Geometria diff. iperspazi 1926-27

1926-27 8

Geometria superiore

Geometria differenziale degli iperspazi II

Geometria superiore

1926-27

Geometria differenziale degli iperspazi II.

Continua il Cap. V. L'equazione di Laplace.

<u>Aggiunta di un'equaz. di Laplace</u>. L'eq. $x_{uv} + ax_u + bx_v + cx = 0$

La cui <u>aggiunta</u>. Indicando con $F(x)$, il suo 1° membro calcolato per una funzione arbitraria, cerco una funz. $z(uv)$ tale che $z\,F(x) = \frac{\partial M}{\partial u}\, M_u + N_v$, dove M e N sono espr. lineari in x e nelle sue derivate <u>prime</u> (cfr. le aggiunte per le eq. lineari in una variabile). Sia $M = px + qx_u + rx_v$. $N = Px + Qx_u + Rx_v$. Ho

$$z\,F(x) \equiv (px + q\cancel{x_u} + rx_v)_u + (Px + Qx_u + \cancel{R}x_v)_v$$

e poi

$$\begin{aligned} z &= q + Q \\ za &= p + Q_v \\ zb &= r_u + P \\ zc &= p_u + P_v \end{aligned}$$

Si tratta di equaz. con una sola z per cui esistano p, r, P, Q tali da soddisfare a questo sistema. Parrebbe che tutte le z vanno bene (avendosi 4 eq. e 5 incognite) ma queste si possono eliminare, poiché ricavando successiv.

vanti r, p. P in funz. di Q soddisfacenti ...

queste ... : $r = \ldots$ $p = za - Q_v$, $P = zb - r_u$

$= zb - z_u + Q_u$ e ...

$zc = (za)_u - Q_{uv} + (bz)_v - z_{uv} + Q_{uv}$ da cui

$z_{uv} - (az)_u - (bz)_v + cz = 0$ (2).

(Viene soddisfatta questa, le precedenti ... soddisfatte con Q arbitraria). L'eq. (2) si dice aggiunta della data.

Scritta per esteso è

$$z_{uv} - a z_u - b z_v + (c - a_u - b_v) z = 0.$$

La sua aggiunta è ... (in t)

$$t_{uv} + a t_u + b t_v + (c - \cancel{a_u} - b_v + \cancel{a_u} + b_v) t = 0$$

cioè di nuovo la data.

Gli invarianti della aggiunta sono

$$h' = -\cancel{a_u} + ab - c + \cancel{a_u} + b_v = k.$$

$$k' = h.$$

cioè gli invarianti della data scambiati fra loro.

Le equazioni autoaggiunte in senso stretto sono quelle per cui $a = -a$, $b = -b$, cioè $a = b = 0$ e allora $z_{uv} + cz = 0$ ovvia. In senso largo occorre e basta che sia $h = k$ ($k = h$). Le equazioni, già accennate a invarianti uguali appaiono dunque autoaggiunte (in senso largo)

.501

Trasf. di L. Lévy. Posto $z = px + q x_v$, dico che z soddisfa a eq. di Laplace dello stesso tipo per tutte le x soluz. di $x_{uv} + a x_u + b x_v + c x = 0$ (1) se esiste una soluz. di (1) — non nulla — per cui z si annulli (anche $z = m(\theta_v x - \theta x_v)$ con θ soluz. di (1). Noti anzi che z, a meno del fattore m, è definito dalla condizione di essere una espressione del tipo $px + q x_v$ che si annulli per $x = \theta$: poiché $p\theta + q\theta_v = 0$ da cui

$$p/q = -\frac{\theta_v}{\theta} \quad e \quad px + q x_v = -q\frac{\theta_v}{\theta} x + q x_v = -\frac{q}{\theta}(\theta_v x - \theta x_v)$$

La nuova eq. si chiama trasf. di Lévy della data /502

Per determinarla ~~...~~ pongo $q = 1$ (poiché per $x \neq 0$ ... p.es. per $q \neq 0$.)

$$z_u = p x_u + p_u x + \cancel{q_u} x_v - \cancel{q}(a x_u + b x_v + c x) =$$

$$= (p - a\cancel{q}) x_u - b\cancel{q} x_v + (p_u - c\cancel{q}) x$$

$$z_v = p x_v + p_v x + \cancel{q} x_{vv}$$

$$z_{uv} = (p_v - a_v) x_u + (\ldots - b_v) x_v + (p_{uv} - c_v) x + (a^2 q - a p) x_u + (\ldots) x_v$$

$$+ (a b q - b p) x_v + (a c q - c p) x - b x_{vv} + (p_u - c) x_v.$$

Quindi — Il caso $q = 0$ non ha interesse: si moltiplica solo x: le x per tutti i lati: i trasf. moltiplicativi che sono nell'eq. in z

$$\cancel{z_{uv}} + \frac{bq - q_u}{q} z_v = \text{comb. lin. } (x\ x_u\ x_v) = \alpha x_u + \beta x_v + \gamma x. \ (\text{coeff. ...})$$

Sostituendo $\frac{\alpha z_u}{p-aq}$ viene ... $z = aqx + qx_v = q(x_v + ax)$

$$z_{uv} + \frac{bq-q_u}{q} z_v - \frac{\alpha z_u}{p-aq} \quad \int x + \gamma x_v \text{ per } x = \vartheta$$

Il 1° membro si annulla per $x = \vartheta$ [illegible] $\frac{z}{\vartheta}$ si riduce a [illegible] z_{uv}) : è una espr. $\delta x + \ldots$ nulla per $x = \vartheta$. Poi (v. sopra) vale mz. Dunque

$$z_{uv} + \frac{bq-q_u}{q} z_v - \frac{\alpha z_u}{p-aq} = mz$$

q. di Laplace trasf. di Lévy della (1) mediante le soluz. ϑ.

1) Ci si può domandare se la divisione è lecita. No, solo se $p - aq = 0$. Allora $z = q(ax + x_v)$ è a meno del fattore q la trasf. di Laplace $x^{(1)}$ di x cioè $z = qx^{(1)}$. Ora poichè $h = 0$ (infatti $a\vartheta + \vartheta_v = 0$ dà $a_u\vartheta - b\vartheta_v + c\vartheta = 0$ ossia $(a_u - c)\vartheta - b\vartheta_v = 0$ che con le precedenti dà $h = 0$) e quindi $x^{(1)}$ è tale che $x^{(1)}_u + bx^{(1)} = 0$ cioè $\left(\frac{z}{q}\right)_u + b\frac{z}{q} = 0$. Dunque se è $h = 0$ e si sceglie ϑ tale che $a - \frac{\vartheta_v}{\vartheta} = c$ le trasf. di Lévy

1) Ci si può domandare se la divisione sia lecita. [illegible] rispondendo alla questione. il risultato vale sempre poichè se $p = aq$ è $y = aqx + qx_v = q(x_v + ax)$ e questo soddisfa a meno del fattore q la trasformata di Laplace nel senso delle v. ... equazione del 1° ordine.

Le due esistono ... (u, v) tali che $\lambda z + \mu z_u + \nu z_v + \ldots$ per ogni x soluz. ... sostituendo a ogni z la sua espressione si viene ad avere relazioni del tipo $Ax + Bx_u + Cx_v + Dx_{uv} = 0$ soddisfatta da tutte le soluz. di (1). Accade che tale relaz. è soddisfatta identicamente, cioè $A = B = C = D = 0$. Infatti, x, x_u, x_v, x_{uv} si possono dare ad arbitrio per $u = u_0$, $v = v_0$ (assegnando cioè $\varphi(u_0), \psi(v_0), \varphi'(u_0), \psi'(v_0), \psi''(v_0)$). Dunque $A(u_0 v_0)$ ecc. $= 0$ e ciò vale per tutte le u_0, v_0. Scrivendo ciò viene dunque

$$\lambda(px + qx_v) +$$

$$\mu\{(p-aq)x_u + (q_u - bq)x_v + (p_u - cq)x\} + \nu\{\ldots\} + \rho\{\ldots\} =$$

vanno a zero i coeff. di x ecc.: ma le eq. lin. in λ, μ, ν, ρ ... con $\lambda\, \mu\, \nu\, \rho$ non tutti nulli. Quindi è nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 1 & 0 \\ p_u - cq & p - a & -b & 0 \\ p_v & 0 & p & 1 \\ p_{uv} - c_v + ac - cp \; (+bp_v) & p_v - a_v + a^2 - ap & -b_v + ab - bp + p_v - c & -b \end{vmatrix}$$

Aggiungendo alla 4ª linea la 2ª × b viene

$$\begin{vmatrix} p & \cdot & 1 \\ p_u - c & p - a & -b \\ p_{uv} - c_v + ac - cp + bp_v & p_v - a_v + a^2 - ap & -b_v + ab + p c - c \end{vmatrix} = 0$$

dove aggiungo alla 3^a la 2^a × a. Sviluppo

$p(p-a)(p_u - b_v \cancel{\dots}) + bp(p_v - a_v) + (p_u - c)(p_v - a_v)$

$-(p-a)(p_{uv} - c_v - \cancel{\dots} + bp_v + a p_u) = 0$ cioè

$(p-a)^2 p_u - (p-a)(bp)_v + (p_u - c + bp)(p_v - a_v) = 0$ cioè

$-(p-a)(p_u - c)_v$

$$p_u = \left[\frac{(p_u + bp - c)}{p-a}\right]_v \qquad (2)$$

Viceversa il ragion. è invertibile e la (2) è sufficiente.

ove le divisioni per $p-a$ si può ritenere lecite poiché per $p = a$ trovo la trasf. di Laplace - caso già noto.

D'altro lato cerchiamo quand'è che $px + qx_v = 0$ soddisfa per integr. di (1). cioè quando esiste la Lévy della (1) per cui dunque $px + x_v = 0$. (α)

$x_{uv} + a x_u + b x_v + cx = 0.$

Derivando la (α) rispetto a u: $p_u x + p x_u = a x_u + b x_v + cx$ cioè

$p_u x + p x_u = a x_u - bpx + cx$ cioè

$\cancel{x_u}(p-a) x_u + (p_u + bp - c) x = 0.$

e le cond. di compat. di (α) e (β) è

$$p_u = \left(\frac{p_u + bp - c}{p-a}\right)_v$$ come sopra. Viceversa allora

viene ad (α) e (β) soddisfatte anche (1) che ne consegue.

Il teor.^a di Lévy è dunque dimostrato.

[Al suo enunciato fa eccezione il solo caso delle trasf. di Laplace con $h = 0$ perché allora $z = x''$ soddisfa eq. di 1° ordine anziché 2°]

Facciamo un'oss.^ne sulle composizioni delle trasf. di Lévy con quelle di Laplace: parto da x e ~~costruisco~~ faccio la trasf. di Lévy, in z nel senso delle u mediante soluz. ϑ; oppure faccio trasf. di Laplace nel senso delle u, seguita da trasf. di Lévy nel senso delle v per mezzo di ϑ^{-1}. Ottengo le due volte la stessa eq.^ne (a meno di trasf. moltiplicative). Invero le

$Z = \cancel{\dots}\, \vartheta_u x - \vartheta x_u$ (a seconda delle linee le linee qui sotto cancellate)

e l'eq. alle 2 eq. è Z ha $Z = -\vartheta^{(-1)} x^{(-1)}_v + \vartheta^{(-1)}_v x^{(-1)}$

ove $x^{(-1)} = x_u + bx$; $\vartheta^{(-1)} = \vartheta_u + b\vartheta$ e quindi

$$-Z = \vartheta_u(b_v x - a x_u - cx) + b\vartheta(b_v x - a x_u - cx) - (b_v\vartheta - a\vartheta_u - c\vartheta)x_u - (b_v\vartheta - a\vartheta_u - c\vartheta) bx =$$

$$= -k\vartheta x_u + x\{\vartheta_u b_v - c\vartheta_u + \cancel{\dots} + ab\vartheta_u\}$$ cioè

$$Z = k(\vartheta x_u - \vartheta_u x).$$

Se invece prendo $T = \vartheta^{(1)}_v x_1' - \vartheta_1 x_u'$ (cioè trasf. di Lap. nel senso v e poi di Lévy nel senso u, mediante $\vartheta^{(1)}$) ~~cioè~~

$T = (a_u\vartheta - b\vartheta_u - c\vartheta) x_v + (a_u\vartheta - b\vartheta_v - c\vartheta) a x - \vartheta_v(a_u x - b x_v - cx)$
$- a\vartheta(a_u x - b x_v - cx) =$

~~$= h\,\partial x_v + x\,(a\,d_u\partial - ab\,\partial_v - ac\,\partial - a_u\partial_v + c\,\partial_v$~~

~~$- c a_v\,\partial + a\,(\partial)$~~

~~$= h\,(\partial x_v - \partial v\, x)$~~

verrebbe analogamente la trasf. di Lévy nel mondo delle

tesi V.

Sup. ai rappresentanti più eq. di Laplace. Non più di 3 lin. ind. (se no ~~eliminando x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} verrebbe una eq. del 1° ordine~~ lo spazio 2-tg. avrebbe dim. < 2 contro cont. (o de tg.).

