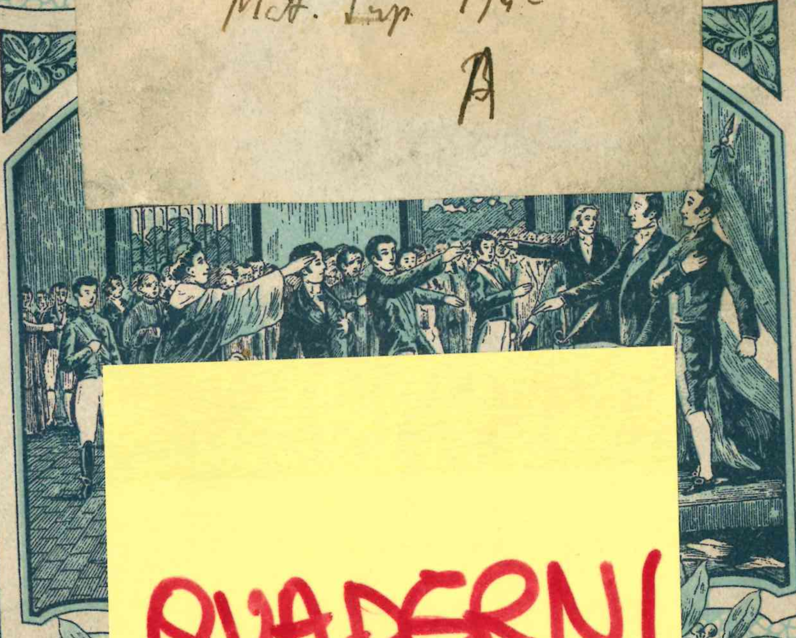
ENCUADERNADOR

# 9 DE JULIO

Mat. Sup. 1942

A



QUADERNI 26.

Pe

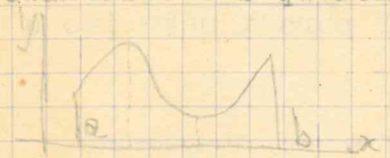
Alum. .......... de .......... Grado

PRIMERAS NOCIONES DE CALCULO DE LAS VARIACIONES.

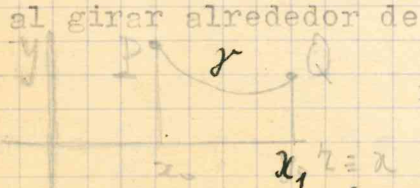
~~Pretendo~~ Voy a expli car brevemente en esta primera parte algunas ideas básicas del llamado cálculo de las variaciones.

Parangonemos entre ellos los problemas siguientes:

1) es dada en el intervalo a,b una función f(x), derivable cuantas veces queremos :encontrar los puntos interiores al intervalo en los cuales la función f(x) se extrema, es decir toma sus valores máximos y mínimos. (v. p. 2)



2) en un plano es dada una recta r p.e. horizontal, y se tienen dos puntos P,Q "por arriba"de r.Queremos unir los dos puntos P,Q con una línea $\gamma$ tal que al girar alrededor de la recta r engendre una superficie (de rotación, por supuesto), cuya area sea la mínima posible.



El problema 1) pertenece al cálculo diferencial, y se resuelve de manera bien conocida.La función f(x) es conocida: lo que hay de desconocido son algunos valores incógnitos de la x, las raices de la ecuación $f'(x)=0$.Todo se reduce a resolver esta ecuación , averiguando luego convenientemente si los valores logrados resuelven efectivamente el problema de máximo y mínimo. Repito que en este caso las incógnitas son números(las raices de $f'(x)=0$)

La naturaleza del problema 2) es muy distinta.En ello lo que hay de desconocido es todo unarco de línea $\gamma$, es decir una función f(x),que tomada como segundo miembro de la ecuación $y=f(x)$ de la línea buscada, resuelva el problema de mínimo planteado.

El problema 2) sale por lo tanto del marco de los problemas clásicos de máximo y mínimo que se estudian en el curso de análisis. Analicemoslo mejor.Si (usando coord cart ort.(*)) las coordenadas de P,Q son resp.te $x_0$ ,$y_0$ ;$x_1$ ,$y_1$ , la función buscada tiene que ser definida en el intervalo entre $x_0$ y $x_1$ , cumplir con

$$f(x_0)=y_0 \qquad ,f(x_1)=y_1 \qquad (1)$$

y por fin cumplir con la condición requerida de mínimo, la cual se traduce en que la integral

(*) Tomamos el eje x coincidente con la recta r.

de p. 1

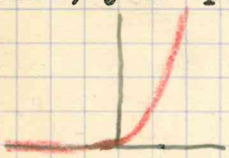
(Se entiende que se trata de máximos o mínimos relativos, esto es, p. e. en el caso del mínimo, de un valor $x_0$ tal que para todos los h bastante pequeños en valor absoluto, y no nulos, sea

$$f(x_0+h)-f(x_0)>0$$

En lugar de dicha desigualdad podría imponerse la menos restrictiva

$$f(x_0+h)-f(x_0)\geq 0 \quad ;$$

en el primer caso se habla de un extremo **propio**, en el segundo **impropio**) .Ej de mínimo impropio: $y=0$ para x negativo o nulo, $y=x^2$ para x positivo o nulo



Otro ejemplo de mínimo impropio

$$y=\left(x \operatorname{sen}\frac{a}{x}\right)^2 \text{ para } x\neq 0; \quad y(0)=0$$

Se tiene en $x=0$ un mínimo, pero impropio porque $y$ se anula, además que para $x=0$, para $\frac{a}{x}=m\pi$ ($m$ entero) es decir para $x=\frac{a}{m\pi}$ ($m$ entero) y de estos valores hay en cada entorno de $x=0$.

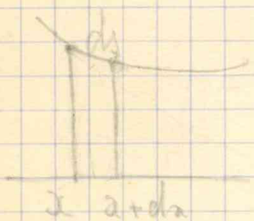
$$I = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (y=f(x)),$$

&
sea mínima(Es decir, hay que pensar en el valor que toma I en correspondencia a las varias funciones y=f(x) definidas entre $x_0$ y $x_1$ las cuales cumplan con ( 1), y buscar una función f(x) que haga mínima la integral I). La I es una integral que depende de la función f, para recordarlo podemos escribir

$$I\{f\}$$

Es un concepto un poco parecido al de una función de una variable: pero acá tenemos el número I que depende de todos los valores de la función f, es decir de la función f

Que el area considerado sea efectivamente dado por la integral I se controla de inmediato, aún sin pensar en las fórmulas generales para el area de una superficie curva, substituyendo a la curva, de manera intuitiva, una poligonal inscripta aproximante la misma curva: el area de la superficie aparece como suma de areas de conos truncados de revolución para uno de estos , que tenga R y r como radios de las bases y apotema a,el area lateral es



$\pi a (R+r)$ , luego actualmente, a menos de infinitésimos de orden superior (llamando s al arco, que podemos suponer positivo)

$\pi\, ds\,(2y+dy)$ esto es

$$2\pi y\, ds = 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Integrando, resulta precisamente I(a menos del factor const $2\pi$) .

En el problema 2 se trata de encontrar la función f(x) definida en el intervalo entre $x_0$ y $x_1$, que cumpla con las condiciones a los límites (1) y minimice la integral $I\{f\}$ Esta es una integral entre a y b de cierta función de x formada mediante la propia función incógnita f y su derivada primera. Va así perfilándose el problema típico del calculo de las variaciones , por lo menos en su forma más elemental .Consideramos un intervalo $x_0$ $x_1$, las funciones f(x) definidas en el mismo y tales

que cumplan con las condiciones a los límites (1) siendo
$y_0$, $y_1$ números dados; también consideramos una integral

$$I\{f\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \quad (2) \quad (y = f(x))$$

siendo F una función de sus tres argumentos x,y,y′ (que en el
ejemplo anterior sólo dependía de y,y′). Se trata de determinar
la función hasta ahora desconocida f(x) de manera que <u>la in</u>
<u>tegral (2) resulte mínima</u>.

Como se ve, también en esta formulación más general es claro
que lo que tenemos de desconocido en los problemas de cálculo
de las variaciones es una función (y no números aislados
como en los problemas elementales de máximo o mínimo).

Hé aquí algunos otros ejemplos.

En el plano, dados los dos puntos P($x_0$,$y_0$), Q($x_1$,$y_1$) se busca el ca-
mino más corto que los une: hay que determinar f(x) con las
condiciones a los límites (1) de manera que resulte mínima

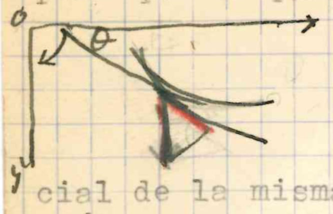
$$I\{f\} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Es claro que se trata de una integral del tipo (2): por lo de-
más en este caso es obvio que la solución es brindada por el
segmento de recta que une a los dos puntos. Hay que tomar
f(x) = Ax + B , siendo A,B constantes tales que se cumplan las
(1) , es decir

$$y = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}\,x + \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1}$$

Otro ejemplo clásico es ofrecido por el célebre problema de
Juan Bernoulli de la <u>braquistocrona</u> (1696). Considero en un pla
no vertical los dos puntos P,Q de arriba: se trata de encontrar
una curva &&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& γ de ecuación y=f(x) , que
una los dos puntos y que sea tal que , para un punto que &&(su
puesto p. e. Q más por debajo de P) caiga de P a Q a lo largo
de la curva, teniendo si se quiere en P una dada velocidad ini
cial (tangencial) $v_0$ el tiempo precisado para llegar de P a Q
sea mínimo. Es claro que también ahora podemos pensar en las
infinitas curvas que unen P,Q : entre ellas se trata de encontrar

la que cumple con la condición de mínimo impuesta. Para ver que se trata efectivamente de un problema de cálculo de variaciones en el sentido puntualizado, tomo eje x horizontal e y hacia abajo, considero una curva $y=f(x)$ que una P a Q, y busco el tiempo T precisado para que un punto caiga a lo largo de la misma de P a Q. Llamo




$\theta$ al ángulo formado por el eje x con la tangente a la curva en un punto genérico. Sobre este punto actua, verticalmente, la gravedad, de intensidad mg: la componente tangencial de la misma es (figura) $mg \operatorname{sen} \theta$. Por otro lado la aceleración tangencial es (siendo s el arco y t el tiempo) $d^2s/dt^2$

Por lo tanto, la relación fuerza=masa.acc. nos da (al dividir por m)

$$g \operatorname{sen} \theta = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Ahora bien, siendo $dy/dx = \operatorname{tg} \theta$, sigue $dx/ds = \cos \theta$, $dy/ds = \operatorname{sen} \theta$. Luego

$$g \frac{dy}{ds} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

que al multiplicar por 2 $ds/dt$ viene a ser

$$2g \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2$$

esto es, integrando

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = 2gy + c$$

siendo c una constante, que puede determinarse en cuanto en P $ds/dt$ es la velocidad inicial tabgencial $v_0$, de manera que

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = 2gy + v_0^2 - 2gy_0$$

Por consiguiente si introduzco una constante $\alpha$ definida por

$$\alpha = y_0 - \frac{v_0^2}{2g}$$

tenemos

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = 2gy - 2g\alpha \therefore \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y-\alpha)}$$

o bien, si se quiere, terceras, o aún cuartas (en el dominio de las tres variables $(x\,y\,y')$ que se consideran). Por lo demás, en los ~~de~~ ejemplos de interés, tienen <u>todas</u> las derivadas sucesivas continuas.

y

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(y-\alpha)}}$$

donde podemos pensar en las varias variables como en funciones de x. Integrando entre $x_0$ y $x_1$ logramos la expresión del tiempo T:

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2g(y-\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-\alpha}}\,dx$$

Se trata por lo tanto de minimizar la integral

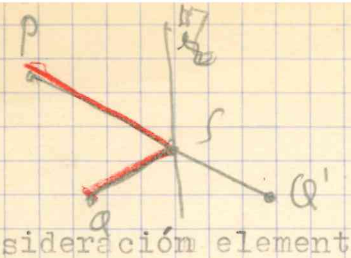
$$I\{f\} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-\alpha}}\,dx$$

es decir siempre estamos en el tipo de problemas indicados más arriba. La solución efectiva está ofrecida, como lo diré más adelante, y como es bien conocido , por un arco de cicloide. ( Si la velocidad inicial es nula, tenemos $\alpha = y_0$, como es claro debido a la definición de $\alpha$ )

OBSERVACIONES.

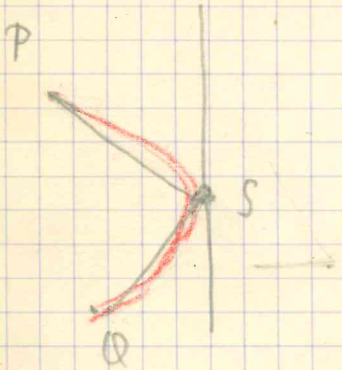
A) La integral que se trata de minimizar en lo problemas indicados $I\{f\}$ depende, como lo hemos dicho, de todos los valores que toma la función f en el intervalo considerado. Es, como puede decirse una función de línea (número que depende de la línea de ecuación $y=f(x)$ ,p una <u>funcional</u> .

B). En cuanto a las condiciones con las que tiene que cumplir la función $F(x,y,y')$ no existe inconveniente en suponer que cumpla con ciertas restricciones, p. e. admita derivadas segundas continuas. El asunto es un poco distinto en lo tocante a las funciones f <u>admisibles</u> . Fijada una clase C de funciones admisibles, se busca la función f de la clase que realiza el mínimo. Si se substituye a la clase C otra C´ por ejemplo menos ámplia, puede ocurrir que la función f que resolvía el problema existía dentro de C, pero deja de subsistir dentro de C´, de manera que el problema, que tenía solución tomando como admiisibles las funciones de la clase C ya no lo tiene tomando como admisibles las de la clase C´. Esto es p. e. lo que pasaría en el siguiente problema (de naturaleza un poquito distinta de los arriba considerados): en un mismo semiplano individualizado por una recta r son da-




dos dos puntos P,Q: buscar el camino de longitud mínima que une P con Q, pasando por un punto &&&&&&& &&&&&&&&& (cualquiera, no dado) de la recta r.Una consideración elemental lleva inmediatamente a la solución: si Q´ es el simétirico de Q con respecto a r, el segmento rectlíneo PQ´es el camino mínimo de P a Q´, y reflejando el trecho SQ´(siendo S la intersección de r con PQ´ )sobre r se logra el camino mínimo pedido, integrado por el par de segmentos PS,SQ.En este caso la línea que resuelve el problema ,si la representamos con una ecuación y=f(x) corresponde a una función derivable, con excepción de un punto(la línea en el punto S no admite tangente única).La solución existe, por lo tanto, si tomamos como clase C de las funciones admisibles la de la funciones que admiten derivada primera continua, con excepción de un número finito de puntos.

Si tomara como clase C´la de las funciones que admiten derivada primera continua <u>en todos</u> los puntos , la solución que encontramos no existiría.Es intuitivo que puedo dentro de la clase C´encontrar curvas que cumplen con las condiciones de pasar por P y Q, y de encontrar la r, y tienen una longitud de poquísimo mayor de la PS + SQ (v. figura): pero entre ellas no existe nunguna que realize el mínimo.




&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& En general, debido a la naturaleza del problema, la clase C habría que fijarla en la más ámplia con tal que la integral tenga sentido: podría tomarse la clase de las funciones seccionalmente continuas y con derivada primera seccionalmente continua en el intervalo considerado(llamando seccionalmente continua una función en un intervalo, si este es divisible en un número finito de partes, en cada una de las cuales la función sea continua(1). Sin embargo, en un primer estudio conviene adoptar como clase de funciones admisibles otra más restringida: tomaremos la de las funciones con derivada &&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& PRImera y segunda continuas en todo el intervalo.

(1) mientras que, al pasar de un intervalo a otro, la función puede dar un salto

C) El planteo adoptado a veces resulta demasiado restringido. Existen problemas de calculo de las variaciones para los cuales hay que plantear la ~~&&&&&~~ cuedtión de manera un poco distinta. En el problema general de minimizar la integral (2) con las condiciones a los límites indicadas, podemos substituir a la ecuación y=f(x) de la curva ecuaciones paramétricas de la misma

$$x=\varphi(t) \quad y=\psi(t)$$

~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ Sea $x_0=\varphi(t_0)$, $x_1=\psi(t_1)$ La integral que hay que minimizar viene a ser

$$I=\int_{t_0}^{t_1} F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}}\right)\frac{d\varphi}{dt}\,dt$$

El integrando puede considerarse como una función de los cuatro argumentos

$$\varphi(t),\ \psi(t),\ \frac{d\varphi}{dt},\ \frac{d\psi}{dt}$$

con la particularidad que, con respecto a los dos últimos es una función homogénea de grado UNO (porque F es homogénea de grado cero, es decir no varía al multiplicar esos dos últimos argumentos por una constante arbitraria k y luego $F.\frac{d\varphi}{dt}$ es homogéneo de grado uno- es decir queda multiplicado por k: la función se dice homogénea de grado n si queda multiplicada por $k^n$).Por lo tanto podemos escribir

$$I=\int_{t_0}^{t_1} G\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}\right)dt \qquad (3)$$

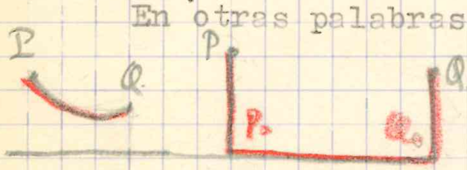
siendo G una función hom de grddo UNO de sus cuatro argumentos. Se plantea entonces el problema de determinar las dos funciones $\varphi(t), \psi(t)$ de manera que la integral (3) quede minimizada.Es un <u>problema de cálculo de las variaciones en forma paramétrica</u>, el cual tiene un alcance más ámplio que el relativo a la integral (2) porque ese se refería a una curva representable con una ecuación y=~~&&~~ f(x), y por lo tanto cortada en un solo punto por las paralelas al eje y; en cambio el nuevo problema puede plantearse aún con respecto a una línea que una P con Q y ~~que~~ no tenga esta particularidad. (por supuesto también en este caso más general habría que prefijar cuál es la clase de las funciones $\varphi$, $\psi$ admisibles).

