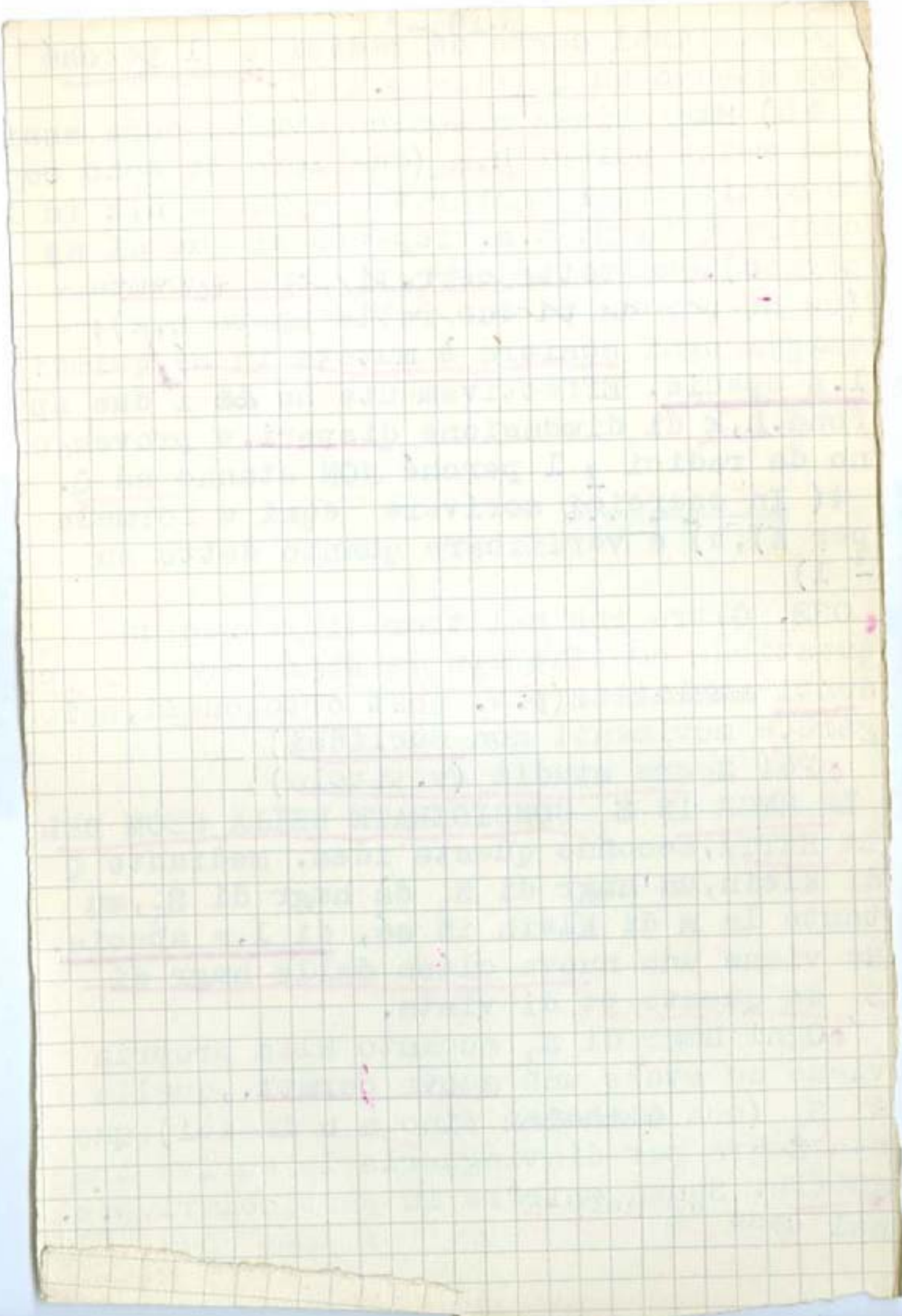
d=2
 b) parto da due coni V_3^2 aventi a comune un piano generatore (né vi è da aggiungere altro; esso stesso funge da $S_{r-d}=S_2$).

r=5 Le (I) danno $d \leq 2$. Ho ancora due casi:

d=1 a) due coni V_4^2 con generatrice comune e tgtk lungo essa ($r-d=5-1=4$)

d=2 b) due coni V_4^2 aventi a comune un piano per i loro vertici e tali che gli ipni tgtk nei suoi pt passino per uno S_3

(Fare un esemp. esemp. per r=4, r=5 nei due casi) (vedi il lung. dei vertici)



Le F^4 di S_3 con conica doppia. In altro lavoro dello stesso periodo (Etude des différentes surfaces du quatrième ordre à conique double ou cuspidale, Math Ann t. 24, 1884) di geom. proj. ipersp. Segre ha studiato quelle F^4 come applicazione di geom. iperspaziale. Prende in S_4 un fascio di quadriche, con la sua varietà base \mathbb{P}^3 ; proiettandola da un pt. P in S_3 viene una F^4 con conica doppia, delle quali fa studio completo appunto con quella considerazione. Che venga F^4 con conica doppia si vede p.e. così, analyt. te.

Se punti del vertice A_0 nelle facce opposte u, v riduce il piano con le quattro p.e. P_0 e altre

$$\begin{cases} x_0 \sum_{i=1}^4 k_i x_i + \varphi(x_1, \dots, x_4) = 0 & \varphi, \psi \text{ quadratiche} \\ x_0^2 + x_0 \sum_{i=1}^4 h_i x_i + \psi(x_1, \dots, x_4) = 0 \end{cases}$$

Per avere le p.e. unite (in cui restano x_1, \dots, x_4) eliminiamo x_0 per le due

$$x_0 = -\frac{\varphi}{\sum k_i x_i}; \quad \varphi^2 - \left(\sum h_i x_i\right) \left(\sum k_i x_i\right) \varphi + \left(\sum k_i x_i\right)^2 \psi = 0$$

eq. alle F^4 . Ed è doppio le C^2 $\left(\sum k_i x_i = 0, \varphi = 0 \right)$

(p.e. unite)

Se facemmo l'analisi con 1 dim. in un

lo stesso celest. da C^2 con 2 pt. doppi come

p.e. piana delle C^2 di 1° sp. in \mathbb{P}^3 (e \mathbb{Q} che sono anche glorie)

[fascio Ω
con K: (vedi V)
problema Σ]

Viceversa oppo F^4 a conica doppia e' ottenuta
con proy. c. Basta provare che le sue g-
 si può mettere nella form (1) per le c-

dopp $\lambda_4 = 0 \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ (φ è f. quadr.)

Intersezione con $x_4 = 0$ e' data in $\varphi = 0$ con

F^4) $\lambda_4 \Theta(x_1, x_2, x_3) + \varphi^v(x_1, x_2, x_3) = 0$ (Θ cubico)

Per i p.t $x_4 = \varphi = 0$ dopo le KN, AN, AN'

$\frac{\partial \Theta}{\partial x_1} = 0 + \lambda_4 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$ per c. c.

$\Theta = 0$ se $x_4 = 0$ nella c. c.

$\Theta = x_4 \varphi(x_1, x_2, x_3) + \varphi^2(x_1, x_2, x_3)$

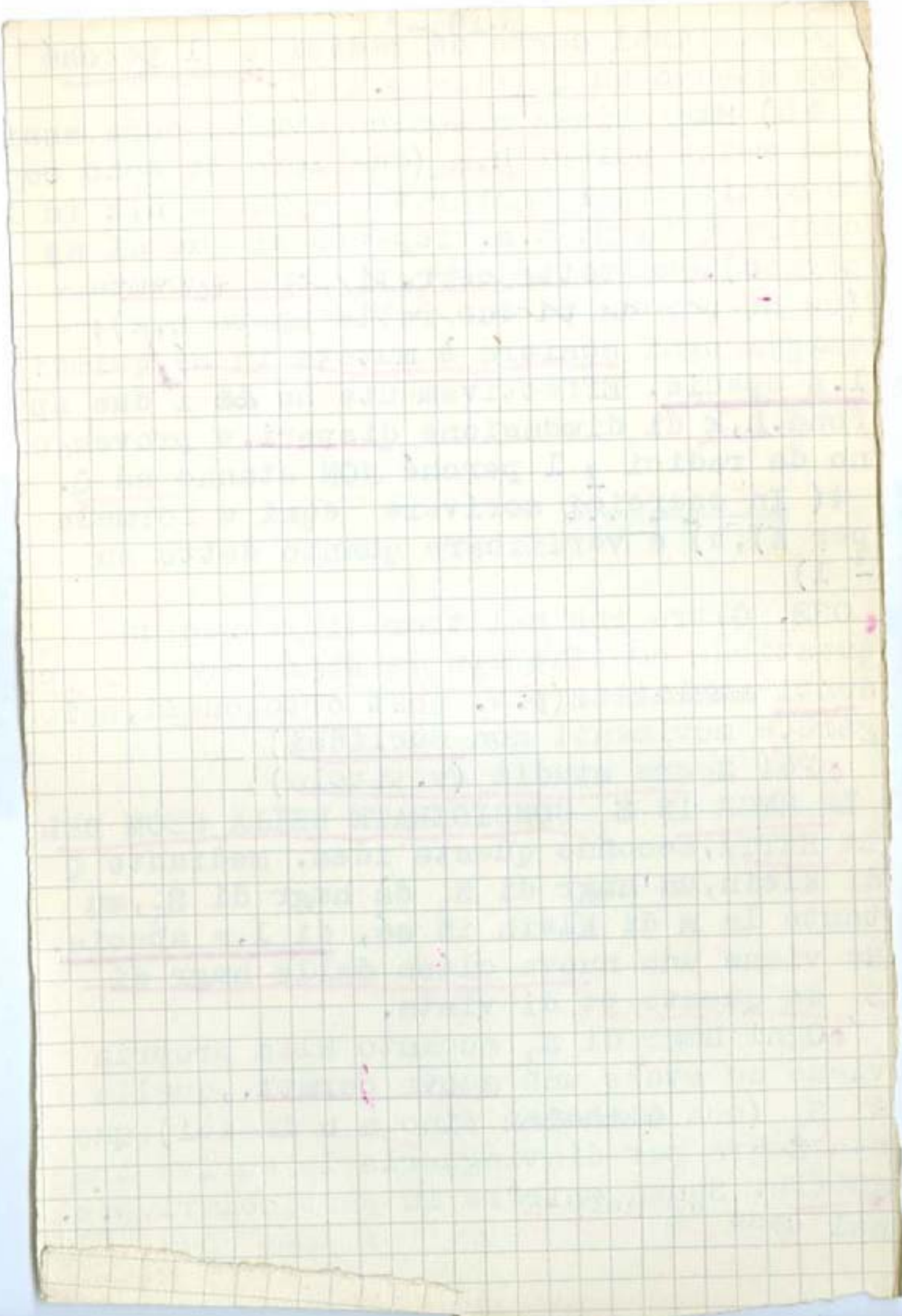
con φ quadr. Θ è lineare

F^4) $x_4(x_4 \varphi + \varphi^2) + \varphi^v = 0$

(2) $\varphi^v + \lambda_4 \lambda \varphi + \lambda_4^2 \varphi^2 = 0$ $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_3)$

Caso part. di (1) (con $\sum k_i z_i = \lambda_4$) c. d. d

Il lavoro di Segre costituisce dun-
 que uno studio generale delle F^4 a conica
 doppia, e dei vari casi particolari
 che si possono presentare, sia per la de-
generazione della conica doppia, sia per
 che questa da "nodale" diventi "cuspidale"

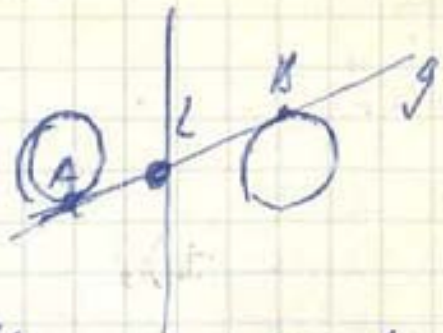


dale" -il che vuol dire che mentre per la nodale i punti generici della c^2 doppia sono biplanari, per la cuspidale sono uniplanari, sia per il presentarsi di ulteriori punti doppi oltre a quelli della conica (oltre 70 specie)

• Nel lavoro di Segre lo studio delle F^4 a conica doppia è condotto con metodo unitario, e ritrova le proprietà già note insieme con nuove. Casi particolari metrici erano già noti a Dupin (le cui cicliidi hanno, tra altro l'assoluto a linea doppia), Kummer aveva incontrato il tipo generale studiando le F^4 luoghi di coniche (che venivano subito dopo le F^4 , già tutte note), tra esse aveva trovate le F^4 a conica doppia, scoprendo 5 coni quadrici (coni di Kummer) i cui piani tngti segano la F^4 in coppie di coniche; Clebsch aveva dimostrato la razionalità delle F^4 in esame. Segre studia il caso generale e tutti i casi particolari possibili che enumera in modo completo. ("lavoro definitivo" Conforto p.160)

1) Anche in Darboux ptá metriche e differenziali delle "cicliidi" (non nec di Dupin), F^4 con l'assoluto doppio; per quelle di Dupin, in piú le linee di curvatura sono cerchi)

* Nell'esempio di cui
 detta g una gl con
 (figura) cui due centri che collinano in un punto
 opp. ai A, B , il pl. gl in A genera un
 corso rotundo di cui $L \equiv$ corso rotundo gl
 l'op. il ~~manif. stesso~~ parallelo generato da B ;
 ed è corso di Kummer
 (Da parte a p. 155) *



Non è ~~sp. l'op.~~
 Non è ~~manif. stesso~~ $h = h$
 (11) $h = x_0$ $h = x$
 Non è ~~sp. l'op.~~
 Non è ~~manif. stesso~~ $h = h$
 (1) Paris, Anni Fini 1850/1871
 Non è ~~sp. l'op.~~ $h = h$
 Non è ~~manif. stesso~~ $h = h$
 Non è ~~sp. l'op.~~ $h = h$
 Non è ~~manif. stesso~~ $h = h$
 Non è ~~sp. l'op.~~ $h = h$
 Non è ~~manif. stesso~~ $h = h$

Mediane angolari - 153 -
coni di Kummer di
rettanti in S_3 . Per le F^3 parti delle (2) p. 149

$$\psi'(x, x_1) + x_1 \lambda \psi + x_1' \psi(x_1 - x_1) = 0$$

Eni $(\psi + \frac{x_1 \lambda}{v})' + x_1' [\psi - \frac{x_1 \lambda}{v}] = 0$

che da

$$(3) \quad \Phi(x, x_1) - \frac{1}{2} x_1' \Psi(x_1 - x_1) = 0$$

derivando si per parte delle (3). Adun le
 derivando

$$(4) \quad (\Phi + \tau x_1')' - \frac{1}{2} [\Psi + \tau \Phi + \tau x_1' x_1'] x_1' = 0$$

in τ n° arbitr. Per le (4) ognuno delle $\infty^1 F^3$

$$(5) \quad \Psi + \tau \Phi + \tau x_1' = 0$$

se F^3 è una linea cubica doppia. Per $\tau =$

~~in modo che (5) si spq. in due eq. p. univ.~~

~~ciascuna di queste è tgta a F^3 come i tan.~~

genti a F^3 l'eq. (6) (con $\tau = 0$) $\Phi + \tau x_1' = 0$

Si sceglie τ in modo che (5) sia cono, (quadric
 ogni sua generatrice g (lungo la quale
 vale dunque la (5) ha in comune con la
 (6) una coppia di pt, - che sono dunque fra

A, B



[parte di π è il
 piano in questione.
 Segni due curve. quest
 produ linea con 2 pt. dopp

due sono alle c. dopp e pt. dlla π ,
 piani A, B son pt. di ditta di π
 con F^3 . Eris uno in una generatrice
 parte di pt. gli al cui in A, B o lo stes
 Ord. gen^c bitgl]

! quelli di una ^{stessa} sezione un^c rta
 sul vertice; quelli di sezioni opposte
 lungo una generatrice

! di natura "in generale" cioè non
 che siano ^{liber} distinti A che epolara a
attenzione nelle indicazioni del testo

i pt di contatto del cono con F^4 . In A e B cono e F^4 sono tgtk, cioè hanno lo stesso piano tgtk, e perciò

- a) la retta AB è tgtk alla F^4 in A, B cioè è bitangente a F^4 ;
- b) il piano tgtk al cono lungo g è tgtk a F^4 in A, B.

Perciò

a') il cono considerato ha le generatrici bitangenti a F^4 ;

b') tale cono ha i suoi piani tangenti bitangenti alla F^4 ; perciò su ognuno di essi F^4 sega C^4 con 4 pt doppi (due sulla conica doppia) cioè due coniche.

I coni di Kummer (così si chiamano i coni quadrici considerati hanno dunque le ptá a'), b'). La b') è appunto la ptá menzionata a p. 151 (e la a') ne è una conseguenza * (154)

Quanti sono i coni di Kummer? Si è detto 5. Effettivamente, se voglio che (5) sia cono, devo annullare il discr: è D_4 a elementi lineari in τ , salvo g_{44} che è quadratico. Viene equazione di quinto grado, va bene! ϕ (in K) $\sqrt{11111}$

Nella trattazione di Segre si giunge subito a questi 5 coni. Per la F^4 passano IN GENERALE 5 coni (del fascio...). Ciascuno è ottenuto proiettando dal suo V una Q di S_3 , con le sue due schiere, quindi contiene due "schiere di piani". Ognuno di questi piani sega una 2.a V_3 del




Si hanno ω in \mathbb{F}_q 10

rispetto a ω di cui



fascio in una conica, che sta dunque sulla base \mathbb{P}^1 . Questo ci dá intanto che la \mathbb{P}^1 contiene tutte le coniche cosí ottenute.

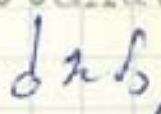
• Si può aggiungere (e parliamo ora della \mathbb{P}^1) che si ottengono cosí tutte le coniche della \mathbb{P}^1 : infatti se ω è una conica della \mathbb{P}^1 , situata dunque in un piano che chiamiamo π , la V^2 del fascio individuata da un pt generico di π contiene tutto il piano π , ed è perciò un cono del fascio. Si ricade cosí sulle coniche già trovate. 

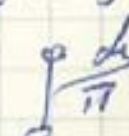
• Si può aggiungere qualche cosa. Due c^2 della \mathbb{P}^1

1) se provengono come sezioni con piani di due schiere opposte di uno stesso cono (che si segano in generatrice) hanno in comune DUE pt

2) se da piani di stessa schiera NON hanno pt comuni

3) se da piani di coni diversi hanno in comune UN punto, quello comune ai loro piani. ^(x)

• Se ora passiamo alla F^4 , proiettando la \mathbb{P}^1 da T generico, lo S_3 proiettato una 

c da $n F^1$ unico, il cui piano π' secca F 

[che sta alla \mathbb{P}^1 proiettata su due coniche]

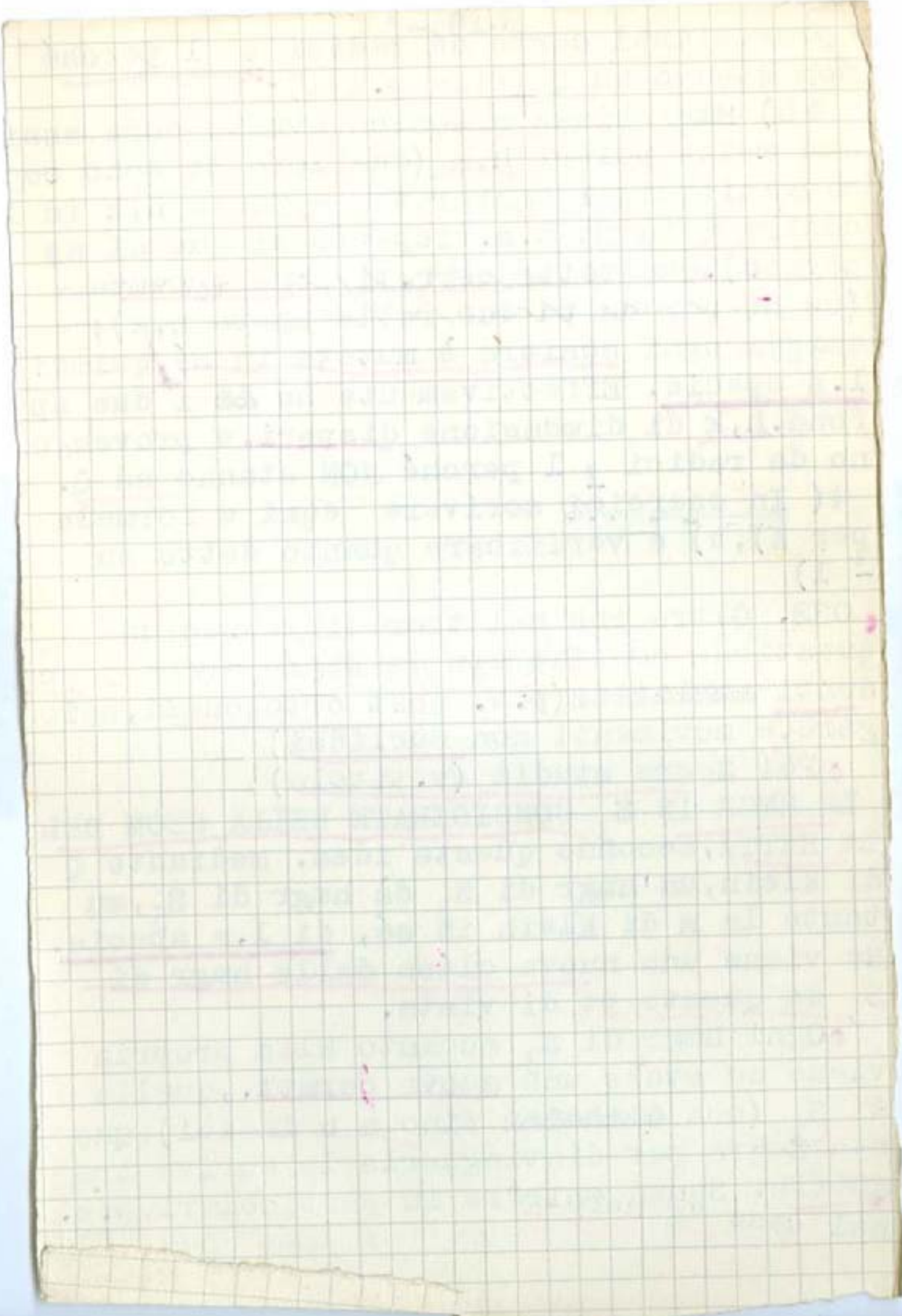
- 158 -

$\alpha' = \beta'$ $\alpha' = \beta'$ $\alpha' = \beta'$ $\alpha' = \beta'$

secondo una 2.a conica. Per vedere bene i coni di Kummer diciamo in modo un poco diverso. Se V è il vertice (in S_4) di un cono K del fascio \mathcal{F}_4 la proi. V' di V è vertice di cono di Kummer. Precisamente, se α è un piano del cono K della 1.a schiera, lo $S_3 P\alpha$ sega il cono in un piano β della 2.a schiera (non è altro se non il fatto che in S_3 un piano per una gen di Q sega genere dell'altra schiera). La traccia $\alpha \cap \Sigma_3$ dello S_3 è un piano, che è proiezione sia di α sia di β , sarà $\alpha' = \beta'$, e contiene le due coniche proi di quelle di \mathcal{F}' site in α e β . Di questi piani $\alpha' = \beta'$ per V' , in S_3 , ne ho ∞^1 , e allora inviluppano nella stella V' un cono, che è il cono di Kummer. che sia cono quadrico risulta dal fatto che ~~è un cono~~ i suoi piani tgti sono le tracce degli S_3 che dalla retta PV proiettano i piani di una schiera (cioè le rette di una schiera di K una quadrica di spazio ordinario).

Si può osservare che per un dato cono di Kummer le due c2 segate dai suoi piani tgti descrivono due sistemi ben distinti (provenendo dall'una o dall'altra schiera del cono di S_4)

Una F^4 a conica doppia in generale contiene 16 rette, come era già stato riconosciuto prima di Segre, ma come



-161-

risulta come segue dalla sua tratta-
 zione. Anzi, già la Φ'_2 contiene 16 rett-
 Ω te. Considero invero il fascio Ω individu-
 \mathcal{K} to da un cono e altra quadrica. Prenden-
 do convenientemente il sistema di rift-
 rimento, siano p.e.

$$(1) x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$$

$$(2) f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

le loro equazioni. Ogni piano genera-
 tore del cono (ricordare che il cono
 viene proiettando dal suo vertice F_2
 di S_3) sega la seconda V_3 in una coni-
 Ω ca. Se ottengo che sia coppia di rette
 trovo due rette sulla Φ'_2 (e vicever-
 sa retta della Φ'_2 viene così). Quante
 volte avviene questo? Prendo per (1)
 i piani di una l.a schiera, siano

$$(3) \quad x_3 = \lambda x_1, \quad x_4 = \lambda x_2$$

Questo piano sega (2) nella conica le
 cui eq si ottengono aggregando alle

$$(3) \text{ la } \{ (x_0, x_1, \lambda x_2, \lambda x_1, x_4) = 0 \}$$

(4)

Questa, in S_4 è l'eq. di una V_3^2 che è
 uno S_1 -cono (di ~~vertice~~ spazio vertice
 la retta $A_3 A_4$), ottenuta proiettando
 da tale S_1 p.e. la conica sua sezione
 con il piano $A_0 A_1 A_2$, sia ω . In altre
 parole la conica γ^2 è proiezione del
 la ω , e quindi riducibile insieme con
 questa, cioè quando si annulla il disci-
 min della (4), considerata ora come

$n \int = \sum_{i=0}^n a_{ik} x_i x_k$

$f(x_0, x_1, \lambda) =$

$a_{00} x_0^2 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_0 x_1 + a_{33} x_0^2 x_1^2$
 $+ 2c_{01} x_0 x_1 + 2c_{02} x_0 x_1 + 2c_{12} x_0 x_1$

Ans: mit diesen i sind in

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Bedingung $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} < 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} < 0$

eq nelle x_1, x_2 . Annullando tale discriminante ho un'equazione di 4° grado in λ perch'è $\circ \circ$

• Perciò vi sono nella schiera considerata 4 piani per ciascuno dei quali ha luogo lo spezzamento. Così nell'altra schiera. E in tutto ho 16 rette (che in casi particolari potranno anche non essere tutte distinte). C.D. \rightarrow v. 164

RAZIONALITÀ delle F4 A CONICA DOPPIA

• Col metodo di Segre risulta dalla razionalità della stessa \mathcal{Q}' , che risulta \circ sí. Prendo sulla \mathcal{Q}' una retta r , e proietto i pt della \mathcal{Q}' da r su un piano generico π . La proiezione risulta biunivoca. Ovviamente $M \rightarrow M'$. viceversa, dato M' di π , è individuato il piano proiettante rM' , e questo incontra la \mathcal{Q}' fuori di r solo più in un punto (che sarà M). Infatti dato un piano θ per r per vedere in quanti pt incontra ancora la \mathcal{Q}' lo sego con due quadriche del fascio.... spiegare.

• Ho dunque corr.za alg biunivoca tra i pt della $F4$ e quelli del piano π . Quindi, anche senza fare materialmente i calcoli, si capisce che le coordte di M risultano fni raz di quelle u, v di M' .

(per calcolat si han solo eq. 1° pto)

17 2, 16) Avvertiamo subito (e si applicherà poi) che una delle 16 rette, sia r, ne incontra 5 e non ne incontra 10 (si intende che ci limitiamo al caso "generale" in cui la caratt. del fascio Ω è $[11111]$). Se invero s è retta inc. s , per un pt generico del piano rs passa una quadrica del fascio Ω , la quale contiene tutto il piano rs ; cosicchè rs contiene il vertice di uno dei 5 coni del fascio Ω . Viceversa, data r , congiungendola a ciascuno dei 5 vertici.....

c.d.d.

(è poi il caso "1")

p. 157)



• La natura delle fle che danno la rappresentazione si può dedurre dalle immagini delle sezioni iperpiplane, che ora troveremo.