Se 3, sono risolubili risp. alle d. 2° perchè il piano 2-tg. è tangente si può ritenere ind. da $x\ x_u\ x_v$ lin. ind. supporto S_3.

Allora $x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} = (x\ x_u\ x_v)$. sull'eq. alle ast.

$L = M = N = 0$: le ast. sono indeterminate. Rapp. la sup. in coord. cart. ~~lineari~~ $(x\,y\,z\,1)$ e $z = z(x\,y)$ l'eq. alle ast. è (usando le ~~nome~~ L, M, N $\quad L\,dx^2 + \dots = 0$ ove

$$L = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & r \\ 1 & \cdot & p \\ \cdot & 1 & q \end{vmatrix} = -r, \quad M = -s, \quad N = -t. \quad \text{ho}$$

$r\,dx^2 \dots = 0$ cui $r = s = t = 0$ cui 2 lineare: cui

piano. Si ha così solo i piani. In S_4, F si pensi alle In S_5 i piani, ste in ∞S_3, ecc. ecc.

Stè allora F rappr. 2 eq. di Lap. (S_3 osc.). Dico che stà

in S_3 "o è sviluppabile" Accettiamo intanto che quanti [illegible] ostano con machine in S_n le ug. del tg. e C o per S_3.

vanno bene. Per svil. di tg. a $y(u)$ ho $x = y(u) + v\,y'(u)$.

$x_u = (y' \cdot y'')$, $x_v = y'$. $x_{uu} = y'' + v\,y'''$, $x_{uv} = y''$, $x_{vv} = 0$: tutti stan nello S_3 $\ y\,y'\,y''\,y'''$: per svil. con vC (ost.) ~~xxx~~ $y(u)$ ho

$x_u = y'$, $x_v = C$, $x_{uu} = y''$, $x_{uv} = 0$, $x_{vv} = 0$: S_3 $\ C\,y\,y'\,y''$. Per

è evidente poi che i derivati di x non possono uscire dello S_3 ambiente

sup. di S_3 ~~x le 2 sost. di ast. no già da vedere da cui~~

~~posti in principio~~ ... : ~~resta solo a~~ verificare per il caso di sup. di

S_3 a curvatura costante ~~con~~ cioè a punti parabolici ~~che per $z = z(xy)$ in ogni pt. S~~ ~~(v. qui p. 8)~~. ~~i parabolici tr.~~ ~~provo che allora F è sviluppabile.~~

~~[illegible] ... per le svil. di S_n.~~

Per la dimostr. del teor.[o] suppongo F in S_4, e lo rimetto per

esempio per x, y, z, t coord. non omogenee. ($x\,y$ come parametri*) avrò (i.e. le coord. ho

e pure poste in S_3 (ipotesi) pt. e suoi derivati ..., cioè le stesse

$$\left\|\begin{array}{cccccc} x & x_u & x_v & 0 & 0 & 0 \\ y & y_u & y_v & 0 & 0 & 0 \\ z & z_u & z_v & z_{xx} & z_{xy} & z_{yy} \\ t & t_u & t_v & t_{xx} & t_{xy} & t_{yy} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| = 0$$

cioè come si ricava succesivamente che

$$\left\|\begin{array}{ccc} z_{xx} & z_{xy} & z_{yy} \\ t_{xx} & t_{xy} & t_{yy} \end{array}\right\| = 0$$

* basta poi di ricavare u e v da $x = x(u,v)$ $y = y(u,v)$ e per sostituire

o) è la dimostr. di Segre. Su una classe ... Torino Atti 1907.

Dico intanto che F è in S_3 ovvero $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=0$ (e così analog. per t). In fatti in una vale la eq. scritta. z_x e z_y non funz. indip. Dunque la relaz. indica che $t_x = f(z_x)$, $z_y = g(z_y)$. da cui (*) $t_{xy} = f'(z_x)z_{xy} = g'(z_y)z_{xy}$. Se $z_{xy}\neq 0$ viene $f'(z_x)=g'(z_y)$ che essendo legati z_x e z_y sono i 2 membri con le derivate costanti e una costante $=c$. Allora $t_x = cz_x + d$. $t_y = cz_y + e$ (d, e costanti) ~~$t-cz$ a derivate costanti è una costante~~ Quindi a meno di costante additiva. Sarà $t = cz + dx + ey + f$ (f costante). cioè F è in S_3 che ha questa equaz. Se $z_{xy}=0$ e similm. per (*) $t_{xy}=0$ ho $z = \alpha(x)+\beta(y)$. $t = \gamma(x)+\delta(y)$ con $\alpha''\neq 0$ (= z_{xx}, non nullo $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=0$). e analoghe. La ‖ ‖ dà $\alpha''\delta''-\beta''\gamma''=0$ cioè

$$\frac{\alpha''(x)}{\gamma''(x)} = \frac{\beta''(y)}{\delta''(y)} = c \quad \text{da cui} \quad \alpha = c\gamma + dx + e. \quad \beta = c\delta + fy + g$$

(coeff. cost.) e $y = cz + dx + fy + e + g$. ho ancora F in S_3. — Dunque, se chiamo F in S_3, viene $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=0$ (e anal. per t). Ora $x\,y\,z\,1$ sono coord. del pt. [illegible] di $x\,y\,z\,t\,1$ da vista di [illegible] (and.ª [illegible] opposta. Il modello rappresenta, essendo gli el.ti di riferimento arbitrari punti; se F non è in S_3, ogni sup. in S_3 è tale che [illegible]

cioè $z = f(x,y)$ ha $rt-s^2=0$. Reciprocamente ha questa proprietà. Le svil. cioè $rt-s^2=0$, in S_3, caratterizzano le svil.^{te} (vale a dire le sup. di S_3 a pt. tutti parab.^{ci} sono le svil. v. p. 8 verso la fine). Davvero, tale sup. ha solo ∞^1 piani tg. (eq.^{ne} di un tal piano $p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0$ con coord. $p, q, -1, -px-qy+z$. ; cond. perché ∞^1

$$\begin{Vmatrix} r & s & -p-rx-sy+p \\ s & t & -sx-ty-q+q \end{Vmatrix}=0 \text{ che si riduce a } rt-s^2=0).$$

Ora se ogni S_3 una tale [illegible] è necessariamente sviluppabile. Invero ogni [illegible] tale [illegible] punto [illegible] ho che considerando per ogni S_3 [illegible] tg. [illegible] non [illegible] par. lineari; ~~[illegible] $\Sigma(v)$ tg. [illegible]~~ $(\Sigma\, x_1) = (\Sigma\, x_n)$: [illegible] $\Sigma = \Sigma(v, \lambda, \ldots)$ ~~Allora~~ Dunque ogni Σ per S_3 passa per $(\Sigma\, x_r)=0$. Se [illegible] $(\Sigma\, x_{nn}) = (\Sigma\, x_{nr}) = c$. ~~Allora per l'indip.~~ x_{nn}, x_{nr} [illegible] di x, x_n, x_r ho $x_{nn} = ax + bx_n + cx_r$. Facendo [illegible] $x_{nr} = Ax + Bx_n + Cx_r$

$(x\,x_n\,x_r) + C\,x_{rr} = (x, x_n, x_r)$ e [illegible] la 3ª eq. della sup. [illegible] $C=0$. Allora x x_n x_{nn} sono allineati e (v. I p [illegible] se in S_n i pt. $x \ldots x^{(k)}$ [illegible] S_k [illegible] S_{k-1} (o [illegible])). Le linee u sono rette. Ho così [illegible] rigate con piani tg. fissi cioè (v. I p. 67: rigate a generatrici tutte sing.) sviluppabili (c.d.d.). Ricordiamo prima che F di S_4 a punti gen. svil. è svil. ~~Se F~~ Provo intanto F rigata; se uno [illegible] per ogni punto [illegible] la ogni linea piana in retta di F' [illegible] piana. Siano pt. di S_4 e F generici O e P, sup. OP [illegible] nel piano di qualche linea piana di F (per P). Allora punti F di P su S_3, le linee piane di F per P si proiettano in rette di punti

~~F_0 : i pu g_i O_0 (pun. di O) passeranno quindi tante rette (anzi le rette di F_0 riempirebbero tutto lo spazio, che è assurdo.*) Ora perciò che se O_0 p F è invece F, si pr. l'generica svil. circ. a γ'. Dunque ogni gen.^{a} di F il pt. P che si proietta in P' dove g' tocca γ'. Se g^* tocca e t^* tg. in P a γ va bene, e tutto è dimostrato: se no il piano tg. a F in P è $\equiv g\,t$, che non per O (poichè g e t si proiettano in g'). Dunque per O passa un piano tg. a F in pt. di g. E così per ogni g. Ma ciò è assurdo perchè i piani tg. a F lungo g costituiscono (al più) V_3 che non può riempire S_4. — Se poi l'generica è cono,~~

~~* Poichè perciò F_0 contenendo almeno una segnata di ogni di quelle rette~~

Ma qui applico ragionamento valido in S_n. Le gen.^{e} di sono rette: perciò che posso prendere su ognuna un punto $x_u + \rho x$ tale che o è fisso, o descrive linea toccata da ogni generatrice. Effettivamente consideriamo $x_u - C x$, devo provare

dato

1° che ~~descrive o~~ è fisso per linea anzi che al variare di u si ha $x_{uu} - C x_u - C_u x = \lambda (x_u - C x)$

e poi identificando con le 1^e eq. di hyp.

$$\begin{cases} C_u - \lambda C = a. \\ C + \lambda = b \end{cases}$$

e poichè tr. si descrive curva toccata da $x\,x_u$ son allora $x, x_u, x_{uv} - C x_v - C_v x$ (e vale anche se $x_u - Cx$ è fisso. allora ....) : e questa viene de le 2^e eq. di hyp. Quanto alla cond. di dipen. ne risulta anc. e ult. $C_u - (b-C)C = a$. Ora la cond. di integrabilità è

$A x_u + B(a x + b x_u) + C(A x + B x_u + C x_v) + A_u x + B_u x_u + C_u x_v =$
$a x_v + b(\dots C x_v) \dots$ e il termine in x_v dà proprio quella cond. È così dimostr. che F di S_n con ∞^1 piani tangenti è sviluppabile. [ci scrivo perciò come lemma]

Intanto ne consegue che F' di S_3 è sviluppabile.

Resta a dimostr.: se F di S_4 è a pesi. generica svil. è svil." Inversa, perciò O la linea γ di F che si proietta in g' è a piani tg. in S_3 per O: quindi in ogni S_3^{Σ} per Π, vi è (tenendo in O) linea γ con se variando Σ è fissa, i piani tg. e F nei pt. di γ stanno in $\infty\, S_3$. Dunque in S_4 e per tutti i Σ:

Tanto vi sarebbe qui della dimostr. di hyp.

piani tgt

Ogni pt. di F passa una linea con piano tg. fisso e si applica il teor.a di sopra. Se no, variando Σ ho ∞^1 linee γ su F per P, che ricoprono F: quindi per ciascun punto Q ne passa una. Allora i piani tg. di F in P e Q stanno in S_3: F è sup. tale che i suoi piani tangenti a due a due stanno in S_3. quindi per il lemma che segue sta in S_3. ma F per ora non sta in S_3 (se no già era trattato dopo avendo). * Tutto è così dimostrato. Analoga- ~~per de S_4 a S_5 ecc. ecc.~~ * sebbene si possa ampli: cazioni si passa a S_{n}. (da S_n..)

Lemma (già applicato): sup. di cui ∞^4 a due a due stiano in retta sta in S_3 (spiegazione dell'ugu. con sup. di Veronese. Prendiamo che C le cui tg. incontrano piano fisso sta in S_3 per una (come anche è intuitivo immaginando C come poligonale..)

*[In S_n avrei che ogni ~~$\mathrm{sp.}^{\mathrm{no}}$~~ S_3 per piano tg. contiene una linea γ. Ogni $\mathrm{sp.}$ per punto P ne ha ∞ ↑ ~~$n-3$~~ $n-3$ ~~...~~: se le rette tra γ ne ∞^i a $i \leq n-3$ ognuna passa da ∞ ↑ $n-3-i$ $\mathrm{sp.}^{\mathrm{ni}}$. Per Q ne una passa per ~~...~~ ∞^{i-1} curve γ: cioè ognuna ∞ ↑ $n-3-i+i-1 = \infty^{n-4}$ $\mathrm{sp.}^{\mathrm{ni}}$ che contengono il suo S_2 e quello di P: cioè stanno in spazio per cui ∞^{n-4} $\mathrm{sp.}^{\mathrm{ni}}$ (almeno) il detto è S_{n-4} (almeno) cui detti spazi è S_3 al più ecc.].

Rispetto da $(x\, x_u) = (ABC)$ (ABC cost.) si ridurrebbe
$(x\, x_u\, x_{uu})$ i.d.
$(\ldots x_{uuu}) =$ i.d.
$(\ldots x_{uuuu}) =$ i.d.