Hé aquí un ejemplo, que es instructivo ya sea con respecto a lo que acabamos de decir como con otras observaciones. Considero otra vez el ya aludido problema 2) de p. 1 (superficie de rotación de area mínima. Este problema, como se encontraría en un estudio más detenido, admite dos clases distintas de soluciones, como resultaría también al resolverlo experimentalmente. Al girar alrededor del eje r, los dos puntos P, Q engendran dos círculos p, q, con los centros sobre r y situados en planos perpendiculares a r. Imaginemos realizados materialmente esos dos círculos p.e. con alambre, e sumergámolos (manteniéndolos entre sí a la distancia que tenían inicialmente) en una solución de jabón. Es bien sabido que al proceder de esta manera con un contorno cerrado de alambre, se extiende una película de la solución entre el contorno, la cual realiza la superficie de area mínima entre las que pasan por ese contorno. Ahora bien si esto se hace en el caso actual del contorno formado por los dos círculos p, q, pueden pasar dos cosas distintas:

a) la superficie es un catenoide, superficie de revolución engendrada por una catenaria al girar alrededor de su directriz

b) La superficie se descompone en la de los dos círculos p, q.

En otras palabras, la línea que une P, Q y engendra la superficie buscada en el caso a) es una catenaria que pasa por P, Q. En el caso b) está formada por la quebrada (figura) $PP_oQ_oQ$. Si planteamos el problema en forma no paramétrica, como lo hemos hecho inicialmente, podemos encontrar las soluciones a), pero como es claro no las b, porque la línea correspondiente no es representable con una ecuación $y=f(x)$. En cambio al plantear el problema en forma paramétrica puede lograrse también la solución b). -En el mismo ejemplo también se ve como al requerir a las funciones admisibles que cumplen con demasiadas restricciones pueden perderse algunas soluciones, p. e. en la b) no puede pedirse que $\varphi$, $\psi$ tengan derivada continua en todos los puntos.



De acuerdo con la posición de los dos círculos la superficie que realiza el mínimo puede ser el catenoide o bien el par de círculos p,q ( la llamada solución discontinua de Goldschmidt ; es discontinua la superficie, pero no el perfil que la engendra). ——— , ———

En el cálculo de las variaciones resulta mucho más fácil asignar condiciones necesarias, que condiciones necesarias y suficientes para que una función y= f(x) realize el mínimo Ya algo parecido pasa en los problemas de máximo y mínimo estudiados en el curso de análisis : si la f(x) tiene que ser extremada en x, (interior al intervalo de existencia, etc es <u>necesario</u> que sea

$$f'(x) = 0 \qquad (4)$$

Pero sabemos que la (4) no es suficiente: hay que tomar en consideración también la primera de las derivadas sucesivas que no se anulan en x: si el orden es par, tenemos - de acuerdo con el signo - un máximo o un mínimo; si en cambio ese orden es impar no tenemos ni un máximo ni un mínimo.

Podemos decir brevemente que la (4) expresa que la función f es <u>estacionaria</u> en el punto x: para que sea extremada es necesario, pero no suficiente que sea estacionaria.

Aunque la (4) sólo es necesaria, el conocimiento de la misma ya permite dar un paso notable para la resolución de los problemas de máximo o mínimo, en cuanto circunscribe, dentro de una clase muy limitada (las raices de la ecuación (4) )los posibles valores de x que realizan el máximo o el mínimo. Resumiendo : en los ordinarios problemas de extremos la estacionariedad es sólo una condición necesaria, y no necesaria y suficiente para el extremo: sin embargo es una condición necesaria prácticamente muy importante.

Algo parecido pasa en el cálculo de las variaciones, donde encontraremos una condición necesaria de estacionariedad análoga a la (4): la misma por sí no puede decirse suficiente para la realización del extremo; sin embargo es de importancia fundamental.

La aludida condición necesaria consiste en la llamada ~~é~~ ecuación diferencial de Euler, de la cual hableremos a continuación.

Estudiemos por lo tanto el problema general de mínimo plante ado al fin de p.3 y p.5. Supongo exista una función $f(x)$ que realize el mínimo de I. Entonces la integral I tiene que crecer si reemplazamos $f(x)$ por otra función admisible, en particu lar por otra función $g$ "próxima" a la f, es decir tal que la diferencia $g-f$ se mantenga, en valor absoluto, menor de una cantidad prefijada en todo el intervalo estudiado. Aún más particularmente, como nos ocupamos sólo de condiciones necesarias, podemos particularizar ulteriormente las funciones g que parangonamos con la f, p. e. de la manera siguiente. Tomo una función $\eta(x)$ que se anule en los extremos del intervalo es decir tal que sea

$$\eta(x_0) = 0, \quad \eta(x_1) = 0$$

y que sea continua, con sus derivadas primeras y segundas en todo el intervalo. Formo entonces la familia de funciones

$$g(x, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon\,\eta(x) \tag{5}$$

siendo $\varepsilon$ una constante arbitraria: si es pequeña en valor absoluto la diferencia $g-f = \varepsilon\,\eta(x)$ también es pequeña en va lor absoluto en todo el intervalo. Al pasar de la función f a la g dada por (5), la misma varía de la cantidad (fun- ción de x) $\varepsilon\,\eta(x)$. Ponemos

$$\delta f = g - f = \varepsilon\,\eta(x) \tag{6}$$

y llamamos a $\delta f$ la <u>variación de la función</u> f. Supongamos ahora haber fijado la función $\eta(x)$ y formemos

$$I\{g(x,\varepsilon)\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f+\varepsilon\eta, f'+\varepsilon\eta')\,dx$$

El mismo es una función de $\varepsilon$ :

$$I\{g(x,\varepsilon)\} = \Phi(\varepsilon). \tag{0}$$

Por hipótesis esta función de $\varepsilon$ tiene un mínimo para $\varepsilon = 0$ debido a que entonces la integral se reduce a $I\{f\} = \min = \Phi(0$

Por lo tanto tenemos como condición necesaria la

$$\Phi'(0) = 0 \qquad (7)$$

(habiendo puesto $\Phi' = d\Phi/d\varepsilon$) a la cual podemos agregar como ulterior condición necesaria la

$$\Phi''(0) \geqslant 0 - \qquad (8)$$

(porque si fuera $\Phi''(0) < 0$ tendríamos un máximo y no un mínimo)

Lo dicho se aplica de cualquier manera se elija la función $\eta(x)$ con tal que cumpla con las condiciones expresadas más arriba.

Hasta ahora hemos estudiado el problema de minimizar la integral (2): si hubiéramos estudiado el de maximizar lo habríamos encontrado resultados análogos: tendríamos como condiciones necesarias la (7) y la

$$\Phi''(0) \leqslant 0 \qquad (8')$$

Independientemente del averiguarse de (8) o (8'), si se cumple (7) de cualquier manera se elija la función $\eta(x)$ que cunmple con las condiciones expresadas más arriba, diremos que la integral I es estacionaria para la función f. La estacionariedad se traduce en la (7)- recordando que tiene que cumplirse para todas las posibles elecciones de la función $\eta(x)$

Encontramos así la estacionariedad como condición necesaria para que se minimice la integral I

Antes de seguir, vamos a expresar lo mismo de manera un poco distinta. En (5) la g es función de x y de $\varepsilon$ (más precisamente es una función lineal de $\varepsilon$): si consideramos $\varepsilon$ como la variable independiente, y x como un parámetro, y adoptamos para las diferenciales el símbolo $\delta$ (en lugar de d), tenemos

$$\delta g = \left(\frac{dg}{d\varepsilon}\right) \delta\varepsilon = \eta(x)\,\delta\varepsilon$$

y luego, para $\varepsilon = 0$, si pasamos del valor 0 al valor $\varepsilon$

$$\delta f = \varepsilon\,\eta(x)$$

Por lo tanto la que llamamos variación $\delta f$ de la función f -véase la (6) - es la diferencial con respecto a la $\varepsilon$ como variable ~~independiente~~. Análogamente, al pasar de f a g llamamos variación de la integral I la diferencial de la misma con respecto a $\varepsilon$, e indicamos esa variación con $\delta I$. Ahora bien, la (O) nos dice que, como I es la función $\Phi(\varepsilon)$ de $\varepsilon$,

$$\delta I = \delta \Phi,$$

&&& El segundo miembro es $\Phi'(\varepsilon)\, d\varepsilon$, y el primero

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')\, d\varepsilon\right]\delta\varepsilon$$

Por lo tanto, en particular para $\varepsilon=0$ ~~del segundo miembro~~

$$\varepsilon\left[\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')\, dx\right]_{\varepsilon=0} = \varepsilon\, \Phi'(0)$$

El primer miembro es la variación de la integral; el segundo tiene que anularse (condición de estacionariedad). Podemos por consiguiente decir que <u>la estacionariedad se traduce en el anularse de la variación $\delta I$ de la integral</u>.

Más precisamente la variación considerada se llama variación primera para distinguirla de otras sucesivas. Luego &&&&&&&&&&&&&&&&&&&& es lo mismo decir que la integral I es estacionaria para la función f o bien que && la variación primera $\delta I\{y\}$ es igual a cero. La variación pimera tiene que ser nula, como condición necesaria para el minimizarse de la integral.

Llegaremos a la ecuación de Euler transformando oportunamente la condición necesaria que acabamos de encontrar.

Enuncio y compruebo& previamente el siguiente:

LEMA.- Sea h(x) una función continua en el intervalo $(x_0, x_1)$, y supongamos que &&&&&&&&&& resulte

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\, h(x)\, dx = 0 \qquad (9)$$

de cualquier manera se elija la función $\eta(x)$ continua con sus derivadas primeras y segunda, y nula en los dos extremos del intervalo, entonces necesariamente la función $h(x)$ es idénticamente nula en todo el intervalo

. Es claro que si $h$ es id. nula se cumple la (9): sin embargo para nosotros se trata de comprobar el inverso. Para demostrarlo, supongo ,si posible que $h$ no sea id.te nula: entonces existe un valor de $x$, sea $\xi$, para el cual $h(\xi) \gtrless 0$ ; fijo las ideas suponiendo p.e.

$$h(\xi) > 0$$

Debido a la continuidad de $h$ podemos determinar dentro del intv dado un intv parcial $(\xi - a, \xi + a)$

$$\xi - a \leq x \leq \xi + a$$

tal que la función $h$ quede positiva en todo este intervalo parcial. Ahora vamos a elegir la función $\eta(x)$ de manera que fuera del intervalo parcial sea nula, y dentro positiva: por supuesto hay que hacerlo con un poco de cuidado, de manera que la función sea continua con sus derivadas primera y segunda. Precisamente tomamos, dentro y en los extremos del intervalo parcial, p.e.

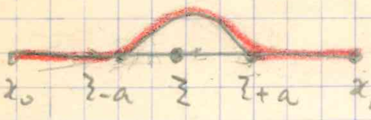
$$\eta(x) = (x-\xi+a)^4 (x-\xi-a)^4 = \left[(x-\xi)^2 - a^2\right]^4$$

Entonces en los puntos interiores al intervalo parcial $\eta$ es un polinomio, luego derivable etc. En los puntos exteriores lo mismo. Puede haber duda tan sólo en los extremos del intv parcial, es decir para los valores $x = \xi - a$, $x = \xi + a$ . Sin embargo la función $\eta$ está construida de modo que siga siendo derivables dos veces con derivadas continua aún en estos puntos Estudio p. e. el punto $x = \xi - a$ . ~~Tenemos~~ Al calcular el valor de $\eta$ en este punto, procediendo ya sea del exterior ya del interior del intervalo parcial siempre encontramos $\eta(\xi - a) = 0$ . Al calcular la derivada primera a la izquierda (es decir con respecto al exterior del intev parcial) tenemos el valor cero, a la derecha tenemos

$$4(x-\xi+a)^3(x-\xi-a)^4 + 4(x-\xi+a)^4(x-\xi-a)^3$$

Esta expresión vale cero para $x = \xi - a$ y tiende a cero para $x$ tendiente al mismo valor. Por consiguiente la derivada primera es la misma a la derecha y a la izquierda, es decir existe, y es además continua. Etc. así se sigue también para la segunda.

En substancia hemos tomado una función $\eta$ que de lugar a un dia grama como el de la figura. Ahora bien, formemos la integral que figura en (9) mediante la función $\eta(x)$ que acabamos de construir. Resulta, en base a la hipótesis (9)




$$\int_{\xi-a}^{\xi+a} \eta(x) h(x) = 0$$

Ahora en cada punto del intervalo de integración el integrando es esencialmente positivo (producto de dos funciones ambas positivas): y luego no puede anularse (basta p.e. recordar el teor. del valor medio, según el cual la integral vale el producto de la longitud 2a del intv de integración por un valor adquirido por la función en el interior del intv. y los dos factores son positivos). Llegamos por lo tanto a una contradicción: por consiguiente no puede existir ningún punto en el cual $h(\xi) \gtrless 0$. El Lema es demostrado

Podemos ahora llegar a la ecuación de Euler. Para enunciarla, observamos que la función F de x,y,y' que aparece en la integral (2) es por hipótesis derivable con respecto a sus argumentos. Pondré:

$$F_x = \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}; \quad F_{xy'} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'}, \text{etc}$$

Si en la F, o en una de sus derivadas parciales, imaginamos reemplazar la y y la y' resp.te por una función f(x) y por su derivada f'(x) la F viene a ser una función de la única x, la cual puede derivarse totalmente con respecto a la misma x. P.e.

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = F_{xy'} + F_{yy'} y' + F_{y'y'} y''$$

Sunsiste entonces el teorema fundamental:

Condición necesaria y suficiente para que la integral

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\, dx$$

sea estacionaria para la función f(x) (y por lo tanto, condición necesaria para que la misma integral se minimice para la función f(x)) es que la f(x) cumpla con la

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \qquad (10)$$

P.e. para $F = A(x)\,y'^2 + 2B(x)\,yy' + C(x)\,y^2$
(con $A, B, C$ dotadas de der.s 1.as y 2.as continuas)
la ec. de Euler es

$$By' + Cy - \frac{d}{dx}(Ay' + By) = 0 \quad \text{esto es}$$

$$\cancel{B}y' + Cy - (Ay'' + A'y' + \cancel{B}y' + B'y) = 0$$

esto es la ec. lineal

$$Ay'' + A'y' + (B' - C)\,y = 0$$

Obs. Si $B(x) =$ const. la ec. no depende del valor de dicha constante: lo que se explica debido a que la integral que minimizar es entonces

$$\int_{x_0}^{x_1} (Ay'^2 + Cy^2)\,dx + B\int_{x_0}^{x_1} 2yy'\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (Ay'^2 + Cy^2)\,dx + B(y_0^2 - y_1^2)$$

donde el último sumando es el producto de $B$ por la constante $y_0^2 - y_1^2$

es decir

$$F_{y'y'}\, y'' + F_{yy'}\, y' + F_{xy'} - F_y = 0 \qquad (11)$$

La (11) con respecto a la función f(x) es una ecuación diferencial de segundo orden(aparecen en ella la f, la f', la f" ): es la ecuación diferencial de Euler .

Para demostrar el resultado, transformamos la condición que ya conocemos como necesaria y suficiente para la estacionariedad, del anul&&&&&& rse de la variación primera $\delta I$ (p.23)

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x,\, y+\varepsilon\eta,\, y'+\varepsilon\eta')\,dx\right]_{\varepsilon=0} = 0$$

Tenemos por lo tanto que considerar la derivada con respecto a $\varepsilon$ de la integral entre $x_0$ y $x_1$ de la función integranda la cual, además de la variable x de integración, contiene también la variable $\varepsilon$ ~~de integración~~

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x,\, y+\varepsilon\eta,\, y'+\varepsilon\eta')\,dx$$

La función integranda, con respecto a $\varepsilon$ es derivable con derivada contínua, porque

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(x,\, y+\varepsilon\eta,\, y'+\varepsilon\eta') = \eta F_y + \eta' F_{y'}$$

Por consiguiente un teorema de análisis nos dice que puede derivarse bajo el signo de integral:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x,\, y+\varepsilon\eta,\, y'+\varepsilon\eta')\,dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (\eta F_y + \eta' F_{y'})\,dx$$

donde los tres argumentos de los cuales dependen $F_y$, $F_{y'}$, son $x, f+\varepsilon\eta, f'+\varepsilon\eta'$. En particular, para $\varepsilon=0$, vemos que la condición de estacionariedad se escribe

$$\Phi'(0) = \int_{x_0}^{x_1}\left[\eta F_y(x,f,f') + \eta' F_{y'}(x,f,f')\right] dx = 0$$

La condición así lograda no es todavía satisfactoria, debido a que en la misma aparece, además de la función f(x), la otra función $\eta(x)$, que tiene mucho de arbitrario. Ahora lograremos transformar ulteriormente la condición de manera que ya no figure esta segunda función. Con este objeto observo que, al integrar por partes, la integral del segundo sumando se escribe

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta' F_{y'}(x,f,f')\,dx = \left[\eta F_{y'}(x,f,f')\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\eta\frac{d}{dx}F_{y'}(x,f,f')\,dx$$

y, como $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ queda

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta' F_{y'}(x,f,f')\,dx = -\int_{x_0}^{x_1}\eta\,\frac{dF_{y'}(x,f,f')}{dx}\,dx \cancel{=0}$$

Luego la condición $\Phi'(0) = 0$ se escribe

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta\left\{F_y(x,f,f') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,f,f')\right\}dx = 0$$

Esta ecuación tiene que regir cualquier sea la función $\eta(x)$ continua con derivadas primera y segunda continuas en el intv($x_0$, $x_1$) nula en los extremos. Podemos por lo tanto aplicar el Lema, tomando como funciñon h(x) del Lema la escrita entre llaves, y concluimos la (10). Viceversa si subsiste la (10) el razonamiento es invertible. Formando explicitamente la derivada total con respecto a x de la $F_y$, se logra la (11). El teor. fundamental queda así demostrado.