• In generale, per \mathbb{P}^r raz di S_r , data da

(1) $p x_i = R_i(u, v)$

o anche

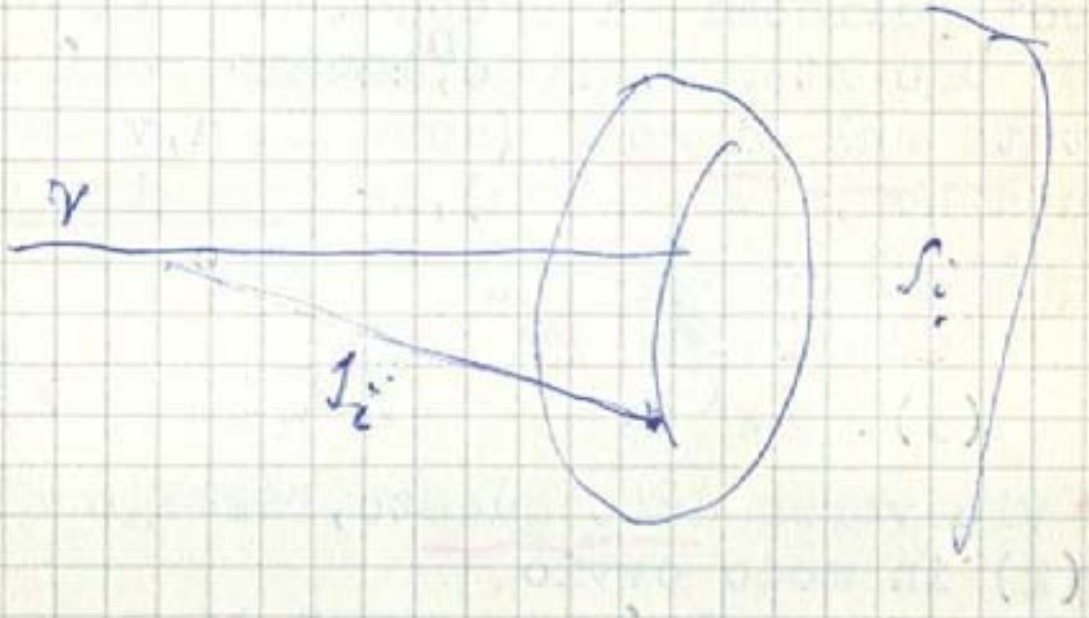
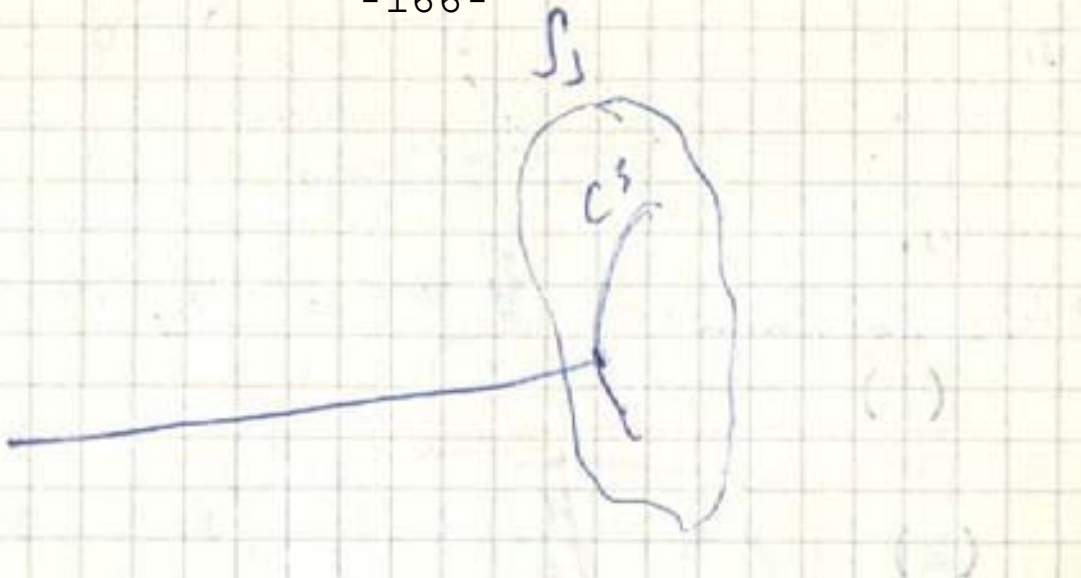
(2) $p x_i = F_i(u, v)$ (i=0...r)

coi polinomi ai secondi membri omogenei di uno stesso grado, ~~data da~~ così rappresentata sul piano π (dove le u, v sono coordinate non om, e le z om), le immagini delle sezioni iperpiplane sono le cn del sistema lineare ~~di~~ ∞^r

(3) $\lambda_0 F_0(u, v) + \dots + \lambda_r F_r(u, v) = 0$ (Σ)

• Viceversa dato questo, risalgo alle (2) in modo ovvio.

• OSS. In realtà, non avrei bisogno di prendere per λ proprio la F_0 , e così via; potrei invece prendere ogni volta un determinato 1° membro di (3) (cioè con dati coeffti); ma a conti fatti ritroverei una superficie omografica a quella di prima. Così a meno di omografie in S_r , sussiste proprio il fatto che dato il sist line immagine delle sezioni iperpiplane si risale alla superficie razionale Σ_r



• Studiamo dunque per la Φ' le immagini delle sezioni iperpiane. Saranno evidenti delle ~~c4~~ cubiche (proiezioni di $c4$ ~~su~~ su un piano, eseguite da una retta r , la quale si appoggia alla $c4$ in un pt - la traccia della r sull'ipno della sezione e allora pensando al significato dell'ordine si vede subito che nella proiezione si abbassa di una unita) ma non viene un sistema lin qualunque di cubiche, bensì con 5 punti base. In fatti le

c^4 ~~si~~ (il no S) si appoggia in 1 pt a ciascuna delle 5 rette S_i (il no S) ~~con~~ π (p. 164), il qual non ~~è~~ parallelo ~~to~~ nel pt S_i tracce di piani π_i (indipendenti dalle parabole c^4)

quindi le sezioni iperpiane della Φ' hanno per immagini le c^3 di π passanti per 5 punti fissi.

Nell'enunciato ho detto "le" perché in π le c^3 per 5 pt sono inf./4, e noi dobbiamo appunto trovare un sist./ lin. inf./ 4 (p. 165); dunque è proprio TUTTO quel sistema.

• OSSNI. 1) Nella rappr. della Φ' su π , sono eccezionali o fondamentali su π i pt base (5). Ciò in generale per ogni sup. raz (v. le (2), (3)). In generale quando si ha un pt fond., si cer

$\delta(\text{que } \pi, \text{ me in } \text{sum } \text{unus } \text{M}$
 $\text{in } \Phi)$

ca di attribuirgli dei corrispondenti per
 continuit  (prendendo M' variabile che si fa
 tendere al pt fond. ecc.); e generalmente
 si trova come luogo dei corr ti di M' una
LINEA FONDAMENTALE, secondo la direz in
 cui P tende al pt fond. Qua non abbiamo
neppure bisogno di fare tale passaggio al
limite per capire cosa corrisponde a un p
fond. S_i , la cui genesi ci dice che la retta
neafond. correte   la retta s_i . allora
gi  che ci siamo vediamo le img delle re
stanti rette.   chiaro che una linea c^m
 di π passante per i pt S_i con molt  n_i
   immagine di una linea di ordine

$$3m - \sum h_i$$

Quindi sono immagini di rette:

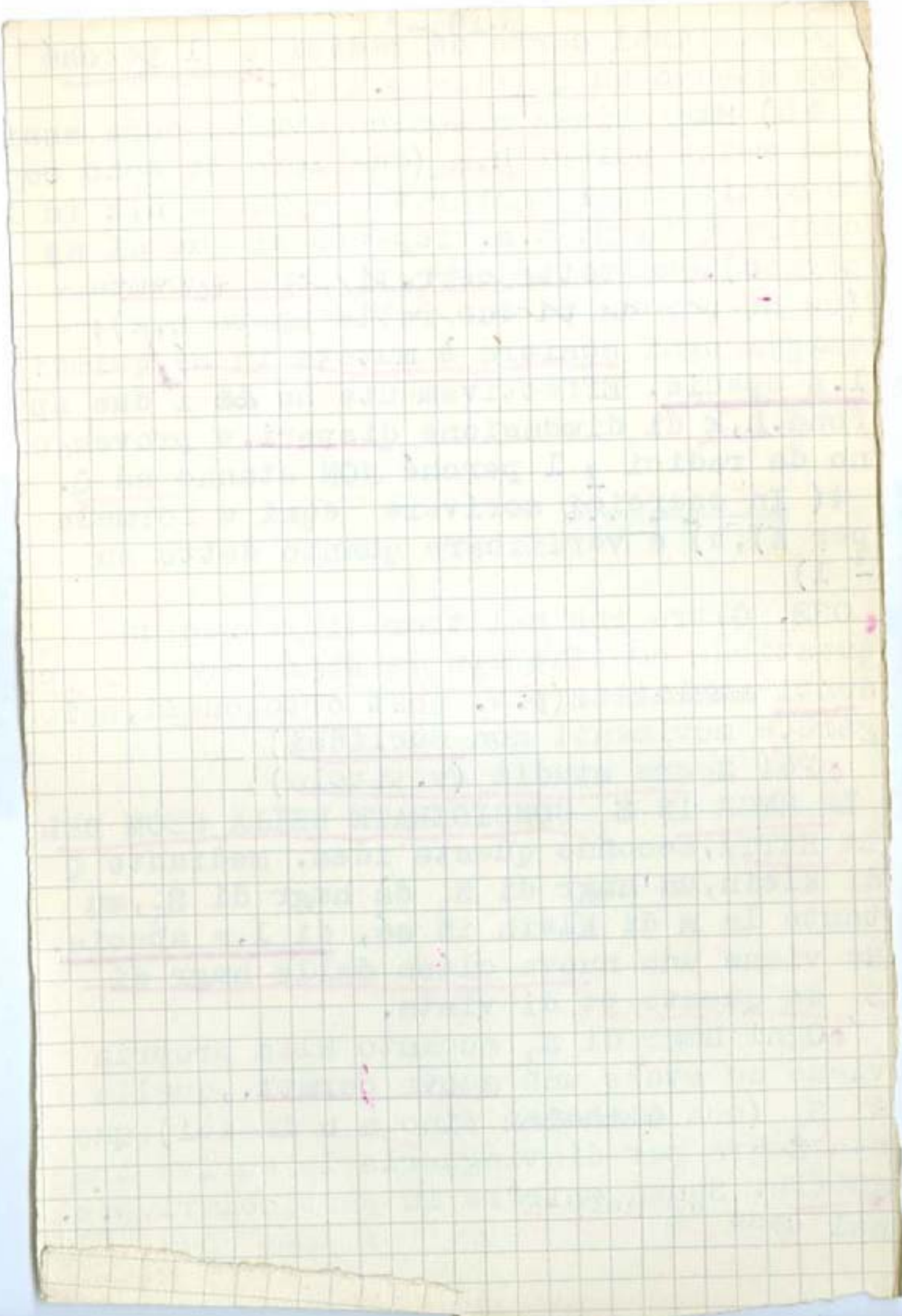
- a) le rette $S_i S_j$ (10)
- b) la conica $S_1 S_2 \dots S_5$ (1)

dove si pu  osservare che quest'ultima c^2
 si deve considerare come img della stessa
 r, la quale in un primo tempo non ha img ,
 e poi si ragiona per cont : ~~fa~~ fa un rag
 to (Segre p.340) che porta appunto a tale
 conclusione.

Segre

~~a) il sist. rappvo delle sez iperpne di
 e COMPLETO (spiegare), il che   da met
 tere in relazione col fatto che la ℓ   nor
 male (il che non consegue dalla disegua
 glianza di p. γ che ~~come~~ spazior di~~

~~($\gamma \leq n_r k - 1$; $\gamma \leq 3r_2$; $\gamma \leq 3r_1$ $\gamma \leq r$)~~



02) se ho sup raz \mathbb{P} (in S_r) data dalle (2) p.165, rappresentata su un piano τ da un sist. lin. Σ_r (v. la (3)), e se ne eseguisco da un pt generico la proi F su uno S_{r-1} , la F , pure razionale è rappresentata su τ da un Σ_{r-1} contenuto in Σ_r (e viceversa). Infatti se la proietto p.e. da A_0 ho le stesse (2) con $i=1, \dots, r$ ecc.

• Perciò la F^4 a conica doppia, proiezione della \mathbb{P}^4 e essa pure raz. e si rappresenta con un sist. lin inf/3 (INCOMPLETO) di c^3 con 5 pt base. E' appunto questa la rappresentazione cercata, e' appunto quella che rappresenta il

de Clebsch

• 3) Se proietto la \mathbb{P}^3 da un suo pt P su S_3 viene una F^3 e si vedono per questa via le 27 rette della F^3 generale: sono le 16 proiezioni., le 10 proiezioni delle 10 coniche per P . Inoltre il centro di proiezione P è fondamentale, e per continuità gli corrisponde la traccia sullo S_3 del piano tgte in P , cioè ancora una retta (e viene così anche la rappre piana della F^3 generale, con c^3 per 6 pt; ~~le~~ le sezioni piane della F^3 ~~sono le proiezioni delle~~ ~~se~~ provengono dalle sezioni iperpiane di \mathbb{P}^3 per P , e quindi le loro img contengono P')

1/2

[occur due: due pt allent to
 O e c.a. inputs the vity. de
 low rate on the open

Le INVERSIONI FONDAMENTALI di una F^4
a conica doppia in sé. Sono note le ptá
dell'inversione rispetto a una sfera H
(spiegare, centro O , si corrispondono
due pt allineati su O , siano X, X' con
 $OX \cdot OX' = r^2$; si può dire due pt allineati
su O e coniugati nella polarità rispetto
alla sfera H). In questo senso si può par
lare dell'INVERSIONE RISPETTO A UNA QUA
DRICA H , quando sia fissato un pt del
lo spazio O . *(centro della sfera)* Per il caso particolare
delle cicliidi erano già note delle in
versioni (ordinarie, cioè rispetto a sfe
re) rispetto alle quali la ciclida si
trasforma in sé (Moutard 1864); e allora
~~per~~ trasformando con omografia si hanno
inversioni *generali* rispetto a quadriche che mu
tano in sé una F^4 a conica doppia.

Segre ritrova tutto ciò col suo meto
do, e per ognuna delle specie della sua
classificaz. dá il n.° delle INVERSIONI
FONDAMENTALI. Accenno rapidamente l'idea
limitandomi al caso generale.

(pensa alle parti inv.^{ne} e sostituisce
 nelle c^o deli inv.^{ne} anni d'arte
 V e an inv.^{ne})

(i pt L, M, N su \mathbb{F}_2^3)

● Sia ancora V il vertice di un cono K del fascio Ω in S_4 (caso $[11111]$), Pre so un piano generico λ per il centro di proiezione P e per V , sia ω ~~la~~ la conica segata dalla quadrica Q del fascio passante per P (cosicché P sta sulla ω)

Il pt V ha uno stesso iperpiano polare v_3 rispetto alle quadr del fascio, lo è in particolare rispetto a Q : sezionando col piano λ , il pt V e la retta $v_3 \cdot \lambda = BB_1$ sono polo e polare rispetto alla ω .



Quindi, rispetto a ω , la retta BB_1 è coniugata rispetto a ogni retta per V , in particolare di ciascuna delle due rette VLL_1, VMM_1 traccie del cono quadrico K . Ciò significa che

sulla conica la quaterna BB_1, LL_1 è armonica (e così la quat BB_1, MM_1)

Perciò, quando passiamo alla proiezione e seguita da P (che è come detto sulla conica) sono armoniche le due coppie di raggi (p.e.) $PB, PB_1; PL, PL_1$. E proiettando su Σ_3 , V si proietta in v' , e i vari pt del piano in una retta r per v' , sulla quale risultano armoniche le proiezioni (p.e.) $B', B'_1; L', L'_1$

$$r = \Sigma_3 \cap \lambda$$

176

↳ (parti-quantis detto vale
per ogni piano λ per PV

(casi per parte de rotte per V' in Σ
e assi in μ di λ in PV).

• Ora i punti L, L_1, M, M_1 per costruzione stanno sulla superf. Q' (son comuni a due quadriche del fascio, a Q e la K). Quindi

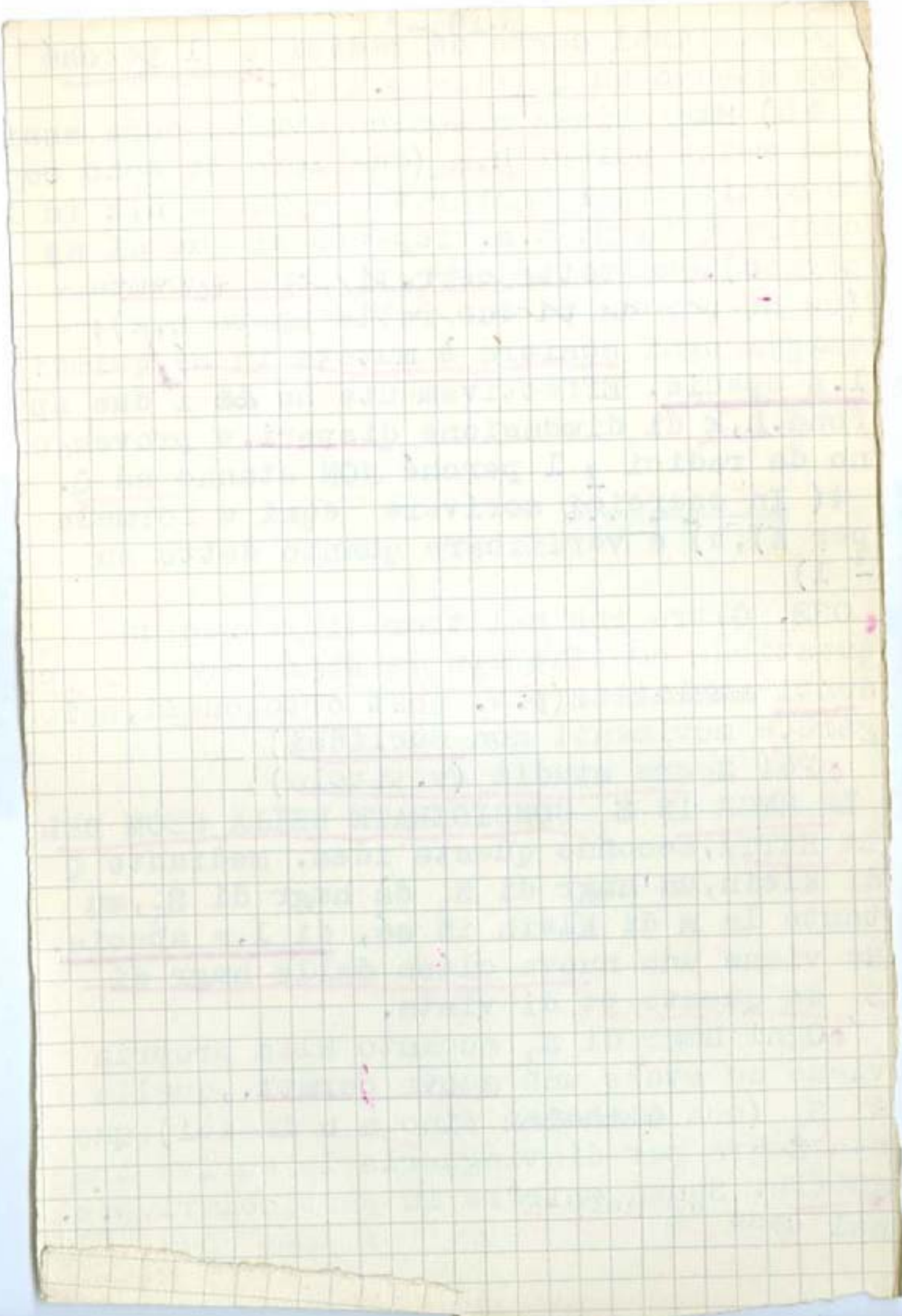
$$\underline{L' \quad L'_1 \quad M' \quad M'_1}$$

stanno sulla F_4

• D'altro lato, al variare del piano λ condotto per PV , in S_4 i punti B, B_1 stanno costantemente sulla v_2 di S_3 data da $v_3 \cap Q$. Perciò, proiettando su Σ_3 , i pt B, B_1 stanno su una quadrica perfettamente determinata H . Troviamo così intanto (in relazione con ogni cono K del fascio Ω) una ben determinata quadrica H tale che la coppia di pt L', L'_1 (p.e.) della F_4 sono allineati sul punto fisso v' e coniugati rispetto alla quadrica fissa H . E' così risultata una quadrica H , tale che l'inversione di centro v' rispetto ad essa muta la F_4 in sé.

• Di tali INVERSIONI FONDAMENTALI nel caso generale ne abbiamo dunque cinque. (E Segre ne assegna anche il n.° in ogni caso particolare).

• Sulle inversioni di cui sopra si può aggiungere: se la F_4 è ciclide, si tratta dell'inversione rispetto a sfera. Per precisare tale punto, devo far vedere che
inv. di λ .



la quadrica Π di cui sopra passa per la conica γ che è doppia per la F_4 .

• Conviene osservare previamente che quando si ottiene la F_4 per proiezione come detto, i pt della conica doppia γ sono tracce su Σ_3 di corde della Φ^3 uscenti da P (come nel caso di fine p. 141 (Oss.)). Anche prescindendo da ragionamento geometrico analogo, si deve analit. te da p. 141, dove la c2 doppia era

$$(1) \quad \sum k_i x_i = 0, \quad \varphi(x_1, \dots, x_4) = 0$$

Infatti in quella trattazione analit. la quadrica per P era

$$x_0 \sum k_i x_i + \varphi(x_1, \dots, x_4) = 0$$

e lo Σ_3 tgte in $P = A_0$ ($\sum k_i x_i = 0$) è segato da detta quadrica in cono quadrico (di eq. ne $\varphi = 0$). Ogni generice di questo cono è segata da un'ulteriore V_3^2 del rascio in coppia di pt, cioè è corda della e le tracce di queste corde su Σ_3 hanno appunto per luogo la conica (1).

• Ciò premesso, se il piano λ di p. 145 passa per corde uscenti da P , due dei 3 pt. $LL, MM,$ sono all'int. n. P : non certo LL_1 all'int. n. V che non sta sul ω , n. $MM,$ non p.c. LM . Allora ω (che contiene P) è copp. di λ n. $PLM, L, M,$ la retta $BD,$ di prime. polari V rispetto a ω passano per il pt. doppio

Già in S_3 sono possibili vari casi, sia per quanto riguarda la config dei pt uniti (omogr assiali, omologie) sia l'e ventualità di pt uniti che sianovenuti a coincidere (così nel caso di un n.º finito, o p.e. omografia assiale dove i due pt uniti residui possono venire a coincidere tra loro, o andare sull'asse, etc; omologia non spec o speciale).
 Si capisce che i casi si moltiplicano in S_r

✓ (spec. / unid.)

λ (enumerando)

e prova con alle cle...

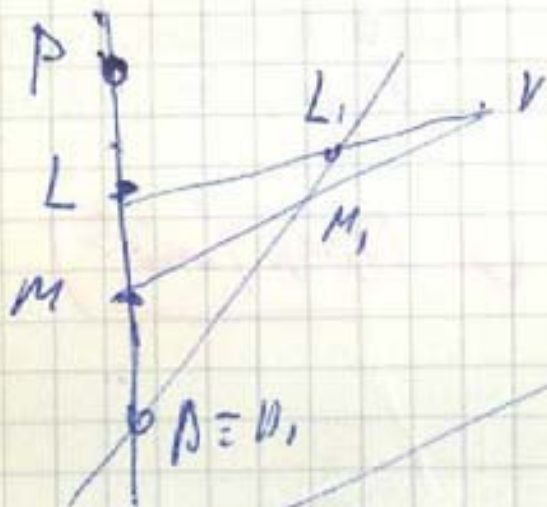
(vanno da h a d, i per Men
 alete) (lasciando due pt uniti
per (xv))

della ω , e nei casi B_1, B_2 . Prima B, B_1, B_2 .

Varia in G , parallela a H_1 e nei casi

$B' = B_1$, il cui centro di curvatura è H_1

in H . Que ~~tra~~ H_1 è doppio in H . (c.d.)

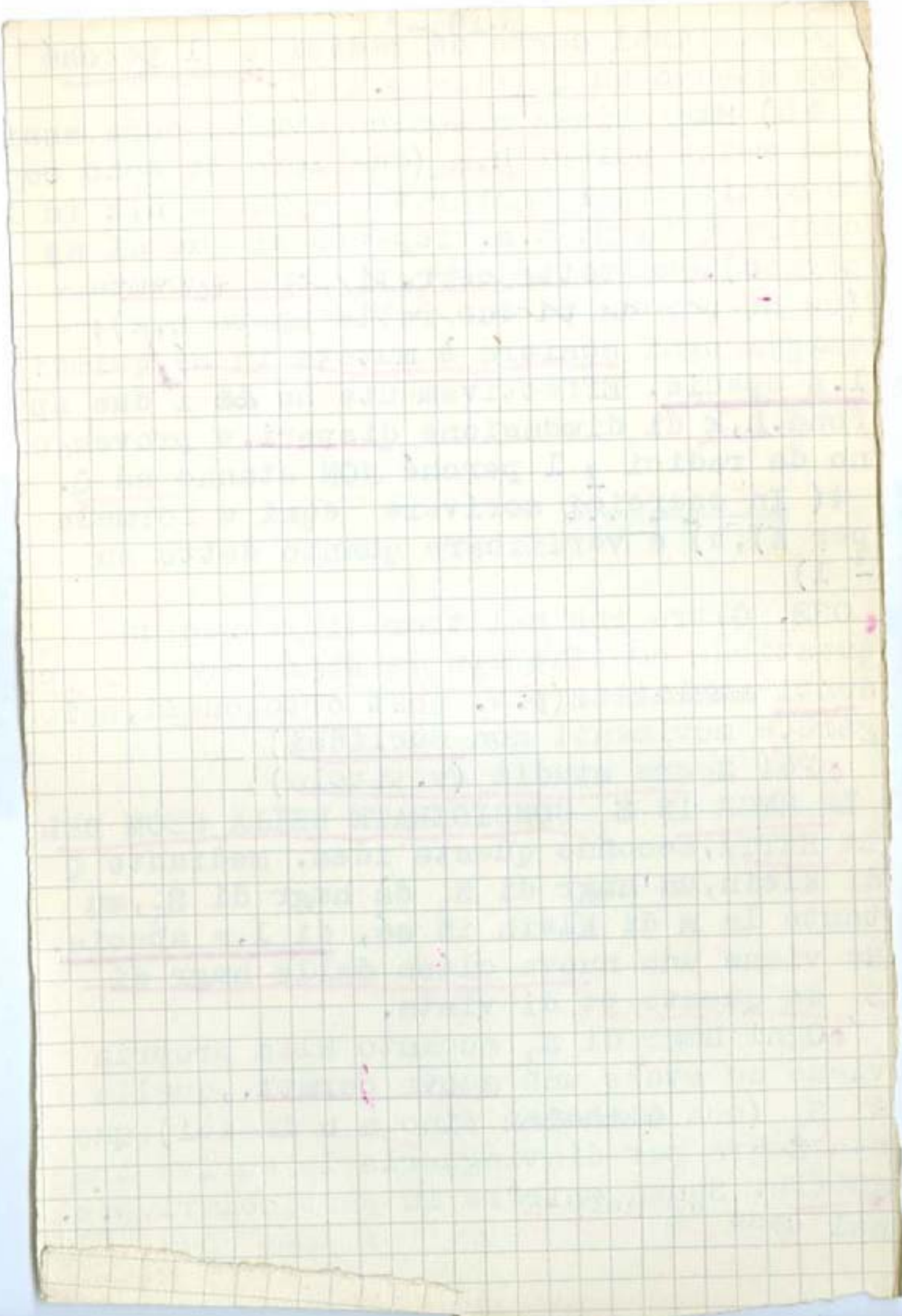


$B' = L' = M'$

~~(L, M, M')~~ sulle C -doppi con H (per B)

OSS. si potrebbe ancora far vedere che il centro d'inversione V' è il polo rispetto ad H del piano della conica doppia (il che dá che per le cicliidi è il centro della sfera d'inversione) ma non mi ci fermo più.

Seguono tre lezioni sulle rigate raz ~~di~~ normali (tenute da Demaria, qua non ~~si~~ annotata).



GENNI SU S. E LE OMOGRAFIE IPERSPAZIALI

• In connessione col lavoro sulle Q è da ricordare "sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un n.º qualsiasi di dimensioni"

• La connessione risulta da ciò. Data ungr tra S_r sovrapposti

(1) $\rho x'_i = a_{i0} x_0 + a_{ir} x_r \quad (i: 0 \dots r)$

la ricerca dei pt uniti dipende notoriamente dall'eq.