Supponi ABC (x per ~~...~~ di pt. v π ..., tg. eq. in {ancora ognuno}). Sia $(x\, x_u\, x_{uu}\, x_{uuu}\, x_{uuuu}) = 0$. e C sta in S_3: dal piano fisso le tracce delle tg. stanno in una, e quindi vi sta tutto il piano fisso. Fa eccezione solo se quelle tracce sono allineate ma allora con ragion. analogo vedi che C è piana: ma e piano fisso avendo in comune rette stanno in S_3. — Quindi per P su F ogni C di F per esso sta in S_3 con piano fisso: variando C per P lo S_3 è sempre lo stesso c.d.d.

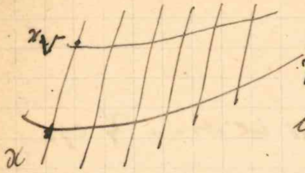
Messi da parte questi casi; studiamo le sup. Φ rappresentanti eq. di Laplace. Ogni sup. di S_4 è tale (salvo n.. rigate in S_4): da S_5 in su ~~non ogni~~. Studierò (salvo avviso in contrario) le non parabolici (rettilinee): quindi ridotto l'eq. già ridotta a forma

(1) $x_{uv} + a\, x_u + b\, x_v + c\, x = 0$.

Le linee u e v si chiamano linee caratteristiche. Applicare sup. Φ (sott. non paraboliche) già Φ è ... e allora ... possiede due ... (u, v) tali che le tg. alle linee u nei pt. di una linea v formino rigata sviluppabile (allora avremo anche dicesi). ...

a vede (1) considero le rigate della figura e un certo

luogo di $x_{\bar v}(\bar u, \bar v)$ - Segue a (1)



$\bar v$ = cost la linea (x e $(x_{\bar v})$) un rispettiva

luogo in modo che tg. corrispond. si incontrano

per $x\, x_{\bar v}$, $x_{\bar v}$ [illegible] sono legati lin.: quindi (I 515).

$x\, x_{\bar v}$ descrive una sviluppabile. Nel seguente è invertibile:

quindi vale il viceversa. - Notiamo anche che segue a quella

dualità ($t|u$, $x|x_{\bar v}$, $y|x$, $a|a$) il punto $x_{\bar v}$ e a x

è quello che descrive lo spigolo di regresso, o è dentro al

corrisp. (Notare che che le P_p vale dopo in particolare punti

doppi sistemi coniug. allo spigolo ordinario.

~~Il dop~~ Le curve di u, v si dicono doppio sistema

coniugato. - [illegible] le tangenti di S_3 e reticolo.

Trasf. di Lap. di una sup. Φ. Il luogo dei pt. $x_{\bar v}$ e x testé

notati è in generale una sup. (può anche in curva). E cosiddetta

$= x^{(1)}$, di trasf. di Lap. e si viene che quel pt descrive a una

volta - se le sup. non degen. - una altra sup. Φ, sia $\Phi^{(1)}$, ~~[illegible]~~

di Lap. della prima. Si ha anche $\Phi^{(-1)}$ ecc. e la trasf.

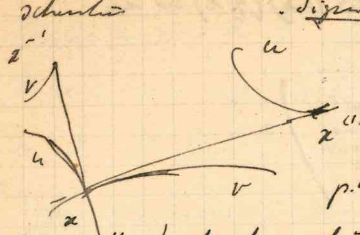
di Lap. si può interpretare come una trasf. (desunta a pri.

capire di quanto p.) di sup. Φ in altre sup. Φ. (o di reticolo)

Se $\Phi^{(1)}$ non degenera, la retta $x\,x^{(1)}$ la tocca in $x^{(1)}$ (per

$h\,x = x^{(1)}_u + b\,x^{(1)}$) e cosí si tocca la linea u: analoghi e [illegible]

schema



Significato geometrico degli invarianti

Osserviamo subito ~~[illegible]~~ il signi-

ficato geom. degli invarianti h e k.

p. es. di h. Anzi troveremo uno sign. per

la forma diff. $h\,du\,dv$. Il che è da aspettarsi, poiché le sup.

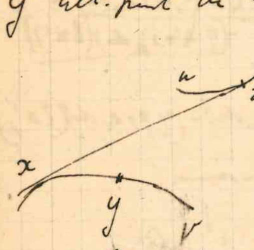
Φ, $\Phi^{(1)}$ [illegible] e u, v ecc. restano invarianti [illegible] $u = u(u')$.

$v = v(v')$. mentre $h' = h \frac{du}{du'} \frac{dv}{dv'}$; cioè $h\,du\,dv = h'\,du'\,dv'$ resta

invariato. Proiettiamo ~~[illegible]~~ mediante questione da uno S_{n-2}

arbitrario Σ i quattro punti x, $x^{(1)}$, y, $z^{(1)}$ indicando con

y ult. punt di linea v per x, e con ~~y~~ ~~il suo corrispondente~~



$z^{(1)}$ ult. punto di linea u per $x^{(1)}$.

Per $y \to x$, e $z^{(1)} \to x^{(1)}$ il birapporto

tende a zero (per $(ABAB) = 0$): cerchiamo

però il suo termine principale. Vale a dire riguardando y e rispettivamente

vicino a x del 1° ordine e $z^{(1)}$ id. $x^{(1)}$, cerchiamo l'infinitesimo

di ordine minimo nel birapporto $\Sigma(x\,y\,x^{(1)}\,z^{(1)})$. Dico

che esso è indip. da Σ, e vale $h\,du\,dv$ (cosicché il sign.

intuitivo di questo teor. ~~è~~ è questo: immag. y inf. vicino a

x, $z^{(1)}$ a $x^{(1)}$ allora i quattro punti sono allineati [illegible] tg. comune. - seguendo con questa la questione di ~~[illegible]~~ di [illegible]

che $(x\,y\,x^{(1)}\,z^{(1)})$: $h\,du\,dv$.) Dimostro $\Sigma \equiv (\xi, X) = (\eta, X) = 0$

in coord. cont. X

e se d..., dunque per ... è ... $-(\xi x)(\eta X) = 0$ ecc.

Dunque il birapp.^{to} è

$$\left(\frac{(\xi x)}{(\eta x)}, \frac{(\xi x^{(1)})}{(\eta x')}, \frac{(\xi y)}{(\eta y)}, \frac{(\xi z^{(1)})}{(\eta z^{(1)})}\right) =$$

$$\frac{\left(\frac{\xi y}{\eta y}-\frac{\xi x}{\eta x}\right)\left(\frac{\xi z'}{\eta z'}-\frac{\xi x'}{\eta x'}\right)}{\left(\frac{\xi z'}{\eta z'}-\frac{\xi x}{\eta x}\right)\left(\frac{\xi y}{\eta y}-\frac{\xi x'}{\eta x'}\right)} = \frac{(\eta x\,\xi y-\eta y\,\xi x)(\eta x'\,\xi z-\eta z\,\xi x')}{(\eta x\,\xi z'-\eta z'\,\xi x)(\eta x'\,\xi y-\eta y\,\xi x')} =$$

~~...~~ (e per $y = x + x_v\,dv$, $z^{(1)} = x^{(1)} + x^{(1)}_u\,du$) $=$
a meno di inf. di ordine sup. al 1° nei singoli parentesi)

$$= \frac{\left[(\eta x)(\xi, \cancel{x} + x_v\,dv) - (\eta, \cancel{x} + x_v\,dv)(\xi x)\right]\left[(\eta x')(\xi, \cancel{x'} + x'_u\,du) - (\eta, \cancel{x'} + x'_u\,du)(\xi x')\right]}{\left[(\eta x)(\xi, x' + x'_u\,du) - (\eta, x' + x'_u\,du)(\xi x)\right]\left[(\eta x')(\xi, x + x_v\,dv) - (\eta, x + x_v\,dv)(\xi x')\right]}$$

prendendo i termini d'ordine minimo e num. e denomin.

$$= \frac{(\eta x\,\xi x_v - \eta x_v\,\xi x)\,dv\,\left[\eta x'\,\xi x'_u - \eta x'_u\,\xi x'\right]du}{(\eta x\,\xi x' - \eta x'\,\xi x)^2}$$

$$= -\frac{(\eta x\,\xi x_v - \eta x_v\,\xi x)\,dv\,\left[(\eta x')(\xi, hx + \cancel{bx'}) - (\eta, hx + \cancel{bx'})(\xi x')\right]du}{\left[(\eta x)(\xi, x_v + \cancel{ax}) - (\eta, x_v + \cancel{ax})(\xi x)\right]^2}$$

$$= -\frac{dv\; h\left[(\eta, x_v + \cancel{ax})(\xi, hx) - h(\eta, x)(\xi\, x_v + \cancel{ax})\right]du}{(\eta x\,\xi x_v - \eta x_v\,\xi x)}$$

$=$ (si poi $x'_u = hx + bx'$) $= h\,du\,dv$

c.d.d.

Degenerazione di $\Phi^{(1)}$. A p. 16 si è visto che se $x^{(1)} = x_v + ax$ descrive una sup. (non degenere), essa è in relazione geom. semplice con Φ. Studiamo ora se $\Phi^{(1)}$ può degenerare in curva (o punto). Geom. si prevede che ciò possa avvenire in due modi: $\Phi^{(1)}$ sarà a p. 16 come luogo degli spigoli di regresso delle svil.^{li} circ. a Φ lungo le sue singole linee u (v = cost.): allora si può pensare che $\Phi^{(1)}$ degeneri o perché al variare di tali v = cost. lo spigolo di regresso non muti (darà il caso di Goursat) o perché ciascuno di essi degeneri in un punto (anzi quelle svil.^{li} saran coni; sarà il caso di Bompiani), o per l'avverarsi contemporaneamente delle due cose (caso misto) (le ragioni di queste denominazioni le vedremo forse più avanti parlando di casi di chiusura delle succ. di Laplace). Studiamo però presentemente il presentarsi di tali eventualità: sia dunque

(1) $\quad A x^{(1)}_u + B x^{(1)}_v + C x^{(1)} = 0$

che traduce che $\Phi^{(1)}$ non descrive una sup. Distinguo:

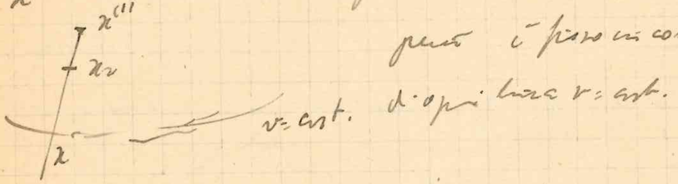
1° caso. $B = 0$. Da $hx = x^{(1)}_u + b x^{(1)}$ viene

$$A(hx - bx') + Cx' = 0.$$

Non può esservi legame lin. effettivo tra x e $x' = x_v + ax$ ($x^{(1)} \neq x$, se no Φ degenera). Dopo infatti, cioè $Ah = 0$, se $A \neq 0$ (se no (1) si riduce a $Cx' = 0$; se $C = 0$ la (1) svanirebbe, se $C \neq 0$ ho $x_v + ax = 0$ assurdo), dunque $h = 0$. Viceversa se ...

$h=0$ ho $x'_u + b x' = 0$ relaz. (1) del tipo richiesto.

Dunque al 1° caso si può giungere (immediatamente) quando è nel quando $h=0$, con le $x_{uv} \ldots = 0$ è integrabile, dal lato delle v, col metodo di Laplace. La degeneraz. di Φ''' avviene al modo di Borsopitano: perchè la $x'_u + b x' = 0$ mostra che il punto x' al variare di u è fisso, cioè dipende solo da v, e



punto è fisso in corrispondenza d'ogni linea v = cost.

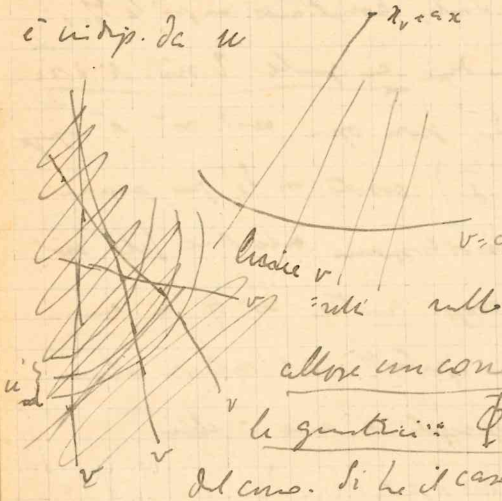
2° caso. $B \neq 0$. La (1) si scrive $A(hx - bx') + B(x_v + ax)_v + C(x_v + ax) = 0$ del tipo

(2) $\quad l x_{vv} + m x_v + n x = 0.$

dove $l = B \neq 0$. Dunque (p. 11) la Φ è sviluppabile; e poi le linee v sono rette, cioè le generatrici della sviluppabile, e il punto di contatto colla sua spigolo di regresso (o vertice di cono) è $x_v - Cx$ p. 12 ~~Φ~~ i ~~$x_v + ax$~~ qui scambi u con v e ho $x_{uv} = -a x_u - b x_v - cx$ (divente $-a$) è $x_v + ax$: cioè proprio il trasf. di Lap. x''. Dunque nel 2° caso Φ è una sviluppabile: le linee v sono le sue generatrici, e x'' è il punto di contatto d'ognuna di esse con lo spig. di regresso. Sia:

uno nel caso di Bourret, potendosi ritornare con $\mathcal{F}$ a partire da ogni linea u.