(sigue p. 31 bis)

$$F_{y'y'} = \frac{d}{dy'}\left[y'(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = $$

$$= (1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} + y'\left(-\frac{1}{2}\right)(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y' =$$

$$= (1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} - y'^2(1+y'^2)^{-3/2}$$

$$= \frac{1+y'^2-y'^2}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}} > 0$$

OBSERVACION. El tratamiento de las páginas anteriores se ajusta a la hipótesis hecha sobre funciones admisibles (al final de p. 11). Si se toma una clase más ámplia de funciones admisibles ,hay que modificar lo dicho. Supongamos p. e. no presuponer la existencia y continuidad de f" , sino p. e. tan sólo la continuidad de f, f´en todo el intervalo considerado.Se comprende que se necesitará un poco más de cuidado , porque en la ecuación de Euler justamente figura f" ,que a priori no se sabe si existe. No sólo, sino que en la deducción hecha a propósito de la última fórmula de p. 31, para aplicar el Lema, hay que suponer que la función de x que está entre llaves(la cual desempeña el papel de la función h(x) del Lema, que en el mismo se supone función continua) es continua, y luego que f" (que figura implicitamente en $\frac{d}{dx}F_{y'}$ ) es continua. Sin entrar en detalles, indico como podría en el nuevo caso modificarse el tratamiento.

Pues bien, en las nuevas hipótesis, apoyándose sobre otro Lema, y alterando un poco el procedimiento(p .e. se hacen hipotesis sobre $\eta(x)$ coherentes con el nuevo punto de vista, y en la primera fórmula de p. 31 se aplica la integración por partes no ya al segundo, sino al primer sumando) , se logra demostrar que existe una constante C tal que

$$F_{y'}(x, y(x), y'(x)) = \int_{x_0}^{x} F_y(x, y(x), y'(x))\, dx + C$$

En el segundo miembro , la función integranda $F_y(x,y,y')$ (recordar las hipótesis hechas sobre F, f) es función continua de x: luego la integral puede derivarse respecto del límite superior.Por consiguiente es derivable el segundo miembro, y por lo tanto también el primero. Luego podemos escribir

$$\frac{d}{dx}F_{y'} = F_y$$

que es justamente la ecuación de Euler en la forma (10) de p. 27.Esto todavía no autorizaría a escribir la ecuación de Euler en la forma desarrollada de p. 29, pero también esto podría hacerse con algunas consideraciones ulteriores.

La ecuación diferencial de Euler es, como lo dijem una ecua
ón dif. ordinaria de segundo orden. Las funciones y=f(x) que la
tisfacen(soluciones o integrales de la ecuación diferencial)
ámanse extremales del problema de mínimo considerado. Al in-
erpretar geométricamente la ecuación diferencial considerando x,
como coord cartesianas ortogonales en un plano, las líneas inte
rales de la ecuación- es decir las líneas representadas por las
cuaciones y=f(x) donde f es una solución - también llamanse líneas
xtremales.

Las soluciones del problema de mínimo tienen por lo tanto
que buscarse entre las extremales, y luego habría que averiguar
si efectivamente brindan el mínimo.

Hé aquí algunos ejemplos.

Línea de longitud mínima que une dos puntos en el plano(p.5). Tenemos

$$F(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$$

La F depende sólo del tercer argumento $y'$, de manera que cuando derivamos con respecto a $x$, o $y'$ obtenemos 0. La (11) se reduce a

$$F_{y'y'}\, y'' = 0$$

Ahora

(p. 32)

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$ ; $F_{y'y'}$ puede calcularse, pero es suficiente observar que no es ~~idénticamente~~ nula: por lo tanto la ecuación de las extremales es

$$y'' = 0$$

En forma finita, integrando

$$y = Ax + B.$$

sigue 33 bis

OBSERVACION.- En el ejemplo que acabamos de considerar la F es una función de la sola y´ . Puede considerarse como caso ulteriormente particular de cada uno de los siguientes casos particulares:

1) F depende tan sólo de x,y´.Entonces en la ecuación de Euler (10) p. 27 se tiene $F_y$ nulo, y luego la ecuación de Euler se escribe

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

es decir

$$F_{y'}(x , y') = \alpha \qquad (º)$$

siendo $\alpha$ una constante arbitraria. Por supuesto la transformación de la ecuación de Euler en la (º) es ventajosa, porque la (º) es una ecuación de primer orden, y no ya de segundo, así que al escribir la ecuación de Euler en la forma (º) ya se dió un paso hacia su integración (Por supuesto, al integrar (º) se introduce una segunda constante arbitraria) .La (º) puede llamarse una <u>integral primera</u> de la ecuación de Euler. Sin embargo hay algo más: la integración de la ec dif (º) es inmediata,porque despejando y´ se tiene una ecuación del tipo

$$y' = \varphi(x, \alpha)$$

de la cual se logra de inmediato la función desconocida y(x) mediante una cuadratura

$$y = \int \varphi(x, \alpha)\, dx$$

(desde luego con la cuadratura se introduce una 2ª constante arbitraria)

2) F depende tan sólo de y,y´.También en este caso se tiene una integral primera de la ecuación de Euler(como se verá a p. 35):

$$F - y' F_{y'} = \alpha \qquad (ºº)$$

con $\alpha$ const. arbitraria.Y también ahora la ec dif de 1 e orden (ºº) se integra de inmediato observando que el primer miembro contiene tan sólo y,y`, de modo que despejando y´se tiene una ecuación del tipo

$$y' = \psi(x, \alpha)$$

de modo que

$$y = \int \psi(x, \alpha)\, dx$$

Volviendo al ejemplo anterior
(Las líneas extremales son por lo tanto las $\infty^2$ rectas del plano. Efectivamente sabemos que el mínimo se realiza en el problema actual para el segmento de recta que une los dos puntos dados.

Lo que las extremales son $\infty^2$ no es una particularidad de este ejemplo, sino que depende de la circunstancia general que la ecuación diferencial de Euler es de segundo orden, de manera que en su solución aparecen dos constantes arbitrarias. (v. p. A1)

Otro ejemplo. Buscamos las extremales en el problema 2) de p. 1, es decir en el problema de la superficie de rotación de área mínima planteado en esa oportunidad. Ahora (p. 3)

$$F(x, y, y') = y\sqrt{1+y'^2}$$

(la $F$ no contiene explícitamente la $x$) ~~Tiene la ecuación de Euler de la forma (10)~~

$$\cancel{\sqrt{1+y'^2} = \frac{d}{dx}\frac{y\,y'}{\sqrt{1+y'^2}}}$$

En general, cuando como en este caso la $F$ no contiene explícitamente la $x$, la ecuación de Euler puede escribirse en la forma

$$F - y'F_{y'} = \text{const.} \qquad (12)$$

En efecto la (11) viene a ser

$$y''F_{y'y'} + y'F_{yy'} - F_y = 0$$

Por lo tanto (recordando $F_x = 0$ etc.)

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'F_{y'}\right) = F_y y' + \cancel{F_{y'}y''} - \cancel{y''F_{y'}} - y'^2 F_{yy'} - y'y''F_{y'y'}$$
$$= y'\left(F_y - y'F_{yy'} - y''F_{y'y'}\right) = 0$$

Integrando, se logra (12) como se dijo a p. 33 bis. Esta transformación es muy ventajosa. Volviendo al ejemplo, puedo escribir la ecuación de Euler, aprovechando (12) en la forma

$$y\sqrt{1+y'^2} - y'y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const}$$

es decir

$$\frac{y(1+\cancel{y'^2}) - \cancel{y}y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const}$$

esto es

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = b$$

(que podemos suponer $\neq 0$; si prescindimos de la solución $y=0$, como lo sobreentendemos a continuación)

siendo $b$ una constante. Tenemos que resolver esta ec. dif. Despejando $y'$. Es,

$$1+y'^2 = \frac{y^2}{b^2} \quad ; \quad y' = \sqrt{\frac{y^2}{b^2}-1}$$

(incluimos el doble signo en el símbolo del $\sqrt{\ }$; va a desaparecer a p. 39 elevando a cuadrado!)

y la ec. dif. es, separando las variables

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{b^2}-1}} = dx.$$

Recordando que $\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \log\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$ logro sucesivamente

$$b\,\frac{d\frac{y}{b}}{\sqrt{\frac{y^2}{b^2}-1}} = dx; \quad b\log\left(\frac{y}{b}+\sqrt{\frac{y^2}{b^2}-1}\right) = x-a$$

(llamando a una const. arbitraria). ~~Pas~~ Divido por b y paso de los logaritmos a los números

$$e^{\frac{x-a}{b}} = \frac{y}{b} + \sqrt{\frac{y^2}{b^2}-1}$$

Pasando y/b a 1er miembro y cuadrando

$$e^{2\frac{x-a}{b}} + \cancel{\frac{y^2}{b^2}} - 2e^{\frac{x-a}{b}}\frac{y}{b} = \cancel{\frac{y^2}{b^2}} - 1$$

Despejo y/b:

$$\frac{y}{b} = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{x-a}{b}}\left(e^{2\frac{x-a}{b}}+1\right)$$

y por fin

$$y = \frac{b}{2}\left[e^{\frac{x-a}{b}} + e^{-\frac{x-a}{b}}\right] = b\,\mathrm{ch}\,\frac{x-a}{b}\,^{(1)} \qquad (13)$$

integral de la ecuación de Euler, con las dos constantes arbitrarias a, b.

(1) Recuerdo que ch x (coseno hiperbólico de x) es $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

* En el problema considerado, las extremales son luego las $\infty^2$ catenarias (13). que todas tienen como directriz la recta $r \equiv$ eje $x$.

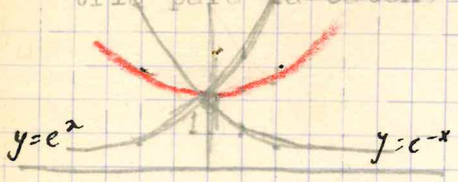
Geométricamente, (13) es la ecuación de una catenaria ( curva cuya forma es la de un hilo suspendido en ~~dos puntos~~ bajo la acción de la gravedad) La (13) puede simplificarse al efectuar un cambio de abscisa poniendo $x'=x-a$ : la ecuación se escribe entonces (usando x en lugar de x')

$$y=\frac{b}{2}\left(e^{x/b}+e^{-x/b}\right)$$

o, transformando con la semejanza que se logra al substituir x,y resp.te con x/b, y/b

$$y=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=\operatorname{ch} x \qquad (14)$$

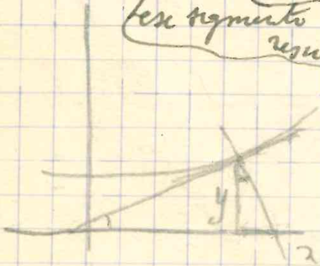
Con respecto a la catenaria (13) o (14) el eje de las x (y=0) llámase la directriz de la curva. .La forma de la curva se ve fácilmente sobre (14) al observar que, para cada valor de la abscisa, la ordenada es la media entre las ordenadas correspondientes a la curva exponencial $y=e^{x}$ y a su simétrica con respecto al eje y. El eje y es de simetría para la catenaria. Tomo esta oportunidad para recordar la notable propiedad se la catenaria, que el radio de curvatura en cada punto de la misma es igual(y de signo contrario) al segmento de normal hasta la intersección con la directriz .En efecto ,para una curva plana $y=y(x)$ ,observando la longitud $yy'$ de la subnormal, ~~vale~~ el segmento de normal resulta, en valor absoluto:




$$|y|\sqrt{1+y'^2}$$

mientras que el radio de curvatura es

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$




Igualando las dos expresiones resulta:

$$|yy''| = 1+y'^2 \qquad (15)$$

Ahora bien ,para la catenaria(13) tenemos

$$y=\frac{b}{2}\left(e^{\frac{x-a}{b}}+e^{-\frac{x-a}{b}}\right);\quad y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-a}{b}}-e^{-\frac{x-a}{b}}\right).$$

$$y''=\frac{1}{2b}\left(e^{\frac{x-a}{b}}+e^{-\frac{x-a}{b}}\right);\quad 1+y'^2=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-a}{b}}+e^{-\frac{x-a}{b}}\right)^2$$

lo que comprueba (15)

Más precisamente, para la catenaria y e y" tienen el mismo signo, de manera que ,al escribir la (15) en la forma;

$$\pm y y'' = 1 + y'^2$$

rige el signo MAS: esto es para la catenaria

$$y y'' = 1 + y'^2 \qquad (16)$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden , y hemos averiguado que(13)es solución de la misma. Como (13) contiene las dos constantes arbitrarias a y b, es plausible que al buscar las soluciones de (16) se encuentre efectivamente la fórmula (13) .Vamos a averiguar si es efectivamente así: en otras palabras tratemos de integrar la (16).

La dicha ecuación presenta una particularidad notable, que facilita su integración, en cuanto en la misma no figura explicitamente la x, sino que sólo figuram y,y´,y": ahora bien estudio un momento las ecuaciones del tipo

$$G(y,y',y'')=0 \qquad (17)$$

siendo G una función arbitraria de sus tres argumentos(ecuaciones diferenciales de sefgundo orden que no contienen explicitamente la variable independiente). Conviene tomar provisionalmente como variable independiente la y. Como la ecuación dada se escribe

$$G\left(y, y', \frac{dy'}{dx}\right) = 0$$

efectuando el dicho cambio de variable viene a ser

$$G\left(y, y', \frac{dy'}{dy} y'\right) = 0$$

ecuación que vincula y e y! precisamente es una ecuación diferencial de primer orden para y´considerada como ecuación de y .Tenemos así la ventaja de haber rebajado el orden de la ecuación diferencial de dos a uno. Si podemos integrarla, logrando $y' = \varphi(y)$ queda por integrar la nueva ecuación dif del primer orden así escrita, la cual sinembargo no da lugar a dificultades porque es una ecuación con las variables separadas

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = dx$$

de modo que ya está reducida a cuadraturas. Vemos así que las ecuaciones de segundo orden del tipo (17) pueden reducirse al primer orden

Aplicando el procedimiento a la ecuación (16) logramos sucesivamente:

$$y\frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = 1+y'^2; \qquad yy'\frac{dy'}{dy} = 1+y'^2$$

(Separando las variables)

$$\frac{y'dy'}{1+y'^2} = \frac{dy}{y}, \quad \text{Integrando} \quad \frac{1}{2}\lg(1+y'^2) = \lg y + \text{cnst}$$

Llamando a la cnst $\lg\frac{1}{b}$ y pasando de los logaritmos a los números

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{y}{b} \quad \text{es decir} \quad \boxed{\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = b}$$

Ahora bien esta es la misma ec dif de primer orden estudiada a p. 37, que nos llevó a la ecuación (13) de la catenaria. Queda así demostrado que la (13) es el resultado de la integración de (16). Para agotar la cuestión geométrica cifrada en (15) nos queda por considerar las curvas integrales de la ecuación dif, también ord de 2º orden

$$-yy'' = 1+y'^2$$

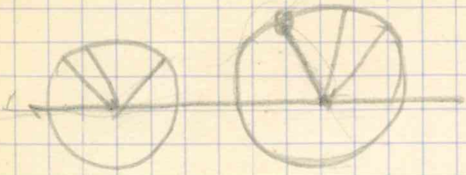
Aplicando el mismo método la escribo

$$-y\frac{dy'}{dy}y' = 1+y'^2; \qquad \frac{y'dy'}{1+y'^2} = -\frac{dy}{y}$$

$$\frac{1}{2}\lg(1+y'^2) = -\lg y + \lg k; \qquad 1+y'^2 = \frac{k^2}{y^2}$$

$$y' = \sqrt{\frac{k^2}{y^2}-1}; \qquad \frac{dy}{\sqrt{\frac{k^2}{y^2}-1}} = dx; \qquad \frac{y\,dy}{\sqrt{k^2-y^2}} = dx$$

$$-\sqrt{k^2-y^2} = x-a \quad (a \text{ cnst}); \quad \underline{k^2 = y^2+(x-a)^2}.$$



Esta es la ecuación de las curvas integrales: al variar las dos constantes arbitrarias a,b, la misma representa, como es claro un círculo cualquiera cuyo centro esté sobre el eje de las x. Es evidente que también para estas curvas el segmento de normal interceptado por el eje x es igual al radio de curvatura. Parangonando con el caso de la catenaria, existe una diferencia, debido a que ahora el segmento que va de un punto de la curva a la intersección del mismo con la recta fija(eje x) coincide(aún en el sentido) con él que va al centro de curvatura.

Sea lo que fuere, de lo dichi resulta que catenarias de directriz r y círculos con el centro sobre r son las únicas curvas tales que para cada punto P de la curva el segmento de normal entre P y la recta fija r sea igual, en valor absoluto, al radio de curvatura en P.