(2) $\Delta(\rho) \equiv |g_{ij}| = 0$ $g_{00} = a_{00} - \rho$ $g_{01} = a_{01}$
 $g_{10} = a_{10}$ $g_{11} = a_{11} - \rho \dots$

• Ora il 1º membro non è piú il discr di forma quadratica, bensí di una forma bilineare (variabile in un fascio):

$\sum a_{ij} y_i y_j - \rho \sum g_{ij} y_i y_j$

• Quindi si capisce come la quest. si riconduca ai fasci di forme bilineari. Ora il teor di Weierstrass vale non solo per fasci di forme quadratiche ma anche bilineari. Quindi Segre puó mettersi nello stesso ordine di idee lá adottato, definire la caratteristica di un'omografia, etc

(In eszi calcolare p.e. la caratt per omografia ~~non speciale o speciale~~)

• Senza entrare in particolari osservo:

• 1) come è noto in S_2, S_3 e si vede subito in S_r , la ricerca degli iperpiani uniti conduce alla stessa (2). Quindi, presa una radice di essa, essa dá luogo a un pt

♪ "Indanțele"

♪ (face ca 4^{ta} pe pt e 5^{ta} anoul

un epurant A₀ 200 20 etc)

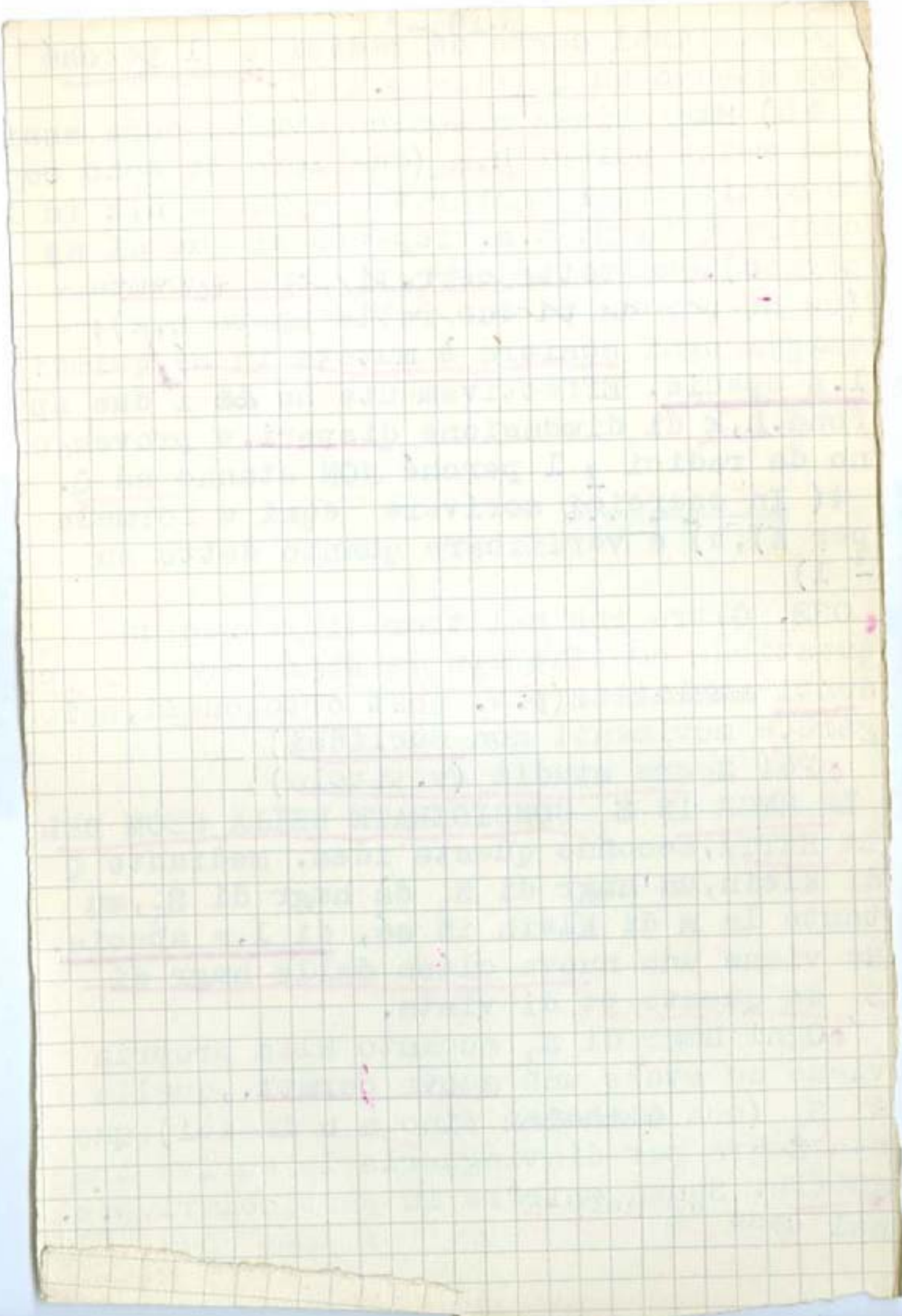
(antibiotice ^{substanțe} pentru V. n. S. U

cu anoul sub Engel p 115

116)

unite, e anche a un ⁻¹⁰⁵⁻ ~~pieno~~ ^{iper} unite, o dicia
 mo pensando al caso in cui si abbassi
 ulteriormente la caratt della matrice
 a 1° membro, a uno S_k di pt uniti, e a
 uno S_{r-1-k} di ~~perpiani~~ ^{iper} perpiani uniti. Que
 sti si possono chiamare associati. Ora
 si tratta di chiarire il significato
geomco di questa associazione, generaliz
 zando quanto noto p.e. in S_2 qua in ge
 om proi si trova che, stando al caso
 piú elementare di \bar{U} e retta u associa
 ti, l'associazione consiste in questo,
 che due ptggiate r, r' corrti e di
 stinti per \bar{U} sono prosp. al loro varia
 re il centro di prosp^ta describe pre
 cisamente la retta unita associata u
 (e dualmente). In breve nota successiva
sugli spazi roni di un'omografia Lin-
cei rend 1800 Segre ha generalizzato
 questo signto geom dell'associazione
 agli S_r , facendo vedere che per S_k e
 S_{r-1-k} associati avviene questo: due
 S_{k+1} corrti distinti per lo $\&$ S_k sono
prospettivi e al loro variare il centro
di prosp^ta describe le S_{r-1-k} associa
 te.

2) La quest. della class proi delle
nmgr di S_r in sé, oppure dei rasci di
quadrate non solo si ricondono a



queste analit. analoghe; ma la teoria dei fasci di quadriche si riconduce alla class delle hmgr, in quanto si prova: cd nec e suffi perché la coppia di quadriche AD sia hmgr alla $A'D'$ è che siano proiettive eqvti le due omografie prodotti risp. delle polarità A, D e delle A', D' .

Altra Mem (Torino Mem 1885) sulle omografie è "Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario considerate nella geom della retta" dove anzitutto Segre studia:

I) omografie di S_n che mutano una quadrica in sé. P.e. nel piano un computo di par potrebbe far ritenere che ogni hmgr muti qualche ~~quadrica~~ conica in sé (inf./5 coniche, ognuna ha inf./3 hmgr.)
 Ma non è così: p.e. l'hmgr con 3 pt uniti

$$(x_i = k_i x'_i) \quad (i=1, 2, 3)$$

! (vind.)

muta in sé e la

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots = 0$$

(se tutti i termini sono presenti) se

$$k_1^2 = k_2^2 = k_3^2 = k_1k_2 = k_1k_3 = k_2k_3$$

da cui seguirebbe

$$k_1 = k_2 = k_3 \quad \text{cioè identità.}$$

vuol dire che se non è identità non tutti i termini saranno presenti. Comunque almeno due ve ne sono, cioè ho almeno UNA relazione tra le k cioè l'OMOGRAFIA NON È ARBITRARIA

che suppone non spechjet
(disi^{ti} + o) [crai pua d^o m. o]

Questo fa già capire che affinché un'hmgr sia suscettibile di mutare qualche Q in sé, deve soddisfare a qualche condizione.

• (OSS. La contraddizione con la previsione iniziale si risolve così, che se un'hm muta una conica in sé, ne muterà infinite. Effettivamente, se p.e. la c^2 era

(1) $a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$
(cosicché $k_1^2 = k_2k_3$)

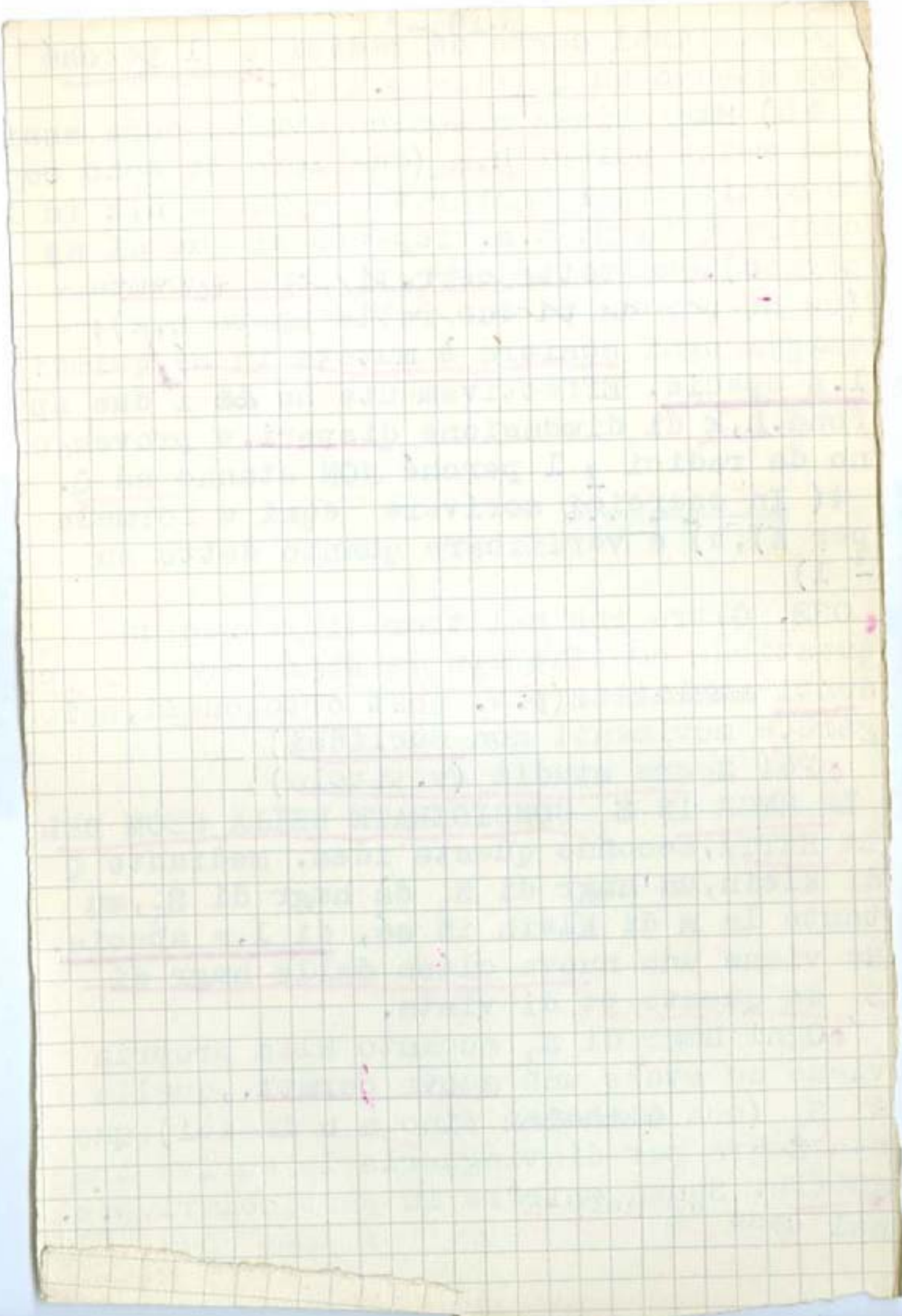
tutto il fascio schiera.... è mutato in ~~spasésé~~ sé.)

• Tali cond. sono precisate in un teorema di Frobenius, che Segre ha ripetutamente applicato. Cond nec e suff affinché un'hmgr muti in sé una Q è che le radici dell'eq. (2) p. 183 abbia radici a due a due reciproche (oltre ad eventuali radici ± 1); e che inoltre

- a) le prime conducano a divisori elementi di egual grado;
- b) le seconde a div el di grado dispari.

• OSS NI. 1) In realtà il teor di Frobenius parla di forme quadr; ma se un'hmgr trasforma in sé la quadr. si possono alterare per un fattore i coeff delle eq ni dell'hmgr in modo che trasformi in sé la forma a primo membro. Quindi il teor si può enunciare per le Q .

• 2) Come esempio di controllo, per la (1) considerata ho $x_i = \frac{1}{k_i} x_i : y_i$



$$\begin{vmatrix} \frac{1}{k_1} - p & & \\ & \frac{1}{k_2} - p & \\ & & \frac{1}{k_3} - p \end{vmatrix} = 0 \quad \text{radici: } \frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_3}$$

Abbildung (cfr. ns. 1) $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 1$ che
 non è risposta $+1$, k_1, k_2, k_3 e alla due risposte
 Ho tre risposte distinte; di cui 3 di classe tutte
lineari. Ve ha il lett.

• 3) Traslazione $x' = x + a, y' = y$ non risposta
una risposta c' ind. tutte le

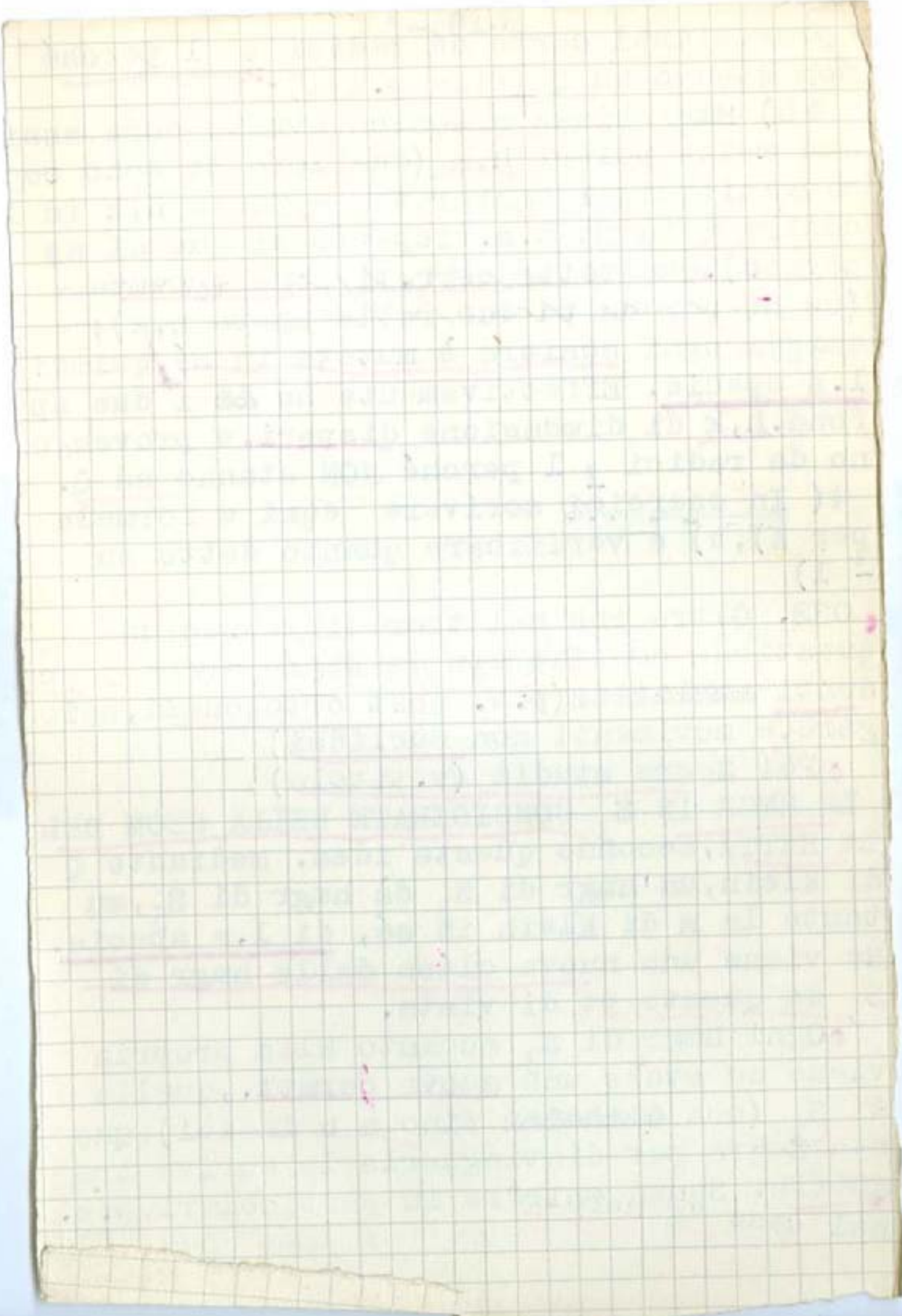
$$\begin{matrix} x'_1 = x_1 + a & | & 1-p & & a \\ x'_2 = x_2 & | & & -1-p & \\ x'_3 = x_3 & | & & & 1-p \end{matrix}$$

$$(p-1)^3; \text{ id } | \text{ id } | 1-p; \text{ id } | \text{ id } | (1-p)^3$$

$$\text{due id } (p-1)^2, p-1$$

Ne ho una risposta pari. Ve ha

• Questa 1.a parte della Mem di Segre
 contiene varie appl geom del teor di Fro
benius: p. e. ogni spazio fond di un'hmgr
trafite una Q in sé, proveniente da una ra
dice diversa da ± 1 sta sulla Q invarian
te, e lo spazio di ip di unita proveniente

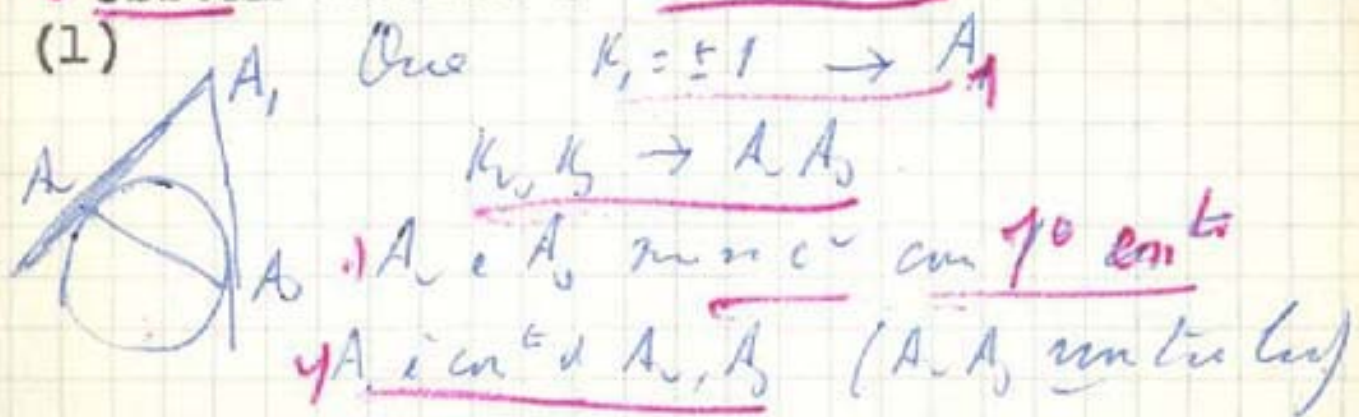


~~.....~~

Inoltre ogni spazio fond di pt uniti è coniugato a ogni altro, purché non proveniente da rad. reciproca.

• Oss. Mi limito a illustrarlo sull'esempio

(1)



• Ancora, nella 1.a parte Segre osserva quanto segue. Se Q è mutata in sé da hmgr gli spazi max sono mutati in id.

• Se r è pari, si ha UN sist di sp max, dunque mutato in sé.

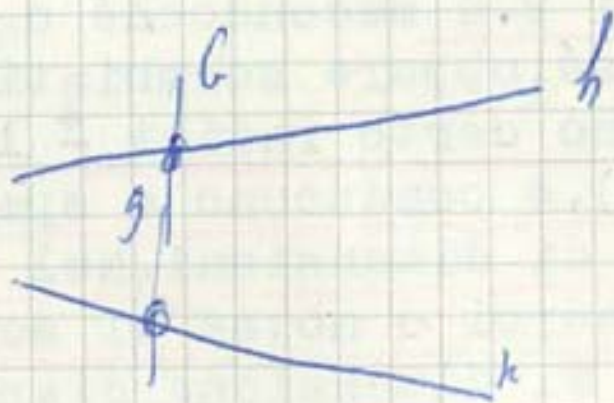
• Se r è disp. DUE, e l'HMGR è di 1.a specie, o di 2.a secondo che ognuno è mutato in sé, oppure scambiati. Nel 2° caso vi sono certo radici ± 1 (con molt. tá dispari), e conducono a spazi fond. di un n° pari di dimensioni. Nel 1° caso possono esserci o no; se vi sono danno spazi fond di dimensione dispari.

• Illustro su ESEMPI per r=3.

a) L'omologia armonica mutante Q in sé con centro in P e piano il piano polare π è di 2.a specie (perché ogni genere incontra la corrte). I suoi spazi fond sono P e π , di dimensioni pari (0 e 2)

194

Inizia su G è un'eq. di h con Q , e g
 una gen. per G , il pt $G \equiv g \cdot h$ ha il
 pt per g, k cioè g inverte k . Qui
 g è unita all'origine. Le due curve
 si incontrano in g .



provenienti certo ⁻¹⁹⁵⁻ da radici $+ 1$ perché non stanno su Q (fine p.191)

b) Hmgr biass armonica avente come assi due rette polari h, k (due loro pt sono coniugati; quindi ogni retta appta a h, k in contra Q in pt c.a. rispetto ai due di appoggio). Qua rette corr. ti sono schiere (se no per un pt due rette appte h, k); quindi ogni schiera è mutata in sé, quindi l.a specie. Effettivamente ho ~~due~~ i due sp fond. h, k di dimensione dispari, e provengo da radici $+ 1$ perché NON stanno su Q .

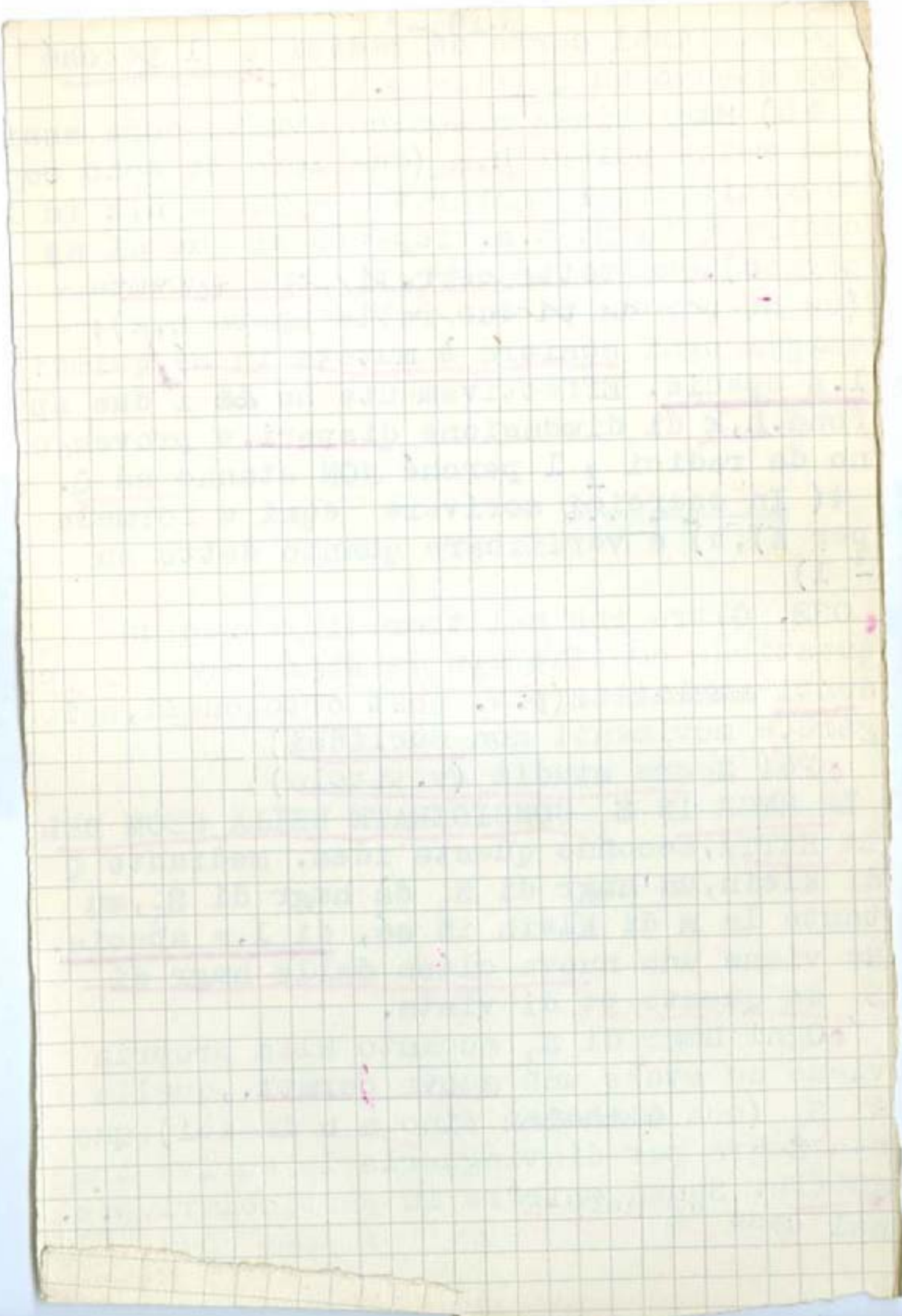
(In esercizi scrivere eqni e formole per a), b) e verificare quanto detto su $+ 1$)

OSS. Oltre che nel teor di Frobenius la questione considerata da Segre aveva precedenti ~~esistenti~~ (p.e. sost ortogonali, spiegare, e movimenti non euclidei)

Poi Segre studia (v. titolo)

LE HMGR IN S_3 CONSIDERATE NELLA GEOM DEL LA RETTA, secondo questa idea. Mediante Q di Klein, un'hmgr di S_3 dà hmgr di S_5 , mutante la M di Klein in sé, di l.a specie. Ne viene una nuova class delle hmgr di S_3 da questo pt di vista.

Ogni hmgr di S_3 accanto alla propria viene ad avere una nuova caratt., quella di S_5 (con ~~esistenti~~ fino a 6 indici). Questa Segre per distinguerla la scrive tra graffe. Senza esistere in particolari, p.e. nel caso "generale" di 4 pt unit $[1111]$, h



197

6 rette unit (spyr tetraedro) {111111} di
S₃ non {11 11 11} avvenendo ~~quelli~~
~~proveniente da radici rcpr (e sopraelevando quelli~~

gli sp fond provenienti da radici rcpr
(e sopralineando i provti da ± 1).

Segre studia poi anche le correlazioni:
le lascio da parte.

• A UNA QUESTIONE MOLTO PARTICOLARE è fat
to unrichiamo alla rine di questa Nota, e
se ne tratta in Sur les invariants simul
tanés de 2 formes quadratiques, Lettre à
M. Rosanes, M A XXIV, 1884, che però si lega
con altre questioni, e perciò ne accenno.