Osserviamo ancora ~~il caso~~ che se $B \neq 0$, e $h=0$ si ragiona come ora, e in più $x_v + ax = x'''$ verificando $x'_u + bx' = 0$ è indip. da u , e quindi il vertice per tutti i pt. d'una linea v = cost. [Basti consid. una]. Dopo è pure

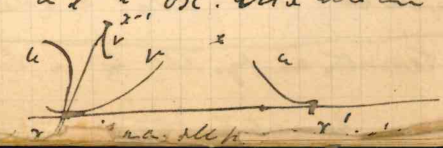


nullo sullo spazio. La sup. Φ è allora un cono, le linee v ne sono le generatrici: Φ''' si riduce al vertice del cono. Si ha il caso misto.

Un'oss.ne importante sulla trasf. di Laplace. Se Φ' non degenera: il piano tg. a Φ in x è osc. in x' alla linea u di Φ' (quindi ~~a~~ Φ in x^{-1} alla linea v di Φ^{-1}). Infatti ho che nello stesso piano osc. i x', x'_u, x'_{uu} osc.

$x' = (x x_v)$. $x'_u = hx - bx_v$, $x'_{uu} = (hx - bx_v)_u$ = $x\, x_u\, x_v$.

(Analog. il piano tg. a Φ'' in x'' è osc. in x alla linea v della Φ)



Congruenze di rette in S_n. - Così si chiamano i sist. ∞^2 ottenuti tirando le tangenti alle curve di un sistema di un reticolo.

Esse hanno Φ'': ~~quindi~~ (ove lo reticolo sia degenere): quindi con le cgr. della geom. ordinaria ammettono 2 falde focali: d'ordinario evidentemente degenere (e se si vuole, ampliando un po' le def., anche l'altra). Possiedono dunque anche quelle 2 sist. di svi-luppabili - A differenza di S_3, non ogni sist. ∞^2 è congruenza. - Cfr. ad esempio (p. 572. I) esercizio in S_4 per provare che le rette di cgr. di S_4 si sviluppano sulle due falde sist. con ^{e} si prova che se rapp. contiene ∞^2 $\mathfrak{F}$. in una altra è rapp. Φ. (e si potrebbe subito estendere al caso di rapp. che ha ∞^2 $\mathfrak{F}$. appoggiata a una o altre

$\lambda\, x\, \varrho\, \mu\, x_n$ dunque una $\|\lambda\, x\, \varrho\, \mu\, x_n$, ($)_n$ ($)_n\|$: o, rapp. è rapp. Φ. $\mathfrak{Z}$: le linee si avranno con cambiamento dopo trasf. di coordinate curvilinee).

È importante la nozione di ~~rapp.~~ Φ e cgr. K ~~...~~: ~~...~~ coniugate: per def. ciò avviene se per ogni pt. di Φ passa una r di K in modo che alle rette ~~~~ come del reticolo corrispondano i ~~~~ svilup-pabili (escludendosi i reticoli focali, che soddisfano ~~~~ a una cgr.).

Cgr. e reticoli coniugati. - ~~Se~~ Studiamo il problema di trovare tutti ~~~~ i reticoli coni. a data cgr. K. Sia la cgr. K ottenuta con l'uso delle $\mathfrak{F}$ a linee v di (a) a

(1) [illegible] ... [illegible] altra in [illegible]

ogni retta così $\mathfrak{Z} = x_v + \rho x$ in modo che $y\, y_n\, y_v\, y_{nv}$ siano legate tra. Sia in S_n: le x son rec. $\int$di (1): altrettanto le corrisp. $\mathfrak{Z}$. e dunque un $\int$di eq. analoga. Se imponiamo tali cond. a tutte gli $\int$di (1) sarà il caso di applicare il teor. di Lévy con $\rho = -\frac{\vartheta_v}{\vartheta}$ con ϑ $\int$di (1): qui l'ipotesi è meno restrittiva, ma le cond. è la stessa: inversa, facendo questo calcolo (v. p. 5) si vede che le x dovendo soddisfare a certe eq. del tipo (x non sa xv): ~~se queste~~ ~~è~~ ~~identica~~, si riesce ~~allora~~ la riduzione da tale eq. una identica, e si segue il teor.^{a} di Lévy. Ora dico che anche qui vale lo stesso: se sono sempre identiche (x) sulle $\int$di 2 eq. di forma tale da assicurarsi che è sviluppabile, con le linee v generatrici (v. p. 11 n/l): ma allora le cgr. K si ridurrebbe a ∞^1 rette. Quindi anche cgr. K come si è detto, si ottengono tutte ~~le~~ i reticoli coni.^{i} col teor.^{a} di Lévy ciò si $\mathfrak{Z} = x_v - \frac{\vartheta_v}{\vartheta} x$ con ϑ $\int$di (1). vew)

Si ha così una interpret. geom. sempl. del teor. di Lévy.

Ricerchiamo più avanti le cgr. coni.^{i} a reticolo. Ora di-scorriamo di

Reticolo a eq. armonica: quando ogni retta ~~[illegible]~~

(1) [illegible] a [illegible] le 2^e falde focali della cgr. ove tratta anche per congruenze a falde (anzi qui soltanto una falda) non degenere

delle cgr. che in piano tg. del reticolo, in modo che le ortogonali corrispondano alle curve del reticolo. (Il S_1 è la sezione duale di quella di coniugio)

Ciò posto, dimostr. che x (z) è coniug. a cgr. (xy) c.s. ~~tutte~~ z_{-1}, che su xx_u (e così z_1 anal. su yy_v); la cgr. (zz_{-1}) è armonica a (x) [e (zz_1) a y]

$z = x_v + px$ dico per l'eq. di (2) -v.p. 509 - ho $c = b$, ho

$$z_{-1} = z_u + bz.$$

Ma $z_u = -ax_u - bx_v - cx + px_u + p_u x$:

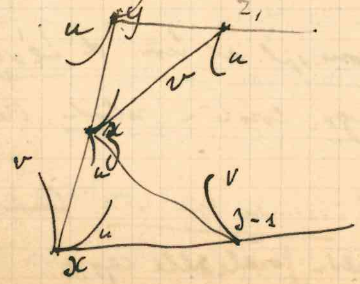
$$= (p_u - c)x + (p-a)x_u - bx_v$$

Onde

$$z_{-1} = (p_u - c)x + (p-a)x_u - \cancel{bx_v} + \cancel{bx_v} + bpx$$

$$= (p_u - c + bp)x + (p-a)x_u.$$

(che valore si semplificherebbe dicendo $p = -\frac{g_v}{g}$). z_{-1} è dunque xx_u. Vedi dopo la figura; per completare la quale noto che zz_{-1} è cgr. (di reticolo z), due le linee u, v sono caratt. ...



Ed è chiara l'armonicità enunciata c.d.d.

Ne possiamo dedurre la costruzione delle cgr. ~~armon~~ coniugate a un reticolo. Ha questo z; e $x(xy)$ la cgr. uscente. Riportandoci alle figure, cerco per (x). Avrò

$$(1)\begin{cases} y_u = \alpha z + \beta y \\ y_v = \gamma z'' + \delta y \end{cases}$$

con H, K

da cui $(\alpha z + \beta y)_v = (\gamma z'' + \delta y)_u$ con $(z_{uv} + Az_u \ldots = 0$ con

$$\alpha_v z + \alpha(z'' - Az) + \beta_v y + \beta(\gamma z' + \cancel{\delta y}) = \qquad z_u' = Hz - Bz'$$

$$\gamma_u z' + \gamma(Hz - Bz') + \delta_u y + \delta(\alpha z + \cancel{\beta y})$$

ed eg. per z, z', y non allineati, e quindi identica. Ne $\delta_u = \beta_v$. Posto $y = \lambda Y$ posso determinare λ in modo che nelle nuove (1) manchino i termini corrisp. a β, δ.

Avrò
$$\lambda_u Y + \lambda Y_u = \alpha z + \beta\lambda Y$$
$$\lambda_v Y + \lambda Y_v = \gamma z' + \delta\lambda Y$$
Basta per $\frac{\lambda_u}{\lambda} = \beta$, $\frac{\lambda_v}{\lambda} = \delta$

possibile per le precedenti. Con questo λ le (1) divent.

Da questo momento posso richiamare y il punto Y, e

$$\begin{cases} Y_u = Rz \\ Y_v = Sz'' \end{cases}$$ e da $(Rz)_v = (Sz')_u$ con

R, S numeri valori di a, y

$$R_v z + Rz_v = S_u(z_v + Az) + S(Hz - Bz_v - ABz)$$

viene $\begin{cases} R_v = AS_u + S(\cancel{H} - \cancel{AB}) \\ R = S_u - BS \end{cases}$ cioè $\begin{cases} R_v = AR + HS \\ R = S_u - BS \end{cases}$

Eliminando R ho

$S_{uv} - B S_v - B_v S - A R = H S$ cioè

$S_{uv} - B S_v - B_v S - A S_u + A B S = H S$ cioè

$S_{uv} - A S_u - B S_v + S(-A_u - AB + C - B_v) = 0$ (2)

cioè S ~~è aggiunta~~ è una soluzione dell'aggiunta dell'eq. cui soddisfa il reticolo (z). Noto S, come integrale dell'aggiunta, e quindi $R = S_u - BS$, Y si ha per quadrature (con costanti additive) dalle $\boxed{Y_u = R z. \quad Y_v = S z^{(1)} (3)}$ Allora (senza quadrature) x è determinato perchè deve essere il trasf. di Lap. di Y ... : ora l'eq. di Y è $Y_{uv} = R_v z + R z_v =$

$$\frac{R_v}{R} Y_u + R(z^{(1)} - Az) = \frac{R_v}{R} Y_u + \frac{R}{S} Y_v - A Y_u \quad \text{cioè}$$

$$Y_{uv} - \left(\frac{R_v}{R} - A\right) Y_u - \frac{R}{S} Y_v = 0. \quad \text{Quindi} \quad x = Y_u - \frac{R}{S} Y$$

$$= R z - \frac{R}{S} Y = \boxed{\cancel{Sz - Y}} \quad \boxed{Y - Sz}$$

Effettivamente le soluz. trovate vanno bene; perchè (Y) è in base alle (3), un reticolo, i cui sta sulle ... linee u, che costituiscono cgr. con.^{te} a (z) perchè u e v sono i par.^{tri} tanto dell'una coord.^{te} come della linea caratteristica c.d.d. Quindi per avere tutte le cgr. con^{te} a reticolo, basta prendere soluz. dell'eq. aggiunta a quella di Lap. rapp. del reticolo: e una quadratura si ha una falda focale. l'altra viene in termini finiti. (Se ... è una falda la altra ... $Y + C(S)$).

Trasformaz. di Koenigs-Moutard per i reticoli a inv. uguali:

Se (z) è reticolo a inv. uguali e (z y) congruenza ad esso coniugata, z', c.a. di ~~...~~ z rispetto a x.y ... un reticolo, ... reticolo a inv. uguali. (Teorema di Koenigs) Applico ... ricordando, dove ($z_{uv} + Cz = 0$ cioè) posso supporre $A = B = 0$. (quindi $R = S_u$ ~~...~~, $z^{(1)} = z_v$). Le (3) danno $Y_u = S_u z$. $Y_v = S z_v$.

e l'altro reticolo focale è dato da $x = \frac{S_u}{S}(Sz - y)$ ~~da cui~~

~~$Sz = \frac{S}{S_u} x + y$ Quindi $Sz' = \frac{S}{S_u} x$~~ o, mutando x per lettere posso ammettere $x = y - Sz$. cioè $Sz = y - x$

Quindi $z' = y + x = 2y - Sz$, da cui ($= z_v + x$)

$z'_u = 2 S_u z - S_u z - S z_u = S_u z - S z_u$.

$z'_v = 2 S z_v - S z_v - S_v z = S z_v - S_v z$.

da cui (p.es. dalla 1^a)

$$z'_{uv} = S_{uv} z + S_u z_v - S_v z_u - S z_{uv} = -\cancel{C} S z + S_u z_v - S_v z_u + \cancel{C} S z$$

$$= + S_u \frac{z'_v + \cancel{S_v z}}{S} - S_v \frac{-z'_u + \cancel{S_u z}}{S} \text{ cioè}$$

$z'_{uv} - \frac{S_v}{S} z'_u - \frac{S_u}{S} z'_v = 0$ $^{(x)}$ i cui invarianti, subito calcolati: risultano uguali.