Volvamos después de lo dicho, a la ecuación de Euler. Más precisamente vamos a considerarla en el caso de la braquistocrona (p.9), rn el cual

$$F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-\alpha}}$$

También ahora la F no contiene x, de manera que podemos aplicar el procedimiento indicado a p.(35) , es decir la ecuación (12) logrando

$$F - y'F_{y'} \equiv \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-\alpha}} - \frac{y'\cdot y'}{\sqrt{1+y'^2}\,\sqrt{y-\alpha}} = \text{cost}$$

es decir

$$\frac{1+\cancel{y'^2}-\cancel{y'^2}}{\sqrt{1+y'^2}\,\sqrt{y-a}} = \text{cost que llam } \frac{1}{\sqrt{2b}}$$

Fijado b, esta es una ec dif de primer orden en la cual podríamos despejar y' y después integrar por separación de variables al considerar y' como función de y. Sin embargo, mejor resulta introducir una variable auxiliaria u, mediante la cual trataremos de espresar y',y y luego x, llegabdo así a representaciones parámétricas de las curvas integrales. Pongo

$$y' = -\operatorname{tg}\frac{u}{2}$$

Ahora

$$y - \alpha = \frac{2b}{1+y'^2} = \frac{2b}{1+\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}} = 2b\cos^2\frac{u}{2} = b(1+\cos u)$$

que permite expresar y en función de u. En cuanto a x, tenemos

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dy}\,\frac{dy}{du} = \frac{1}{y'}\,\frac{dy}{du}$$

y , siendo de acuerdo con la fórmula anterior $dy/du = -b\,\mathrm{sen}\,u$

$$\frac{dx}{du} = -\frac{1}{y'}\,b\,\mathrm{sen}\,u = \frac{b\,\mathrm{sen}\,u}{\operatorname{tg} u/2}$$

Ahora bien, para cualquier v, se tiene

$$\operatorname{tg} v = \frac{\mathrm{sen}\,v}{\cos v} = \frac{2\,\mathrm{sen}\,v\cos v}{2\cos^2 v} = \frac{\mathrm{sen}\,2v}{1+\cos 2v} \quad \Big| \quad \text{luego} \quad \operatorname{tg}\frac{u}{2} = \frac{\mathrm{sen}\,u}{1+\cos u}.$$

Por consiguiente

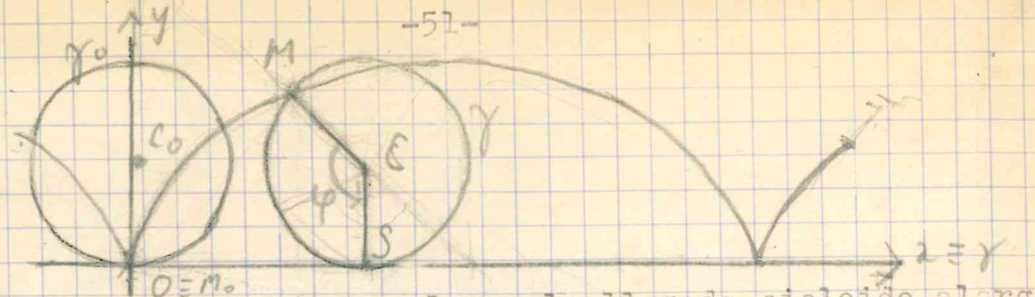
$$\frac{dx}{du} = b\,\mathrm{sen}\,u\,\frac{1+\cos u}{\mathrm{sen}\,u} = b(1+\cos u)$$

e integrando, siendo a una constante arbitraria $x = a + b(u + \mathrm{sen}\,u)$

Llegamos así a las ecuaciones paramétricas de la más general curva integral de la ecuación de Euler(extremal en el problema de la brachistocrona

$$\begin{cases} x = a + b(u + \mathrm{sen}\,u) \\ y = \alpha + b(1+\cos u) \end{cases} \qquad (18)$$

Las (18) son ecuaciones paramétricas de una <u>cicloide</u> . Recuerdo que cuando un círculo $\gamma$ rueda sin resbalar sobre una recta r (<u>recta base</u>) - la cual por lo tanto resulta tangente a todas las sucesivas posiciones del círculo -un punto determinado cualquiera de la circunferencia describe una curva que llámase cicloide(a veces cicloide <u>ordinaria</u>para distinguirla de otras cicloides, descritas por puntos vinculados rígidamente con el círculo, pero no situados sobre la circunferencia:si




el punto es interior se logra la llamada cicloide alargada, si exterior la cicloide acortada. Aquí será cuestión tan sólo de la cicloide ordinaria). Sea b el radio del círculo móvil, y $\gamma_0$, de centro $C_0$, una posición particular del mismo, en la cual el punto del cual se estudia la trayectoria está en el punto de contacto $M_0$ de $\gamma_0$ con la recta base. Tomemos, como se hace generalmente, ejes cart ort con origen $O=M_0$, el eje y coincidente con el diámetro $M_0C_0$ orientado desde $M_0$ hacia $C_0$, y como eje x la recta a, orientada de modo que resulte $\widehat{xy} = \pi/2$. Considerando una nueva posición de $\gamma$, sea C su centro, S el nuevo punto de contacto con la recta base, M la nueva posición donde está ahora $M_0$, $\varphi$ el ángulo de las dos rectas (orientadas) CM, CS, para el cual tomamos – en correspondencia a cada posición del círculo que rueda– el valor que se deduce por continuidad del valor cero para $M=M_0$. Para expresar las coordenadas del punto M en función de $\varphi$, considerado como parámetro, se proyecta la quebrada OSCM ~~sobre~~ ortogonalmente sobre los dos ejes, logrando

$$x = OS + b\cos(CM, x) = b\varphi + b\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = b(\varphi - \operatorname{sen}\varphi)$$

$$y = b + b\cos(CM, y) = b + b\cos(\varphi + \pi) = b(1 - \cos\varphi)$$

Por lo tanto las ecuaciones paramétricas de la cicloide considerada con respecto al sistema de ejes empleado son

$$x = b\,(\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \quad , \quad y = b(1 - \cos\varphi) \qquad (19)$$

La curva se compone de infinitos arcos todos iguales entre sí, que se superponen por medio de traslaciones paralelas al eje x, es decir a la recta base, de amplitud igual o múltiple de $2\pi$, debido a que, sumando esta cantidad a $\varphi$, el punto genérico de la curva de coordenadas x, y, se trans-

La cicloide contiene infinitos ~~[illegible]~~ puntos cuspidales: en efecto de

$$\frac{dx}{d\varphi} = b(1-\cos\varphi) \quad , \quad \frac{dy}{d\varphi} = b \operatorname{sen}\varphi$$

sigue que para

$$\varphi = \ldots\ldots -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, \ldots\ldots$$

$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dy}{d\varphi} = 0$, por lo tanto son cuspidales todos los puntos que la cicloide tiene en común con la recta base.

forma en el punto $x + 2\pi$ ,y. Si cambiamos parámetro al poner $\varphi = u + \pi$ ,las (19) se escriben

$$x = b\pi + b(u + \operatorname{sen} u), \quad y = b(1 + \cos u)$$

y, si efectuamos una traslación arbitraria de ejes $X = x + x_0$ , $Y = y + y_0$ :

$$X = (b\pi + x_0) + b(u + \operatorname{sen} u), \quad Y = y_0 + b(1 + \cos u)$$

es decir- prescindiendo de las notaciones logramos precisamnete las (18), loque comprueba que las (18) representan una cicloide, antes bien una cicloide con recta base horizontal. Más precisamente, en las (18) a,b son constantes arbitrarias, mientras que $\alpha$ es una constante determinada por el problema de mínimo planteado. Ahora bien ,la segunda de las (18) enseña que, al variar u, la y varía entre $\alpha + 2b$ y $\alpha$ de modo que la recta base es la recta fija $y = \alpha$. Por lo tanto las $\infty^2$ curvas (18) son cicloides con rectas bases coincidientes con una recta horizontal dada.

Hay que tener presente que, a diferencia de la figura anterior, para plantear el problema de la braquistocrona a p 7 tomamos el eje y positivo dirigido hacia abajo, de manera que las $\infty^2$ cicloides que constituyen las extremales de nuestro problema de mínimo son las $\infty^2$ cicloides que tienen la recta fija $y = \alpha$ como base, y tienen su concavidad hacia arriba

figura 53 bis
53 ter

Como último ejemplo indico otro en el cual ocurren cosas muy distintas. Sea la integral

$$\int_{x_0}^{x_1} (x+yy')\,dx$$

que queremos minimizar. Tenemos $F(x,y,y')= x+yy'$. Formo la ecuación diferencial de Euler p. e. en la forma (10)

$$y' - \frac{d}{dx}y = 0 \quad \text{es decir} \quad y'-y'=0; \quad 0=0$$

En este caso la ecuación de Euler se reduce a una identidad! Ya no podemos hablar de extremales, o mejor dicho cada línea $y=f(x)$ que une los dos puntos P,Q puede considerarse como una extremal. La explicación de la aparente anomalía es bastante sencilla. En el caso actual el integrando es la derivada total con respecto a x de la siguiente función de x,y (en la cual se imagine y como función arbitraria de x):

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

Luego

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dx}\,dx = V_Q - V_P$$

indicando con $V_P$, $V_Q$ el valor de la función V resp. en los puntos P,Q El valor de la integral I es por lo tanto siempre el mismo (dado por la fórmula que acabamos de escribir) de cualquier manera elijamos la línea $y=f(x)$ : podemos &&&&&& &&& convenir de decir que cualquier línea lleva a un mínimo, así como podemos convenir de decir que ninguna línea lleva a un mínimo. Si se quiere un caso análogo en la teoría de los máximos o mínimos de las funciones de una variable $f(x)$, puede tomarse el caso en el cual la función $f(x)$ se reduce a una constante: cualquier valor se adopte para la variable x, la función siempre tiene el mismo valor.

El ejemplo indicado puede generalizarse de la forma siguiente. Si, indicando con $V(x,y)$ una función de las dos variables x,y , tenemos

$$F(x,y,y') = V_x + V_y y'$$

la ecuación de Euler es

$$V_{xy} + V_{yy}y' - (V_{xy} + V_{yy}y') = 0 \quad \text{esto es } 0=0.$$

de modo que se reduce a una identidad . Por otro lado tenemos, como arriba

$$I=\int_{x_0}^{x_1}\frac{dV}{dx}\,dx = V_Q - V_P$$

loque explica que la integral tiene un mismo valor cualquier sea la función $y=f(x)$ .

Cabe preguntarse: ¿existen otros casos en los que la ecuación de Euler viene a ser una identidad? La contestación es negativa. Supongo en efecto que así sea: tomo p. e. la ec. en la forma (11)

$$F_y - F_{xy'} - y'F_{yy'} - y''\underbrace{F_{y'y'}} = 0 \qquad (11)$$

Si esta ecuación es indeterminada, tiene que ser igual a cero idénticamente el coef. de $y''$ : luego $F(x,y,y')$ es una función tal que $F_{y'y'}=0$, y por lo tanto es lineal con respecto a $y'$. Tenemos así ~~F=A(x,y)+B(x,y)~~

$$F(x,y,y')=A(x,y)+B(x,y)y'$$

Lo que queda de la (11) tiene tambień que reducirse idénticamente a cero: esto es

$$A_y + \cancel{B_y y'} - B_x - \cancel{y' B_y} = 0$$

Siendo por lo tanto $A_y - B_x = 0$, existe una función $V(x,y)$ tal que $A=V_x, B=V_y$ , de forma que estamos precisamente en el caso indicado anteriormente.

---

La ecuación de Euler nos da a conocer una condición necesaria para el mínimo. La deducción de condiciones generales suficientes lleva consigo dificultades . Sin embargo existen casos en los cuales puede afirmarse sin demasiada dificultad que una extremal brinde un mínimo relativo. Con esto se entiende decir que cierta extremal que une los dos puntos P,Q, y está en el interior de cierta región R hace la integral (2) mínima si la parangonamos con las otras curvas que unen P,Q sin salir del interior de la región R. Por supuesto, no considerando nosotros los problemas de mínimo en forma paramétrica

Si indicamos un punto del campo con la letra o cifra a, a continuación usaremos la notación

$$F^{(a)} \equiv \cancel{F^{(a)}(x,y,p)}\ F^{(a)}(x,y,p)$$

para indicar el valor que tiene ~~del punto~~ ~~a~~ la $F$ calculada para las coordenadas $x, y$ del punto $a$ y la pendiente $p$ en el mismo. – Anàlogament p.e. para

$$F^{(a)}_{y'} = F^{(a)}_{y'}(x,y,p)$$

(p.13) las curvas con las cuales parangonamos las extremales siempre serán representables con ecuaciones $y=y(x)$, es decir encontradas en un único punto por las paralelas al eje $y$ en el intervalo $x_0 \le x \le x_1$.

En lo que voy a decir se utiliza el concepto de campo de extremales . Las extremales, en cuanto líneas integrales de la ecuación de Euler, que es de segundo orden ,dependen de dos constantes arbitrarias. De su totalidad podemos pensar en separar una familia parcial que dependa de un único parámetro:[1] se dice que las extremales de esta familia constituyen un campo cuando cubren simplemente una región R (es decir cuando por un punto de R pasa una y una sola extremal de la familia), suponiéndose además que exista una línea D que tenga un punto en común con cada extremal de campo.


P. e. en el problema de la línea de longitud mínima que une dos puntos, donde como lo vimos las extremales son las rectas, podemos tomar como región R p. e. una circunferencia y como extremales del campo las rectas paralelas a una dirección fija llevadas por los puntos interiores a la circunferencia.

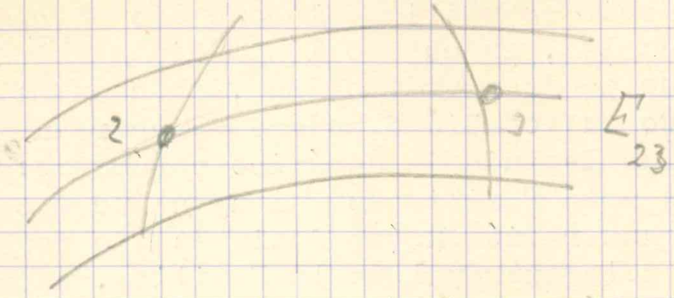
Sean P,Q, que ahora voy a llamar con las cifras 0 y 1, dos puntos interiores a una región R, cubierta por un campo de extremales, situados sobre una extremal del campo, $E_{01}$. Considero otra línea $C_{01}$ que una los mismos puntos, y sea interior a R: indicaré respectivamente con

$$I(E_{01}) \quad , I(C_{01})$$

el valor de la integral (2), según que como línea $y=y(x)$ se adopte la $E_{01}$ o bien la $C_{01}$. Al considerar otros puntos de la región, puntos 2,3, etc, me serviré de notaciones análogas.

También explico previamente el concepto de pendiente de un campo de extremales. Así se llama, en cada punto de la R la pendiente (coeficiente angular) de la recta tangente a la extremal del campo que pasa por dicho punto (p.e. en el ejemplo de arriba relativo a la línea de longitud mínima, la pendiente del campo indicado se reduce a una constante .En general, tendremos un valor determinado de la pendiente p en cada punto del campo , de manera que p será una función de x,y. ×

(1) Suponemos que si $y=f(x,b)$ –siendo b ese parámetro– es la ecuación de una extremal variable, las funciones $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial b}$ existan y sean continuas.


2
E'
23

Estudiemos previamente algunas fórmulas. Sea

$$y = f(x, b) \tag{20}$$

(introducido a continuación)

la ecuación de una extremal variable en un campo R. Sobre cada extremal (en un cierto intervalo del parámetro $b$) fijo dos puntos, arbitrariamente, que llamo 2 y 3. Más precisamente introduzco un nuevo parámetro t, y expreso b, la abscisa $x_2$ de 2 y la abscisa $x_3$ de 3 como funciones (derivables, etc,) del parámetro t:

$$b = b(t) \qquad , x_2 = x_2(t) \qquad , x_3 = x_3(t)$$

Las ordenadas de los puntos 2 y 3 se sacan de (20)

$$y_2 = f(x_2, b(t)) \qquad , \cancel{y_3 = f(x_3, b(t))} \quad y_3 = f(x_3, b(t)).$$

Para cada una de las extremales considerada me fijo en el correspondiente valor de la integral

$$I = I(E_{23}) = \int_{x_2}^{x_3} F(x, y, y')\, dx =$$

$$\int_{x_2}^{x_3} F\left(x, f(x,b), \frac{df(x,b)}{dx}\right) dx$$

(que escribí de la última manera para recordar que corresponde a la extremal $E_{23}$). Al variar t, esa integral viene a ser una función de t, siendo funciones de t los extremos $x_2$ y $x_3$ así como b. La primera fórmula que vamos a establecer tiene como objeto expresar la diferencial dI de la dicha integral. Tenemos:

$$dI = \frac{\partial I}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial I}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial I}{\partial b} db$$

Ahora

$$\frac{\partial I}{\partial x_2} = -F\left(x_2, f(x_2, b), \left[\frac{df(x,b)}{dx}\right]_{x=x_2}\right),$$

que escribo más brevemente

$$\frac{\partial I}{\partial x_2} = -F^{(2)}$$

entendiéndose que, como lo aclara la fórmula explícita anterior, los tres argumentos de los cuales depende $F^{(2)}$ son abscisa y ordenada del punto 2 y la pendiente del campo en el mismo punto. Análogamente, y con &&& notación análoga

$$\frac{\partial I}{\partial x_3} = F^{(3)}$$

Por fin[1]

$$\frac{\partial I}{\partial b} = \int_{x_2}^{x_3} \left\{ F_y\left(x, f(x,b), f'(x,b)\right) \frac{\partial f}{\partial b} + F_{y'}\left(x, f(x,b), f'(x,b)\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial b} \right\} dx$$

Pues bien, la (20) representa una extremal, que por lo tanto cumple con la ecuación de Euler (10) p. 27

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = F_y$$

de modo que el integrando es

$$\frac{\partial f}{\partial b} \frac{d}{dx} F_{y'}\left(x, f(x,b), f'(x,b)\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial b} F_{y'}\left(x, f(x,b), f'(x,b)\right) =$$

~~Luego~~

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial b} F_{y'}\left(x, f(x,b), f'(x,b)\right)\right]$$

y Luego podemos efectuar la integración, y obtenemos

$$\frac{\partial I}{\partial b} = \left[\frac{\partial f}{\partial b} F_{y'}\left(x, f(x,b), f'(x,b)\right)\right]_2^3$$

donde el segundo miembro representa el incremento de la expresión entre corchetes al pasar de $x_2$ a $x_3$. Resulta así:

$$dI = F^{(3)} dx_3 - F^{(2)} dx_2 + \left[\frac{\partial f}{\partial b} F_{y'}\left(x, f(x,b), f'(x,b)\right)\right]_2^3 db$$

(1) En las hipótesis hechas está permitido derivar bajo el signo de integral, siendo el integrando no sólo función continua sino que tiene respecto de b derivada continua.