• La questione è questa, che formulo in
S₃: data hmgrfia tra S₃ sovrapposti si cer
ca un tetraedro T che col suo corrisponde
te dia luogo a incidenza di coppie di spi
goli opposti. Un computo di parametri indu
ce a dire che ci sono soluzioni (T dipen
de da 12 incognite non omogenee, e vi è
da soddisfare solo a sei condizioni "sempli
ci", incidenza di ogni spigolo di T con
l'opposto dell'omologo). Ragionando su inc
te non omogenee, si sa che non basta che
le incognite siano meno del n° eq. Allora
si potrebbe pensare a prendere incite omo
genee (p.e. diciamo le 16=4.4...), ma allora
abbiamo ancora il pericolo che, pur esistendo
certo ora le soluzioni, non diano soluzi
zione accettabile (i 4 vertici di T devono
essere non complanari)

198

du type per hyp. genet for

Ved. le recenti di $\bar{J}_1 = 0$

 $k_1 a_1, k_2 a_2, k_3 a_3, k_4 a_4$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = ? \quad \text{e anf. l} \rightarrow$$

 (k_1, k_2, k_3, k_4)

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = ?$$

Il fatto è che non ci si deve fidare dei computi di parametri (o costanti), e questo ne è un nuovo es. (cfr. eq can cpl quadr, Battaglioni) Qua la risposta corretta trovata da Segre è ((Enc 841).

Anzitutto, in S_r sviluppo l'eq. $\Delta(p) = 0$ in

$$A + J_k p + J_{k-1} p^2 + \dots + J_1 p^{r-1} + (-1)^{r-k} p^r$$

Allora, condizione SUFFICIENTE affinché sia

$$J_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, r)$$

è che esista un simpleso T tale che ogni sua faccia S_{k-1} risulti incidente alla faccia S_{r-k} opposta all'omologa di T' . E per $k=1, 2, r-1, r$ la cd è nec e suffite.

Ora per $r=3$, si hanno solo i valori $k=2, k=1, k=3$ che rientrano tutti nell'ultima cosa detta.

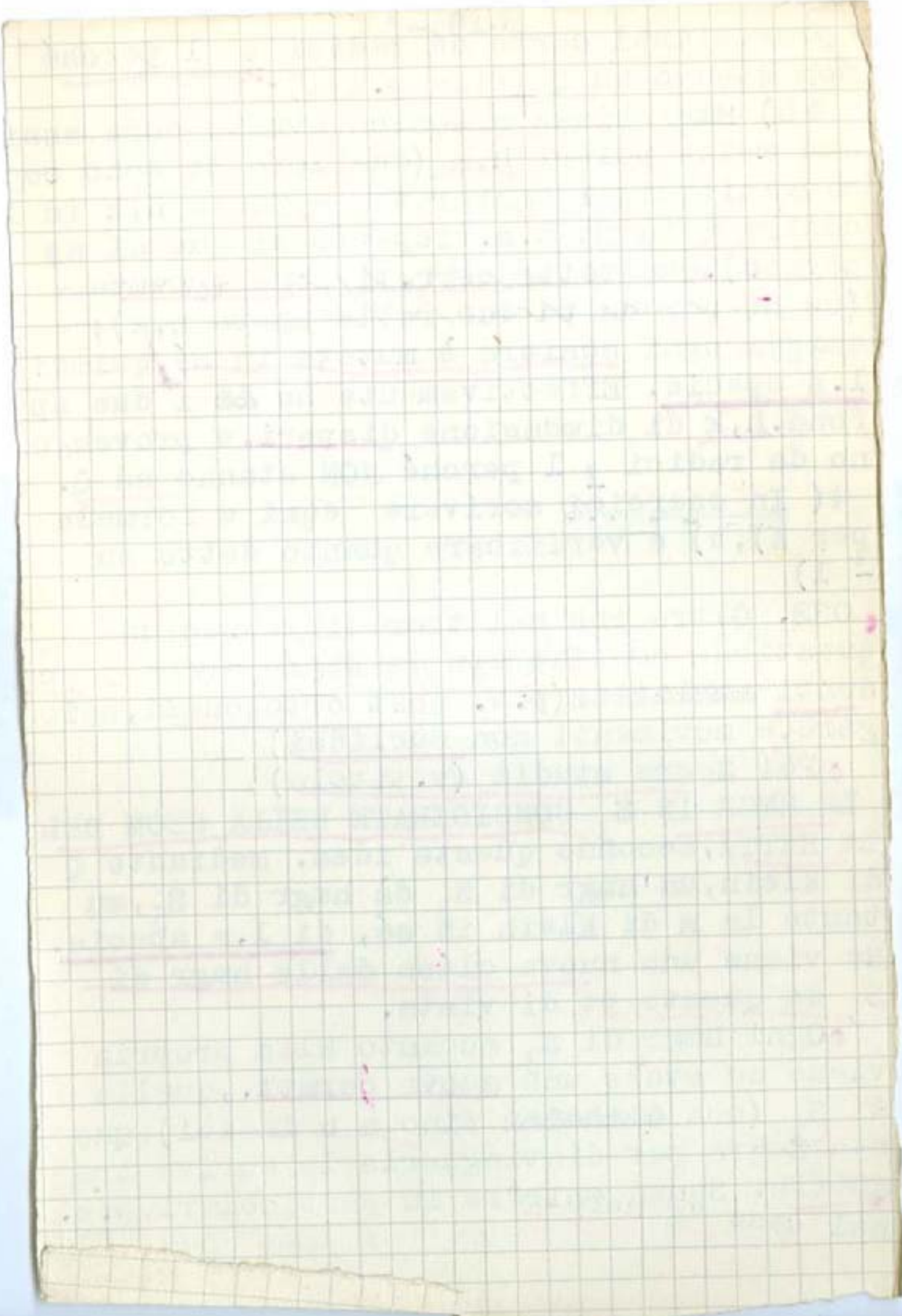
Quindi per l'esistenza del tetraedro T di p. 197 risulta la cd NEC E SUFF

Invece ~~è~~ $J_2 = 0$

$$J_1 = 0$$

equivale all'esistenza di T tale che ogni suo vertice sta nella faccia opposta di T' . Per $J_3 = 0$, situazione analoga ~~è~~ scambiando i due spazi sovrapposti:





OSSERVAZIONE SUL COMPUTO DI COSTANTI. Criterio di PLÜCKER-CLEBSCH. Spesso è utile per giudicare se il cputo costanti è attendibile o no. Per semplicità lo considero solo senza tener conto della eventuale necessità di scartare soluzioni da riguardarsi come "degeneri"-cfr fine p.197, ma si potrebbe estendere anche a tale caso. (1)

Per spiegarlo mi riferisco ~~ad esempio~~ anzitutto a esempio. Supponiamo ~~si~~ voler studiare la possibilità di ridurre l'eq di una conica, in generale, alla forma

$$(1) \quad L^2 + kM^2 = 0$$

cioè

$$(ax+by+1)^2 + k(cx+dy+1)^2 = 0$$

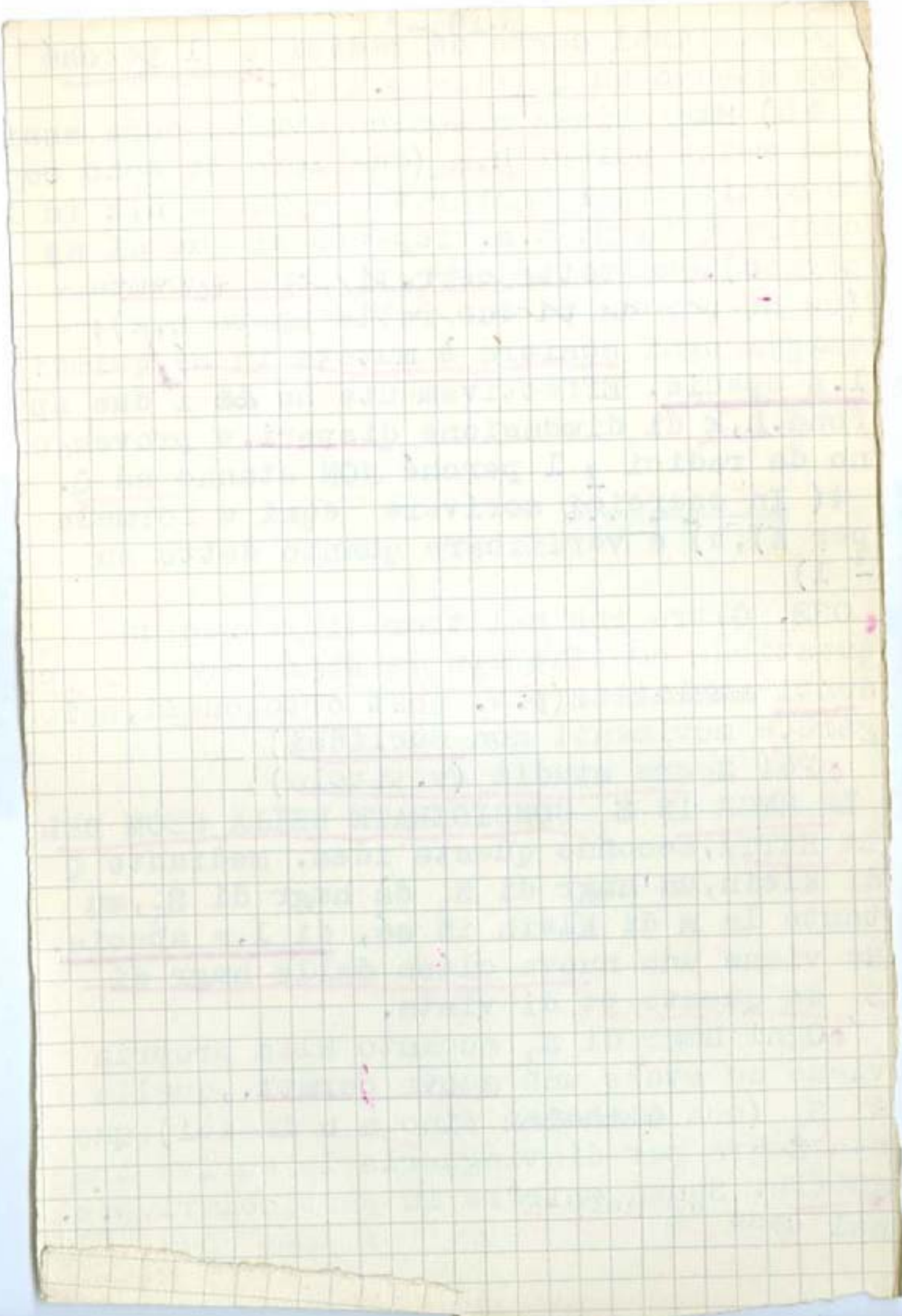
Per le inf./ 5 coniche ho le 5 incognite a, b, c, d, k. Quindi il computo costanti direbbe di sí. Il risultato è certo errato (c² spezzata). D'altro lato osservo che se l'eq di c² è riducibile alla forma (1), lo è in infiniti modi (basta prendere per L=0, M=0 due rette per il pt doppio, c.a. rispetto alle due componenti). Quindi in questo caso avviene che

~~ad esempio la forma canonica~~

(2) E mi limito al caso in cui una presunta forma canonica contiene tante co-

stituenti l'eq. data; ma si riduce al caso in cui ne

(1) per ridurre a forma canonica (con i punti



a) la presunta forma canonica contiene tanti parametri come l'eq. data

b) se un'eq è riducibile a quella presunta forma canonica lo è in infiniti modi.

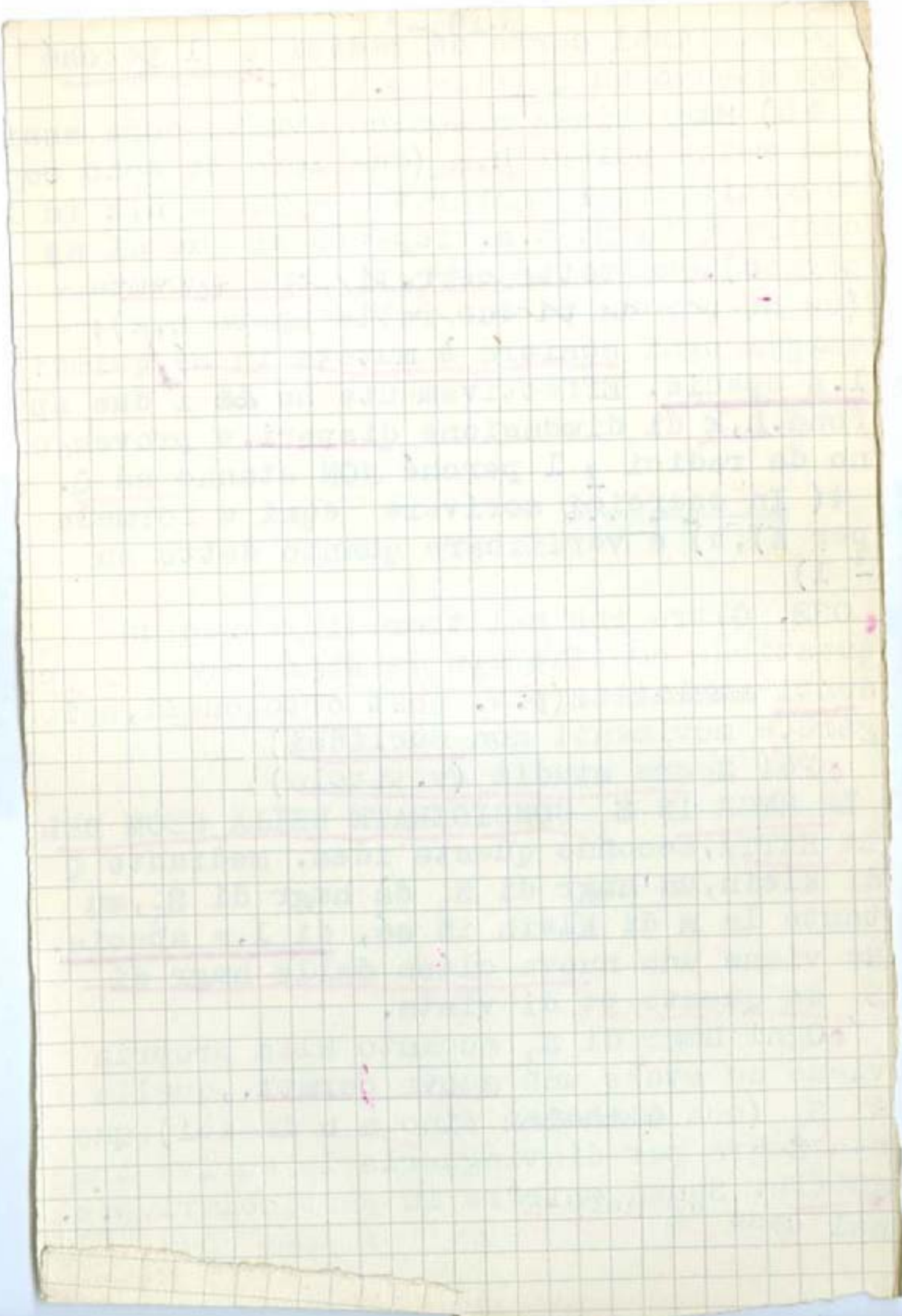
* Ora il criterio di Plücker - Clebsch dà validità generale a quanto ora osservato. E dice così: se prendo una classe C di enti E , e trovo una presunta forma canonica che contenga tanti parametri quanti E nella classe C , ~~quella presunta forma canonica~~, se il computo costanti non è attendibile, necessariamente avviene che quei particolari enti E che ammettono la presunta forma canonica la ammettono in infiniti modi.

* Quindi ogniqualvolta si trovi che un ~~particolare~~ ente E ammette la forma canonica in un n.° finito di modi, il computo costanti è attendibile.

* Per indicare esempio positivo di applicazione, considero p.e. per le F^3 (19 parametri) la (presunta) forma canonica

(L) $\pi_1^2 + \dots + \pi_9^2 = 0$
che contiene 19 costanti. Ora si dimostra:

a) che ogni vertice del "pentaedro di Sylvester..." ha per quadrica polare una coppia di piani (per lo spigolo opposto)



b) che per F^3 (generale) i pt con quadrica ~~spazzata~~ polare spezzata in due piani sono in n.° finito.

E allora vuol dire che la (2) è effettivamente forma canonica.

Le V_3^3 di S_4 . Dopo avere approfondito

lo studio delle quadriche, era naturale che S. Passasse alle ipersup cubiche. Su

A esse "Sulle varietà cubiche dello spazio a 4 dim e su certi sistemi di rette e ~~certe~~ certe sup. dello spazio ordinario" Torino

B Mem 1887, "Sulle varietà cubica con 10 pt doppi dello spazio a 4 dim", Torino

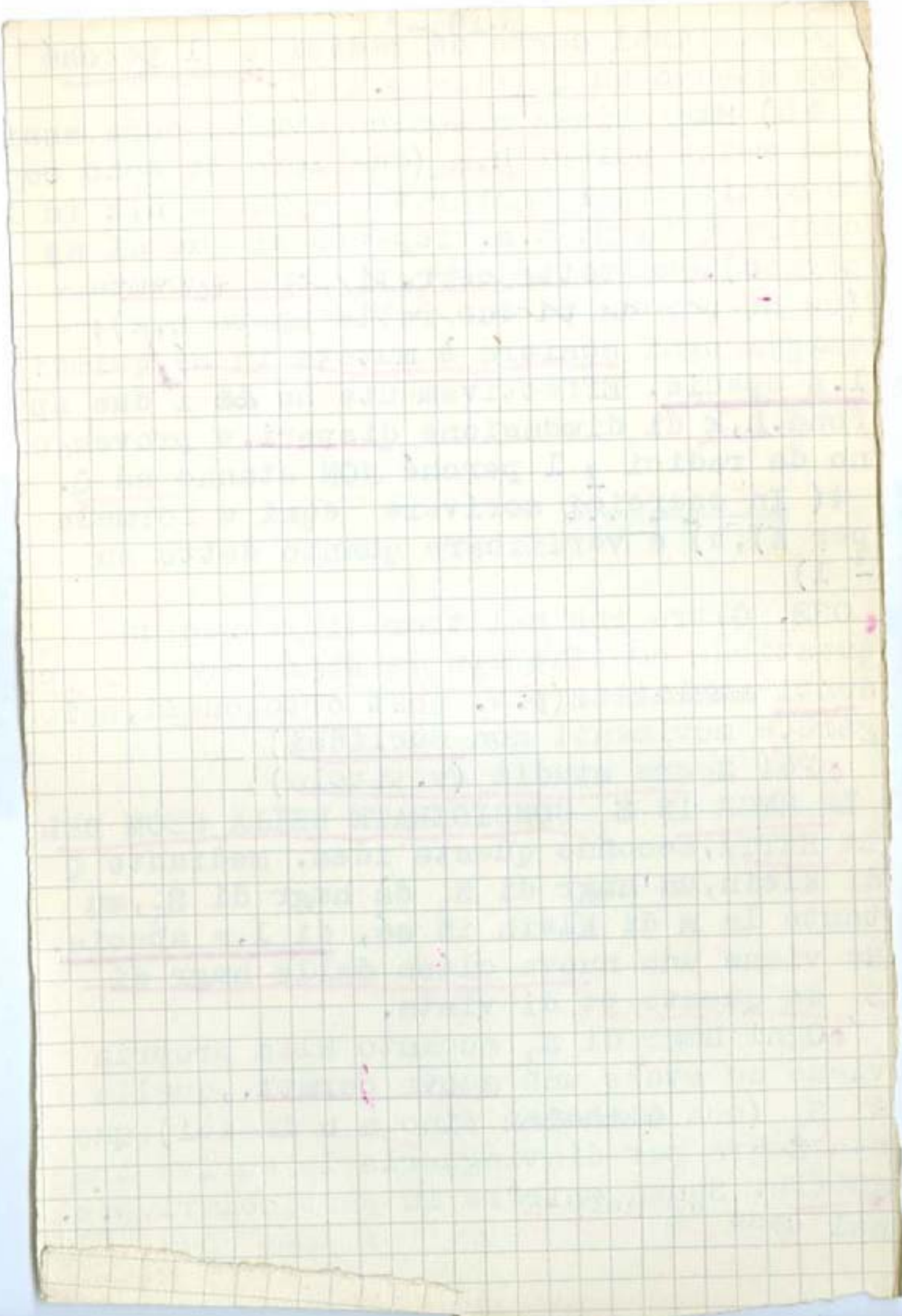
C Atti 1887, e collegata "Alcune considerazioni element. sull'incidenza di rette e piani nello spazio a 4 dim" Rend Palermo II 1888.

• Accenno anzitutto ad A. • Scopo diciamo propagandistico delle prime ricerche di geom ipersp proi era dedurne risultati per S_3 . Ciò co, e dice il titolo avviene in due modi:

1) Le V_3^3 di S_4 sono rigate, per ogni pt passano rette (per P, perché lo S_3 tgte in P sega F^3 con P doppio, e su questa esistono alcune, gente 6, rette per P; $x_0 f_2(x_1 x_2 x_3) + f_3(x_1 x_2 x_3) = 0$ & i con ni $f_2 = 0, f_3 = 0$ " rigate in rette per P). ~~Qu~~

V_3^3 ha ∞ rette. Proiettando su S_3 nascono congruenze.

" di congruenze



2) Altra applicaz a S_3 prendendo di quelle V_3^3 il contorno appte su S_3 da un pt D . Da questo pt di vista il lavoro si pu ~~o~~ considerare come la cont.ne del cosiddetto metodo di Geiser per lo studio delle c^4 piane come ctorni appti delle F^3 (da pt D della sup.) Le cose stanno così, in S_r . Prendo $A_0=0$, da esso circoscrivo il cono alla V_{r-1}^3 e sego con $x_0=0$. Nasce così in S_{r-1} una V_{r-2}^n dove n dipende dall'essere 0 meno 0 sull'ipersup cubica. Se è fuori, sia la V_{r-1}^3

$$(1) \quad x_0^3 + \varphi_1(x_1, \dots, x_{r-1})x_0 + \varphi_2 x_0 + \varphi_3 = 0$$

(dove posso supporre $\varphi_1 \neq 0$ assumendo $x_0=0$ nell'iperpiano polare di 0 ; invero esso è $3x_0 + \varphi_1 = 0$ & . Allora \) Affinché il pt Q di $x_0=0$ sia congiunto ad 0 da tgte, bisogna prendere le sue coordte in modo che sia nullo il discr della (1) come eq in x_0 . Perciò

$$27 \varphi_3^2 - 4 \varphi_1 \varphi_2^3 = 0$$

è l'eq del contorno appte. Quindi attualmente $n=6$

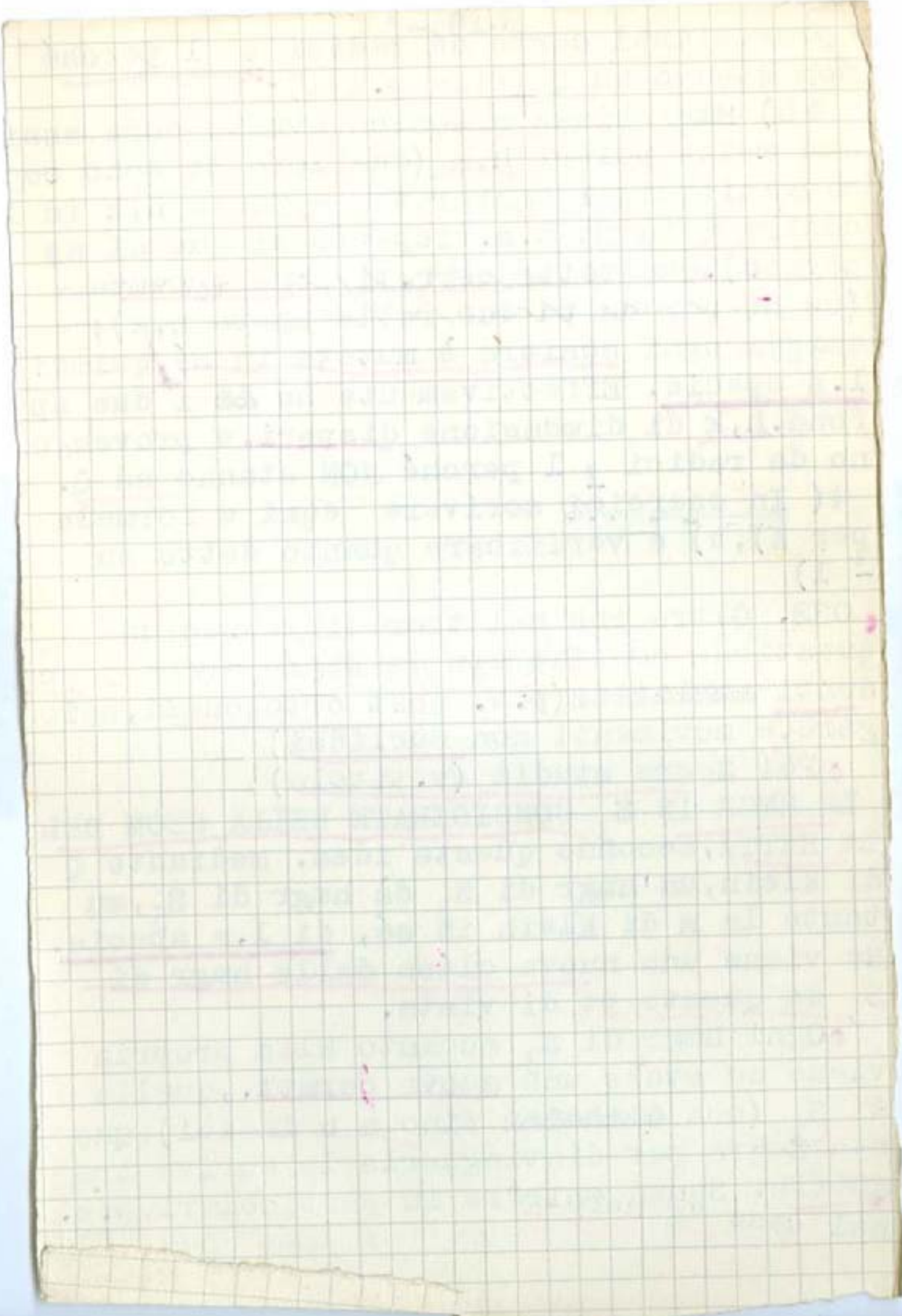
Se invece 0 è sull'ipersup. cubica, sia

$$\varphi_1 x_0^3 + \varphi_2 x_0 + \varphi_3 = 0$$

la sua eq. Lo stesso ragto dá per il contorno appte l'eq.ne

(2)

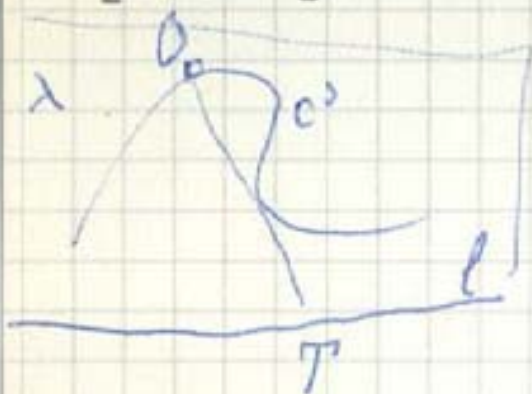
$$\varphi_2^3 - 4 \varphi_1 \varphi_3 = 0$$



Quindi ora $n=4$. P.e. per $r=3$ si collegano le F^3 con le quartiche piane (met di Geiser, importante perché le c^4 piane ^{piu} generali gono tutte con questo procedto; basta prova che la sua eq si può mettere nella forma (2). Ora in (2) $\varphi_1=0$ è bitgte; e allora, prendendo nel piano $x_1=0$ in bitgte e raccogliendolo a fattor comune, la c^4 è

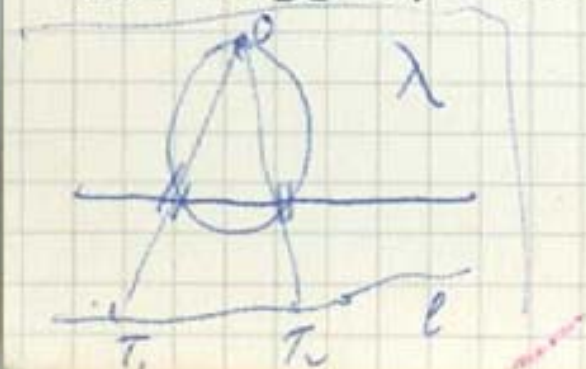
dove ω è quadr perfetto, e siamo in (2)) (1)

(1) In questo metodo le altre 27 (spiegare) bitgti vengono dalle rette della F^3 . Quando proietto da O, sia λ un piano proite per ora generico; esso se



ga F^3 in c^3 a cui per O posso condurre 4 tgti. Le loro traccie T danno 4 pt allineati di c^4 sulla retta l traccia di λ . Quando scelgo λ nel piaao

proiettante una retta r di F^3 , la c^3 si spezza, le 4 "tgti" per O ci riuniscono in due coppie, e la l diventa bitangente.