Si noti che la precedente costruzione fa passare per mezzo di da ogni integrale S dell'aggiunta di $z_{uv} + Cz = 0$, cioè dell'eq. stessa ... una equazione a invarianti uguali (la x): fornisce cioè così una trasf. di eq. a cinv. = in un'altra eq. id. id., per rapporti opposti alle c. ~~Una~~ Tale trasf. si chiama di Moutard, e si può pensare in modo autonomo così: Parto da eq. $z_{uv} + Cz = 0$ a inv. uguali; sia S una soluz.; per ogni soluz. z ho

$$(S z_v - S_v z)_u + (S z_u - S_u z)_v = 0$$

[infatti $-\cancel{CSz} + \cancel{S_u z_v} - S_v z_u + \cancel{CSz} + S_v z_u - \cancel{S_u z_v} = 0$]

Dunque esiste y (per ogni z) definita a meno di cost. add. tale che

$$y_u = S z_u - S_u z = S^2 (z/S)_u$$

$$y_v = -(S z_v - S_v z) = -S^2 (z/S)_v$$

Quindi

$$\left(\frac{y_u}{S^2}\right)_v + \left(\frac{y_v}{S^2}\right)_u = 0 \quad \text{cioè} \quad 2\frac{y_{uv}}{S^2} - 2\frac{S_v}{S^3} y_u - 2\frac{S_u}{S^3} y_v = 0$$

cioè

(*) $y_{uv} - \frac{S_v}{S} y_u - \frac{S_u}{S} y_v = 0$

che è proprio la (*) dove ora le proprietà in questa è y aggiunta z'. A partire da ogni soluz. z della data, la trasf. fatta fa corrisp. una soluz. della trasformata (anzi ∞ soluzioni, visto che y è definita a meno di cost. add.).

La (*) si può ridurre, posto $y = Sy'$

$$-CSy' + Sy'_{uv} + S_v y'_u + S_u y'_v - \frac{S_v}{S}(S_u y' + S y'_u) - \frac{S_u}{S}(S_v y' + S y'_v)$$

cioè

$$y'_{uv} - \left(C + 2\frac{S_u S_v}{S^2}\right) y' = 0.$$

Il valore di C' per la trasf. di Moutard risulta allora

$$-\left(C + 2\frac{S_u S_v}{S^2}\right) = -\frac{(1/S)_{uv}}{1/S}$$

[infatti questo vale, col segno +

$$S\left(\frac{-S_u}{S^2}\right)_v = S\left(\frac{-S_{uv}}{S^2} + \frac{2S_u S_v}{S^3}\right) = S\left(\frac{CS}{S^2} + \frac{2S_u S_v}{S^3}\right) = C + 2\frac{S_u S_v}{S^2}$$]

Si può osservare che le soluz. per eq. a cinv. = e le sue trasf. di Moutard è reciproca. Cioè da questa si passa alla data: basta osservare che la trasf. è, per questa prop.

$$\frac{y'_{uv}}{y'} - \frac{(1/S)_{uv}}{1/S} = 0$$

quindi se $1/S$ è una sol.: facendo la trasf. mediante questa soluzione si va alla

$$\frac{\bar y_{uv}}{\bar y} - \frac{S_{uv}}{S} = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{\bar y_{uv}}{\bar y} + C = 0$$

~~$S\bar y_{uv} = S_{uv}\bar y$~~ che coincide con la data c.d.d.

Reticoli quadratici; congruenze quadratiche, trasf. di Ribaucour. Sono particolari dopo di rette ciascuna di applicabili a quadriche alle rette i reticoli di V_{n-1}^2 di S_n (V_{n-1}^2 di S_r non degeneri: sono immagini di congruenze, come si vedrà, W). Congr. quadr. è congr. le cui rette giacciono per intero nelle V_{n-1}^2.

La trasf. di Ribaucour consiste in questo: se (y) è un reticolo quadratico, le rette di ogni congr. K ad esso coniugata segano ulteriormente Q in un nuovo reticolo quadratico (y') ancora coniugato alla medesima congruenza. Si vede che K non sia quadratica, nelle stesse Q, poiché il teorema mancherebbe di senso.

Sia y reticolo di (uso coeff. a sx minuscoli)

$E(y)$ $\quad \eta_{uv} + a\,\eta_u + b\,\eta_v + c\,\eta = 0.$

e $K = (xy)$ come a p. 25 dove ($K = S_u - bS$)

$$(1)\qquad y_u = (S_u - bS)\,\eta, \quad y_v = S\,(\eta_v + a\,\eta).$$

S'avrà dall'aggiunta $S_{uv} - a\,S_u - bS_v + (c - a_u - b_v)\,S = 0.$

Sia y' il punto c. s. sia $y' = y + \lambda\,\eta$ dove se l'eq. di Q è $\Sigma y^2 = 0$ è

$$\Sigma (y + \lambda \eta)^2 = \Sigma y^2 + 2\lambda\,\Sigma y\eta = 0$$

che dà λ. ~~Ora poss. avere~~ $= -\dfrac{\Sigma y^2}{2\Sigma y\eta} = \dfrac{-Y}{Z}$ convenient. posto

$$y' = ~~(\Sigma y\eta)\,y - (\Sigma y^2)\,\eta~~ \quad Z\,y - Y\,\eta.$$

Ora osservo che

$$Y_u = 2\Sigma y y_u = (S_u - bS)\,2\Sigma y\eta = (S_u - bS)\,Z.$$

$$Z_v = 2\Sigma y_v \eta + 2\Sigma y \eta_v = 2\Sigma S(\eta_v + a\eta)\eta + 2\Sigma y\eta_v$$

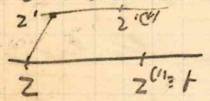
$$Y_v = 2\Sigma y y_v = 2\Sigma y\,S(\eta_v + a\eta) = S\,(Z_v + aZ)$$

quindi la 1ª e 2ª coincidono con le eq. (1) mutato η in Z; ricavando da una per eliminazione di η nell'eq. $E(y) = 0$ cui soddisfa y'; ne consegue che Y è sol. di $E(y)$; inoltre risulta dal nostro che (per la 1ª delle attuali e la 1ª delle (1))

$$\eta = \frac{Y_u}{S_u - bS}\,y - \frac{Y\,y_u}{S_u - bS} \quad \text{cioè} \quad (S_u - bS)\,\eta' = Y_u\,y - Y\,y_u$$

e pel teorema di Lévy (y') è proprio un reticolo con^{to} a (xy) c. d. d. (Note per me: se fosse $S_u - bS = 0$, v. le Note e più di pagine).

Congruenze quadratiche: loro trasf. di Ribaucour. — In V_{n-1}^2 può esistere congr.: le n-tice quadratiche. Se i suoi prodotti di una n-tice sono Z e Z^1, pos. $t = Z^{(1)}$, si trasformi (2) in (2') con trasf. di Ribaucour. Dico che la congr. ($Z'\,Z'^{(1)}$) è anche quadratica. Le si potrà considerare come trasf. di Rib. di t.



Note per me. Ora. $\eta = \dfrac{y_u}{T}$ (ove $T = S_u - bS$).

$y_v = S\left(\dfrac{y_u}{T}\right)_v + Sa\,\dfrac{y_u}{T}$ e così via. Se fosse $T = 0$, la $y_u = 0$ e y soddisfa a un'eq. del 1° ordine. Ho dispongo di una soluz. — Non approfondisco il caso.

z^2 | 83

ovvero $\Sigma z^2 = 0$ $\Sigma z^{(1)2} = 0$

ossia $\Sigma (z_v + a z)^2 = 0$ da cui

$\Sigma z_v^2 = 0$ (le $\Sigma z z_v = 0$ conseguenze delle prec.)

Viceversa $\Sigma z^2 = 0$, $\Sigma z_v^2 = 0$ sono sufficienti

Ora per quanto precede $z' = \Sigma y - y z$ ecc., ho

$$\Sigma z'^2 = \cancel{\Sigma (z y - y z)^2 = z^2 \Sigma y^2 - 2 y z \Sigma y \ldots}$$
$$= \cancel{z^2 y \ldots} = 0.$$

(già noto) Inoltre basta porre $\Sigma z_v'^2 = 0$ (...) ossia $\Sigma (z_v' + \bar{a} z')^2 = 0$ ~~ovvero~~ da $z^{(1)} = z_v + \bar{a} z$.)

Ora $z_v' = Z_v y - y_v z + Z y_v - y z_v = \cancel{(\Sigma y \ldots)} y - S(Z_v + aZ) z$

$$+ Z S(z_v + a z) - y z_v = \cancel{\ldots}$$

$$= \cancel{S a Z z} + S Z z_v + \cancel{S Z a z} - y z_v = (\Sigma y z_v) x + (S Z - y) z_v$$

$$= Z_v y - S Z_v z + (S Z - y) z_v.$$

Quindi $\Sigma z_v'^2 = Z_v^2 y - S Z_v^2 z + Z_v (S Z - y) Z_v = 0$

c. d. d.

[510] ~~Un esempio di~~ Le congruenze quadratiche in S_5: (le immagini delle superficie di S_3 come insieme delle loro rette tangenti) Siano ~~...~~ (x) sup. di S_3 riferite alle asintotiche (u, v) sappiamo che $L = N = 0$ cioè le superficie integrali di eq.

$$x_{uu} = (x\ x_u\ x_v) x$$
$$x_{vv} = (x\ x_u\ x_v) x$$

i coeff.ti delle eq. lineari non sono però qualunque: devono essere soddisfatte le cond. di integrabilità che si otterrebbero eguagliando i valori di ~~...~~ x_{uuvv}. Per esempio il coeff. di x_u nella 1ª, indichiamolo ora momentaneamente con l e quello di x_v nella 2ª, n, sono tali che $l_v = n_u$. Anzi si può porre $l = \vartheta_u$, $n = \vartheta_v$ e scrivere

[514]
$$\begin{cases} x_{uu} = \vartheta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x \\ x_{vv} = \gamma x_u + \vartheta_v x_v + p_{22} x. \end{cases}$$
| i chiamo che $\beta = 0 \equiv$ le u sono rette; così $\gamma = 0$. E ~~...~~ rigate

notazioni di Fubini; dove c'è ancora da tenere conto di altre cond. di integrabilità (v. Fubini e Cech).

La sup. ci nomi (?) . . . , le ∞^2 piani tangenti, ∞^1 fasci di rette tangenti che in S_5 danno una ∞^2 di rette. Dico che è una congruenza quadratica e che ~~le ...~~ i fuochi di ogni sua retta sono i due punti p e q immagini delle tangenti principali. Infatti considero per es. le coordinate $P = (x, x_u)$ delle tgti alle linee u. (in S_5 sono però le coordinate del punto p) — e analogamente le $Q = (x, x_v)$. Pongo x le P e Q per fattori: mi conviene scegliere come coordinate $p = e^{-\vartheta} P$; $q = e^{-\vartheta} Q$. Allora:

$$p_u = e^{-\vartheta} P_u - \vartheta_u e^{-\vartheta} P = e^{-\vartheta} \left\{ (x, \vartheta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x) - \overline{\vartheta_u (x\, x_u)} \right\} = \beta q$$

Analoghi calcoli:

$q_v = \gamma p$.

Quindi ~~[illegible]~~ in S_5,

le (...) (p), le (q) son tali che pq è tangente come inviluppo in p hu e in q hv cioè $p = q^{(1)}$.

La retta pq descrive dunque una congruenza nelle condizioni indicate.

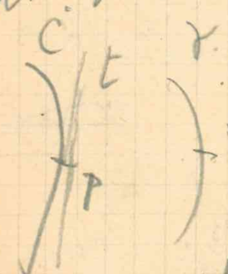
Oss.ne Se p.es. $\beta = 0$, ho $p_u = 0$ e quindi p descrive una linea: ciò avviene dunque se (x) è rigata. Se è quadrica, entrambe le falde (x) (y) sono costituite da linee[1].

Inversione del risultato precedente. Viceversa, prendo congruenze quadratiche (pq) su V_4^2 di S_5: dimostro che esse tagliano prima di un sistema che dovrebbe ricoprire già tutta la sup. Questa è dunque rigata.

1) ~~[illegible]~~ ~~Non sto a cercare se sono~~ Son questi i soli casi di degenerazione delle falde focali: ~~[illegible]~~ infatti ~~[illegible]~~ se i punti p sono ∞^1, ho solo ∞^1

si può sempre considerare al modo precedente come immagine di sup. di S_3 (ove i pt. della sua retta rappr. le rette tangenti, ecc. e i piani le tangenti asintotiche).

Invero, ricordiamo anzitutto che le rette tangenti a C di S_3 si rappresentano in pt. di γ di V_4^2 tale che le sue tangenti stanno su V_4^2 (vol I p.): è intuitivo che il fascio delle rette osculanti C in suo pt P danno i pt. di retta tangente a γ in T (dimostr.

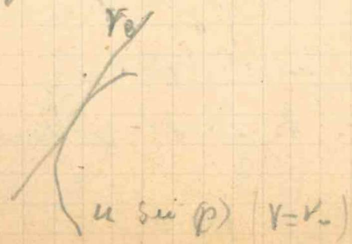


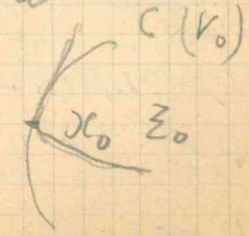
completa: Sia $(P) = x(u)$; il fascio delle osculatrici è individuato da $(x\,x')$, $(x\,x'')$ cui corrisponde T (immagine di $t = (x\,x')$) e $\frac{dT}{du} = (x\,x'')$. c.d.d.)