Ahora ~~eso~~ p.e. en el punto 3 tenemos, diferenciando totalmente la $y = f(x,b)$ $\qquad dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial b}db$

y siendo $\frac{\partial f}{\partial x}$ la pendiente del campo, podemos despejar

$$\frac{\partial f}{\partial b}db = dy - p\,dx$$

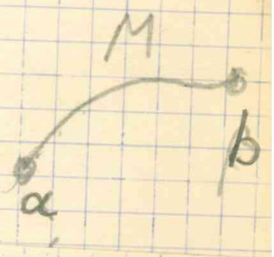
Luego, substituyendo y poniendo $F^{(3)}_{y'} = \left[F_{y'}(x, f(x,b), f'(x,b))\right]_{x=x_3}$

$$\boxed{\begin{aligned} dI = {} & F^{(3)}dx_3 + F^{(3)}_{y'}(dy_3 - p_3\,dx_3) - \\ & - F^{(2)}dx_2 - F^{(2)}_{y'}(dy_2 - p_2\,dx_2) \end{aligned} \qquad (A)}$$

donde llamé $p_2, p_3$ las pendientes en los ptos 2, 3

De la (A) vamos a deducir otra fórmula, en la cual, además de la integral I tendremos que considerar otra

$$J = \int_{M} F(x,y,p)\,dx + F_{y'}(x,y,p)(dy - p\,dx)$$



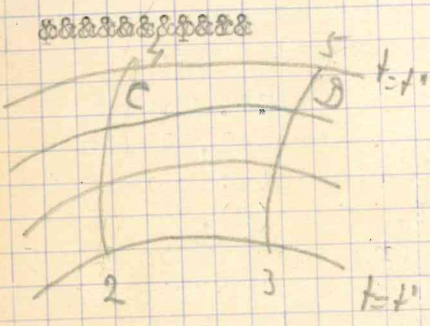

donde la integral es una integral curvilínea, a lo largo de una curva M (reprsentada par.te al tomar x=x(t),y=y(t) ) interior al campo R de extremales, la cual una dos puntos de dicho campo, que (conformemente a lo que ya hicimos) indicamos con cifras: si estas son a,b, escribiremos $J=J(M_{ab})$. En cuanto a la p que figura en la integral, indica la pendiente del campo (calculada en los varios puntos del camino M de integración).

Cabe observar, por que lo aplicaremos más adelante, que si, como caso particular la línea M es una extremal E, tenemos

$$J(E_{ab}) = I(E_{ab})$$

es decir la integral J se reduce a la integral que se trata de minimizar. En efecto, si M es una extremal, a lo largo de la misma dy/dx, coeficiente angular de la tangente, viene a coincidir con la pendiente del campo, y luego dy-pdx=0, lo que hace evidente J=I

Esto siendo previamente dicho, retomamos las consideraciones de p. 57: supongo dejar variar el parámetro t entre dos límites t′,t", y de fijarme en las correspondientes extremales del campo, así como en las sucesivas posiciones de los puntos 2,3.




Más precisamente sigo llamando así dichos puntos para el valor inicial t′ de t, y los llamo en cambio 4,5 para t=t". Las trayectorias de los dos puntos para t variable entre t′ y t" serán dos líneas C,D, que unen resp.te 2 con 4 y 3 con 5.

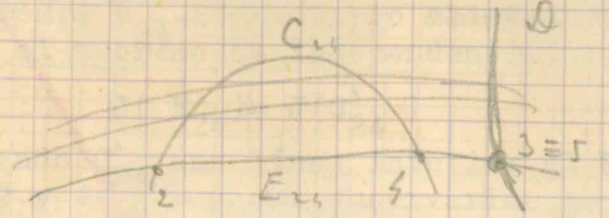
Integro intencos la (A) entre t′ y t". Al primer miembro tenemos que integrar la diferencial dI: el resultado obviamente es el incremento de I al pasar de t′ a t", es decir $I(E_{45})-I(E_{23})$. En cuanto al segundo miembro, descompongo la integral en una parte correspondiente al primer renglón y otra al segundo. La primera es la integral J, calculada a lo largo de la línea D entre los puntos 3 y 5; la segunda es la misma integral J a lo largo de la línea C entre 2 y 4 cambiada de signo. Concluimos así

$$\boxed{I(E_{45}) - I(E_{23}) = J(D_{35}) - J(C_{24})} \qquad (B)$$

De la fórmula (B) podemos deducir un teorema de independencia relativo a la integral J: si en el interior de R tomamos dos puntos, que llamo 2,4 y los unimos con una línea C interior a R, el valor de la integral $J(C_{24})$ es independiente de la elección de la línea C. En efecto, al considerar las extremales del campo R que salen de los puntos de la línea C hasta sus intersecciones con la línea D (p.55), podemos considerar C y D como las líneas indicadas con esas mismas letras en la fórmula (B), y de la misma deducimos

$$J(C_{24}) = J(D_{35}) - I(E_{45}) + I(E_{23})$$

El resultado no deja de subsistir si los puntos 2 y 4, por casualidad están sobre una misma extremal del campo presentándose entonces la figura




Entonces los puntos 3 y 5 coinciden entre sí, y por &&&&&& guiente

$$J(D_{35})=0$$

Luego la última fórmula de p. 63 se reduce a

$$J(C_{24}) = -I(E_{45}) + I(E_{23})$$

es decir(por coincidir los puntos 3 y 5)

$$J(C_{24})= I(E_{23})-I(E_{43})$$

o bien, expresando la diferencia de integrales que está en el segundo miembro, como una integral única

$$J(C_{24})= I(E_{24})$$

Por otra parte, por ser E una extremal, de acuerdo con el principio de p. 63 se tiene

$$I(E_{24})= J(E_{24})$$

de modo pues que

$$J(C_{24})=J(E_{24})$$

lo que expresa que en el caso particular encarado el valor de $J(C_{24})$, independiente del camino, no deja de coincidir con el valor particular $J(E_{24})$ que se obtiene al tomar como camino el que en este caso es brindado por la extremal $E_{24}$. Justamente en esta forma el teorema se aplicará dentro de poco.

En el segundo miembro cada uno de los tres términos es independiente de la línea C, sino que depende tan sólo de los puntos 2,4. Lo mismo pasará por lo tanto del primer miembro.

Huelga decir que loas cifras 2 y 4 no tienen nada de particular: si los dos puntos que consideramos se indican con 0, 1 podrá decirse que la integral $J(C_{01})$ es independiente del camino C que une a los dos puntos 0,1.

Paso ahora a aludir brevemente a la aludida condición de suficiencia. Considero una extremal $E_{01}$, interior al campo R de extremales, la cual una los dos puntos 0,1 . Sea $C_{01}$ otra línea interior a R que une los mismos puntos. Es claro que si podemos demostrar que

$$I(C_{01}) - I(E_{01}) > 0 \qquad (21)$$

o por lo menos (fórmula un poco menos expresiva)

$$I(C_{01}) - I(E_{01}) \geq 0 \qquad (22)$$

tendremos demostrado que la extremal $E_{01}$ lleva precisamente a un mínimo relativo, debido a que la (21) expresa que si substituimos a la $E_{01}$ otra línea $C_{01}$ la integral I crece; la (22) expresa la misma circunstancia, sin excluir que existan otras líneas $C_{01}$ que brinden para la integral I el mismo valor brindado por la extremal considerada . Se trata luego, para encontrar condiciones suficientes, de encontrar condiciones que permitan afirmar una de las dos desigualdades que acabo de considerar. Ahora bien, recordando que para una extremal las integrales I y J coinciden (p.63) podemos escribir

$$I(C_{01}) - I(E_{01}) = I(C_{01}) - J(E_{01})$$

y debido al teorema de independencia aplicado a los puntos 0,1

$$= I(C_{01}) - J(C_{01})$$

o bien explicitando estas dos últimas integrales , y suponiendo que a lo largo de la curva C sea $y=g(x)$:

$$= \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, g(x), \frac{dg}{dx}\right) dx -$$

$$- \int F(x,y,p)\,dx + F_{y'}(x,y,p)\,(dy - p\,dx)$$

La última integral ,según lo dicho a p.61, es una integral curvilínea a lo largo de la curva C: como ahora esta tiene la ecuación y=g(x), podemos considerarla como una integral con respecto a x, entre los límites $x_0$ y $x_1$, substituyendo y = g(x), ,mientras que p sigue siendo la pendiente del campo en los varios puntos de la línea C.Luego, reuniendo todo el segundo miembro en una única integral:

$$I(C_{0,1}) - I(E_{0,1}) \cancel{= \int_{x_0}^{x_1}\left[F\left(x,g(x),\frac{dg}{dx}\right) - F(x,g(x),p) - F_{y'}(x,g(x),p)\left(\frac{dg}{dx}-p\right)\right]dx.}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\left[F\left(x,g(x),\frac{dg}{dx}\right) - F(x,g(x),p) - F_{y'}(x,g(x),p)\left(\frac{dg}{dx}-p\right)\right]dx \qquad (23)$$

Bajo el signo de integral la función F aparece de dos maneras distintas: los dos primeros argumentos son siempre x e y=g(x) mientras que el tercer argumento una vez es dg/dx (coef. ang de la línea C) y la segunda vez es p(pendencia del campo): también en $F_{y'}$, es este el tercer argumento. Pues bien , vamos a introducir una función de 4 variables de la manera siguiente.En un punto (x,y) consideramos un valor cualquiera $y'_0$ de y' (con tal que la terna de valores $x,y,y'_0$ pertenezca al campo de existencia de la función F) , y otro análogo y', ponemos

$$E(x,y,y'_0,y') = F(x\,y\,y') - F(x\,y\,y'_0) - (y'-y'_0)\,F_{y'}(x\,y\,y'_0)$$

La E resulta así una función de los 4 argumentos $x,y,y'_0,y'$, que vamos a considerar en particular para $y'_0=p$ , dejando indeterminado y'(función E de Weiwerstrass):

$$E(x,y,p,y') = F(x\,y\,y') - F(x\,y\,p) - (y'-p)\,F_{y'}(x\,y\,p). \qquad (24)$$

(para recordarla, obsérvese que es la diferencia entre F(x,y,y') y los dos primeros términos de su desarrollo en serie de potencias de y'-p ).

En la última integral considerada el integrando es precisamente la función E de Weierstrass ahora considerada cuando se adopte y=g(x), y'= dg/dx

La duda de que pueda la integral ser nula se elimina de la manera siguiente. A) a lo largo de la línea C (no extremal del campo) de ecuación $y=g(x)$ no puede constantemente $y'$ coincidir con la pendiente p.En efecto esto equivale a decir: B) Si a lo largo de la línea C es constantemente $y'=p(x,y)$, la línea C es una extremal del campo. B) se demuestra observando que $y'=p(x,y)$ es una ec.dif de primer orden para la función $y(x)$.Si sobre C fijamos un punto M ,la línea integral de dicha ec. dif que pasa por M, la cual es única, no puede ser distinta de la C que en la hipótesis de B) es también línea integral de la misma ec. dif. Establecido así A), si C no es una extremal del campo, existe por lo menos un punto de C en donde $y'$es distinto de p, y luego $E(x,y,p,y')$ es esencialmente positivo:por continuidad E se mantiene positivo en los puntos de C próximos a M, y la integral es positiva.

La (27) corresponde al caso de un extremo"propio" para una función de una variable, en el sentido recordado a p. 2.

Ahora bien, supongamos que en todo el campo R de extremales considerado, de cualquier manera se elija y´(con la condición ya expresada que la terna xyy´ pertenezca al campo de existencia de F),mientras p- como lo dijimos es la pendiente del campo en el punto (x,y) - la función E(x,y,p,y`) sea positiva o nula, es decir

$$E(x,y,p,y') \geqslant 0 \qquad (25)$$

Entonces la (23) que escribimos

$$I(C_{01}) - I(E_{01}) = \int_{x_0}^{x_1} E\left(x, g(x), p, \frac{dg}{dx}\right) dx \qquad (26)$$

pone en evidencia que la diferencia considerada a primer miembro es la integral de una función de x que - en base a (25)- se mantiene constantemente positiva o nula.Por consiguiente aún la integral, es decir la diferencia a primer miembro es positiva o nula ,es decir rige la desigualdad (22)

Si en lugar de (25) subsiste la desigualdad más expresiva

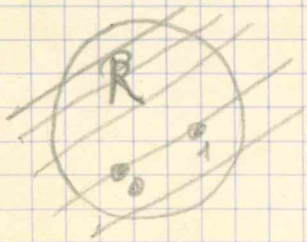
$$E(x,y,p,y') > 0 \text{ para } y' \neq p \qquad (27)$$

(para y´=p la definición (24) de E enseña que la E se anula) la integral en el segundo miembro de (26) es positiva, de manera que también la integral es positiva no nula: es decir se concluye la desigualdad (21).

Hemos así llegado , como se ve a condiciones suficientes para un mínimo relativo. En el problema de mínimo relativo a la integral (2), si encontramos una extremal que une a los dos puntos 0,1, y la misma forma parte de un campo de extremales para el cual rija la desigualdad (25) o bien (27), la extremal brinda efectivamente un mínimo relativo, según la (21) o resp. la (22).

Al teorema anterior puede llamárselo teorema fundamental de suficiencia.

Veamos p. e., aunque se trata de un caso demasiado sencillo, en el cual ya estamos enterados de la suficiencia por otros caminos, el ejemplo de la línea y=f(x) de longitud mínima que une dos puntos dados 0,1. Ya sabemos que,como condición necesaria, esa línea tiene que ser una recta, debido a que las extremales son rectas (p.35). Considero entonces la recta $E_{01}$ que une los dos puntos 0,1 (en este ejemplo es inmediato que pasa una extremal para los dos puntos dados; en otros casos esto resulta mucho menos fácil para encontrar), y tomo como campo de extremales p. e. el sistema de rectas paralelas a aquella llevadas por los puntos interiores a un cículo que contiene los puntos 0,1. La pendiente del campo es ahora una constante p. Para construir la función E de Weierstrass observo que en




el caso actual (p.33)

$$F(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$$

de manera que, de acuerdo con la (24)

$$E(x,y,p,y') = \sqrt{1+y'^2} - \sqrt{1+p^2} - (y'-p)\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

Pues bien, si aplico a la función (de una sola variable) $\sqrt{1+y'^2}$ el desarrollo en serie de Taylor parado en el segundo término con el resto que le corresponde, tengo

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+p^2} + (y'-p)\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{1}{2}(y'-p)^2 F_{y'y'}\left(p+\theta(y'-p)\right)$$

siendo $\theta$ un número entre cero y uno. Ahora

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \; ; \; F_{y'y'} = \frac{1}{1+y'^2}\left\{\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

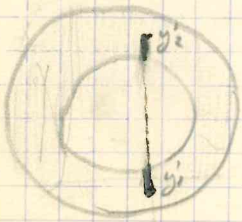
Es claro que como la raiz cuadrada de $1+y'^2$ se toma positivamente, el denominador del último quebrado es positivo: por lo tanto la $F_{y'y'}$ es esencialmente positiva, cualquier sea el argumento que se considera, luego en particular para el argumento arriba considerado $p+\theta(y'-p)$. Y como la cantidad que multiplica ese valor de $F_{y'y'}$ en la fórmula de arriba es esencialmente positiva para $y'$ distinto de $p$, vemos que la diferencia entre el primer miembro y los dos primeros términos del segundo es positiva (siempre para $y'$ distinto de $p$). Pero la dicha diferencia coincide con el valor de $E(x,y,p,y')$. Luego subsiste la (27) y se aplica el teorema general de suficiencia. El segmento de recta brinda efectivamente un mínimo (relativo de acuerdo con el teor gen de suf. pero en este caso absoluto, como es obvio).

En ese ejemplo para averiguar que está satisfecha la desigualdad inherente a la función E de Weierstrass nos servimos de la circunstancia que $F_{y'y'}$ se mantenía constantemente positiva. Pues bien el razonamiento que hemos hecho puede generalizarse, y llega a otra forma del teorema de suficiencia de la forma siguiente. Me refiero a las consideraciones generales de arriba, y al campo de extremales R. Supongo que sea constantemente

$$F_{y'y'}(x,y,y') > 0 \qquad (28)$$

(para todas la ternas $x,y,y'$ de argumentos que se logran al tomar el punto $(x,y)$ en el interior del campo R y como valor de $y'$ un valor tal que la terna $x,y,y'$ pertenezca al campo de existencia de F, que llamaré T )

Agrego otra hipótesis relativa al campo T, que por simplicidad represento geométricamente al imaginar provisionalmente las tres variables $x,y,y'$ como coordenadas cart ort en el espacio (pensando en el eje $y'$ como en un eje vertical). Dada una región T , y dos puntos de la misma situados sobre una misma vertical, sean $(x\,y\,y'_1)$, $(x,y,y'_2)$, suponiéndose p. e. $y'_1 < y'_2$, pueden imaginarse para la región T formas tales que el segmento de vertical que une a los dos puntos no sea todo interior a T. P. e. tómese para T la región de los puntos interiores a un toro (anillo) y los dos puntos como en la figura.