→ Op (0) Anche giunto la conica con i

doppie, si hanno no anc 3 pt

d.p.m Sono i pt. (chr. te (1) p. 2071

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0$$

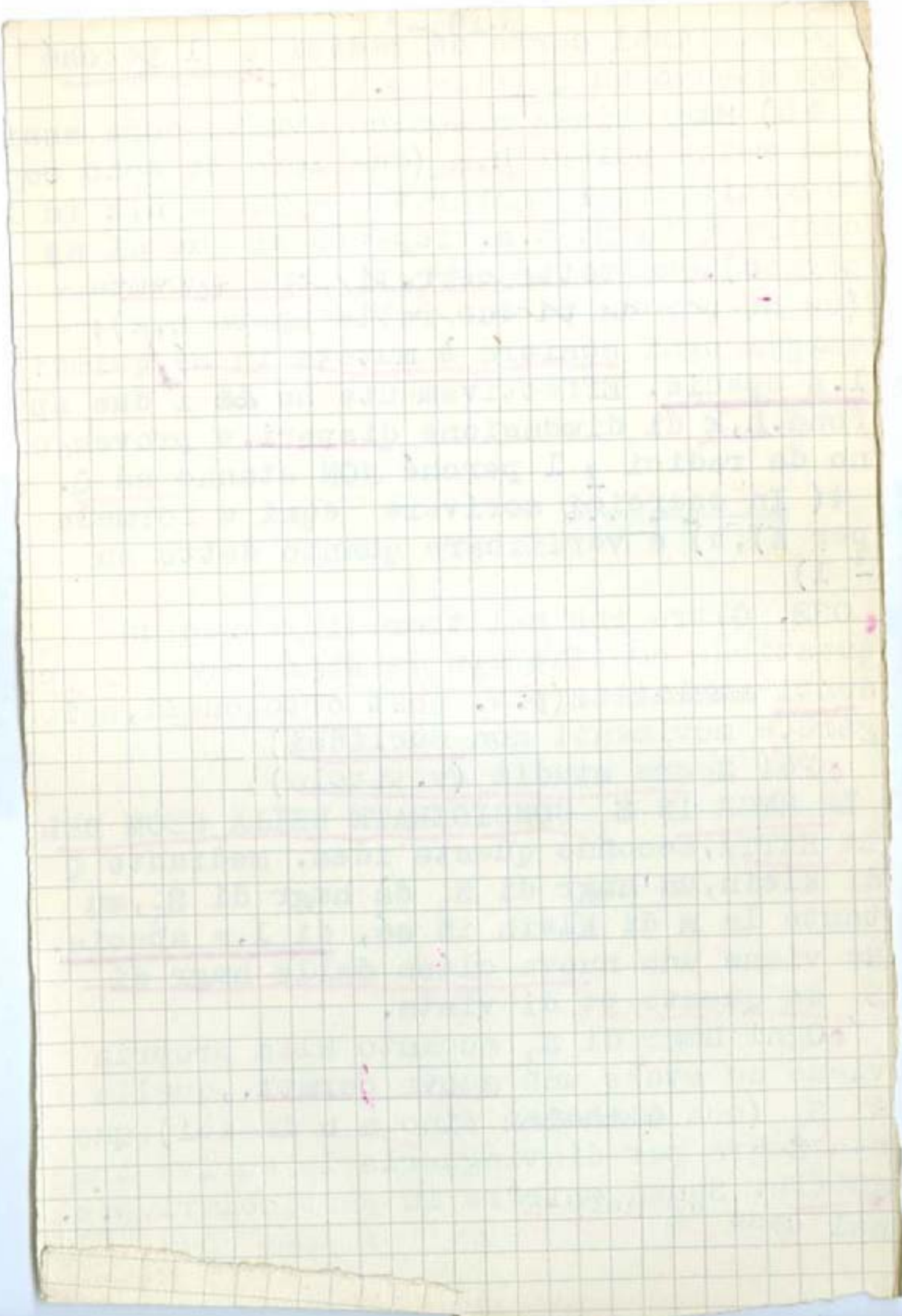
(le c' ~~sono~~ del p' $y_1 = 0$ e $y_2 = 0$)

Q Invece nel caso successivo $r=4$, la F^4 contorno apparte non è la piú generake F^4 , perché come mostra (2) c'è un piano "tgte lungo c^2 " (come caso particolare potrebbe essere F^4 con conica doppia). Vi ceversa, come prova il ragto fatto a p. precte, ogni F^4 con piano tgte lungo c^2 puó ottenersi cosí. Quindi il metodo di S dá le F^4 con pl tgte lungo c^2 (e in parti colare, di nuovo, con altro metodo, le F^4 a c^2 doppia)

♡ OSS. (1) Se O non sta sull'ipersup. si ha il contorno (1). Nel piano è sestica con 6 pt doppi, siti su conica ($\varphi_2 = 0$), e anzi cuspidi (coppie tgte come la $\varphi_3 = 0$). Co si in S_3 viene F^6 con sestica doppia cuspidale (luogo di pt uniplanari), e Segre verifica che ogni tale F^6 si ottiene cosí.

♡ Altra OSS. (4) Ho accennato alle appl 1) (p. 205), 2) (p. 207) allo spazio ordinario. Ma si collegano. Infatti analogte a nota p. 209, una retta di V_3 proiettando da O dell'ipersup. dá una bitangente delle F^4 contorno appte. Quindi la congruenza di rette ottenuta secondo 1) ha le due falde focali nella F^4 . Vengono cosí in S_3 pro prietá della cgrza delle bitgte di F^4 del tipo considerato: per F^4 con pl tgte lungo c^2 , la congruenza delle bitgte ha ordine 12 e classe 27 (in generale).

Se M^1 si ripartisce in due sottop. app. e con



213

quadrici (in S_5 prop. analoghe con F^6 con C^6 cuspidale).

d'ordine 2 per M' di S_5 i proi di M' , M' per ciascuna delle 6 rette; per π' di S_5 i linei dell' S_5 $O\pi'$ a cui ho 27 rette, etc.)

* Tornando alla V_3 oggettiva, Segre si è fermato spec. te sui casi part. legati all'esistenza di pt doppi. Tra questi rientra anche il 1° caso part studiato da Segre, in cui l'ipsupcie contiene un piano, in quanto la sua esistenza implica quella di pt doppi (se invero è il piano $x_0 = x_1 = 0$, l'ipcie è

$(3) \quad x_0 \varphi_0(x_0, \dots, x_5) + x_1 \varphi_1(x_0, \dots, x_5) = 0$

cosicch'è i pt, gente 4, dove $x_0 = x_1 = \varphi_0 = \varphi_1 = 0$ sono doppi)

V_3 contenente un piano. Anzitutto, questo caso particolare doveva richiamar l'attenzione di Segre in quanto essa è la proi della φ_3^1 base di un fascio di Q in S_5 (fatto da un pt della φ). Infatti prendo in S_5 due Q per A_5 , eq. ni

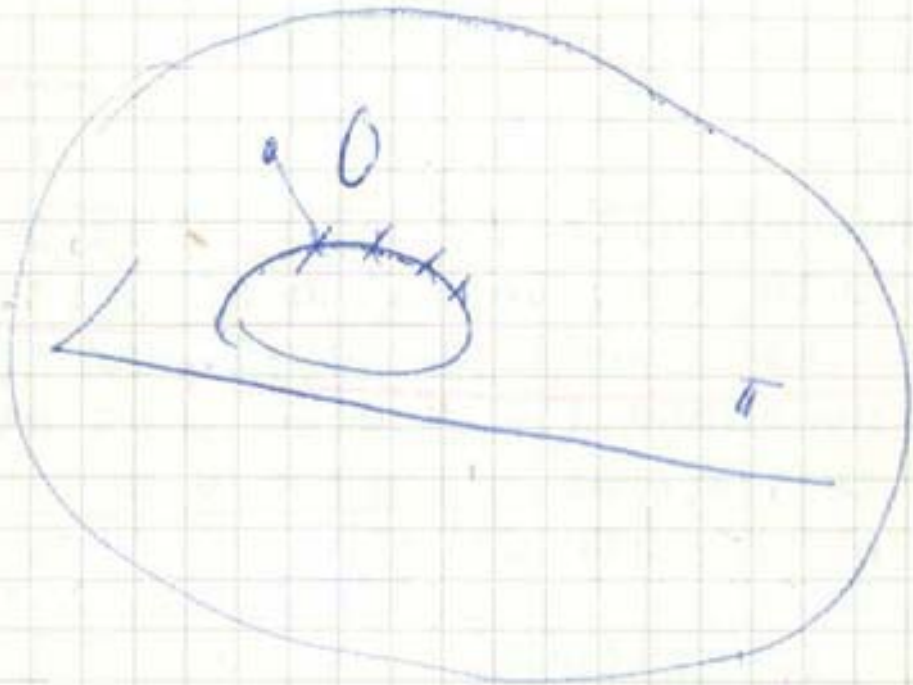
$x_2 f(x_0, \dots, x_5) + g(x_0, \dots, x_5) = 0$
 $x_3 m(x_0, \dots, x_5) + g'(x_0, \dots, x_5) = 0$

caso part. di (1)

Lo proi. in $x_5 = 0$ delle φ_3^1

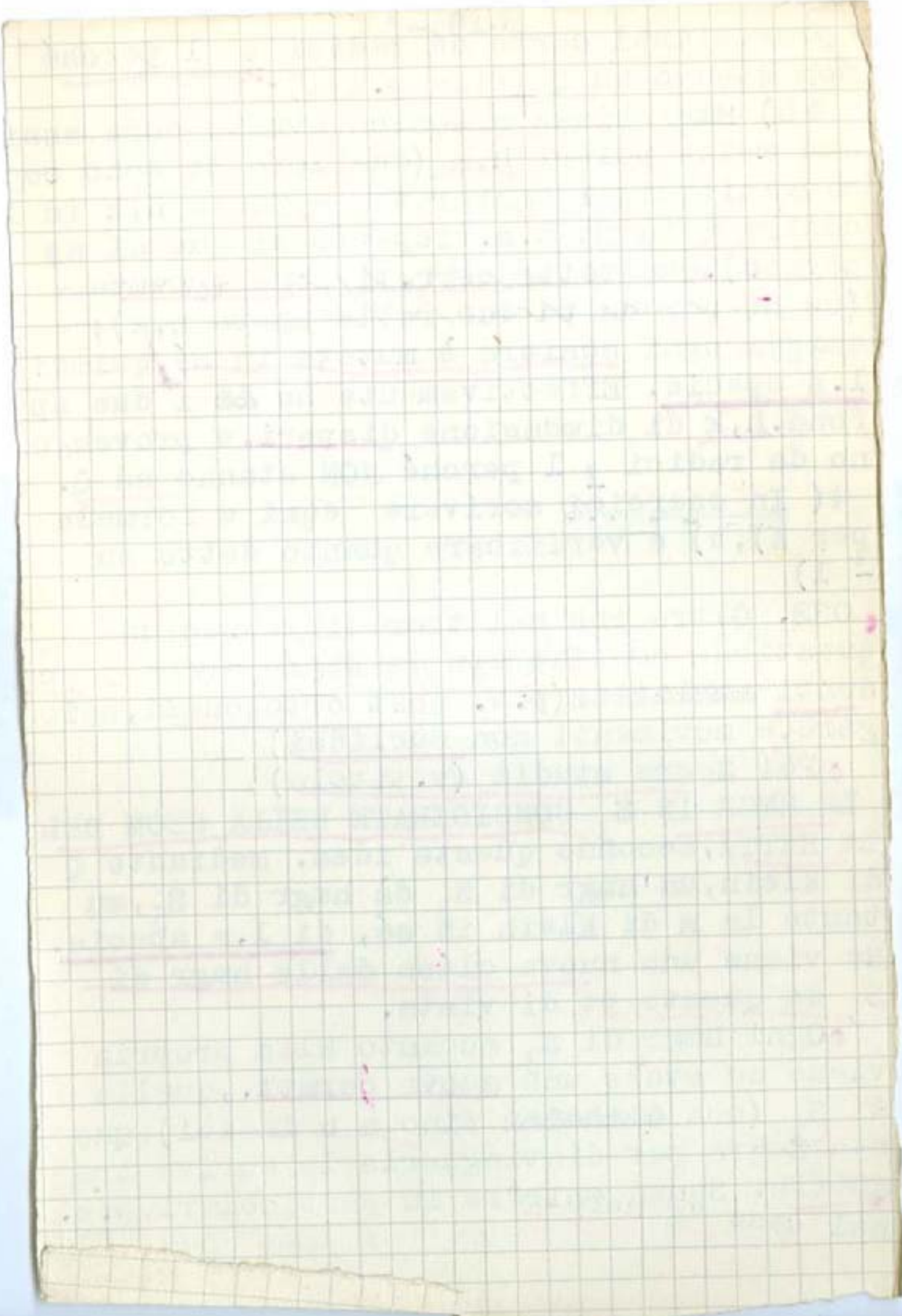
(4) $lg - mf = 0$

V_3 dello S_5 $x_5 = 0$ contenente il piano $l = m = 0$. E' un



• Perciò lo studio della V_3^3 con piano equivale a quello di complesso quadr generale di S_3 .

* In questo caso part. la sup. F_4 contor no appte da O viene ad avere oltre al 1° (p. π) un altro piano tgte lungo c_2 . Se invero π è il piano oggettivo, lo S_3 proiettante $O\pi$ sega ultte la ipcie in V_2^2 , che sega π in conica γ . Quindi i pt di γ , doppi per la sezione sono pt di contatto dello S_3 con la ipcie. Le rette che da O vanno a ciascuno di essi sono tgtk uscenti da O , che condu cono sul cont apparente a conica γ' (pro iezione di γ), in piano π' , proi di π . Ora π' non ha altri pt comuni con F_4 (perché nello S_3 $O\pi$ non si possono condurre da O che sta sulla V_2^2 altre rette a toccare la sup $V_2^2 \downarrow \pi^2$). Perciò π' è un secondo piano tgte alla F_4 secondo conica. Segre trova che in questo caso la congruenza delle rette bitgk a F_4 si scinde in due, una $(4, 10)$ e una $(8, 16)$. La somma ordini va bene; quanto alle classi l'unità che manca si spiega col fatto che tra le rette della ipcie vi sono le inf. $/2$ del piano π , e quindi in proiezione si stacca il piano rigato π' (una retta in piano arbitra rio)



~~X~~ Tra le V_3^3 con un n.° finito ~~di~~ d di pt

doppi Segre considera specte quelle con $6 \leq d \leq 10$. La limite superiore si spiega da

$$n^2 = n(n-1)^3 - 2d \quad (> 2) \quad (\text{dr. } P^1)$$

da cui ora

$$2d < 2n; \quad d < 11; \quad \underline{d \leq 10} \quad (\text{Klein})$$

Quanti ~~di~~ a aver ~~in~~ $d \geq 6$ le ip geom i punti due, avendo Segre studiato specte le V_3^3 generabili con tre reti proi. di S_3 (come luoghi delle intsz di tre S_3 omologhi), vengono appunto con (almeno) 6 pt doppi.

La ragione è. Siano le a_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) forme lin nelle coordte x_0, \dots, x_4 . Si pu supporre che le tre reti proi di S_3 siano

$$(0) \begin{cases} \lambda a_{11} + \mu a_{12} + \nu a_{13} = 0 \\ \lambda a_{21} + \mu a_{22} + \nu a_{23} = 0 \\ \lambda a_{31} + \mu a_{32} + \nu a_{33} = 0 \end{cases}$$

e della V_3^3 :

$$(1) \quad F \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

< 2

Due $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ rette de form doppi i pt due $|e_{ij}|$ le car. d.

218.

Grado del sistema è da intendere così. Interpretato momentaneamente gli el. a_{ij} del dtrm come coord hm di un pt in uno spazio

$\Sigma d; d = (r_{ci})^{-1} = r^i r_{ci}$

Allora annullando quel $D_{r_{ci}-b}$ ho come

variante

V_j^N

due N i dati con cost. r e h

$d = r^i r_{ci} - h^2$

Quasi troviamo $N=6$, cui ho V_4^6 di Σ_8

$(r=h=v)$ e si applica al caso cost. r e h

$a_{ij} = a_{ij}^0 x_3 \dots + a_{ij}^4 x_6 \quad (i=j=1, 2, 3)$

Varie $x_3 \dots x_6$ le (x) den. una S_3 di Σ_8

una S_3 in V_3^6 in 6 pt. cui ho 6 cost. \uparrow

vale $1 \quad x_3 \dots x_6$ per cui sono unte:

D di (1).

E tali pt. sono $\binom{r+1}{h}$ (due di $\binom{r+1}{h}$)
 cioè si può vedere o de ge di Schubert
 copoluate più ^{lanci} ~~correnti~~ di Segre (gli ordini
delle varietà che annullano i det. dei

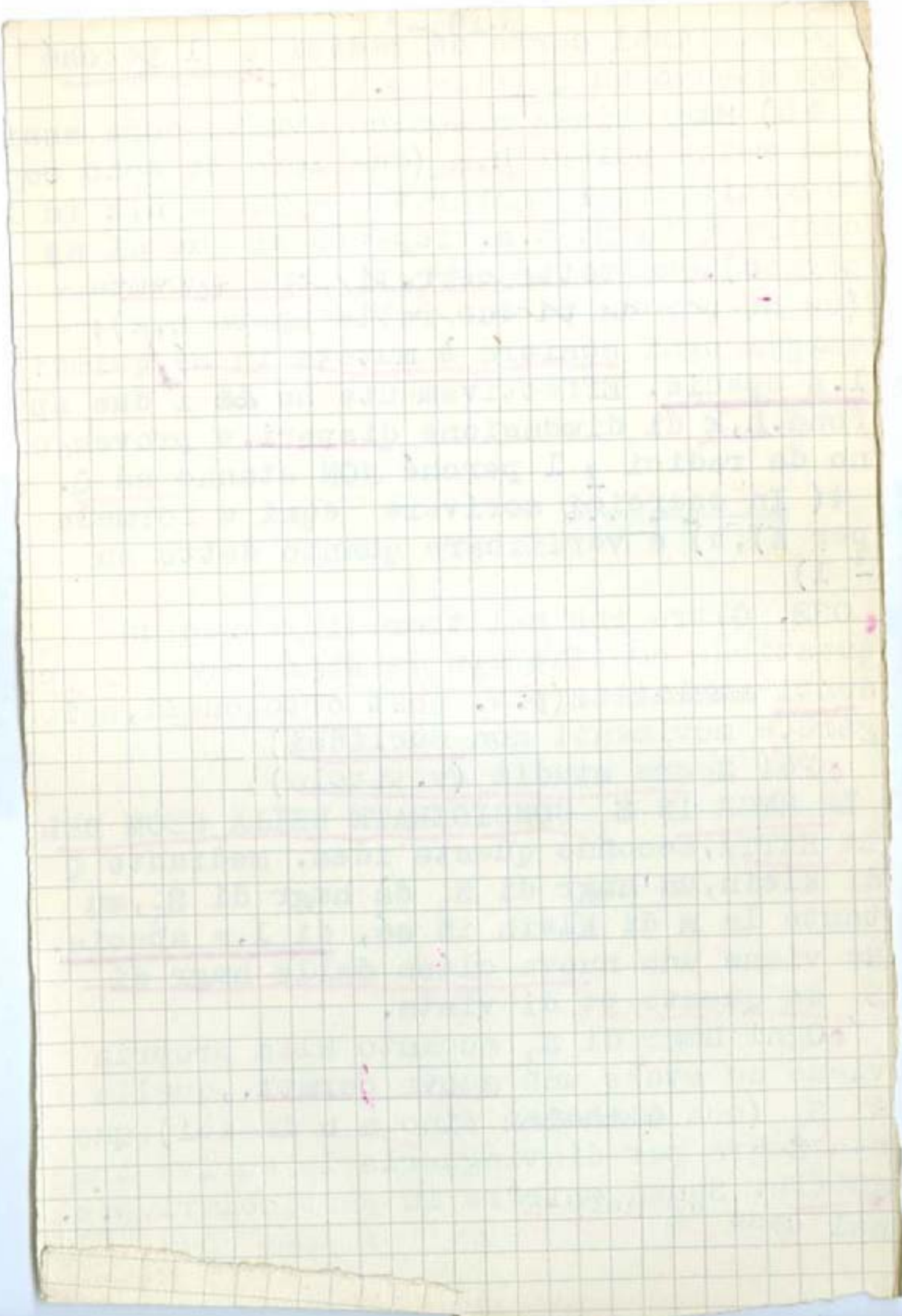
Diversi gradi estretti da una data matrice
 (Klein 1870): per un det di ordine
 $r+1$ se $|a_{ij}|$ si tratta di trovare il
grado del risultante di eq. alg. che non hanno
nessun radice comune con alcune
~~certe~~ liberi, $D_{r+1-h}^{(1)}$ Prullé

$$(2) N = \frac{(2h)_h (2h+1)_h \dots (r+h)_h}{(h)_h (h+1)_h \dots (r)_h}$$

• P.e. per $h=1$ ^(nulla di D_{r+1}) $N = \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (r+1)}{1 \cdot \dots \cdot r} = r+1$ (ovvio
 di $\binom{r+1}{1}$) (matrici)

• E per $h=2$ $N = \frac{4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (r+2)}{(2)_2 (3)_2 \dots (r)_2} = \frac{(r+1)_2 (r+2)_2}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r}$

01 $h = 1, \dots, r$



$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{r(r+1)(r+2)}{4} = \frac{1}{12} r(r+1)(r+2)$$

• Qui per $r=2$ km ho $N = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 6$

È quel il caso di p. 217. (e lo l.c., limitati
x i. v. km)

• Ma come si può anche la colata diretta

$$\text{Le } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \dots \quad \text{e } \underline{F^0}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \dots \quad \text{e } \underline{F^{(1)}}$$

Bisogna prendere il $F^0 \Delta F^{(1)}$ per il

$a_{11} = a_{12} \oplus a_{13} = 0$ (rette). Non basta il

caso. Bisogna avere le "equazioni" delle
rette (ipotesi). Facciamo, ma sempre 6
(Non facci)

o a cui si enuncia per angli
o p. 118

Le ragioni di gusto si presentano
analogy^{te} al caso prec.^{te}

Autore || : : : : ||

✓ OSSERVAZIONE.- Cito per servirmene poi (p. ~~21~~) un risultato piú generale di (2). Invece di matrice quadrato considero rettangolare con $r+1$ verticali e $s+1$ orizzontali, e cerco il grado del sistema che si ottiene annullando tutti i

Ebbene tale D_{r+2-h}^{r+2-h} (come prima) è

$$N = \frac{(r+s-2g)_h (id+1)_h \dots (r+s-g)_h}{(h)_h (h+1)_h \dots (r)_h}$$

(che per $s=r$ dà (2))

$$N = \frac{(s-r+2h)_h (id+1)_h \dots (s+h)_h}{(h)_h (h+1)_h \dots (r)_h}$$

che per $s=r$ si riduce alle (2)

Per cui: ho $r+2-h \leq s \rightarrow s-r+h \geq 2 \rightarrow$

~~$s-r+h \geq 2$~~ $s-r+h > 0$. Quindi 1° fattore

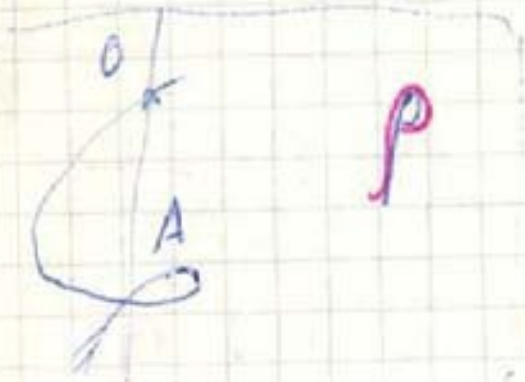
il Num. di N va piú in

P.e. per $s=3, r=3, h=2$ (con due vari

piú)

$$N = \frac{(5+1)_2 (3+1)_2}{(2)_2 (3)_2} = 6.$$

224



• Da quanto detto risulta dunque che la V_3^3 generata con 3 reti proiettive di S_3 ha sei punti doppi. Segre prova che essi sono "indipendenti" e che viceversa ogni V_3^3 con 6 pt doppi ind. è generabile così.

• Vediamo ora cosa avviene delle F_4 contorni apparenti e congruenza bitgti per tali ipersup cubiche.

• Intanto se l'ipersup. ha pt doppio A, e si fa contorno appte da O (per noi sull'ipersup.), la sup. F_4 contorno appa-rente ha in A' un pt doppio. Devo provare che, in proiezione, una retta r per A' ha due ints raccolte in A' (e solo due fuori). Ora proiettando r da O ho un piano p , segante l'ipersup. in c_3 per O , con A doppio: effettivamente ad essa da O posso condurre DUE tg ti (la OA ne assorbe due)

• Quindi per ipersup. con 6 pt doppi la F_4 acquista 6 nuovi pt doppi (per il nuovicfr p. 210). Ciò per la sup. F_4 .

• Quando alle bitangenti, la congruenza complessiva (12, 27) essa si spezza ora in tre congruenze $T_1^1 (2, 6)$, $T_2^2 (2, 6)$ e $T_3^3 (8, 15)$ (Ora, vuol dire per l'ipersup. con 6 pt doppi).

• Si vede così. Sull'ipersup. ho un si

$$d \int, | \int^{\mu}, T_1 | T^{\mu} d$$

↓ ~~le appa~~ M^c di S_1
cas. μ vicino a μ M_1, M_2

$$\lambda (a_{11}^0 x_1 + a_{11}^1 x_2) + \mu (a_{11}^0 x_1 + \dots) + \nu (a_{11}^0 x_1 + \dots)$$

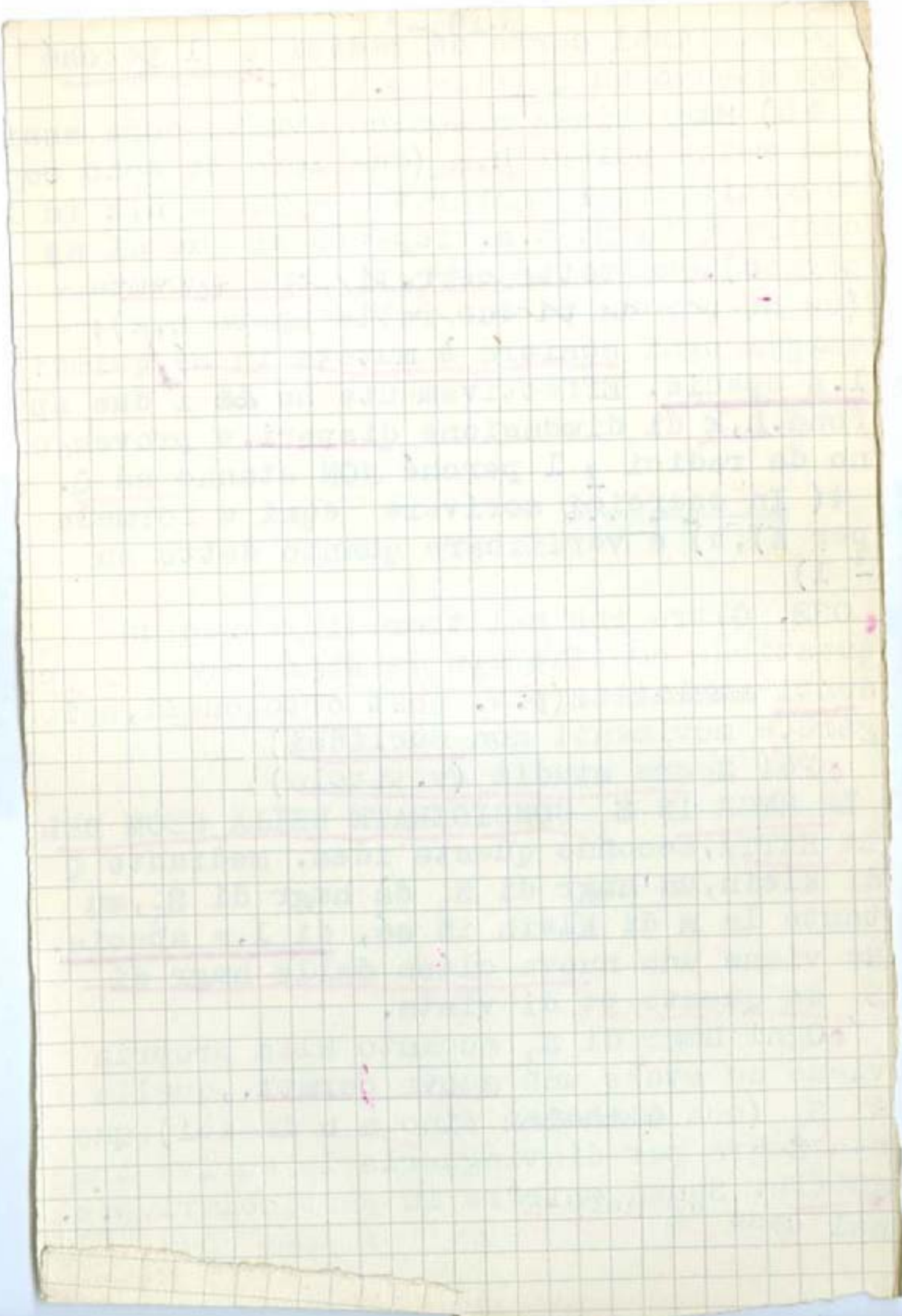
$$\| \lambda a_{11}^0 \text{ tra } a_{11}^0 + \nu a_{11}^0 \quad a = -a \quad \lambda a_{11}^0 \text{ tra } a_{11}^0 + \nu a_{11}^0 \|$$

cas. M_2

stema S_2 di rette come intsz dei piani omologhi delle tre reti. Per ogni Pt. M dell'ipersup. ne passa una, si vede dal sist(o) p. 217. ~~Esso~~, in proiezione dá una cgrza T_1 di ordine 2. Prendendo il det. te per verticali ho analogte ~~et~~ T_2 di ordine 2. L'ordine di T_3 viene per differenza.