Ciò posto considero retta (u, v) della congruenza (ottenendo al solito da tangente p.es. a linee u di falda (p)). Sia r (~~[illegible]~~). Ad essa corrisponde

in S_3 con fascio (x, Ξ). Dimostro che
x descrive come sup (x) che è
proprio l'imm. richiesta; mi basta
far vedere che Ξ è il piano tg.
a (x) in x ~~[illegible]~~ Fisso i
valori di u, v $(u_0 v_0)$ viene γ_0 x_0, Ξ_0. Lascio
variare la sola u: γ inviluppa
su (p) una linea u [X]. ~~[illegible]~~
ai punti di essa corrisponde tangenti di linea v_0
~~[illegible]~~ $C(v_0)$ ~~(di S_3)~~ e per l'ass. proiett. alle ∞
proiez. di γ corrispondono gli ∞ fasci
delle rette osculanti C: in part.
che per $u = u_0$ viene il un fascio ~~[illegible]~~
~~$\Xi x_0 \Xi_0$ che coincide col fascio~~
~~delle~~ di osculat. di $C(u_0)$ ~~[illegible]~~ che, come
immag. di γ_0 è $(x_0 \Xi_0)$. Analogamente ne
viene che vi sono ∞ curve $D(v)$. E
$(x_0 \Xi_0)$ è il un fascio ~~[illegible]~~ di osculat. a $D(v_0)$
Dunque il pt. x_0 sta su $C(u_0)$ e $D(v_0)$

Il piano Ξ_0 coincide col piano osc. a
entrambe le curve in x_0. Ora le
∞^1 $C(u)$ ricoprono una sup che coincide
col luogo delle ∞^1 $D(v)$ (perchè per $C(u_0)$
e $D(v_0)$ son risultate incidenti: con $C(u_0)$
hanno punti a comune con tutte le $D(v)$ e
quindi sta sulla loro superficie basta ora
far variare u_0). Tutti i pt x stanno
su essa (p.es. x_0 s'è visto). E
Ξ_0 viene tangente a essa in x_0 (contiene
le ~~[illegible]~~ rette tg. alle $u = u_0$, $v = v_0$). Le
dimostr. provano anzi che le linee $C(u)$
e $D(v)$ cioè le u e v sono le asintotiche su (x); i
parametri u e v sono quelli delle ast. che
che i fascicoli siano le imm. delle tg.
ast. viene dal teor.a diretto





Oss. – Si è supposto nelle dim. fino qui per ... segnato ([x] a p. 36) che le falde focali non siano degeneri. Si son condotte variate (le parentesi c'è sup. rigate!). Bisognerà dimostrarlo solo ora ...

<u>I reticoli quadratici di S_5 e le cgr. W dello spazio ordinario</u> [513] – Si è visto l'interpret. in S_3 della cgr. quad. di S_5. Lo vedremo ora per i <u>reticoli</u>.

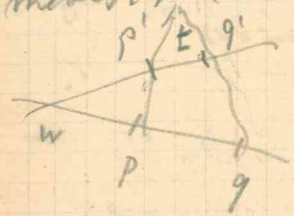
~~Di~~ Ogni sup. di V_4^2 dà congruenze di ... viceversa ~~i ret.~~ <u>le sup Φ, cioè i reticoli danno</u>, come ora si vedrà, le <u>cgr W</u> cioè quelle cgr. sulle cui falde si corrispondono le asintotiche.

Considero due sup (x) e (x') di S_3, falde di cgr. W e le rappresento come a p. 32 in cgr. quadratiche (pq) $(p'q')$ di S_5. Riferisco entrambe le sup. alle ast. u, v (lo posso fare

appunto perchè sono cgr. W). Avrò (pp. 33-34)

$$\left.\begin{array}{l} p_u = \beta q;\ q_v = \gamma p; \\ p'_u = \beta' q';\ q'_v = \gamma' p' \end{array}\right\} (1)$$

Suppongo da V_4^2 $\Sigma X^2 = 0$ (indicando ora con X le coord. in S_5 per non far confusione); le (1) non mutano perchè si tratta di sottoporre le p e q a una medesima sost. lin. a coeff. cost.



Le rette pq, $p'q'$ hanno in comune un pt w (uno delle tg xx' comune a (x) (x')): quindi pp' e qq' concorrono in t dove

$$t = lp + l'p' = mq + m'q' \quad (2)$$

Dimostro anzitutto che <u>cgr. W di S_3 dà in S_5 reticolo quadratico</u>

(Sulle V_4^2 ... [512]) ~~Suppongo per ipl.~~ ~~nessuna delle~~ le ~~falde entrambe non sviluppabili~~

Ho
$\Sigma p'^2 = \Sigma p q' = \Sigma q'^2 = 0$
e analoghe accentate; inoltre
$\Sigma q p_r = 0$ (3) [da $\Sigma p q_r + \Sigma p_r q$
$= 0$ dove il 1° addendo è $= 0$ per $(1)_2$).
Da (1)
$p' = -{}^{l}/_{l'}\, p + {}^{m}/_{l'}\, q + {}^{m'}/_{l'}\, q'$
[è $l' \neq 0$ se no $q q'$ passerebbe
per p, ~~passando~~ e ne verrebbe o
$q' \equiv W$, (o $q \equiv q'$ ~~Nella 1a alter~~ (che dà di nuovo q' supposizione $\equiv V$)
~~nativa~~ Ma allora le ~~tg. di~~ rette della
cgr. W in S_3 sarebbero tgti principali
di (x); ma allora, se si cercano
~~curve~~ p. es. come si è visto in ~~Leç~~
vol I p 71 i punti di cgr. di tgti
principali, si troverebbe che coinci-
dono [1] sarebbe dunque $x' \equiv x$ contro
l'hp] poichè $(x, x_u, \lambda x_u + \mu x_{uu}, \lambda x_v + \mu x_{uv}) = 0$
dà
$\mu (x, x_u, \beta x_v, \lambda x_v + \mu x_{uv}) = 0$, $\mu^2 = 0$

l'Hp che (x) e (x') siano distinte
~~Se $q \equiv q'$ la 2a falda sarebbe~~ ~~costituita da le direttrici un sistema di tgti principali e quindi anche di asintotiche in comune.~~
~~sviluppabile contro l'Hp.~~] Quindi da (1)
$q'_r = \gamma' \{ -{}^{l}/_{l'}\, p + {}^{m}/_{l'}\, q + {}^{m'}/_{l'}\, q' \}$
e formando la
~~$p'_u = (p + p')$~~,
$m q_u + m' q'_u = (q q', p, \cancel{p'}, \cancel{p_u}, \cancel{p'_u})$
da cui
$q'_u = -\frac{m}{m'} q_u \; + (p q q')$ ~~$+ c_1 p + c_2 q + c_3 q'$~~
~~[illegible]~~ Dalle ultime
due forme la cond. di integrabilità per
q'_{uv} viene
$(p, q, q) + (p_u) + (\;)\, (m q_u + m' q'_u)$
$= -\left(\frac{m}{m'}\right)_r q_u - \frac{m}{m'} \cancel{(\gamma p)_u} + (p q q')$
$+ (p r) + \cancel{(q_r q'_r)}$ che scrivo

$\left(\frac{m}{m'}\right)_v q_u = C_1 p_v + C_2 p + C_3 q + C_4 q'$ (x)

Se quindi anche × q e sommo viene (tenuto presente la (3))

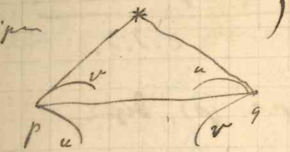
$$C_4 \sum q q' = 0.$$

ora dico che il 2° fattore è $\neq 0$; infatti se no (v. figura) le rette qq' (x) starebbe su V_4 che conterrebbe perciò tutto il piano $pqp'q'$ contenendone tre rette (xx): (vedi che pq, $p'q'$ sarebbero d'appoggio di fasci complanari o costellazioni che porterebbe $l \equiv l'$ o $x \equiv x'$ anche). Quindi $C_4 = 0$. Ma allora anche gli altri coeff^ti di (x) vanno a zero: se no verrebbero legati linearmente p, q, p_v, q_u: ciò porterebbe per i

xx) [distinte. Se fosse per $qq' \equiv p'q'$ verrebbe $w \equiv q$ escluso da p. 40]

x) [q determinato: se no (x) e (x') avrebbero in comune un sist^e di tg^ti principali, cioè di ast. e coinciderebbero]

piani tg^ti a (p) in p e (q) in q le coincidenze (v. questa figura) il che è assurdo. Quindi: per tutto



$\left(\frac{m}{m'}\right)_v = 0.$ Analog^te $\left(\frac{l}{l'}\right)_u = 0$

Perciò (assumendo $l_u : l'_u = l : l'$) $\quad t.$

$t_u = l p_u + l' p'_u + l_u p + l'_u p' = \vartheta(q, q') + \text{coeff.}\ \overline{(lp + l'p')}$

$= (q, q')$.

Analog. $t_v = (p, p')$ e poi $t_{uv} = (pp') + (p_u p'_u) = (pp'qq')$

Quindi t, t_u, t_v, t_{uv} son dati di punti complanari $pp'qq'$ e t descrive un reticolo ~~a~~ Esso è armonico ~~alle~~ le ~~linee u, v corrisp. alle asintotiche di (x) e (x') t.d.t.~~

~~Dalla 1^a parte si vede che (t) è armonico a (pq) e a (p'q') ciò si ricoperto~~

p.es. alle congr. $(p\,q)$ ~~pq~~

t il piano $t\, t_u\, t_v\, t_{uv} = pqp'q'$ cui pq sta nel piano tangente in t: inoltre le caratt. su (t) sono le u, v cui corrisp. le svil. di ~~(p) e q~~ (pq). Quindi, per il lemma p. 513 la retta $\neq p$ tocca in t la linea v di (t) e per costr. anche lo stesso avviene per $\neq p'q$. Quindi la retta pp' descrive una congr. (anche fuoco delle tg^ti a linee v del reticolo (t)) e i due reticoli (p) e (p') sono ad essa coniugati (perciò per dopp. di coniugi), cioè sono l'uno trasf^to di Ribaucour dell'altro: le congr. (pq) e $(p'q')$ id. id e si applica la oss. di p. 510 a dim. che ~~descrive~~ descrive un reticolo. Le linee caratt.

con.to p.es. a (pq) su le u, v avè corrispondenti le asintotiche di (x) (x') c.d.d.

Oss.ne - Se p.es. (x) è rigata e quindi p.es. (p) degenera in una curva, il ragionamento dovrebbe essere modificato ma il risultato sussisterebbe ancora.

Viceversa si potrebbe dimostrare che ogni reticolo (w) quadratico di S_5 è coniugato di una congruenza W di S_3: precisamente se (w) è tale ~~che~~ che le due congruenze di un'ipelde (quadr. delle tg. alle u e v) ~~stanno quadratiche~~, stiano nelle quadriche, si hanno le cgr. W per quanto detto (p. 35 e 38). Nel caso contrario, sappiamo già che le cgr. coniugate è quelle di un sist.a di tgti principali di una sup.: per tali cgr (e falde focali coincidenti p. 40) si considerano come congruenze W.

La teoria delle cgr. W di cui il problema fondamentale è "trovare le trasformanti cost. di data (x)" si potrebbe per questo procedere svolgere sistematicamente per mezzo delle trasf. di Ribaucour: cioè date (pq) e le sue cgr. trasf. di Ribaucour. Ormai manca il tempo di far esaurientemente questa teoria, ci limitiamo a trovare il teor.a fondamentale (Fubini): Data

(x) per trovare tutte le cgr. W che hanno per falde focali basta prendere A e B tali che sia

$$(F).\ \begin{cases} A_v + Bq = 0 \\ B_u + Ap = 0. \end{cases}$$

Allora ~~il sistem~~ ~~che~~ le tgti al sistema $\frac{du}{A} = \frac{dv}{B}$ descrivono la più generale congr. in questione. È da osservare che il sist. (F) è lo stesso a cui soddisfano $A = q$, $B = -p$ (pp. 33-35) [Dovendo per esempio w di S_5 essere un reticolo coniugato a (pq): pel teor.a di Lévy basta assumere $w = \cancel{Ap + Bq}\ lp + mp_u = Ap + Bq$ dove l e m sono da scegliere in modo che $lp + mp_u$ si annulli per una f part. dell'eq. di Laplace rappresentata dal retic. (p). Ora

(1) $p_u = \beta q$. $q_v = \gamma p$ da cui viene l'eq. del retic. (p) data il modo di prendere di tale eq. dipendente $q^{(*)}$ ~~(*)~~. Viceversa ~~se p sodd~~ se due fgg p^* e q^* soddisfano alle (1), p^* soddisfa all'eq. di p. Dunque può dirsi che $w = Ap + Bq$ che si annulla per $p = p^*$, $q = q^*$ con p^*, q^* soluz. di (1). Allora $w = q^* p - p^* q$ cui $A = q^*$, $B = -p^*$ cui soddisfano le (F) c.d.d.] 515

(*) Anche qui, anche per $\beta \neq 0$ cioè (x) non rigata, la cosa bisognerebbe modificare il seguente: si troverebbe che il risultato continua a valere.