Ahora bien, nosotros supondremos que la región T no de lugar a esa posibilidad: en otras palabras <u>supongo que T sea tal que, al tomar en T dos puntos cualesquiera,</u> sobre una vertical <u>el segmento que los une sea completamente interior a T</u> (como ocurre p. e. si T es una esfera, o un cubo, o una figura convexa). Analíticamente, quiere decir que si $(xyy'_1)$ y $(xyy'_2)$ pertenecen a T, como lo dije arriba, necesariamente pertenezca a T cada $(x\,y\,y')$ donde sea $y'_1 < y' < y'_2$

(Las dos hipótesis hechas pueden regir independientemente del campo de extremales considerados: entonces el problema considerado de cálculo de las variaciones llámase un problema regular ).

Si, refiriéndome a un campo R de extremales, rigen las dos hipótesis hechas, podemos repetir lo dicho en el ejemplo anterior. Tenemos (por definición)

$$E(x,y,p,y') = F(xyy') - F(xyp) - (y'-p)\,F_{y'}(xyp)$$

$$= \frac{1}{2}(y'-p)^2\,F_{y'y'}\left(x,y,p+\theta(y'-p)\right)$$

(Obsérvese que para hacer este pasaje aplicando la form de Taylor es preciso que la función F pueda considerarse para todos los valores del tercer argumento comprendidos entre p e y': precisamente para este objeto se hizo la hipótesis aclarada más arriba sobre la naturaleza del campo T)

El segundo miembro es el producto de un número esencialment positivo(para y' distinto de p)por un valor de $F_{y'y'}$, y este último también es positivo merced a la hipótesis (28). Por lo tanto de las hipótesis hechas sigue la (27).

Concluimos así que si para un campo de extremales rigen la desigualdad (28) y la hipótesis de p. 73 sobre el campo T, una extremal del campo brinda efectivamente un mínimo relativo . Esto se aplica a los problemas regulares.

Indicaré brevemente cómo puede aplicarse lo dicho al problema concreto 2) de p. 1. Dada la recta r horizontal y los dos puntos P, Q por arriba de la misma, unir P y Q mediante una línea $\gamma$ tal que el girar alrededor de r engendre una superficie de area mínima. Ya sabemos que las extremales del problema son las $\infty^2$ catenarias (de directriz r)

$$y = b\,\mathrm{ch}\,\frac{x-a}{b} \qquad (29)$$

Se trata ahora en primer término de encontrar una catenaria (29) que una los dos puntos dados P, Q; y luego de tratar de construir un campo de extremales de la cual la misma forma parte para aplicar los resultados de suficiencia que conocemos.

Observo enseguida que ahora

$$F(x,y,y') = y\sqrt{1+y'^2}$$

y luego $F_{y'y'}$ ~~&&&&&&&~~ difiere únicamente por el factor y de la $F_{y'y'}$ de p. 71, de manera que

$$F_{y'y'} = y \frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

El quebrado es positivo, como lo sabemos, y también el factor ~~&~~ y es positivo, debido a que las catenarias que consideramos están por arriba del eje x .Luego $F_{y'y'}$ es positivo, esto es rige (28). - Además, la función F puede calcularse cualquier sean los valores de x,y,y' es decir el campo T cumple con la hipótesis expresada a p. 73 .~~[illegible]~~

Por consiguiente, si logramos construir una catenaria (29) por los dos puntos P,Q y construir además un campo de extremales del cual la misma forme parte, ya será suficiente para llegar a la conclusión que esa catenaria brinda un mínimo(relativo).

Aludo entretanto al problema de encontrar una catenaria (29) que una los puntos P,Q : fijaré las ideas pensando p. e. que el punto P sea el más a la izquierda de los dos. Puede empezarse por considerar las $\infty^1$ catenarias (29) que pasan por el punto P(sin preocuparse de Q).Siendo siempre $P=(x_o,y_o)$ hay que tomar las constantes a,b de manera que

$$y_0 = b\,ch\frac{x_0-a}{b}$$

Si ponemos

$$\cancel{ch\frac{x_0-a}{b}=t} \qquad \frac{x_0-a}{b}=t$$

~~&&&&&&&&~~ podemos expresar a,b mediante el parámetro t: en efecto

$$b=\frac{y_0}{ch\,t} \;; \quad a = x_0 - bt = x_0 - y_0\frac{t}{ch\,t}$$

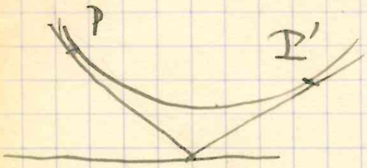
Tomando t arbitrariamente y expresando a,b de la manera que acabamos de escribir logramos así las $\infty^1$ catenarias por P:

$$y = \frac{y_0}{ch\,t}\, ch\,\frac{x - x_0 + y_0 t/ch\,t}{y_0/ch\,t} \qquad (29)$$

es decir

$$y = \frac{y_0}{ch\,t}\, ch\left(t + \frac{(x-x_0)\,ch\,t}{y_0}\right) \qquad (30)$$

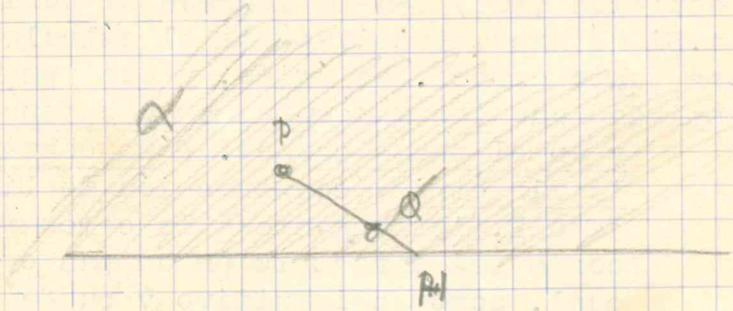
Las $\infty^1$ catenarias (30) pasantes por P admiten una envolvente, la qual- como es sabido- es el lugar de los <u>puntos característicos</u> de las catenarias que integran el sistema: recuerdo que para una curva del sistema se llama característico cada uno de los puntos que la misma tiene en común con una curva del sistema infinitamente vecina (es decir posición límite de un punto común a la curva considerada y a otra del sistema que, dentro del mismo sistema, tienda a aquella), y que en un punto característico (en cuanto sea un punto simple, como ahora será ciertamente el caso) la curva del sistema es tangente a la envolvente. Como es sabido para buscar el punto característico de una curva (30), individualizada por cierto valor del parámetro t (mejor dicho, para buscar los puntos característicos de esa curva, debido a que a priori no estamos enterados de si habrá uno o más; pero en el caso actual efectivamente a posteriori resulta que el punto característico es único, si por supuesto prescindimos del punto fijo P común a todas las curvas del sistema), hay que formar sistema de la ecuación (30 ) con la lograda al derivar la misma con respecto a t. Si se hace efectivamente el cálculo, resulta como lo dije que ese punto caract. es único, y que puede lograrse en base a la propiedad que <u>las tangentes a la catenaria en P y en el punto caract. P' se cortan sobre la directriz.</u>(construcción de Lindelöf): dado P, la tangente a la catenaria en P corta esa directriz en un punto por el cual, como es intuitivo y puede demonstrarse pasa una y una sola tangente ulterior a la catenaria: su punto de contacto es el punto caract. P' buscado. Como es intuitivo, si el punto P está sobre la rama descendente de la catenaria, P' está sobre la ascendente.




Fijado el punto P y la catenaria ahora considerada, el punto P', caract. de la catenaria dentro del conjunto de las $\infty^1$ catenarias (30) pasantes por P, llámase también punto <u>conjugado</u> de P sobre dicha catenaria. La construcción de Lindelöf enseña que la relación entre dos puntos conjugados es recíproca.

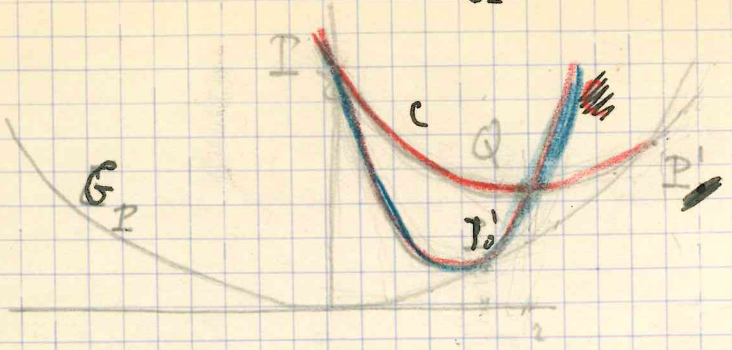
Si se estudia más de cerca la envolvente $\mathcal{E}_P$ de las $\infty^1$ catenarias (30) por P se ve que es una curva, desde luego simétrica con respecto a la vertical por P, la cual dirige su concavidad hacia arriba (y corta la vertical por P en su

Sin detenerme en demostrarlo, me conformo con observar que se trata de un caso análogo al siguiente, más elemental. Consideremos el sistema $\Sigma$ de los círculos que pasan por un punto P y son tangentes a una recta fija g (envolvente de los mismos). Los círculos del sistema $\Sigma$ cubren doblemente el semiplano $\alpha$, limitado por g, en el cual está P, en el sentido de que por un punto Q de dicho semiplano, distintos de P, pasan dos círculos del sistema (porque para encontrar un círculo del sistema que pase por Q es suficiente encontrar su punto de contacto M con g, y este punto M puede determinarse, de dos maneras distintas, por la condición $HM^2 = HP.HQ$, si llamamos M el punto PQ.r [1]). Si Q se toma sobre r, es claro que se logra un solo círculo, y si Q se toma en el semiplano opuesto a $\alpha$, no hay ningún círculo.




---

1)En el razonamiento se presupone que la recta PQ no sea paralela a la g. Pero aún en el caso en que PQ es paralela a g se logran dos soluciones: una está brindada por el círculo propiamente dicho que pasa por P,Q y el punto donde la mediatriz del segmento PQ corta la g; la otra por la recta PQ junto con la recta impropia (la cónica reductible que así resulta, con punto doble en el punto impropio de g, es un círculo porque contiene los puntos cíclicos, y corta la g en dos puntos confundidos en su punto impropio).




intersección con la directriz r. Por un punto situado por debajo de la $G_P$ no pasa ninguna de las catenarias del sistema considerado, por un punto que esté sobre la $G_P$ pasa una, y por fin por un punto situado por arriba de $G_P$ (distinto por supuesto de P ) pasan dos.

Por lo tanto si queremos hacer pasar una catenaria (29) por dos puntos P,Q, podremos fijarnos en el punto P y en la correspondiente envolvente $G_P$, si entonces tomamos Q más arriba de $G_P$ ,existen ciertamente dos catenarias que pasan por los dos puntos P,Q.

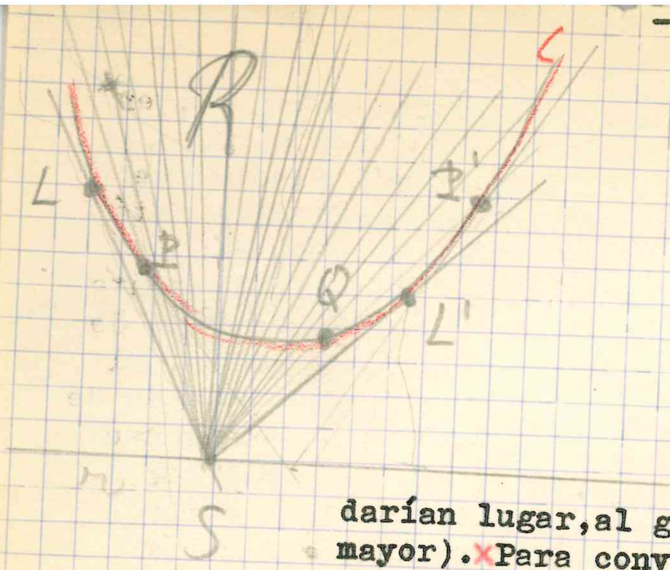
Más precisamente resulta lo siguiente. De las dos catenarias que así se logran para una el punto P′ conjugado de P está entre P y Q; para la otra está fuera del arco PQ (véase figura), donde llamé a dichos puntos conjugados respectivamente $P'_0$ y P′). Pues bien, la segunda no puede brindar un mínimo ,debido a que la misma no cumple con una condición necesaria, de la cual todavía no nos hemos ocupado, y a la cual voy a aludir brevemente más adelante , la llamada condición de Jacobi , de acuerdo con la cual, en el problema de mínimo relativo a la integral (2), si un arco PQ de extremal tiene que brindar efectivamente una solución del problema de mínimo, la misma no debe contener ~~en su interior~~ ningún punto de contacto de dicha extremal con la envolvente de las extremales que pasan por P (en el caso actual con la $G_P$) .

Queda por lo tanto por considerar una sola de las dos catenarias( la indicada con lápiz colorado en la figura), que llamo C. La cuesión es la siguiente: ¿brida ella un mínimo relativo ?

La contestación es afirmativa, en cuanto se logra efectivamente construir un campo de extremales al cual pertenece esa catenaria C ,de la manera siguiente. Cuando sobre C un punto se desplaza hacia la izquierda, lo mismo pasa de su conjugado como es intuitivo. Tomo entonces un punto L un poco a la izquierda de P, pero no demasiado, de manera que su comjugado L′, que estará a la izquierda de P′, esté todavía a la derecha

× En lo que sigue, la catenaria C se considera limitadamente al arco LL' (el cual contiene en su interior al arco PQ, debido a lo que se supuso al ~~elegir~~ elegir L)

×× Las propiedades demostradas en p. 53-57 nos aseguran que una semejanza siempre transforma una catenaria en una catenaria y la directriz de la primera en la de la segunda.




de Q. Las tangentes a C en L, L'se cortan en un punto S de la directriz. El ángulo comprendido entre las dos semirectas SL, SL'(prolomgadas por supuesto indefinidamente más allá de L, L') es una región R para la cual la catenaria C efectivamente da lugar a un mínimo (es decir si parangonamos la misma con otras líneas interiores a dicha región R, estas últimas darían lugar, al girar, a superficies de area mayor). Para convencerse de lo dicho, es suficiente averiguar que podemos cubrir la región R con un campo de extremales, del cual forme parte la C (por que se aplica la consecuencia del teor gen de suficiencia considerada a p. 75.) Pues bien, transformo la C mediante las homotécias de centro S, de razón positiva. Al variar la razón la C se lleva en curvas semejantes a la catenaria C, las cuales son por lo tanto catenarias; la recta r(directriz) pasa por el centro de homotecia y es po consiguiente unida, de manera que las catenarias transformadas tienen la misma recta directriz, y pertenecen por lo tanto al mismo sistema (29): por fin si la razón de la homotecia es positiva, las catenarias transformadas estarán por arriba de la directriz.

Si queremos averiguarlo análiticamente, sea

$$y = b_0 \operatorname{ch} \frac{x-a_0}{b_0}$$

la ecuación de la C, y sean ~~&&O&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ s,O las coordenadas del punto S. Si llamo X,Y el corr. del punto x,y en la homotecia, las ecuaciones de la misma son

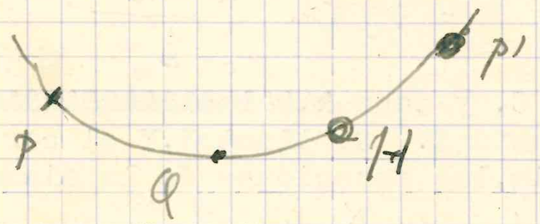
$$x - s = k(X - s), \quad y = kY$$

donde k(razón) es positivo. La línea transformada de C en la homotécia tiene ecuación

$$kY = b_0 \operatorname{ch} \frac{s+k(X-s)-a_0}{b_0}$$

es decir

Hemos así resuelto el problema del mínimo relativo, en la cuestión de la superficie redonda de area mínima.
La cuestión podría profundizarse, y podría resolverse el problema del mínimo absoluto. El mismo siempre está brindado por una catenaria, o bien por la solución discontinua de Goldschmiedt(pp.15,17) .Más precisamente resultaría lo siguiente. Si el punto Q está por debajo de la envolvente $G_P$ de las catenarias que pasan por P, el mínimo absoluto está dado por la solución discontinua de Goldschmiedt . Si el punto Q pertenece a la envolvente $G_P$ (de modo que ya existe una catenaria extremal por P, Q),el mínimo absoluto && no está dado por la catenaria extremal, sino que sigue siendo dado por la solución discontinua de Goldschmiedt. Por fin, si Q está arriba de $G_P$ ,y se toma la catenaria por P,Q que cumple con la condición de Jacobi, el hecho que el mínimo absoluto esté brindado por la catenaria o sea en cambio el de la sol. disc. de Goldschmiedt depende de la posición de Q sobre la catenaria: sobre cada catenaria por P existe(p. e. a la derecha de P) un punto de separación,&&&&&&&&&, H, tal que si Q está a la izquierda de H, es la catenaria que brin-da el minimo absoluto; si en cambio Q está a la dereche de H &&&&&& es la solución disc. de Goldschmiedt.



$$y = \frac{b_0}{k}\, ch\, \frac{X + \frac{s - ks - a_0}{k}}{\frac{b_0}{k}} \qquad (31)$$

o, si pongo $b_1 = b_0/k$ y $a_1 = s + \frac{a_0 - s}{k}$

$$y = b_1\, ch\, \frac{X - a_1}{b_1} \qquad (b_1 > 0 \text{ con } b_0 > 0)$$

lo que comprueba lo dicho.
~~Las dos semirrectas SL, SL' son unidas en la homotecia, de forma que la región angular R queda transformada en sí misma~~ por ~~todas las homotecias consideradas;~~ Las $\infty^1$ catenarias (29) que logramos ~~resultan luego todas en el interior de R. No sólo, sino que cubren, y además~~ cubren simplemente, toda R: en efecto por un punto de R pasa una y una sola catenaria del sistema(la lograda de C mediante la homotecia ~~&&&&h&&&~~ de centro S que deja corresponder ese punto con el punto de C alineado con el mismo sobre S).