Quantò alle classi, basta vederlo per T_1 (T_2 analogo, T_3 per differenza). Ora per avere la classe di T_1 , quante sue rette in dato piano? Vuol dire: quante rette di S_1 in dato S_3 (qua per 0, ma non importa). Ora le tre reti proiet. tive di ipni, segano lo S_3 in 3 stelle proiettive di piani. Ho dunque in S_3 tre stelle proiettive di piani: quante volte avviene che tre piani omologhi si seghino in retta (~~es~~ non solo in un punto?) Qua ho le tre reti di piani date ancora dalle (o) p. 217. Devo cercare che la matrice dei coefficienti di x_1, x_2, x_3, x_4 (questa dunque, con elti lineari nelle λ, μ, ν) abbia nulli i D_1, D_2, D_3 . E' come a p. 223, con \dots ~~es~~ $s=2,$

$r=3, h=2$. Il grado del sist. è dunque (p. 223) $s e i$. (cioé ho sei sist. di valori di λ, μ, ν). Quindi in S_3 ho sei rett intsz di piani omologhi delle tre stelle proiettive (per chi conosce la teoria delle F_3 , è risultato noto nella geometria della F_3 , sono le 6 rette di una



sestupla)

Risulta così provato quanto asserito delle tre congruenze $T_1 T_2 T_3$.

• OSSNE. Per valutare il grado di generalità delle cgrze T_1, T_2 qua trovate da Segre, tener presente: per le congruenze d'ordine 2 senza linee focali, Kummer ha trovato come valori possibili le classi 2, 3, 4, 5, 6, 7. Qua siamo proprio nel caso (2, 6), dove sarebbe anche da osservare che le cgrze (2, 6) si dividono in base a certo criterio in due specie, e qua vengono di una determinata delle due.

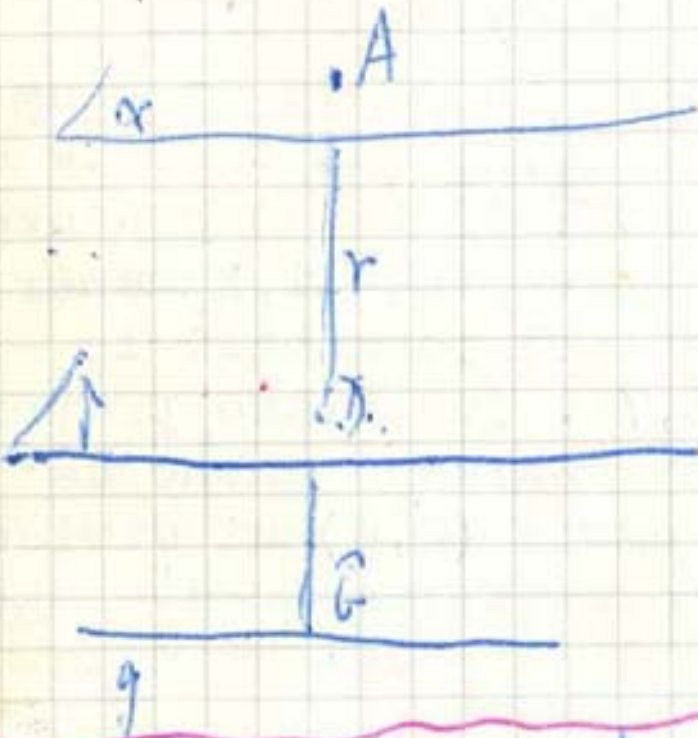
06 La V_3^3 con 10 pt doppi. Senza arrestar mi sui casi intermedi, veniamo subito a accennare il caso massimo (p. 217) $d=10$.

• Arriviamo a una tale V_3^3 fissando in S_4 in modo generico 4 piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (in modo generico vuol poi dire che i loro 6 pt di intersezione non diano mai luogo a 3 pt allineati). Consideriamo le rette r appoggiate ai 4 piani. Sono $\text{inf.}/2$, perché p.e. per ogni pt di α ne passa una (la retta intsz dei tre S_3 $A_\beta, A_\gamma, A_\delta$). Ricoprono una V_3 che è d'ordine 3

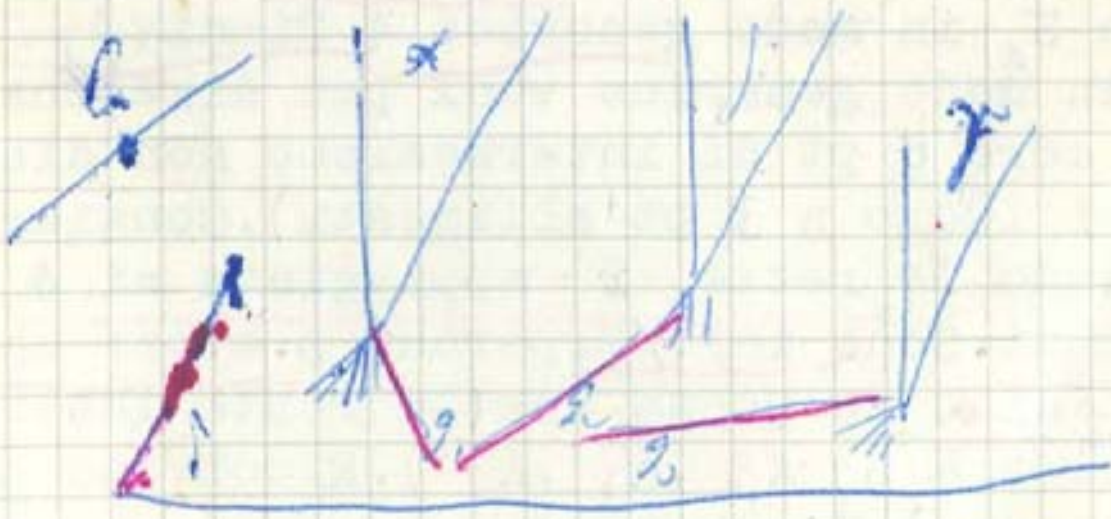
↓ A

Infatti l'ordine è dato dal n. di esse appoggiate a una generica retta g . Si tratta di trovare il n.° delle

230



αr βr γr
 αG βG γG



rette r appoggiate a $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$
Siano A, B, C, D, G di pt di appoggio.
D sta dunque su δ e su r , diciamo sta
su δ e sui tre S_3

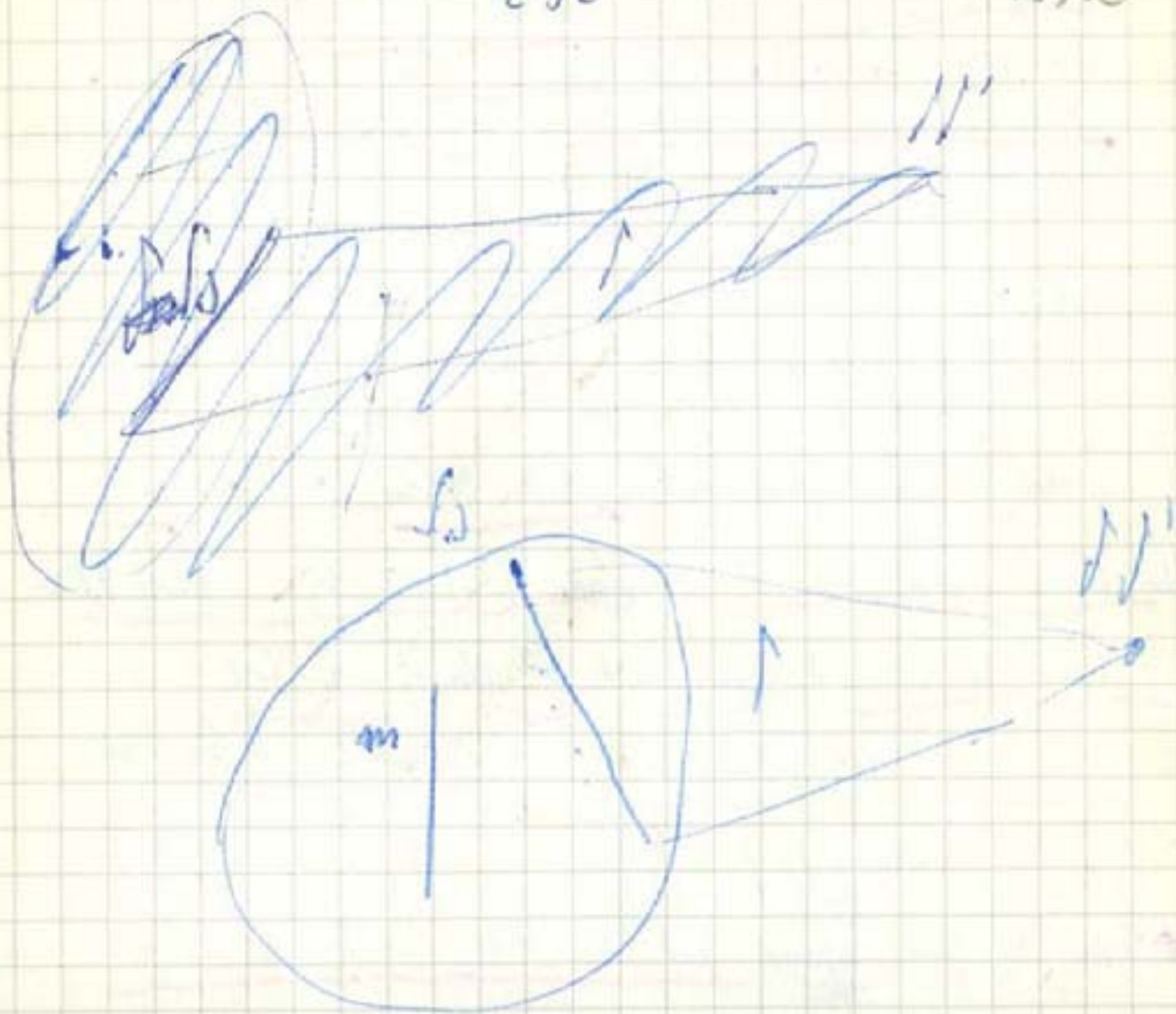
$\alpha r, \beta r, \gamma r$
cio' e
 $(\sim) \alpha G, \beta G, \gamma G.$

Quindi per ogni retta soluz. c'è un pt
 G di g tale che i tre S_3 (\sim) si seguono (diciamo) su
 δ . Visivamente da qui pt G di g in tale
condizione viene una soluz.: la retta DG (che
è opp. le ad α, β, γ)

ebre si per ogni pt. G di g costruisce i tre

S_3 (\sim) essi seguono δ in tre rette, vanelli
ma fare d'alti
 $\alpha \delta, \beta \delta, \gamma \delta$

I tre fasci di rette sono tri fasci e due, pro-
venendo da r per punti α, β, γ . Allora ho in un
piano (d) gente 3 fasci e due Avvici
3 volte da repp. un'altra penna per un pt.
(vinta. 20... etc). Ho a 3 pt. D in 3 rette r. c. d. d.



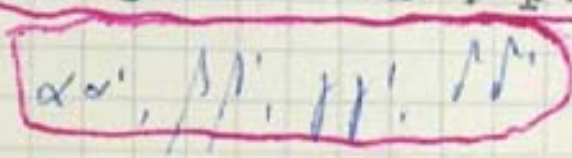
• Dimostro ora con Segre (Nota C) che in S_4 le rette appoggiate a 4 piani α, β, γ si appoggiano a un quinto piano ϵ . No, NON dimostro: accenno solo il concetto. Prendo il piano ϵ appoggiato a α, β, γ (spiegare), e dal punto p proietto le inf./2 rette di cui sopra su uno S_3 generico. Si prova che queste danno una congruente lineare generata, con due rettrici. Una è evidente la l_1 (perché le inf. 2 rette oggettive incontrano ϵ), l'altra sarà una retta m.E allora le rette oggettive incontrano il piano ϵ m.E questo il quinto piano ϵ , di cui si è asserita l'esistenza.

• Segre fa anche vedere che non vi sono altri piani nelle stesse condizioni, cioè che è unico il piano ϵ di cui nell'enunciato. Si hanno così 5 piani.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ tali che le 4 rette incidenti 4 incidono il 5°; si dicono piani associati. (ad un e due schenke)

• Osservare che come ϵ passa in base a quanto detto per il pt p , passa per i pti analoghi α', β', γ' , (definendo α', β', γ' in modo analogo)

Si ha così un modo per costruire ϵ come il piano dei 4 pt (neste complanari)



233

osservazioni di β' centro i β' dom



$\alpha_p, \alpha_r, \beta_r, \beta_c$
(si veda p. 274)

↓ Caso dopo del pto de tutto

V_3^3 con lo pt. β_m sono omologhe

• Ora il piano ξ (i cui pt sono sulle varie rette della V_3) sta esso pure sulla ipersup. Ne risulta che questa ha 10 pt doppi (nelle intsz dei 10 piani a due a due); invero se M è un tal punto, non vi è in esso un iperpiano tgte (che dovrebbe contenere due piani sghembi per esso).

• Si arriva così a una ipsup cubica con 10 pt doppi come luogo delle rette appte a 4 (e quindi 5) piani a due a due sghembi (E il risultato si potrebbe invertire, si hanno così tutte le ipsup cub con 10 pt doppi).

• L'ipsup. contiene già i 5 piani associati a $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, ma contiene ancora altri piani.

Invero p.e. il piano δ' ha in comune con essa una retta in ciascuno dei piani α, β, γ , e poi anche il pt $\delta\epsilon$

(ricorda che ϵ pare pe δ' cioè l'p d'c) che

non risulta nella V_3 ; quindi l'ip. δ' non è

che δ' sta nelle V_3 .



Il piano δ' ha un pt per ogni retta

della pe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ cioè $5 \cdot 2 = 10$. Non

contiene 10 pt in tutto.

$$5 + 10 = 15$$

e, risulta, non oltre.

Ecco le quintuple

- I) $\underline{0126}$, $\underline{0789}$, $\underline{5567}$, $\underline{2348}$, $\underline{1359}$
 II) $\underline{0355}$, $\underline{0789}$, $\underline{1237}$, $\underline{1568}$, $\underline{2469}$
 III) $\underline{0258}$, $\underline{0159}$, $\underline{1237}$, $\underline{5567}$, $\underline{3689}$
 IV) $\underline{0367}$, $\underline{0159}$, $\underline{1568}$, $\underline{2348}$, $\underline{2579}$
 V) $\underline{0367}$, $\underline{0258}$, $\underline{2469}$, $\underline{1359}$, $\underline{1578}$
 VI) $\underline{0355}$, $\underline{0126}$, $\underline{1578}$, $\underline{2579}$, $\underline{3689}$

Nota che i primi sei sono $(5, 6/2 = 15)$

comparsi 2 volte. p.e.

I (che si gioca come luogo centro dopo
 ∞^2 epl. l'u. di volta di. nel tempo)

• Ognuno dei 15 piani contiene 4 pt doppi. Per i 5 piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ si vede in quanto p.e. α contiene i 4 pt doppi $\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \alpha\epsilon$

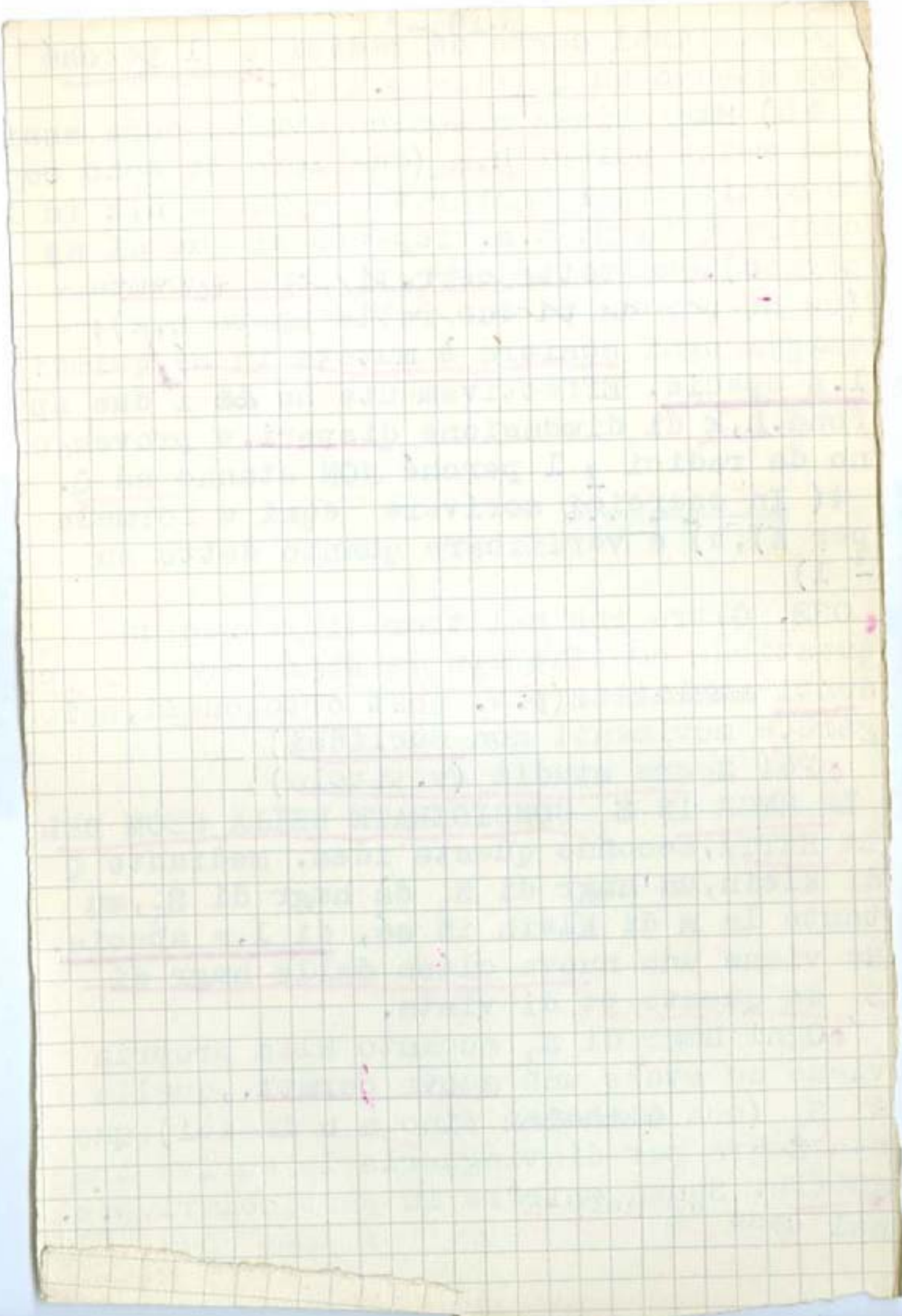
Per gli altri 10, tipo β' , sono i pt

$\alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma, \delta\epsilon$

• Cap. 234
Risulta che non vi sono altre appartenenze di pt doppi a piani salvo le menzionate. Segre numerava i 10 pt doppi 0 1 ... 9 e poi indica ogni piano coi 4 pt doppi che contiene, e così studia la cfigr. Se nel wimbolo di due piani (p.e. 0125, 0789) vi è solo una cifra comune i due piani risultano "sghembi", se due (p.e. 0125, 0149) sono incidenti in retta. Altri casi non vi sono. E Segre riconosce che ognuno dei 15 piani è sghembo a 8 e incidente a 6. E trova fra i 15 delle quintuple (tra cui la data) di piani a due a due sghembi (ma non sestuple) Ognuna di tali quintuple risulta di piani associati. Di tali quintuple ne trova SEI!

• Per ognuna di tali quintuple si hanno inf/2 rette incidenti; stanno sulla ipersp E così questa viene a contenere sei sistemi di rette (che danno TUTTE le rette)

• Cenno su rappresentazione di V_3 con 10 pt sp (Coxeter)
Punti in S_4 sei S_3 $Z_2 = 0$ (i: 1...6)



Sia: $(1) z_i = z_{i0} x_0 + z_{i1} x_1 + \dots + z_{i6} x_6 \quad (i=1, \dots, 6)$

Sono 6 dip. grand. ottenute per filler per

Supponi

(2) $\sum_{i=1}^6 z_i = 0 \quad (\Rightarrow \sum_{i=1}^6 a_i = \sum_{i=1}^6 a_i' = 0)$

(Volevo per assai le z_i calcolate dalle (1)

Come coord. scartate di un pt. (x) p. 4. 1

cond. e le a_i . Come le V_j

(3) $\varphi = \sum z_i^2 = 0$

Essa ha 10 pt. dip. ma pt. da le z_i valore

tra +1, e tra -1. Attenzione (per z_i : 1:1:1:-1:-1:-1)

Int. del p.c

$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = 2 \sum z_i \frac{\partial z_i}{\partial x_0} = 2 \sum z_i z_{i0}$

$=$ (ma pt. cond) $= 2 \sum a_i = 0$ per le (2).
c.d.d.

Vengo appreso $\frac{10}{2} = \binom{6}{2} \frac{1}{2}$. Vokun

• Dato l'eq. \bar{z} delle V_j cond. Sui quali
l'eq. di un V_j in 10 pt. dip.

240

Essa ha anche 16 piani tgni lungo e^2
 (piani tgni doppi), come sempre r^4 di
Kummer (spiegare). Qua vengono uno come
sempre per essere contorno appte (p. v)
e gli altri 15 dai piani della v_3^3 (p.
215)

Sulla (3) si vedono i 15 piani. P.e. il piano

$$z_1 + z_2 = z_3 + z_4 = 0$$

pia (14)(35)(78)

nei cui pt a norma di (2) è anche $z_5 + z_6 = 0$ sta evidentemente sull'ipersup. Di questi piani ne trovo così

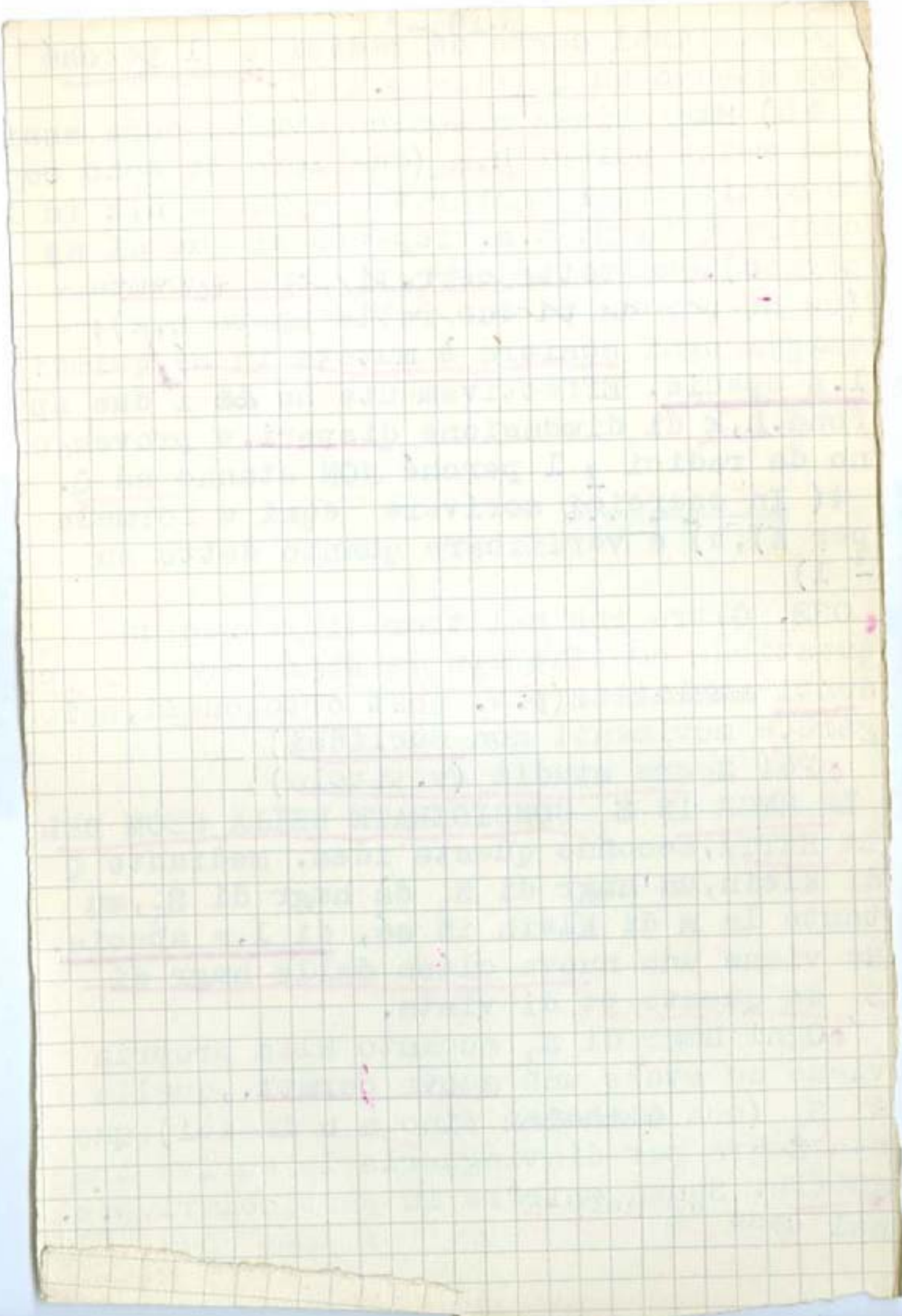
$$6 \cdot 4 / 3 = 15 \cdot 3 / 3 = 15$$

e va bene.

pp. 253-259

La F4 contorno apparente ha ora 16 pt doppi (i 6 di sempre, p. 210 e i 10 proiezioni degli oggettivi). E quindi è una superficie di Kummer. Della quale si possono dedurre per questa via alcune proprietà. P.e. le bitangenti di F4 di Kummer danno 6 cgrze (2,2). Infatti, presi in uno dei sei modi possibili (p. 212) i piani associati, p.e. $\alpha/\gamma/\delta$, le rette ad essi appoggiate costituiscono un sistema S_2^1 (e così ho S_2^2, \dots, S_2^6), e si proietta in rette di congruenza T_1^1 (e così ho $\dots T_1^6$). Ora di rette di S_1 per M dell'ipersup ne passa una (perché le rette in questione ricoprono l'ipersup.), e quindi di rette di T_1 per ogni M' ne passano due. Quanto alla classe, ne ho tante appoggiate in piano, quante ho rette di S_1 appoggiate in S_3 (proiettante, ma non importa). Ora in tale S_3 di rette appoggiate alle tracce di $\alpha/\gamma/\delta$ ne ho due e va bene. a.d.g. La somma delle classi dá solo 12; la differenza 15 è data dai 15 piani rigati pro

01(506) \setminus 12 p. da 15 dell'ipersup



Passo ora con Segre alle ip cub con inf pt doppi, e intanto alle

V_3^3 con linea doppia (e non sup. doppia) La F_3 sua sez ip

na non può avere più di 4 pt doppi; quindi l'ordine complessivo n della linea doppia è $n < 4$. Si tratta intanto di vedere quali casi non si devono escludere a priori, dovendosi scartare i casi in cui lo spazio di appartenenza di una componente, o di alcune è uno S_2 , riempito dalle corde, perché tal S_2 farebbe parte dell'ip, che sarebbe riducibile.