Ess. se (xi) è Q $x_{uu} : x_{vv} = \beta = \gamma = 0$. Se
$A = A(u)$. $B = B(v)$: il sist.a coniugato delle linee
dalle eq.ni è $\dfrac{du}{A(u)} \cdot \dfrac{dv}{B(v)}$ ci $\alpha(u) = \beta(v) + \gamma$
(il più generale sistema isotermo coniugato).

p. 2. Per le eq. di L. $x_{uv} + a x_u + \dots = 0$ del tipo considerato enuncia senza dim. il seguente teor.^a di esistenza.[1] Supposte a, b, c funz. analitiche di u, v, svil.^li in serie di pot. di $u-u_0$, $v-v_0$, esiste uno e un solo integrale di (1), che svil.^le in serie di pot. di $u-u_0$, $v-v_0$ ~~1° per $u=u_0$, $v=v_0$ assume valori prefissati~~ [illegible] ~~x_0~~. 1° per $v=v_0$ ~~[illegible]~~ si riduce a una funzione analitica prefissata di u, cioè a $\varphi(u)$ e 2° per $u=u_0$ si rid. a $\psi(v)$, purchè sia $\varphi(u_0)=\psi(v_0)$. L'idea della dim. (almeno per quanto riguarda l'unicità) è questa. Dalla data ~~[illegible]~~, isolato x_{uv} a 1° membro si ~~può~~ ricava x_{uuv}, x_{uvv} in funz. lineare delle derivate inferiori, e così per ciascuna ogni successiva derivata *mista*, non però le derivate fatte rispetto a sola u o sola v. Quindi se vi è $\int$ soddisfacente alle condiz. richieste, ~~[illegible]~~ suo sviluppo in serie di potenze di u_0, v_0: i coeff.^ti dei termini $(u-u_0)^p(v-v_0)^q$ con p e q entrambi >0, essendo uguali alle

$$\frac{\partial^{p+q}x}{\partial u^p \partial v^q}$$

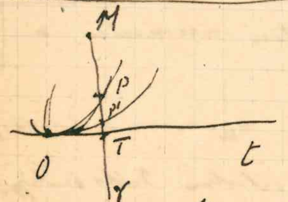
in $u=u_0$, $v=v_0$, a meno di fattori numerici, si calcolano per mezzo dei valori di: $x(u_0,v_0)$, $x_u(u_0,v_0)$ $x_v(u_0,v_0)$; invece i coeff.^ti dei termini $(u-u_0)^p$ p. es. si calcolano dallo sviluppo di $\varphi(u)$ in serie di potenze di $u-u_0$. (e così $x(u_0,v_0)$ $x_u(\ )$ $x_v(\ )$ da $\varphi(u_0)=\psi(v_0)$, $(\varphi'(u))_{u=u_0}$, $(\psi'(v))_{v=v_0}$). Dunque dai dati la soluzione è individuata: resterebbe a verificare che effettivamente lo

[1] v. p. es. Darboux. Th. d. surf. T. II (1^e éd. p. 92), e i teor. generali sui sistemi alle d. p.

sviluppo in serie così ottenuti è convergente, e verifica l'eq. data.

3. Viceversa, dal ragionamento che fornisce l'analitic... che se $Z = px + qx_v$ deve, per ogni soluz. di (1) soddisfare a un'altra eq. di Lap. 0 (i.e. $p = aq$ ...) Z a meno di una fun. moltiplicatore è trasf. di Laplace di x, oppure $px + qx_v$ si annulla per una soluz. di delle (1) con $Z = m(\ldots)(\partial_v x - \partial x_v)$.

18/ – Significato geom. di h/k. – Quando prende per valore ... che $h/k \left(= \frac{h\, du\, dv}{k\, du\, dv}\right)$ ha un signif. geom. Trovo ... un signif. geom. semplice ... negli invarianti di Segre (per curve piane) ... tangenti in un punto. Siano due γ e γ' tg in O a t



e sia M un punto generico del piano: conduco da esso trasv. prossima a O che sega $\gamma\, \gamma'\, t$ in punti; ... $O, P, P'T$: il lim $(MTP'P)$ per $r \to MO$ è indip. da M: è una funzione soltanto delle due curve tangenti in O: è un "invariante proiettivo di contatto" (inv. di Segre)(1). Basta mostrare ... Bompiani

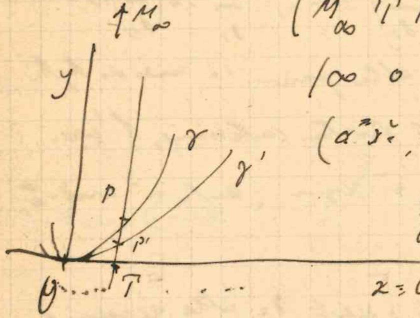
(1) Su alcuni punti singolari.... Rend. Lincei 1897 / Inv. proi. di contatto ... 1926.

che non vari variando M su una retta (potendosi ... da una proiez. di M a un'altra muoversi su una retta). Con proiez. mi riduco al caso in cui M si muova su r_∞. Allora per una data posiz. di M_∞ posto $O = 0$, $x = t$, $y = OM_\infty$: siano

$\gamma)\quad y = ax^2 + \ldots$

$\gamma')\quad y = a'x^2 + \ldots$

~~...~~ il birapp. è



$(M_\infty T P P')$ cioè prendo le ascisse

$(\infty\ 0\ a't^2 \ldots,\ at^2 \ldots)$:

$(a't^2 \ldots,\ at^2 \ldots,\ 0,\ \infty)$ cioè

$\frac{a't^2 \ldots}{at^2 \ldots}$ e il limite è a'/a. Ora variando M_∞ su r_∞

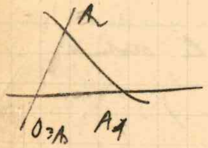
per mezzo proiez. porto altro in $X = t\ldots$, Y: le formule di trasf. (restando ... origine e asse x) ... con posto $\begin{cases} x = pX + qY \\ y = rY \end{cases}$ le nuove eq. sia $\gamma)\ Y = AX^2 \ldots$ $\gamma')\ Y = A'X^2 \ldots$

il nuovo limite è A'/A. Ora resta da vedere che $A'/A = a'/a$. Infatti la nuova eq. di γ si ha ... $rY = a(pX + qY)^2 \ldots$ sostituendo a Y la $AX^2 \ldots$ ... identicamente $r(AX^2 \ldots) = a(pX + q(AX^2 \ldots))^2 \ldots$ da cui $rA = ap^2$. $A/a = p^2/r = A'/a'$ c.d.d.

Oss. 1ª. Tale inv. proi. ha pure un significato metrico: è il rapporto delle curvature ~~secondarie~~ in O (infatti per γ ho curv. $= \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{2a}{1} = 2a$).

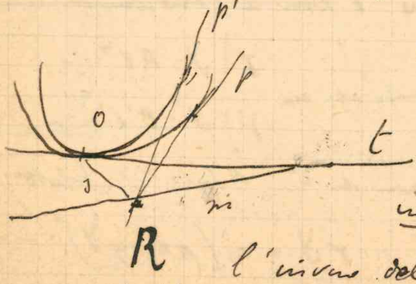
Oss. 2ª. - ~~Si ha pure un'inv. duale~~: ~~prese genericamente rette~~ ~~ma~~ le coord.te proi.ve omog. x_1, x_2, x_3, se il pt. di contatto è $O \equiv A_3$ e la tg. A_3A_1, le eq. di γ γ' sono del tipo (in coord. cart.)

$$(*)\quad \frac{x_2}{x_3} = a\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + \dots, \qquad \frac{x_2}{x_3} = a'\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + \dots$$



Prendendo ora un altro piano in modo che $A_1 A_2$ si proiettino all'∞, le coord. tr. diventano cartesiane, l'inv. definita con cerchi e quindi con l'ugual (cambio di coord-tr) a/a'.

Oss. 3ª - Si può definire inv.te duale [parto da retta generica m, e da un suo punto R prossimo a m t tiro tangenti p, p' (prossime a t): il lim (m, s, p, p') per $R \to m\,t$ è indip. e inv. duale] Dico che è



l'inverso dell'inv. punt. Possiamo ... come in Oss. 2ª e ~~infatti~~ procuriamo le eq. in coord. tg. di γ e γ' con gli sviluppi in serie in prossimità dell'origine.

$$\xi_3/\xi_2 = \alpha(\xi_1/\xi_2)^2 + \dots \quad \text{e} \quad \xi_3/\xi_2 = \alpha'(\xi_1/\xi_2)^2 + \dots$$

~~(...)~~ (Si devono usare valori sviluppi di tal fatto potrà (*) valere per curve tg. in A_3 a A_3A_1: qui ho curve tg. a a_1 in $(A_3 \equiv)\, a_2 a_1$, quindi devo ~~scambiare~~ sost. gli indici al 3 il 2, all'1 l'1 e quindi il 2 il 3. Ecco ...) Ma per semplicità $y = x_2/x_3$, $x = x_1/x_3$ ho (con coord. cart.) l'eq. della tg.

$$Y - y - (2ax + \dots)(X - x) = 0 \quad \text{donde}$$

$$\xi_1 = -(2ax + \dots). \quad \xi_2 = 1. \qquad \xi_3 = (2ax + \dots)x - y$$
$$= (2ax + \dots)x - (ax^2 + \dots).$$

Cioè

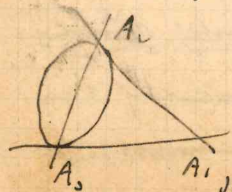
$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = -(2ax + \dots) \qquad \frac{\xi_3}{\xi_2} = ax^2 + \dots$$

Invertendo la prima ho $x = -\frac{1}{2a}\frac{\xi_1}{\xi_2} + \dots$ e quindi

$$\frac{\xi_3}{\xi_2} = a\left(\frac{1}{4a^2}\right)\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^2 + \dots \qquad \alpha = \frac{1}{4a}$$

Onde $\alpha/\alpha' = a'/a$ c.d.d.

Oss. 4ª. Siano γ e γ' due coniche bitangenti: il loro inv. di 2º grado p. es. puntuale è lo stesso, calcolato sull'uno o sull'altro punto di contatto. Infatti



rappresentandole con equazioni ho

γ) $a x_1^2 - x_2 x_3 = 0$ cioè $\frac{x_2}{x_3} = a\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2$

γ') $a' x_1^2 - x_2 x_3 = 0$. $\frac{x_2}{x_3} = a'\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2$

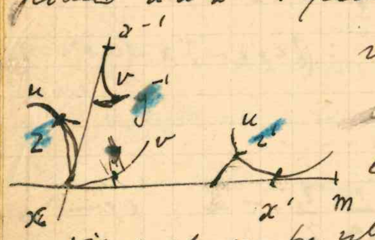
e ciò hanno lo stesso signif. di prima ~~...~~ rispetto al contatto in A_3.

L'invar. h legato a A_1 è a/a'; invece la stessa vale in A_2 c.v.d.

Oss. 5ª, Se per le due curve di cui sopra l'invar. di Segre vale 1, esse coincidono (ovvio!).[1]

Veniamo ora all'interpret. di h/k (Bompiani: La geom. delle superficie considerate nello spazio rigato. Rend. Lincei 1926). ~~[illegible]~~). Rifacciamoci alle oss. fatte di p. 21.

La linea u di Φ' per x ha contatto tripunto col piano $x x' x^{-1}$: quindi in tal piano possono (non nulle) prendersi una conica avente di contatto 3 punti con una linea (cioè contenente i 3 pt. vicini che essa ha nel piano stesso [i di dette per] [cioè molto sopra])



~~due coniche per x' con la stessa tgt e stessa osculatrici~~: determino la conica corrispondente di per per x^{-1} tocca dove la linea v di Φ^{-1} in $x x^{-1}$. Sia M tal conica. E sia N osc. in x^{-1} alla linea v e tg. in x' alla u.

Le due coniche M e N sono bitangenti in x, x': una conica analoga è stata considerata la 1ª volta da Koenigs in teoria di cui dico. Le possiamo chiamare per brevità coniche di Koenigs. Ebbene h/k è l'invariante di Segre

~~Note per me: le [illegible] si devono e potrebbe [illegible] p. pendere l'ipotesi ecc. ecc.~~

delle due coniche di Koenigs relative al pt. x. Infatti (~~ragiono per far più presto sugli infinit. vicini~~) siano y e z infinit. vicini a x sulle linee v e u (a destra) (~~sinistra~~) z^{-1} il corrisp. di z su Φ^{-1}; y^{-1} di y su Φ^{-1}. Ho allora

$h\,du\,dv = (x\,x'\,y\,z')$, $k\,du\,dv = (x\,x^{-1}\,z\,y^{-1})$.