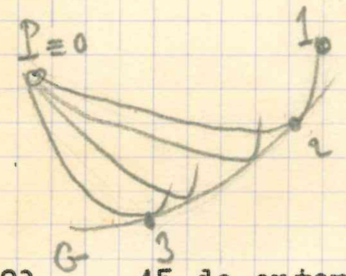
La ecuación (31) del sistema de extremales logrado al va~~&&~~riar k nos asegura que, con respecto a ese prámetro el primer miembro es función derivable cuantas veces queremos~~&~~.

Por fin, una recta interior a R llevada por S corta a la catenaria C y por la misma razón a las demás logradas de ella mediante las homotecia considerada en uno y un solo punto, de modo que nos brinda la línea D a la cual nos referimos en la definición de campo de extremales a p. 55.

Las extremales considerads constituyen por consiguiente un campo, y la demostración queda terminada. X

Añado algunas consideraciones sobre la condición de Jacobi, a la cual aludí a p. 81. Empezaré dando rápidamente una idea de la demostración.

Sea G un arco de envolvente relativamente a las extremales que pasan por un dado punto P. Considero dos de estas extremales, próximas entre sí, que sean tangentes a G en los puntos también próximos entre sí 3 y 2. Puesto P=0, sea 1 un punto de la extremal $E_{01}$ situado "más allá" de 2, es decir tal que el arco de extremal $E_{01}$ contenga en su interior el punto 2 de contacto con la envolvente G. Se trata de hacer plausible que ese arco no puede brindar un minimo relativamente a los puntos 0 y 1. Para este objeto, considero las extremales por P que son tangentes a G en puntos del arco $G_{32}$ de la envolvente G comprendido entre los puntos 3 y 2, admitiendo que pr un punto de la región R que recubren pase una sola de ellas, de manera que vienen a constituir un campo




de extremales: en cuanto a la línea D que aparece en nuestra definición del campo, puede substituirse sin incomveniente por el punto 0, el cual pertenece a todas las extremales del campo. Aplico entonces la fórmula (B) p. 63, tomando en lugar de los arcos de extremales 23,....45 de entonces los arcos 03,...02 del caso actual. La línea D de la citada fórmula

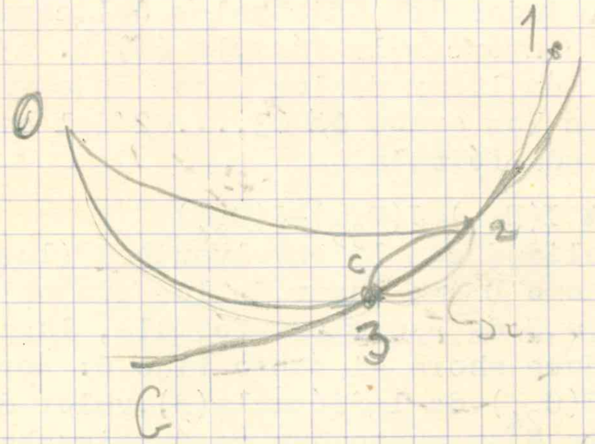
$$I(E_{45}) - I(E_{23}) = J(D_{35}) - J(C_{24}) \qquad (B)$$

coincide en la actualidad con la envolvente G (lugar de los puntos 3,...2, así como D era lugar de los puntos 3,...,5); mientras que la línea C de esa misma fórmula, lugar de los puntos 2,...4 se reduce ahora al punto fijo 0: por consiguiente el término $J(C_{24})$ de la fórmula (B), valor de una integral correspondiente a un punto que se desplazaba sobre la línea C desde 2 a 4, ahora que ese punto queda fijo, se reduce a cero. Logramos así

$$I(E_{02}) - I(E_{03}) = J(G_{32})$$

También hay que recordar que

$$J = \int F(xyp)\,dx + F_{y'}(xyp)\,(dy - p\,dx)$$



0
1
2
c
3
C

siendo p la pendiente del campo ~~, e y' la de la tangente variable~~ en los varios puntos de la curva a la que la integral se refiere .Esta curva en el caso actual es envolvente de las extremales del campo y luego tangente en cada punto a una extremal del campo: luego a lo largo de G $dy-pdx=0$ , $J$ se reduce a $I$ (análogamente a lo que pasaba a p. 63, pero ahora en condiciones distintas).Tenemos luego $J(G_{32})=I(G_{32})$, y de la última fórmula despejamos por lo tanto

$$I(E_{02})= I(E_{03}) + I(G_{32})$$

Por consiguiente, si considero la integral $I(E_{01})$, y la descompongo en dos,de acuerdo con

$$I(E_{01}) = I(E_{02}) + I(E_{21})$$

reemplazando luego el primer sumando del segundo miembro de acuerdo con la fórmula anterior, logro

$$I(E_{01}) =I(E_{03}) + I(G_{32}) + I(E_{21})$$

veo que la integral I calculada a lo largo de la extremal $E_{01}$ tiene el mismo valor que la suma de la misma integral calculada a lo largo de tres arcos:

$E_{03}$ , $G_{32}$ ,$E_{21}$

de los cuales el primero y el tercero pertenecen a arcos de extremales; el segundo pertenece a una línea que es envolvente de extremales por el punto O, pero generalmente NO resulta ella misma una extremal. Esto quiere decir que existen otros arcos $C_{32}$ que unen los puntos 3 y 2, próximos al arco $G_{32}$ tales que

$$I(C_{32}) < I(G_{32}).$$

Si parangonamos el arco $E_{01}$ con el resultante del conjunto de $E_{03}$,$C_{32}$,$E_{21}$ este último arco da por lo tanto un valor de la integral menor de $I(E_{01})$. Podría objectarse que el nuevo arco tiene puntos en los cuales dejan de ser satisfechas nuestras condiciones de admisibilidad de la función f(x) , como las fijamos a p. 11, fin: sin embargo el inconveniente puede salvarse con pequeñas variaciones en proximidad de los puntos 3 y 2 aptas a reestablecer existencia y continuidad de lasderivadas primera y segunda.

* Por lo demás, si $z = \varphi(x\,y)$ es la ecuación de la sup., y queremos unir los ptos $(x_0 y_0 z_0)$ $(x_1 y_1 z_1)$ mediante una línea representada por $y = y(x)$ tenemos que minimizar la integral

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + \left(\frac{d\varphi(x,y)}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + (\varphi_x + y'\varphi_y)^2}\, dx$$

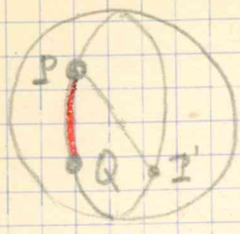
integral del tipo $\int_{x_0}^{x_1} F(x\,y\,y')\, dx$.

Añado pocas consideraciones ulteriores sobre la cond. de Jacobi.- En el probl. de la distancia mínima de dos puntos P,Q, la misma no se presenta(dado que las rectas por P no dan lugar a una envolvente propiamente dicha), y efectivamente sobre una dada recta por P, por lejos que tome el punto Q siempre el segmento PQ brinda el arco mínimo entre P y Q.

Observo aue la cond. necesaria contenida en el cumplirse de la ecuación de Euler se refiere únicamente a una línea que tenga que brindar un mínimo, ni en ella intervienen puntos del plano fuera de la línea.En cambio las cond. de sufic. que conocemos hacen intervenir un campo de extremales, y por lo tanto toda una región del plano a la cual la línea que debe brindar el mínimo pertenece. La condición necesaria de Jacobi pertemece al primer orden de ideas, en cuanto es una condición que debe verificarse sobre una dada extremal, ~~sin que intervengan puntos ajenos~~.

Añado dos ejemplos, aunque correspondan a casos un poco distintos de los que hasta ahora tratamos, en los cuales la intervención de la condición de Jacobi toma un aspecto intuitivo.

1)En la segunda parte del curso estudiaremos la noción de las <u>líneas geodésicas</u> de una superficie S : es una noción que se plantea en base al problema de unir dos puntos P,Q dados sobre la superficie S, mediante una línea trazada sobre la misma superficie S, ña cual brince el recorrido mínimo entre P,Q. Las líneas así lograda son precisamente las geodésicas de la superficie.Veremos en esa oportunidad que el problema de las geodésicas es efectivamente un problema del tipo qué se estudia en el cálculo de las variaciones. Pues bien, fijémonos en el caso en que S es una esfera: las geodésicas son entonces los círculos máximos .Mejor dicho, los círculos máximos desempeñan el papel de las líneas extremales. Si tomo dos puntos P,Q(no diametralmente opuestos), y quiero el cámino mínimo que los une, empiezo considerando el círculo máximo que pasa por ellos (el cual existe y es único: intersección de la sup. esférica con el plano por P,Q y el centro) .Sobre este círculo tenemos dos arcos PQ, uno menor y el otro mayor de la semicircunferencia.Por supuesto no puede ser si no el primero que brinda el mínimo.Pues bien, en ésto podemos ver la intervención de la condición de Jacobi. Si me fijo en el punto P y considero las extremales(círculos máximos) que pasan por P, sobre cada una de ella el "punto característico " es el punto diametralmente opuesto a P, P´( debido a que todas las extremales por P pasan por P´).La condición de Jacobi nos dice que el arc




co de círculo máximo PQ que brinda el mínimo <u>no debe contener el punto P' &</u>, lo que coincide con lo dicho anteriormente.

2) Considero una línea L y un punto O: se trata de buscar un arco $\gamma$ que una O con un conveniente punto 1 de la línea L de manera que el camino resulte el mínimo posible. ~~Las condiciones que podemos seguir llamando a los límites son~~ El problema tiene ahora ~~de~~ naturaleza distinta con respecto a los problemas anteriores: no se trata ahora de unir dos puntos P,Q ambos conocidos, sino P conocido con Q desconocido sobre una dada línea L. Sin embargo siempre se trata de minimizar cierta integral del tipo que bien conocemos. El problema tiene naturaleza particularmente elementar por la razón siguiente: si, siendo 1 un punto interior al arco de línea L que se considera, el arco $\gamma$ que brinda el camino mínimo no fuera rectilíneo, podríamos reemplazarlo por el segmento rectilíneo O1, que brindaría un recorrido más breve. Por consiguiente los arcos O1 se reducen necesariamente a segmentos. Tenemos por lo tanto también ahora, un sistema $\infty^2$ de líneas a lo largo de las cuales, cualquier sean el punto O y la línea L tienen que desarrollarse los caminos mínimo; ese sistema coincide obviamente con el de las rectas. Las rectas desempeñan por lo tanto el papel de extremales.

Una condición necesaria para que el segmento O1 brinde un mínimo(por lo menos relativo) consiste en que en el punto 1(interior al arco L considerado) la recta O1 sea normal a la línea L. En efecto si, alrededor del punto 1 representamos la línea L con una ecuación

$$y=y(x)$$

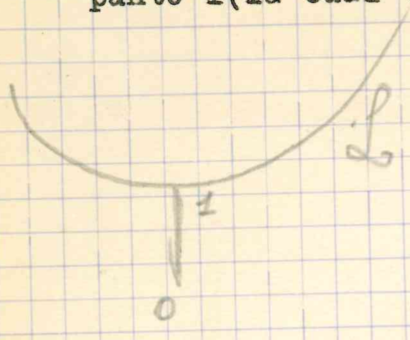
e indicamos con $x_0, y_0$ las coordenadas de O, se trata de minimizar la función de la variable x

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

lo que brinda la condición necesaria que la derivada de dicha función se anule

$$\frac{x-x_0+\frac{dy}{dx}(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0; \text{ es decir } x-x_0+\frac{dy}{dx}(y-y_0)=0$$

La condición obtenida expresa que la tangente a L en el punto 1(la cual tiene coef. angular dy/dx) y la recta 01

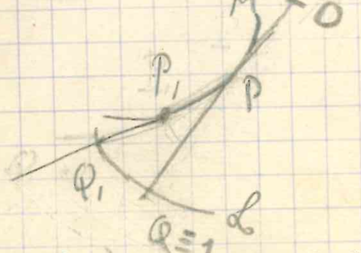



la cual tiene coef. ang.$(y-y_o)/(x-x_o)$ cumplen con la condición de perpendicularidad. Vemos así entretanto que para buscar el camino minimo entre O y la línea L habrá que desplazarse a lo largo de una recta normal a L llevada por el punto O.

~~Sin embargo la condición debe ser completada por otra condición necesaria~~

Podemos decir que en el problema actual las condiciones a los límites de los casos anteriores se encuentran reemplazadas una por la que la extremal buscada tiene que pasar por el punto conocido O , y la otra por la que dicha recta extremal tiene que cortar a ángulo recto la L.

Sin embargo, hay que tener en cuenta otra condición necesaria. Recuerdo que una línea plana L tiene una <u>evoluta</u> M, la cual se define como envolvente de las normales de L . También puede decirse que la evoluta es el lugar de los centros de curvatura de la L en sus varios puntos. En el caso particular en que la L es un círculo la evoluta se reduce a un punto, el centro del círculo;pero generalmente se trata de una línea propiamente dicha. Dada la M, una curva L que tenga M como evoluta llámase <u>evolvente</u> de la M .La M no tiene una sola, sino ∞ evolventes, las cuales pueden lograrse con la construcción siguiente.Dado un arco de la curva M(sin puntos singulares)




imaginemos un hilo tendido a lo largo del mismo, con un extremo en un punto P:si lo desenvuelvo manteniendo fijo P ~~(así como, por supuesto, la longitud del hilo)~~, el otro extremo Q del hilo recorre un arco de una evolvente(Si mantengo el mismo P, y varío la longitud del hilo, logro varias evolventes).Se trata de la materialización de la propiedad siguiente: si $P,P_1$ son dos puntos de la evoluta, y $Q,Q_1$ sus correspondientes de una evolvente, se tiene:

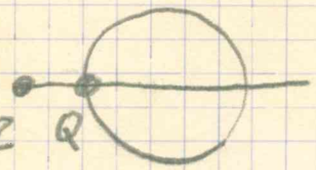
segm. PQ = arco $PP_1$ + segm. $P_1Q_1$

Luego, si tomo el punto O sobre la recta PQ , y 1=Q, de manera que P quede entre O y 1, el segmento O1, que pasa por el punto O y es normal a la L en el punto 1 no puede dar lugar a un mínimo, ni siquiera relativo, porque substituyendo el arco $PP'$ po su cuerda, que es menor, tenemos

$$\text{segm. } PQ > \text{segm.} PP_1 + \text{segm } P_1Q_1$$

y la quebrada $PP_1Q_1$ (que puedo tomar tan cerca como se quiera del segmento PQ) brindaría un recorrido menor desde el punto P a la línea L. Vemos así que, co o condición necesaria para que un segmento O1 que pasa por el punto O y es normal a la L en el punto 1 brinde un recorrido mínimo, ese segmento no debe contener en su interior un punto de contacto con la evoluta de la línea L .

P. e. para indicar un ejemplo muy sencillo, si tomo como línea L una circunferencia y un punto P=O, la recta que une este punto con el centro es normal a L en dos puntos. Es sabido que en este caso el camino mínimo es el PQ, donde llamo Q a ese punto de los dos logrados , que deja el centro afuera del segmento PQ: el otro no brinda un mínimo.




Y como el centro del círculo substituye ahora la evoluta, es claro que se trata de un caso particular de las consideraciones generales que preceden. -Volviendo al caso general la consideración que desarrollé está muy cerca de la condición de Jacobi. En efecto ,en esta se consideraba la envolvente G de las extremales que pasaban por uno de los dos puntos fijos prefijados, etc. En el caso actual una de la condición a los límites consiste en que las rectas extremales sean normales a la L. Si tomamos esta única condición a los límites, se origina un conjunto $\infty^1$ de extremales: las rectas normales a L. Su envolvente (que substituye la G de las páginas anteriores) es la evoluta M, la cual desempeña por lo tanto el papel de aquella G. Entonces se trata efectivamente de la condición de Jacobi llevada al caso actual.