Inoltre se vi è una compte piana, il suo ordine m è ≤ 2 (se no sulla F_3 sez ip generica vi sarebbero almeno 3 pt doppi in linea retta, e quindi ~~genete~~ retta doppia, ma allora l'ip sup. avrebbe sup(piana) doppia contro l'ipotesi.

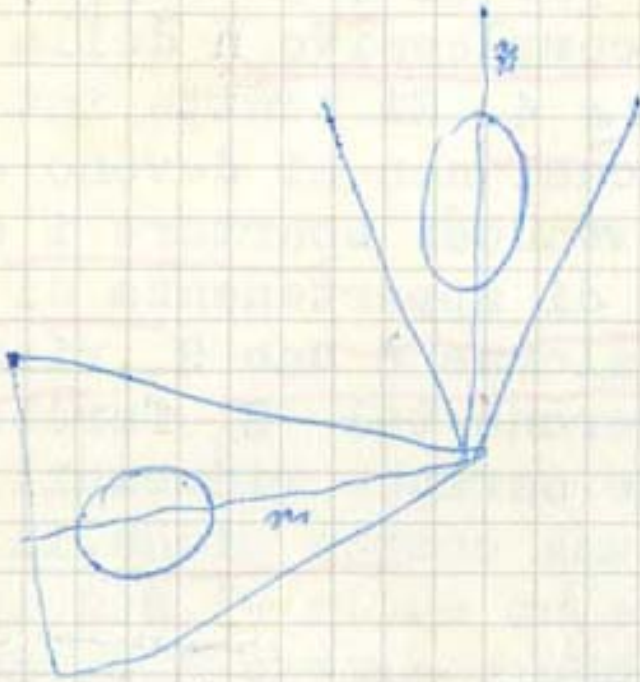
Quindi, a priori, posso avere i seguenti casi. Se le cpti della linea doppia sono tutte rette:

- a) una retta doppia
- b) due rette doppie incidenti (se no ...)
- c) tre rette doppie a due a due inc (ma non in piano), e cioè per un pt

Si potrebbe pensare anche a 4 rette doppie, ma allora la V_3^3 sarebbe cono (da cui

255

↓ a parte steme rayon m g appropiate
al piane l e u



prescindiamo). Infatti dovrebbero le 4 rette passare per un pt, essere indipendenti nella stella (se in S_3 , questo farebbe parte dell'ipsup); allora le prendo come $A_0 A_i$ ($i=1,2,3,4$). Essendo doppia p.e. la $A_0 A_1$, ogni termine dell'eq contiene a fattori due tra le x_2, x_3, x_4 , ecc. Allora mancano i termini contenenti $x_0 x_1, x_0 x_2, x_0 x_3, x_0 x_4$. Perciò manca x_0 e ho cono

Se vi è una c_2 doppia, posso avere
 d) c_2 doppia (e basta)

e) due c_2 doppie incidenti in pt e non appartenenti a S_3 (se vi appartenessero si contravviene a cd già notata).

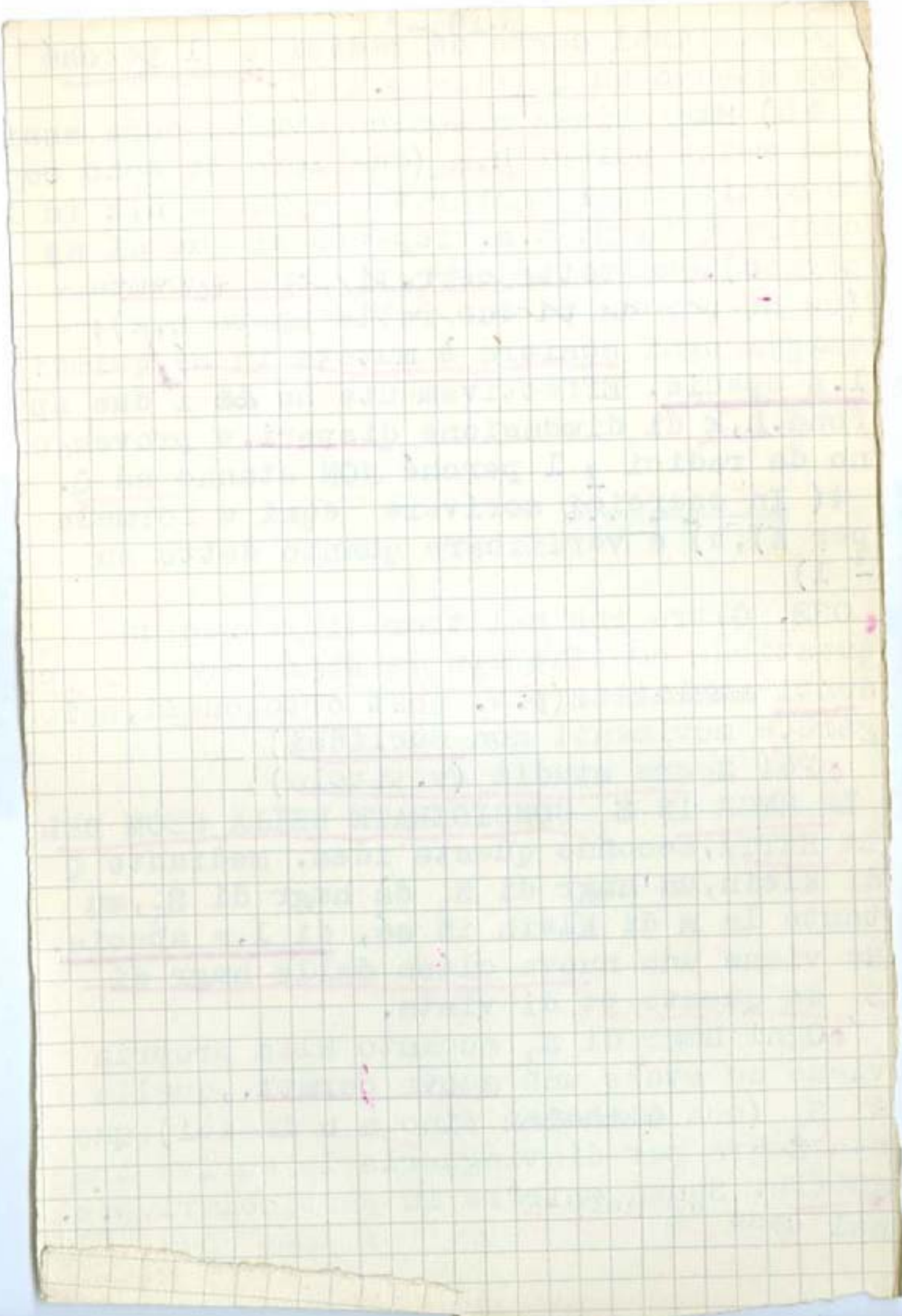
Invero con c_2 doppia non posso avere retta g doppia (non g appta c_2 , se no S_3 ...; nemmeno g sghemba al piano della c_2 perché allora il piano che unisce g a un pt P della conica contenendo g^2, P^2 starebbe sull'ipsup. che conterrebbe tutti i piani proiettanti da g i pt della c_2 , il cui luogo è S_1 -cono quadrico). Nemmeno posso avere due c_2 in S_3 , e nemmeno due c_2 non in S_3 e non incidenti, perché allora ogni piano mn (figura) contenendo 4 pt doppi starebbe sull'ipsup., lo S_3 p.e. di n e della l.a c_2 starebbe sull'ipsup)

• Una C' doppia con pt in S_3 (non piano)

non sghemba, per un pt in S_3 bene C' p.e.

o d S_3 nessun pt in S_3

• H_1 in S_3



Segre trova che tutti i casi (soli possibili a priori) a), b), c), d), e), f) sono effettivamente possibili.

• Qua osservo solo:

• I) nel caso c) la F4 contorno apparente è una superficie di Steiner (tre rette doppie uscenti da pt triplo) Infatti (p.) le tre rette doppie oggettive danno 3 id. per la F4 uscenti da un pt \bullet K. Questo è nece triplo (presolo ad A_0 , e poi $A_1 A_2 A_3$ etc, ogni termine contiene almeno a 2.° grado $x_2 \cdot x_3, x_1 \cdot x_3, x_1 \cdot x_2$; quindi ~~non compare~~ non compare x_1 né x_2

• II) Nel caso f) l'ipsup contiene tutte le inf./2 corde della c4, e si può riguardare come luogo di esse (le quali coprono una V_3 che se la data è irriducibile coincide con essa).

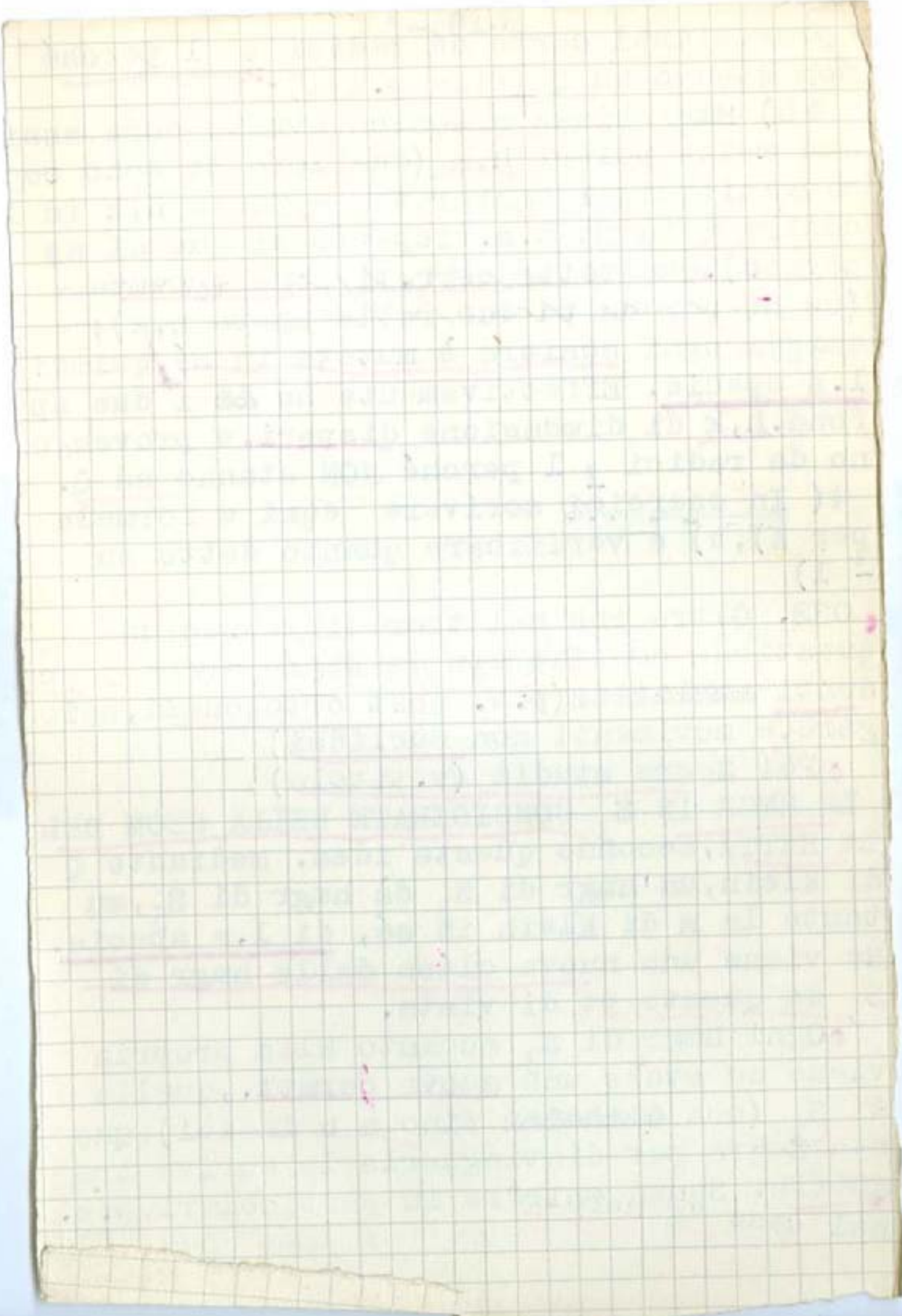
• In questo caso la V_3 ha carattere di sviluppabile, nel sensò che lungo ogni retta generatrice (corda) ammette uno S_3 tg te fisso. Ciò vale per ogni luogo di corde Se sono le corde di $x_i = f_i(t)$, la V_3 è data coi parametri u, v, t da

$$P_i: f_i(u) + f_i(v)$$

e lo S_3 g_i con e è contatto in pt.

$$Q_i: f_i(u) + f_i'(u), f_i'(v)$$

$$f_i(u), f_i(u), f_i'(u), f_i'(u) \quad \text{c.d.d.}$$



V_3^3 con piano doppio. Se V_3^3 ha sup. dop
pia, la sua sez ip. na ha linea doppia, cio'
retta doppia, quindi piano doppio, γ .

Allora la ipersup. è luogo di piani. Se
invero M è suo pt, lo S_3 che lo congiunge
al piano doppio sega ulteriormente un pia
no per M . I piani generatori sono a due
a due sghebbi (se ne avessi due per M come
emerge dal detto, segano γ in rette.

~~Due piani generatori sono sghembi. Se
invero α, β fossero incidenti, in M , stan
no entrambi nello S_3 tgte in M , e questo con
tenendo le loro tracce a, b su γ conterreb
be γ . Allora tale S_3 sega l'ipersup
in γ doppio, α, β , assurdo.~~

Comunque si prenda genericamente il pt
 z in S_4 , la sua quadrica polare è specia-
lizzata. Invero essa contiene (l.a polare)
il piano γ , e ne segue la specializzazio
ne.

Ciò costituisce proprietà molto notevol
le, considerata altrimenti. Se $f=0$ è l'eq.
della V_3^3 la quadrica polare di z è (coord
cerri x) (spiegare notazione)

~~di una superficie, un pt z fa $f=0$ polare
comp. dop. in una curv. (S_3 tgte in M)
pt doppio z γ
curv. γ~~

$$H := \begin{array}{c|cccc} & x_0 & x_0 & x_1 & \vdots \\ \hline x_0 & x_1 & \cdot & x_0 & x_1 \\ x_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1 & x_0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & x_1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \equiv 0$$

(Scegliamo tutti i punti $(1, 1)$)

* solto 0) nella retta per n^{th} (indipendente)

per $f(x, 1) = \varphi(x)$ ho $f_1 = \varphi'$, $n\varphi = x\varphi' + k$

$n = n\varphi - x\varphi'$; $f_{11} = \varphi''$; $(n-1)\varphi' = x\varphi'' + k/n$

$f_{11} = (n-1)\varphi' - x\varphi''$; $(n-1)[n\varphi - x\varphi'] = x[(n-1)\varphi' - x\varphi''] + f_{11}$

$f_{11} = n(n-1)\varphi - 2(n-1)x\varphi' + x^2\varphi''$. Allora

$$\begin{vmatrix} \varphi'' & (n-1)\varphi' - x\varphi'' \\ (n-1)\varphi' - x\varphi'' & n(n-1)\varphi - 2(n-1)x\varphi' + x^2\varphi'' \end{vmatrix} = 0$$

$\varphi = \theta^n$, $\mu = 0, \dots, x_0$

$$\begin{vmatrix} \varphi'' & \varphi' \\ (n-1)\varphi' & n\varphi \end{vmatrix} = 0 \quad n\varphi\varphi'' - (n-1)\varphi'^2 = 0$$

$\varphi = \theta^n \rightarrow \varphi'' = 0$

(1a) c.d.d

di un'ipersup. la quadrica polare di x
ha ex(coord. corr. X)

$$\sum \gamma_{ij}(x) X_i X_j = 0$$

Essa è specializzata se

$$(1)$$

$$|\gamma_{ij}(x)| = 0$$

La (1) è dunque il luogo dei pt la cui
quadrica polare è specializzata. In ge
nerale (1) è l'eq di un'ipersup, detta
la HESSIANA della data.

• In certi casi, la (1) svanisce, cioè
vi sono delle ipersup particolari con
la hessiana indeterminata (e tale è la
 V_3 con piano doppio per la proptá
osservata a p 249) . Ora \times

• 1) nel piano, sono tali solo le cn
costituite da n rette per un pt (è
chiaro che esse godano della ptá, non
ovvio ma nemmeno difficile da provare
che sono le sole)

• 2) in S_3 sono tali solo i conici (con
oss. ni analoghe all'unicus)

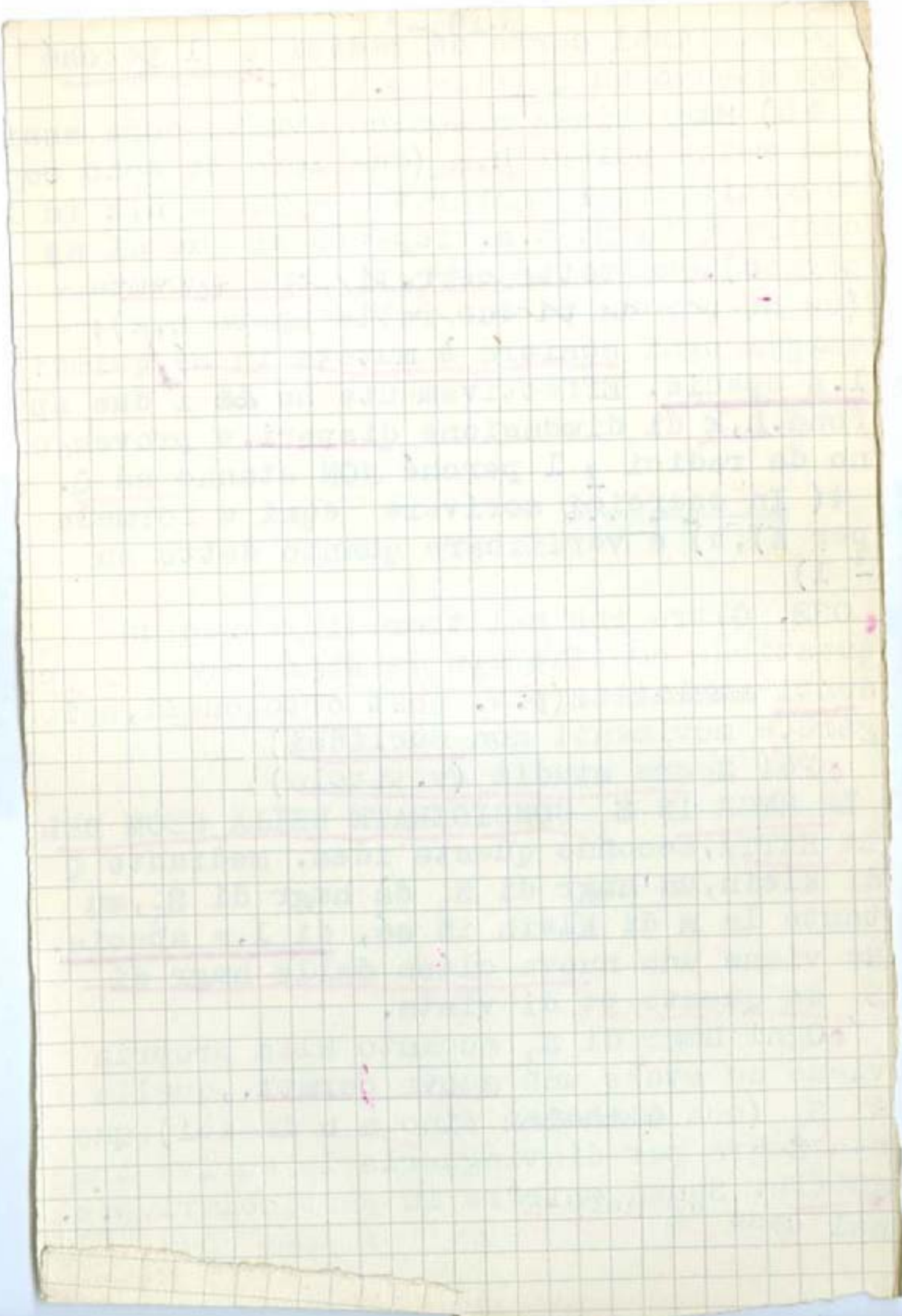
• 3) in S_r non si ha una propne analogo
Il problema delle ipersup con hessiana
indta è risolto solo per $r=4$ (Gordan
e Noether). Vi sono soluzioni non conici.
E la V_3 di cui sopra ne dá esempio.
Si puo³ anche fare verifica analitica
prendendo il piano in $x_0 = x_1 = 0$, eq. ne

$$x_0^2 (x + 2x_0 x_1) + x_1^2 y = 0$$

$$(x_0^2 x + 2x_0 x_1 x_0 + x_1^2 x_1 = 0)$$

che per $x_0 = 0$

Walter!



da p. 241

• OSSERVAZIONE. - Accenno altro pt di vista per le quintuple di piani associati. Premetto:

• 10 per gli S_m di S_r si possono definire delle coordinate, analoghe alle coordte di retta in S_3 . Se individuo uno S_m con

pt a_1, a_2, \dots, a_{m+1}

di coordinate a_0, a_1, \dots, a_r ($i=1, 2, \dots, m+1$)

formo la matrice

$$M = \begin{vmatrix} a_0^1 & \dots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^{m+1} & \dots & a_r^{m+1} \end{vmatrix} \quad (r+1) \times (m+1)$$

e prendo i suoi D_{m+1} . Quello formato p.e. con le colonne di indici $0, 1, \dots, m$ lo indico con

$$P_{01\dots m}$$

e così via. vengono così le espressioni

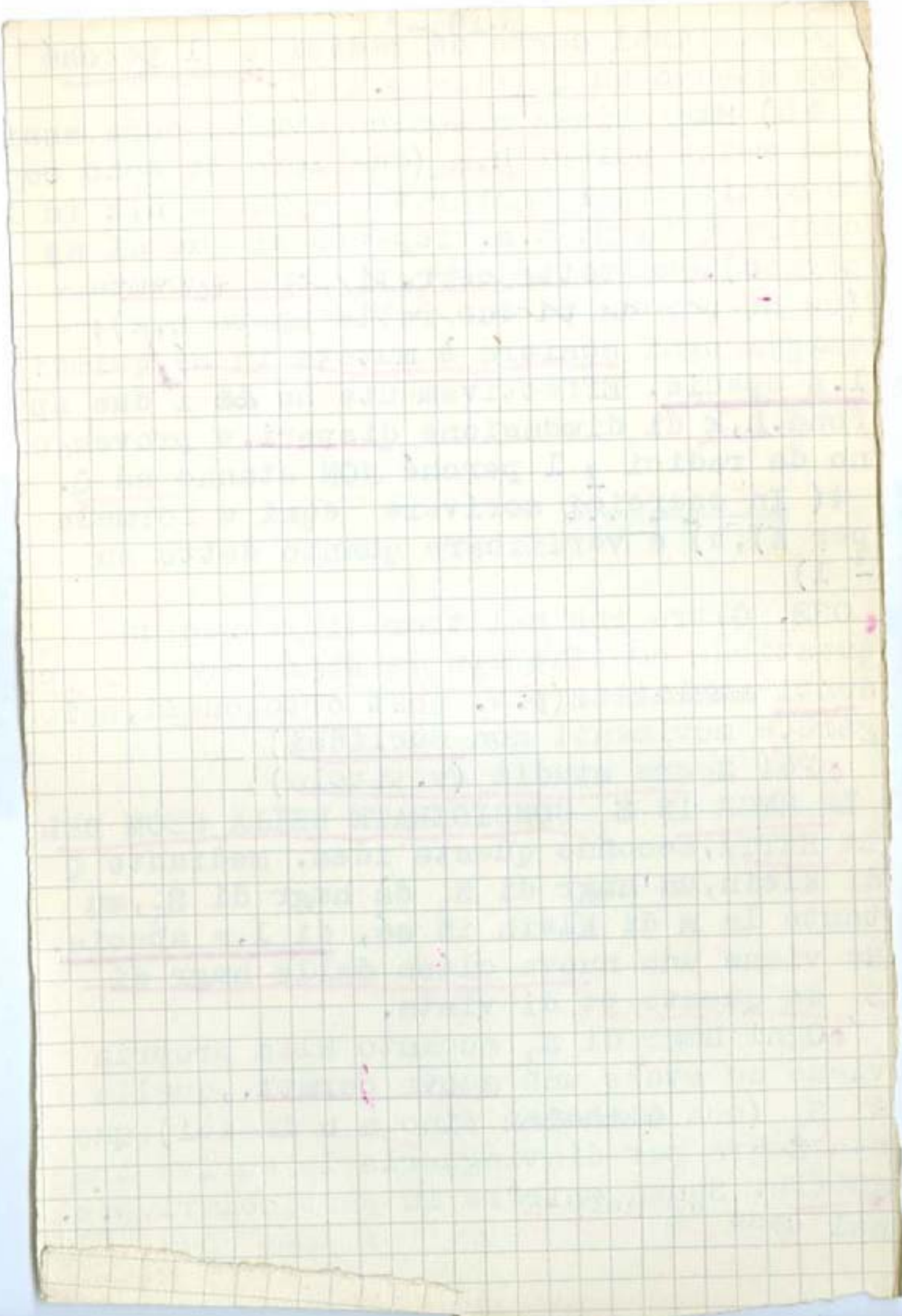
(1) $P_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}}$ (det⁴)

Esformato con le colonne di indici i_1, i_2, \dots, i_{m+1} dove $i_1 i_2 \dots i_{m+1}$ è una combinazione di $m+1$ tra gli $r+1$ indici

$$0 \ 1 \ 2 \ \dots \ r$$

Si hanno così

$\begin{pmatrix} r+1 \\ m+1 \end{pmatrix}$ espressioni (1)



Esse, in quanto n.i omogenei sono determinate dallo S_m (inditi da la scelta dei pt assunti), e si possono considerare come coordinate degli S_m di S_r

2) Non sono però numeri che si possa no assumere arbitrariamente; sono legati da certe equazioni di condizione che non scrivo esplicitamente, e ~~che è il cui sistema~~ il cui sistema riassumo nel simbolo

$$(2) \quad S$$

3) Ne viene (analogte alla Q di Klein) una rappresentazione degli S_m di S_r nei pt di una varietà (grassmanniana) G di un certo iperspazio S_s . Intanto si interpretano le (1) come coordinate omogenee di punto in uno spazio S_s di dimensione

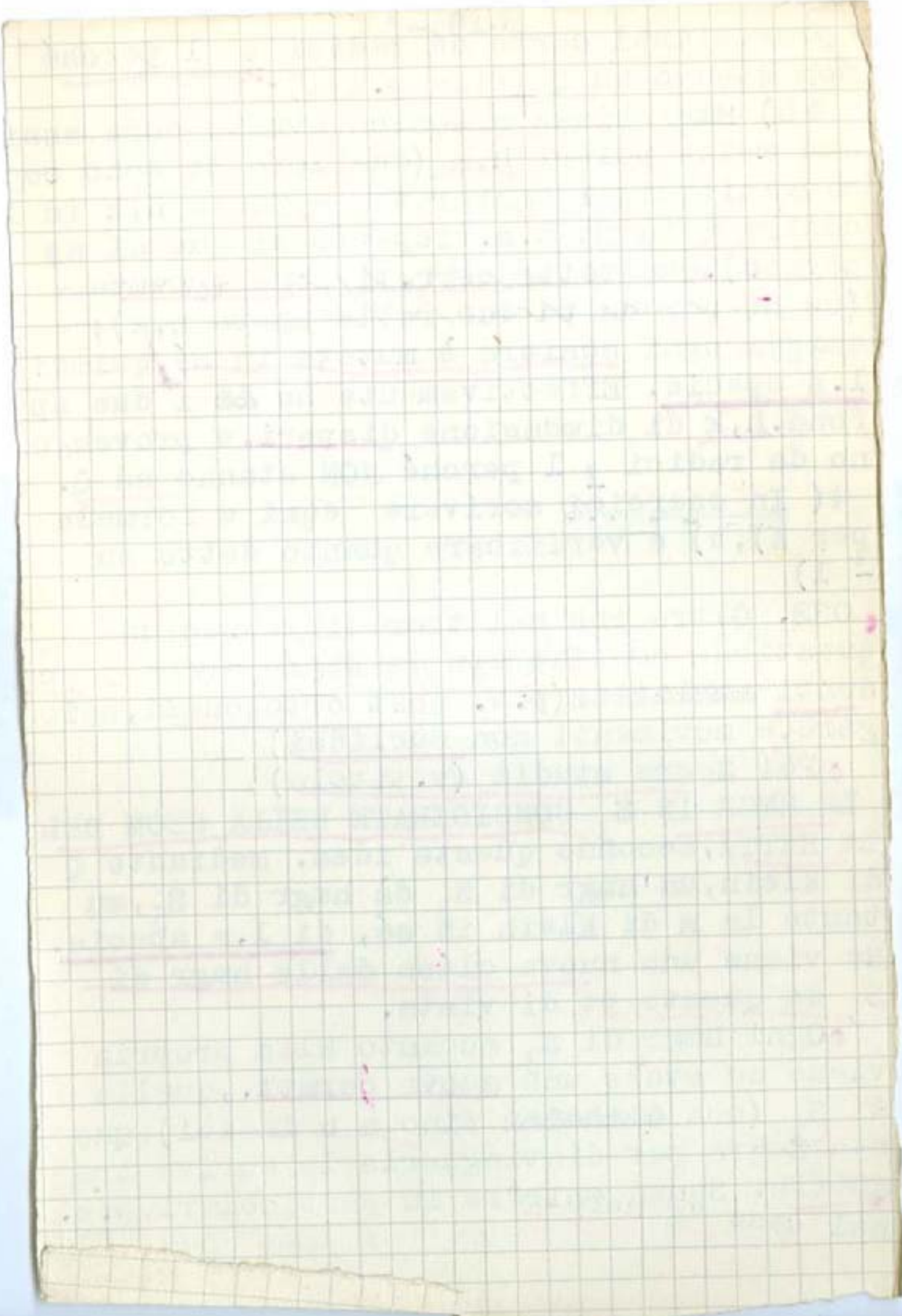
$$s = \binom{r+1}{m+1} - 1$$

E poi bisogna prendere la varietà G di S_s luogo dei pt soddisfacenti alle (2). Questa è la grassmanniana

4) P.e. la grassmanniana rapprva dei piani di S_4 risulta una

$$G_6^5$$

Allora cinque piani associati vuol dire: aventi come immagini pt ~~in uno S_3~~ in uno S_3 : è chiaro che 4 piani danno il 5°.



che la nuova df porti alla precedente
si vede così. Siano

$$p^1, \dots, p^5$$

5 piani associati secondo la nuova df.
cosicché

$$(3) \quad p^5 = c_1 p^1 + \dots + c_4 p^4$$

Osservo che la condizione di incidenza
di un piano di coordinate

è p_{012} , ecc e di una retta p_{01} .