Costruisco m su $x x'$ tale che

$$(x\,y\,x'\,m) = (x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}) : (x^{-1}\,y^{-1}\,x\,y)$$

e considero la conica individ. da cinq. pt. analoga alle 1ª e 2ª questione: essa tocca $x x^{-1}$ in x^{-1} e $x x'$ in x' cioè entra nel fascio di coniche bitgt. MN, e tocca inoltre la retta $y y^{-1}$ e la $y m$. Il primo di questi due fatti prova che, oltre ad essere tg. in x^{-1} alla linea v cerco anzitutto l'eq. in $\pi = x x' x''$ di M. Un pt arb. di π è $\alpha x + \beta x' + \gamma x''$ e $\alpha \beta \gamma$ sono coord. in π (ogni $x x' x''$ sopra a un c'entri $A_1 A_2 A_3$ del 4 fond.) Conviene le coniche bitgt.: hanno eq. del tipo $\alpha^2 \ldots \beta\gamma =$ Vediamo di determ. m per M: deve far in modo da avere

1) Quindi seguo ricavare alla def. gener. di invar. di Segre ci pare (e quindi sempre [illegible] di E_v) definirà direttamente, in questo caso particolare come il birapporto (nel fascio di C^n bitgt.) delle due coniche e delle due spezzate $(0, \infty)$

508

contatto tripunto condotte di Φ' in x^1. [tranne i nelle reg. che sono i nulla soddisfatti); cioè, ~~ricordando il linguaggio~~ senza rispetto di considerazioni poco a poco su infinitesimi: che M oltre a un tg. in x' a x à contatto ulteriore di linea ecc.

On su tale linea in prossimità di x' h

$x'(u+du, v) = x' + du\, x'_u + \frac{du^2}{2} x'_{uu} + \dots =$

$= x' + du\,(hx - bx') + \frac{du^2}{2}(hx_u + h_u x + b_u x' - bhx + b^2 x') =$

$= x' + du\,(hx - bx') + \frac{du^2}{2} h\,(x^{-1} - bx) + \frac{du^2}{2}(h_u x - b_u x' - bhx + b^2 x')$

$= \left[h\,du + \frac{du^2}{2}(h_u - 2bh)\right] x + \left[1 - b\,du + \frac{du^2}{2}(-b_u + b^2)\right] x'$

$+ \frac{h\,du^2}{2} x^{-1} +$ termini del 3° ordine almeno. (*)

Dove i termini scritti stanno proprio nel piano x, x_u, x_v.

~~Volendo che M passi per altri punti di tale linea in: ponga che l'eq. di M sia soddisfatta in altri punti~~

M deve contenere 3 pt. inf. vicini di tale linea. per $du = 0$ viene x' che ci sta; ~~per du infinit.~~ viene da c. ...ia $x(u+du, v)$ è un infinit. di 1° ordine perché solo a viene la retta che ci sta su linea. Supponiamo 3° punto inf. vicini ai che (*) stia su M a meno di inf. di 3° ordine, cioè ci poniamo nel punto $\bar{\alpha} = \dots,\ \bar{\beta} = \dots,\ \bar{\gamma} = \dots$. Volendo $m\alpha^2 - \beta\gamma = 0$ nell'ordine di approssimazione considerato $mh^2 - \frac{h}{2} = 0$

$m = \frac{1}{2h}$. Dunque

509

Cu. $M: \frac{1}{2h}\alpha^2 - \beta\gamma = 0$

$N: \frac{1}{2k}\alpha^2 - \beta\gamma = 0$

Per cos. l'a rri di k/h (inv. assoluto) è l'invariante di segno della rete considerata di Koenigs. Negare il teorema di Koenigs: cond. nec. e suff. per l'uguaglianza degli invarianti è l'esistenza di coniche oscul. in x' x^{-1} risp. che in u, v di ... $\Phi^{(1)}$, Φ^{-1}.

23 È bene per il seguito trovare, almeno in parte, l'eq. di Lap. $z_{uv} + Az_u + Bz_v + Cz = 0$ soddisfatta da y. Da p. 5 risulta che

$$\begin{vmatrix} z & \cdot & 1 & \cdot \\ z_u & p-a & -b & \cdot \\ z_v & \cdot & p & 1 \\ z_{uv} & p_v - a_v + a(a-p) & -b_v + ab - b_u p + p_u - c & -b \end{vmatrix} = 0$$

dando a l'ult. b x 2ª riga

$$\begin{vmatrix} z & \cdot & 1 \\ z_u & p-a & -b \\ z_{uv} + bz_v & p_v - a_v + a(a-p) & -b_v + ab + p_u - c \end{vmatrix} = 0$$

da cui

$B = b\ ;\ A = \frac{p_v - a_v + a(a-p)}{-(p-a)} = -\frac{p_v - a_v}{p-a} + a$

Γ26 Alla ricerca presente sfugge il caso che le congruenze cercate sia a falde focali entrambe d'egual caso che con qui rette esclusa: [illegible] delle successive applicazioni, dove entra in gioco il nostro risultato (p. es. trasf. di Ribaucour a p. 30. 31)

Γ32 Un'osservazione – Due rette corrispondenti di due congruenze quadratiche mutuamente trasf. di Ribaucour sono incidenti; e il punto comune descrive un reticolo coniugato a entrambe. Invero le

$$z' = Zy - Y\zeta$$

~~$z'_v = \ldots$ testo [illegible]~~

$$\zeta'_v = Z_v y - S Z_v \zeta + (SZ - Y)\zeta_v$$

provano intanto che i 4 punti

$Z\; Z_v\; z'\; z'_v$ sono compla-

nari: l'int. è il punto

$$W = Z_v z' - Z z'_v = Z_v(\cancel{Z}y - Y\zeta)$$

$$- Z\{\cancel{Z_v y} - S Z_v \zeta + (SZ - Y)\zeta_v\}$$

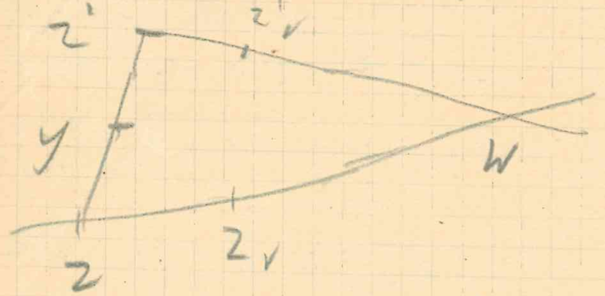
$$= (SZZ_v - YZ_v)\zeta - Z(SZ - Y)\zeta_v$$

$$= (SZ - Y)(Z_v\zeta - Z\zeta_v)$$

$$\sim Z_v\zeta - Z\zeta_v$$

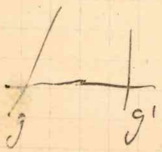
Ora Z è un integrale dell'eq. cui soddisfa ζ; si verifica analog. a quanto si è detto a p. 31 per Y e y [Nota per me. Infatti dalla ~~[illegible]~~ (1) di p. 30 posso eliminare y – formando y_{uv}; ne viene eq. $(\zeta\, \zeta_u\, \zeta_v\, \zeta_{uv})$ che non può differire dalla $E(\zeta)$. Allora le stesse 1a e 2a di p. 31 provano che Z soddisfa alla stessa eq.]

Quindi, per l'interpret. geom. del teor.ª di Lévy, si desume

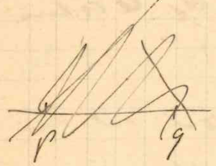


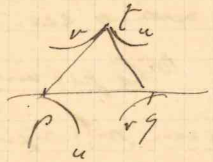
una cgr. cont.^{te} alla $(g\, g_v)$, e così a ognuna delle cgr. quadratiche considerate.

39 Le falde si possono supporre entrambe non svil. Invero delle svil. di una verrebbe quelle dell'altra: e allora ani.^{ne} di 2 svil. di tipo due gen.^{ti} compl. g, g', [illegible] rette [illegible] comuni: [illegible] stesso nel piano G. a (g') tipo g e analoghe: questi piani [illegible] e le svil.^{ti} i).



38. Premetto ~~un~~ il Lemma (in seguito anche le cose di p. 40). Lemma I. Se in S_n la congruenza ~~(pq)~~ (pq) (di punti p, q) è armonica al reticolo (t)[1], le rette t_p e t_q sono le tangenti ~~in~~ in t alle linee caratteristiche. [Invero $p = (t\, t_u\, t_v)$; $q = (t, t_u\, t_v)$ sia $p = At + Bt_u + Ct_v$, $q = Dt + Et_u + Ft_v$. Ho poi $p_u = (p, q)$ e $q_v = (p, q)$ cioè $(t, t_u, t_v) + Bt_{uu} = (t\, t_u\, t_v)$ e cioè $Ft_{vv} = (t\, t_u\, t_v)$. Se per le ipotesi fatte $B = F = 0$ cioè $p = (t\, t_v)$, $q = (t\, t_u)$. Il Lemma cade in difetto





~~Questo Lemma~~ chiarisce ~~la proposizione~~ solo se $t_{uu} = (t\, t_u\, t_v)$.

Lemma II. Se, in S_r, le due cgr. quadratiche (pq) e $(p'q')$ si ottengono per trasf. di Ribaucour. Il ~~lemma~~ ora allora è applicabile nella parte che riguarda $q = (t\, t_u)$. Cade completamente solo se t_{uu} e t_{vv} sono (t, t_u, t_v) cioè se (t) è un reticolo piano.

40 Tale Lemma è certo applicabile ~~[illegible]~~ o a t_p o a t_q ~~[illegible]~~ se coincidono si identifica (p) e (p') oppure (q) e (q') non trasf. di Ribaucour, ciò che per noi è sufficiente: non sarebbe applicabile solo se (t) fosse un reticolo piano, ma [illegible] rappr. un' eq. di Laplace.

~~Allora p p' q q' stanno in (t) tutte~~ tal piano sarebbe quello di t, t_u, t_v cioè p p' q q' in piano fisso. Viceversa se tal piano è fisso, asinto a ... ecc. Non ci occupiamo qui degli eventualità che (t) degeneri in una curve ... integrali ... che p p' contenuta a ... coppie contr. a p. p' ; e ... ecc. Cfr. le ordinarie analogie di pp 26-510 Note per ...)

3) Digressione. Data (x) un sist. rispetto alle cost. ... che (x) appartiene come ∫ del sist.ª coniugato. Viceversa, si parte da un tal sistema, supposto soddisfatte le cond. di ∫ltà ... coeff. per ... analitiche. Allora esiste una sup ∫ definita a meno di collineazioni. Invece si dim. ... che esiste una ∫ del sistema ... per ... ... con x_u e x_{uv} (si capisce che le altre derivate non si possono ... ottengono con ... dalle date eq.ⁿⁱ si ... che gli ... di $(u-u_0)(v-v_0)$ corrisp. ecc.). Così costruita le ∫ lin. ind. $x^{(1)} \ldots x^{(5)}$ (Invero se ... $c_1 x^{(1)} + \ldots + c_5 x^{(5)} = 0$ con le c_i costanti, analoga relazione ... fra le $x^{(i)}$ ...

le x^i_u ... le x^i_v ... le x^i_{uv} ... e sarebbe $(x^i, x^i_u, x^i_v, x^i_{uv}) = 0$ mentre gli el.ᵗⁱ sono arbitrari) e quindi posso supporre, come suppongo, ... $\neq 0$

Allora ogni altro ∫ è loro c.l. lin. a coeff. costanti (sia esso x^5. Determino le x_i in modo che

$$\begin{cases} x^{(5)} = \sum c_i x^i \\ x^{(5)}_u = \sum c_i x^i_u \\ x^5_v = \sum c_i x^i_v \\ x^5_{uv} = \sum c_i x^i_{uv} \end{cases}$$ per $u = u_0$, $v = v_0$

il che è certo possibile perché il ... per ... $\neq 0$. Allora $x^{(5)}$ e $\sum c_i x^{(i)}$ son due integrali del sist.ᵐᵃ colle stesse cond. iniziali e quindi coincidono. Quindi si può costruire una teoria delle sup. di S_3 basata sui sistemi coniugati (Wilczynski)

(Premere l'ex.ᵗᵒ di $x_{uu} = x_{vv} = 0$)

5 5' Che il ... ... $du/\beta = dv/\beta$ ... ... che $w = e^{-\vartheta}(x, A x_u + B x_v)$.

51)

$$C = \frac{(p-a)(p_u - b_v + ab - c) + b(p_v - a_v + a(a-p))}{a-p}$$

$$= -p_u + b_v - \cancel{ab} + c - b\,\frac{p_v - a_v}{p-a} + \cancel{ab}$$

Quindi

$$H = \underline{a_u} - \left[\overline{\log(p-a)}\right]_{uv} + \underline{ab} - b\,\cancel{\frac{p_v-a_v}{p-a}}$$

$$+ p_u - b_v - \underline{c} + b\,\cancel{\frac{p_v-a_v}{p-a}}$$

$$= h + p_u - b_v - \left[\log(p-a)\right]_{uv}$$

$$K = \cancel{b_v} + ab - b\,\cancel{\frac{p_v-a_v}{p-a}} + p_u - \cancel{b_v}$$

$$- c + b\,\cancel{\frac{p_v-a_v}{p-a}}$$

$$= p_u + ab - c$$