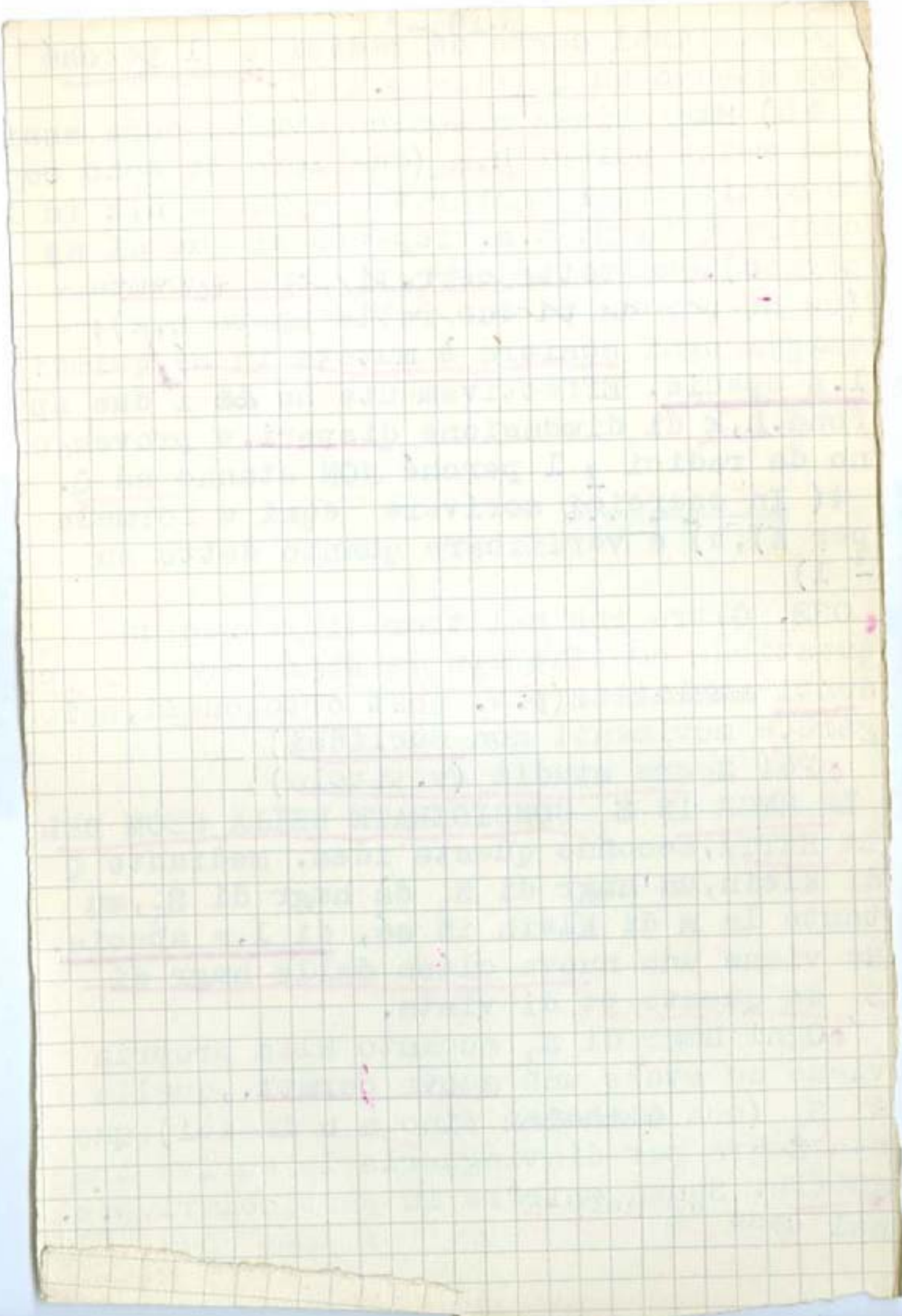
$$(4) \quad p_{012} p_{34} + \dots = 0$$

Se questa è soddisfatta dai piani p^1, \dots, p^4 e da una retta, lo è anche a norma di (3) soddisfatta da p^5 e la stessa retta. Perciò le rette appoggiate a 4 piani lo sono anche al 5° associato secondo la nuova df., la quale porta dunque alla primitiva.

ALTRA OSSERV. Tutte le v_3 ~~con pt doppi~~ con pt doppi, sono razionali. In particolare quella con 10 pt doppi. Per essa si trova una rappre su S_3 particolarmente semplice, mediante le quadriche per 5 pt. Si può vedere ~~così~~ seguendo questa direttiva:

1) prendere una V_3 così rappresentata. Essa è una v_3 perché due quadriche si segano in c_4 per i 5 pt base, che fuor di essa sega una terza quadrica in 3 pt (4.2-5)

$B_1 \dots B_5$



• 2) Ai pt di una retta congiungente 2 pt base corrisponde sulla V_3^3 uno stesso pt, che risulta doppio. Si hanno così 10 pt doppi

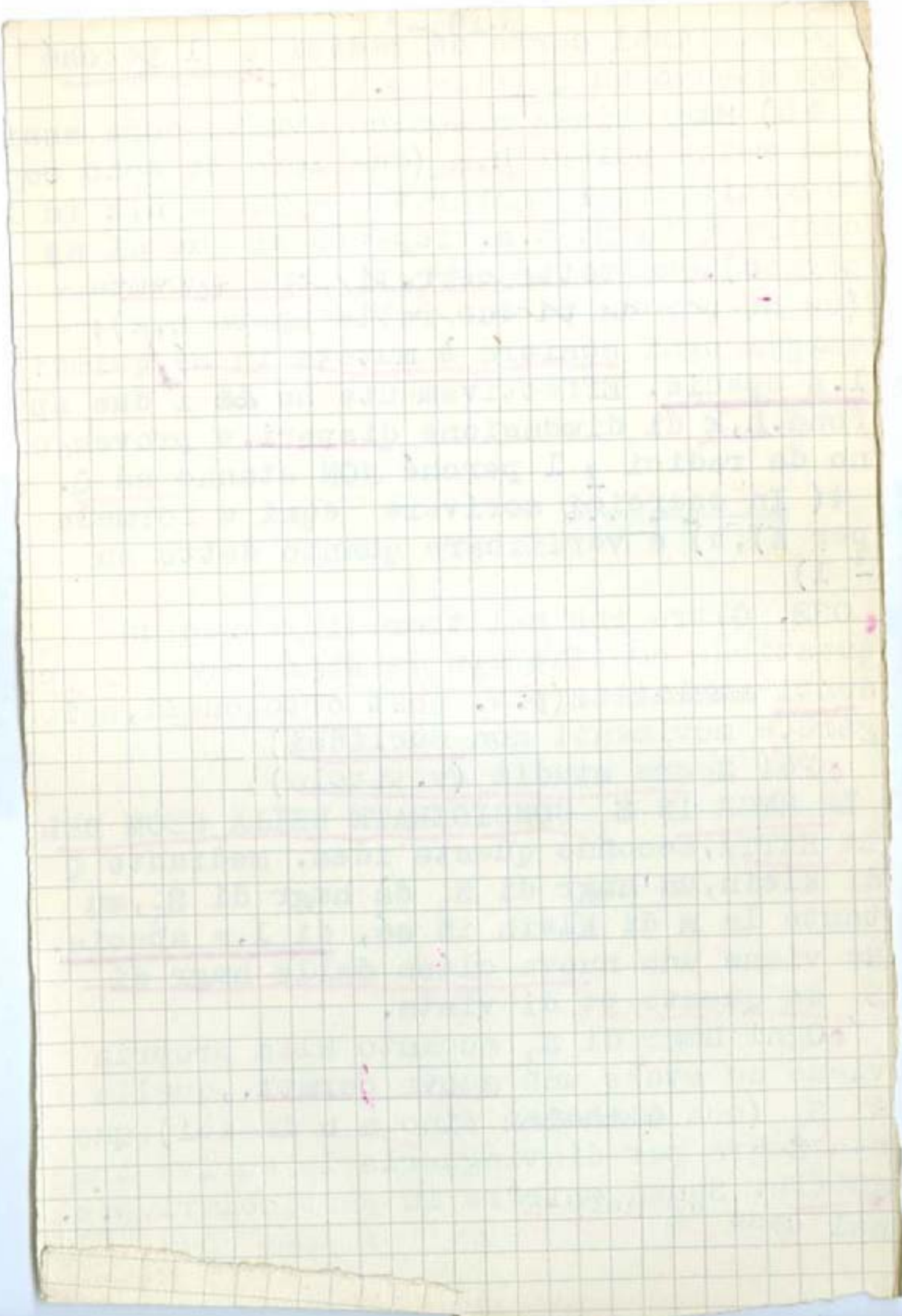
3) Essendo tutte le V_3^3 con 10 pt doppi omografiche, la rappresentazione si estende dalla 1) alle altre.

• 4) Aggiungo che i 15 piani della V_3^3 nella rappresentazione provengono 5 dai 5 punti base (fondli), e gli altri 10 dai 10 piani di S_3 che congiungono le terne di pt base.

~~(A) In fatto completa ad P' punto P' di $A, B = g$. Le F^v del Σ_3 per cui g è un punto. Quindi a $P' \rightarrow$ un solo pt. G . Punt' g è doppio? Per γ per G , fanno vedere che V_3^3 non vi un pt per g . ($\gamma \in \Sigma_3 \cap B \cap C$). Per tre F^v di Σ per g : due. per g in C^v con g anche per A, B, C . Questi piani di B e da pt. base g e la linea F^v in~~

3.2 - 5 \pm 1 pt. Va bene

(I 5 su A, B, C e in pt $C' \cap g$.



Cenno sulle varietà di Segre. Così

si chiamano varietà considerate da S. in "Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi"

(Rend. Palermo t. v 1891? Opere vol I). Segre parte da due spazi (potrebbero essere anche più, ma limitiamoci a due), S_p , e S_q descritti da pt

$$y_1, \dots, y_{p+1}; \quad z_1, \dots, z_{q+1}$$

Si formano i prodotti

$$(1) \quad X_{ij} = y_i z_j \quad (i=1, \dots, p+1; j=1, \dots, q+1)$$

in numero di $(p+1)(q+1)$. Si assumono le X_{ij} come coord omog in uno S_{p+q+pq} dove le (1) danno la rappr, parametrica di una varietà

$$M_{p+q} \quad (\text{spiegare})$$

E' questa la varietà di Segre che rappresenta le coppie di pt di S_p, S_q . Effettivamente a ogni coppia corrisponde un pt di M ; e viceversa, perché se conosco le X_{ij} ho p.e.

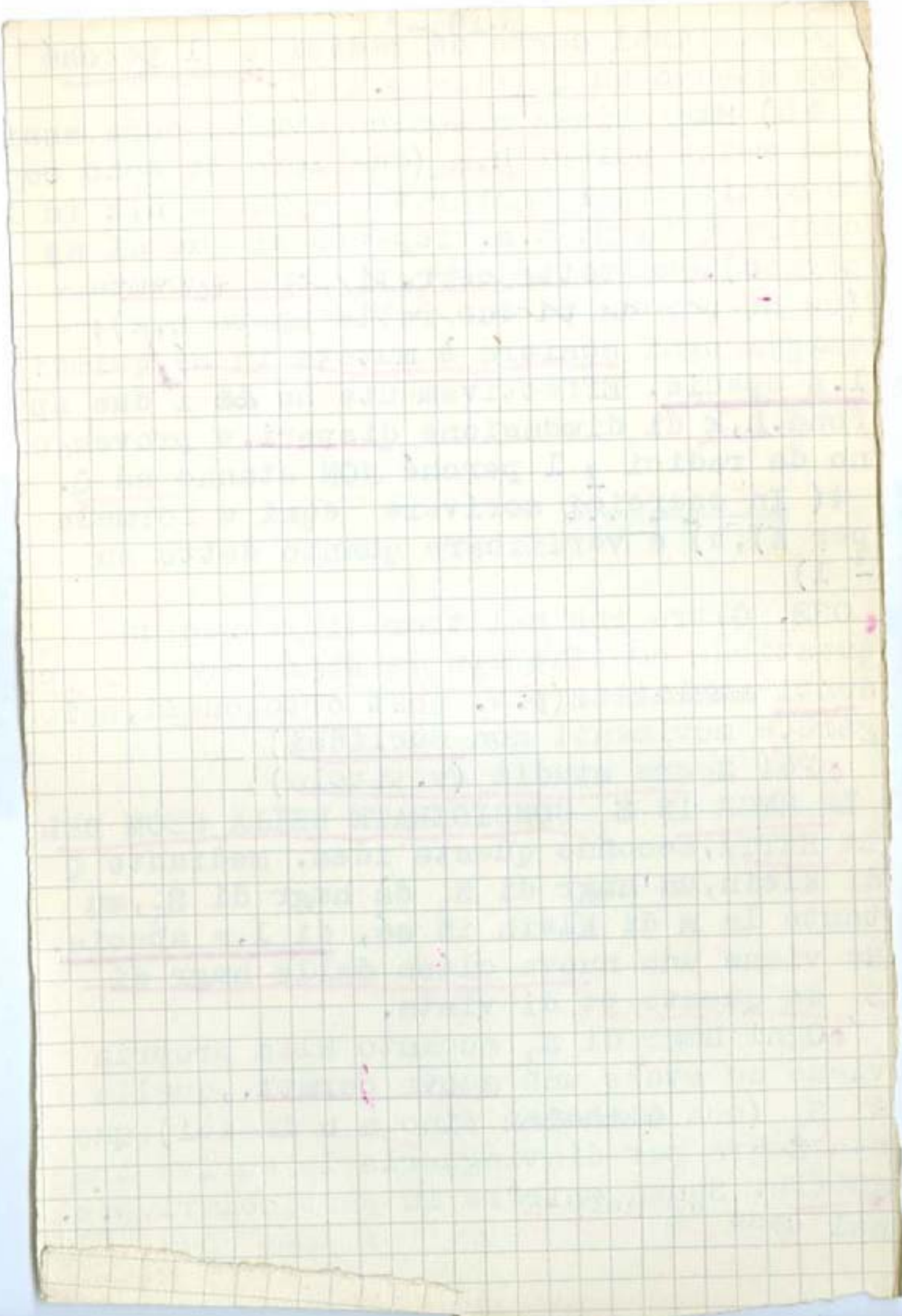
$$y_1 : \dots : y_{p+1} = X_{1j} : \dots : X_{p+1,j}$$

(Oggi si dice anche varietà prodotto $S_p \times S_q$ dei dati spazi)

ESEMPLI 1) Prodotto $S_1 \times S_1$ Si ha una sup.

M_2 di S_3

$$X_{11} : X_{12} : X_{21} : X_{22} = uv : u : v : 1 \quad \text{da } i \text{ le}$$



Quadratica

$$X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} = 0$$

(per y fisso e z variabile si hanno le rette di una ~~schiera~~ schiera;...)

2) Prodotto $S_1 \times S_2$. Si ha M_3 di S_5 lung
cui

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= y_1 z_1, & x_{12} &= y_1 z_2, & x_{13} &= y_1 z_3 \\
 x_{21} &= y_2 z_1, & x_{22} &= y_2 z_2, & x_{23} &= y_2 z_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix}
 x_{11} & x_{12} & x_{13} \\
 x_{21} & x_{22} & x_{23}
 \end{vmatrix} = 0$$

Dire M_3 di S_5 . Per z fisso e y variabile

rette (∞); per y fisso e z variabile piani (∞)

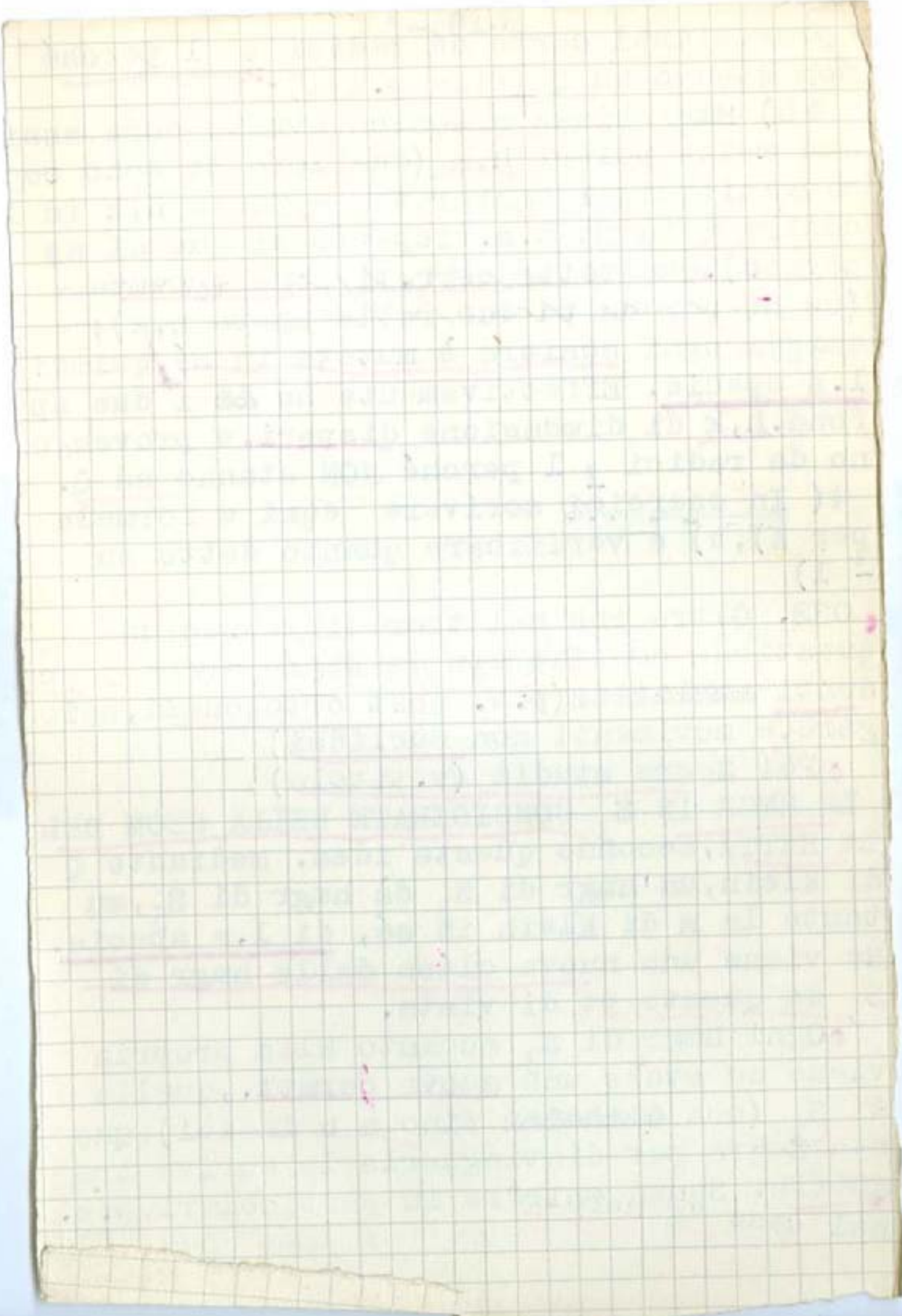
3) Prodotto $S_1 \times S_2$. Viene M_3 di S_5 ,
due curve di S_5 e M_3 di S_5 . Conten
due schiere di piani (y fisso e z)

In generale per p, q qualunque a ogni
coppia con y fisso corrisponde uno
 S della M (sist. inf/ p di S_q), cosí
sist. inf./ q di S_p .

ORDINE della M . Esso è

$$n = \binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}$$

(d'accordo con gli esempi 1) 2). Nel
l'esempio 3) viene proprio $4_2 = 6$). Inve
ro esso è il n. dei pt domuni alla M



e a uno S_{pq} di S_r . Lo S_{pq} è rappresentato da un sist. di

$$pq + p + q - pq = p + q$$

eq lin hom nelle X_{ij} (eq. lin ind). Per avere le ints devo sostituire le (1). Scrivo così $p+q$ eq bilineari nelle y, z , e si tratta di sapere il n.° delle soluzioni. Particolarizzo ora così. Suppongo ogni eq bilin del tipo $L(y)H(z)=0$ con le L, H forme lineari. Ho così un sist del tipo

$$L^1(y)H^1(z)=0, \dots, L^{p+q}(y)H^{p+q}(z)=0$$

Suppongo le L^i e le M^i scelte in modo generico: allora $p+1$ eqn $L^i=0$ sono incompatibili, e così $q+1$ eqn $H^i=0$. Allora il solo modo di soddisfare al sistema è annullare p tra le L^i e le q M^i con gli indici rimanenti. viene così il n.° indicato c.d.d.

• fermiamoci p.e. sul prodotto

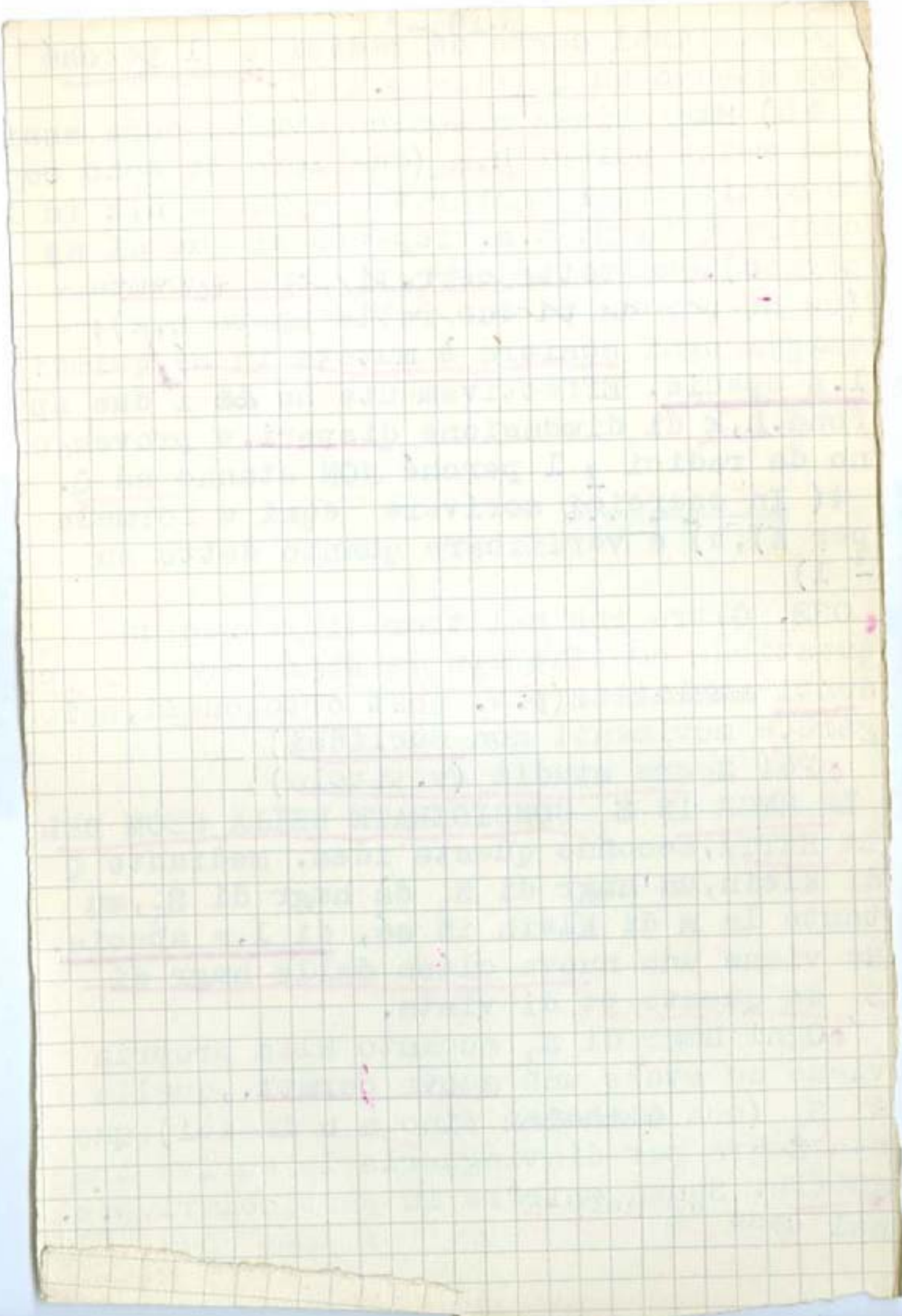
$$S_2 \times S_2$$

ma si estenderebbe.

• Chiamo α, β , i due S_2 . Se invece di tutte le coppie di pt li prendo su una retta di α e su una retta di β , siano f, g , viene una sup.cie della M_4 , e si vede subito che è una quadrica. Posso invero supporre che f sia la $y_3=0$, e

g le $z_3=0$ e allora i pt.

$$x_{11} = x_{12} = x_{21} = x_{22} = x_{31} = x_{32} = 0, \quad x_{13} = y_1 z_1, \quad x_{14} = y_1 z_2, \quad x_{23} = y_2 z_1, \quad x_{24} = y_2 z_2$$



il che prova l'asserto. Perciò la
 M_4^6 contiene inf./4 quadriche (ordinarie)
Analogamente se su α prendo una retta f
e tutti i pt z viene una M_3^3 di S_5 : la
 M_4 di Segre ne possiede dunque due sist
inf./2

Se su α prendo il pt y fisso, mentre z
varia comunque su β , la (1) dicono che
il luogo del pt X è un piano.

E allora due M_3^3 della stessa schiera
hanno in comune un piano (pt comune a ff
etc). Due M_3^3 di schiere opposte hanno in
comune una quadrica (spiegare)

Alla M_4 considerata si ricorre utilmente
nello studio delle corr.za tra due piani
che si rappresentano in una sup. della M .