Antes de pasar a estudiar algunos otros tipos de problemas de cálculo de las variaciones, trataré de aclarar porqué la búsqueda de condiciones suficientes da lugar a complicaciones

Si reflexionamos sobre el procedimiento que nosllevó a la ecuación de Euler(p.19 y siguientes) vemos que la misma se logró al transformar la condición del anularse de la variación primera : $\delta I = 0$, la cual expresaba la estacionariedad de $I\{y\}$. En substancia, para llegar a esta condición necesaria, habíamos reducido nuestro problema de cálculo de las variaciones a otro de mínimo de una función de una variable, al considerar(después de fijada la función $\eta(x)$) la integral

$$I\{y+\varepsilon\eta\} = \Phi(\varepsilon)$$

como función de la variable $\varepsilon$, $\Phi(\varepsilon)$. Impusimos entonces

$$\Phi'(0)=0 \qquad (32)$$

y obtuvimos entonces $\delta I = 0$. Se presentaría por lo tanto espontáneo el siguiente procedimiento para lograr condiciones suficientes.Para la función $\Phi(\varepsilon)$, si queremos que se minimice para $\varepsilon = 0$ es <u>suficiente</u>imponer, además que (32) la

$$\Phi''(0)>0$$

es decir

$$\left[\frac{d^2 I(y+\varepsilon\eta)}{d\varepsilon^2}\right]_{\varepsilon=0} > 0$$

Si en lugar de la derivada segunda consideramos la diferencial segunda, es decir esa derivada multiplicada por $(d\varepsilon)^2$, hay que escribir que esa diferencial segunda es positiva.Y,como ya llamamos variación a la diferencial con respecto a la variable $\varepsilon$, siguiendo con el símbolo $\delta$ para las variaciones, la condición anterior se escribe

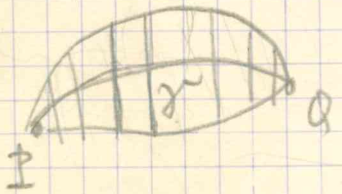
$$\delta^2 I > 0 \qquad (32')$$

(variación segunda de la integral positiva) . Seríamos así llevados a tomar como suficiente, además del anularse de la variación primera, la condición que la variación segunda sea positiva. Quedaría entonces sólo que explicitar la condición (32') y tratar de transformarla convenientemente,debido a que en la misma está involucrada la función substancialmente arbitraria $\eta(x)$ de manera que dicha condición ,después de transformada, ya no contenga $\eta(x)$

(como lo hicimos en su oportunidad para la variación primera, cuando llegamos a la ecuación de Euler).

Sin embargo, y precisamente esto quería aclarar, se presenta una dificultad considerable, la cual consiste en lo siguiente. Si, para una dada $\eta(x)$ yo impongo $\Phi''(0) > 0$, esto me asegura que, para todas las $\varepsilon$ bastante pequeñas en valor absoluto tenemos

$$I\{f+\varepsilon\eta\} > I\{f\} \qquad (33)$$




Los diagramas de las funciones

$$y = f(x) + \varepsilon\eta(x)$$

así logradas pasan por los puntos P,Q y están bastante cerca, por arriba o por debajo del diagrama $\gamma$ correspondiente a $\varepsilon = 0$ : esto es, están en una "faja" alrededor de $\gamma$ .El ancho de esta faja, para cada valor de la abscisa x es

$$2k|\eta(x)|$$

si indicamos con k el valor por debajo del cual tiene que quedar $\varepsilon$ ( $\varepsilon <$ k) para que rija la (33)

Por lo tanto, cualquier sea x, dicho ancho es menor de

$$2k\,m_\eta$$

si indicamos con $m_\eta$ el límite superior de los valores de $|\eta(x)|$ en el intervalo considerado. Más precisamente, hay que observar que k depende de la elección de la función $\eta(x)$ de modo que más bien conviene indicarlo con $k_\eta$. En definitiva, elegido $\eta(x)$,la faja considerada tiene para cada x, un ancho menor de

$$2k_\eta m_\eta \qquad (33')$$

el cual es un número positivo dependente de la función $\eta$ (x)

Ese ancho no se anula, de cualquier manera elijamos la $\eta$ (x): sin embargo, y éste es el origen de las dificultades puede muy bien ocurrir que para algunas funciónes $\eta(x)$ la cantidad (34) seamuy pequeña , sea tan pequeña como se quiere, y entonces si tratamos de construir una región alrededor de la línea $\gamma$, con respecto a la cual la $\gamma$ brinde un mínimo relativo, no conseguimos hacerlo, porque la misma tendría que estar dentro de todas las fajas relativas a todas las posibles elecciones de la función $\eta(x)$ , y tendría luego ancho nulo(en la dirección del eje y).

En definitiva, si para cada $\eta(x)$ tenemos $\delta^2 I_\gamma$

la I $\{\gamma\}$ es menor de cada $I\{\gamma+\varepsilon\eta\}$ para $|\varepsilon| < K_\eta$ ;

puede decirse que

pero de esto no sigue que la f minimice la integral I.

Sin entrar en otros detalles sobre el asunto, aclararé el caso análogo, pero más elemental que se presenta en el estudio de los extremos de las funciones de dos o más variables, p. e. de dos variables x,y. Para una función f(x,y,) el punto $(x_o,y_o)$ brinda un mínimo, cuando en el plano xy existe una región R alrededor del punto $(x_oy_o)$ tal que para todo punto $(x_1y_1)$ de R distinto de $(x_oy_o)$ sea

$$f(x_1,y_1) - f(x_o,y_o) > 0$$

Para la función f(suponiendo que tenga derivadas primeras y segundas continuas) tenemos como necesarias las condiciones de estacionariedad

$f_x = 0,\ f_y = 0$ en el punto $P(x_o,y_o)$.

En los cursos de análisis, para profundizar ulteriormente el asunto se considera la forma cuadrática en dos variables auxiliarias u,v (es decir polinomio cuadrático homogéneo em u,v):

$$Q = au^2 + 2buv + cv^2$$

donde se puso

$$a = f_{xx}, \quad b = f_{xy}, \quad c = f_{yy} \quad (\text{en } P)$$

1 ... 5 ...

Pe siguiente max y min de

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + lx + my \qquad (l, m \text{ const})$$

tengo que anular $f_x$, $f_y$

$$\begin{cases} 2x + y + l = 0 \\ x + 2y + m = 0 \end{cases}$$

sist.ª de 2 ec. lineales en $x, y$ che resuelvo

(p.e. elimino $y$ : $2(2x+l) - (x+m) = 0$

$3x = m - 2l$ )

$$(°)\begin{cases} x = \dfrac{m-2l}{3} \\ y = \dfrac{l-2m}{3} \end{cases}$$

Ahora

$f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2$; $ac - b^2 > 0$, $a > 0$

Luego los valores (°) brindan un mínimo

Suelen entonces distinguirse tres casos.(1)

CASO I.- La forma Q es <u>definita</u>, con lo que se quiere expresar que se mantiene constantemente de un mismo signo cualquier sean los valores que se atribuyen a u,v, con tal que no se ponga u=v=o. Más precisamente la forma se dice <u>definita positiva</u> o <u>definita negativa</u> según que ese signo constante es el positivo o el negativo. P.e. las dos formas

$$u^2 + v^2 \quad , \; -u^2 + 2uv - 2v^2 = -(u-v)^2 - v^2$$

son ambas definitas, la primera positiva, la segunda negativa.

La condición necesaria y suficiente para que la forma Q sea definita es

$$ac - b^2 > 0 \tag{35}$$

y entonces la misma es definita positiva o negativa según que a (y entonces también c) es positivo o negativo (Dije también c porque como rige (35), el producto ac tiene que ser positivo y luego a y c tienen el mismo signo)

Pues bien si la forma Q indicada más arriba es definita, el valor estacionario tomado por f en el punto P es efectivamente un extremo, y precisamente un mínimo o un máximo según que la forma es definita positiva o definita negativa

CASO II.- La forma Q es <u>indefinita</u>, con lo que se quiere expresar que, al variar u, v, puede tomar valores positivos y negativos: p. e. la forma 2uv, como es claro se comporta de esta manera.

La cond. nec y suf. para que la forma Q sea indefinita es $ac-b^2 < 0$

Pues bien, en el caso que estamos estudiando, el valor estacionario tomado por f en el punto P <u>no</u> es un extremo, cuando la forma Q es indefinita (Ej. $f(x,y)= 2xy$ en el punto P(0,0). Tenemos $f_x = f_y = 0$, y $Q = 2uv$, indefinita. Efectivamente es claro que el punto (0,0) no es un extremo para la función f)

CASO III=-Para comprenderlo bien, hay que fijarse bien en las palabras exactas usadas para explicar lo que se entiende como forma definita. En ellas era implícito que la Q se anulaba tan sólo para u=v=0. Esto siendo bien entendido, el caso III se presenta cuando la forma Q es <u>semidefinita</u>, es decir cuando toma exclusivamente valores de un mismo signo para todos los u, v para las cuales no se anula, pero existen valores no ambos nulos de u, v para los cuales se anula. P.e.

(1) Prescindimos del caso en que a=b=c=0, que exigería un estudio ulterior.

$u^2-2uv+v^2=(u-v)^2$

es semidefinita, porque se anula no sólo para u=v=o, sino también para u=v $\neq 0$ , pero para los demás valores siempre conserva un mismo signo, en este caso positivo. El caso semidefinito es caracterizado por

$$ac-b^2 = 0 \qquad (36)$$

En el problema de los extremos, el caso semidefinito es el más complicado, porque, cuando en un punto estacionario se presenta este caso, no se puede contestar de inmediato si hay o no extremo, y de qué tipo.

P.e. para la función

$$f(x,y) = x^2 + y^4$$

en el punto P(0,0) se anulan las dos derivadas primeras,y las segundas valen a=2, b=0,c=0: rige (36) y la forma Q es semidefinita (se reduce a &&& $2u^2$ ). Por otro lado f(0,0)=0, y la forma de la función f enseña que para valores no ambos nulos de x,y,la f es ciertamente $>0$. De esta manera en este caso el examen directo nos dice que se trata de un &&&&&& <u>mínimo</u> Si tomara la misma función cambiada de signo, tendría un <u>máximo</u>. Así vemos entre tanto que en el caso semidefinito puede && tener lugar un extremo(máximo o mínimo)

Sin embargo, y es ésto que tiene interés en relación com lo dicho a p&.103, puede también &&&&&&&&&&&&&&&&&&& dar otro ejemplo del caso semidefinito que no da lugar ni a máximo ni a mínimo.

Estudio para este objeto la función

$$f(x,y)= (y^2-2px)(y^2-2qx) =4pqx^2 -2(p+q)xy^2 + y^4$$

en el punto P(0,0). También ahora tenemos estacionariedad siendo claro que para x=y=0 se anulan las dos derivadas primeras.Las segundas valen a=8pq, b=0,c=0, rige (36), y nos encontramos en el caso semidefinito. Supongo para fijar las ideas

$$0 < p < q$$

y en el plano xy considero las parábolas H de ecuación

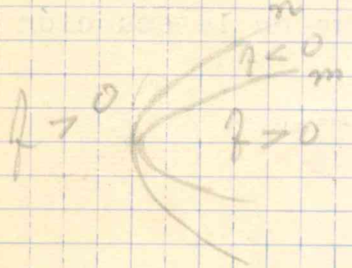
$$y^2-2hx =0$$

siendo h &&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& una constante . El valor de la función f en los puntosde la parábola H es

También puede llegarse a la misma conclusión de la manera siguiente. Las ecuaciones

$$y^2-2px=0; \qquad y^2-2qx=0$$

representan dos parábolas m,n. la función $y^2-2px$ en el "interior" de m mantiene evidentemente un signo constante, que es el signo menos(basta calcularlo p.e. en un punto del semieje $x$ positivo), y en el"exterior" el signo más. Análogamente para $y^2-2qx$ .Luego la función $f(x,y)$, producto de los dos polinomios tiene en las tres regiones en las cuales el plano está dividido por m, n, los signos indicados en la figura. El ~~punto~~ vértice de las parábolas es punto límite de todas esas regiones, y por lo tanto no puede brindar un extremo.



$$f(x,y)= 4(h-p)(h-q)\,x^2$$

Luego si elijo $p<h<q$ el valor de f en cada punto de la parábola H distinto de P es negativo; y, como en P la f se anula tenemos

$$f(o,o) > \text{valor de f en los demás puntos de la par. H}$$

Si en cambio elijo p. e. $h>q$ (y por consiguiente $>$ p) resulta análogamente

$$f(0,0) < \text{valor de f en los demás puntos de la par .H.}$$

Estas dos observaciones ,juntas, prueban que en P no hay extremo: en efecto, si alrededor de P tomo una región R por pequeña que sea siempre existen en la misma puntos distintos de P de parábolas de cada una de las dos especie, es decir siempre existen en la misma puntos donde $f(x,y) < f(0,0)$ y puntos donde $f(x,y) > f(0,0)$.

Concluimos así que en caso actual la forma Q es semidefinita y en el punto P no tenemos extremo. Pues bien, hay que añad lo siguiente (que hay que acercar a lo dicho a propósito de la variación segunda): si en el plano xy tomo una recta r cualquiera por P , y para los puntos de la misma considero la f, como es posible, como función de una única variable, para esta función el punto P brinda constantemente un mínimo .En efecto, si la recta r no coincide con el eje y, sea $y=mx$ su ecuación: entonces sobre la misma

$$f(x,y)= 4pqx^2-2(p+q)m^2x^3+m^4x^4$$

es una función de x que se minimiza como es claro para $x=0$ (derivada primera nula , y segunda positiva).Si en cambio la recta r coincide con el eje y, tenemos

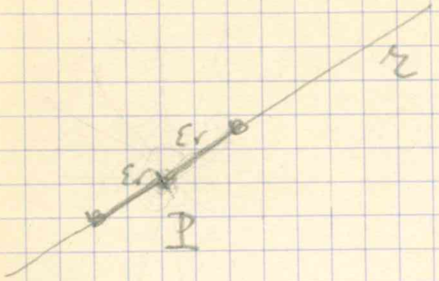
$$f(x,y) = f(0,y) = y^4$$

de forma que la f es una función de la sola y, que también se minimiza para $y=0$, es decir en el punto P. De ésto, parecería poderse concluir que la $f(x,y)$, como función de las dos variables x,y se minimiza en P, contrariamente a la conclusión anterior. ¿Porqué la conclusión no puede sacarse ? El hecho que sobre cada r por P el punto P brinde un mínimo, quiere decir que , fijada r , existe una $\varepsilon$ positiva, la cual empero depende de la recta y que luego llamo $\varepsilon_r$

X una región R conteniendo el punto P en su interior

XX Precisamente, de lo dicho a p. 108 se deduce que la región cubierta por los segmentos considerados ~~es la parte del plano a la izquierda de la parábola m. Efectivamente el punto P no es interno a la región~~ (extremos incluídos) es la región a la derecha de la parábola m junto con ~~el semiplano izquierdo limitado por la tangente en el vértice~~ (contornos incluídos). Pero el punto P no es interior a la región de conjunto que así se obtiene.

y su simétrica respecto a la tangente en el vértice




tal que para los puntos de r situados a distancia de P menor de $\varepsilon_r$ (distintos de P)

$$f(x,y) > f(0,0)$$

Imagino la porción de plano recubierta por todos los segmentos de origen P y longitud $\varepsilon_r$ (dos sobre cada recta r, en los dos sentidos). Si esta parte del plano fuera ~~una región R~~, podría concluir que para todos los puntos de R distintos de P regiría la desigualdad anterior, y el punto P brindaría un mínimo. Pero no es cierto a priori que se trate de ~~una~~ tal región, porqu, aunque las $\varepsilon_r$ son todas positivas no nulas, es bien posible que haya entre ellas algunas muy chicas, tan chicas como lo queremos(es decir que el límite inferior de la clase integrada por las $\varepsilon_r$ sea igual a cero) y entonces los segmentos considerados no cubren una región. Será necesariamente ésto lo que ocurre en el caso actual

~~OBSERVACION= Además que con p. 103, lo dicho puede compararse con lo observado en el curso 1941~~

De lo dicho en las páginas anteriores surge una explicación del hecho que las condiciones que hemos indicado como suficientes para el mínimo no sean demasiado sencillas. Particularmente, &&y&&& en dichas condiciones suficientes, hay que observar que interesan no sólo la extremal considerada, sino toda una región alrededor de la misma( el campo de extremales), && y no sólo los valores de y′relativos a la misma extremal(es decir la pendencia p) sino también los otros valores de y′: compárense la (25) de p. 69 y la (28) de p. 73&, es decir

$$F_{y'y'}(x,y,y') > 0 \qquad (1)$$

En cambio ,ya hemos observado que p. e. la condición necesaria de Jacobi tiene un significado localizado sobre la propia extremal. También tiene este mismo carácter otra condición necesaria ,la llamada condición de Legendre , de acuerdo con la cual para que un arco de extremal brinde un mínimo tiene que ser satisfecha la (1) en los puntos de la extremal y para y' igual a la pendiente en los mismos , esto es tiene que regir

$$F(x,y,p) \geq 0 \quad \text{sobre la extremal} \qquad (2)$$

Como se ve, en esta condición necesaria,se pide mucho menos que con la (1) que aparecía dentro del conjunto de condiciones suficientes. La demostración de Legendre estriba en la ideasiguiente. Volviendo a las consideraciones de p. 19-21, condición necesaria para el mínimo es la )8) de la p. 21 (que como se dijo a p. 99 no difiere de $\delta^2 I \geq 0$ ).

$\boxed{\text{es decir } \Phi''(0) \geq 0 \ (3)}$

Como

$$\Phi(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f(x)+\varepsilon\eta(x), f'(x)+\varepsilon\eta'(x))\,dx$$

se tiene

$$\Phi'(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\eta F_y(x, f+\varepsilon\eta, f'+\varepsilon\eta') + \eta' F_{y'}(x, f+\varepsilon\eta, f'+\varepsilon\eta')\right] dx$$

y luego

$$\Phi''(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\eta^2 F_{yy}(x, f(x), f'(x)) + 2\eta\eta' F_{yy'}(x, f(x), f'(x)) + \eta'^2 F_{y'y'}(\dots)\right] dx$$

que escribimos

$$\Phi''(0) = \int_{x_0}^{x_1} (P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2)\,dx \qquad (4)$$

poniendo

$$P = F_{yy}(x,y,p)$$
$$Q = F_{yy'}(x,y,p)$$
$$R = F_{y'y'}(x,y,p)$$

(donde y cumple con la ecuación $y=f(x)$ de la extremal considerada

Se trata por lo tanto de disfrutar la expresión (3) para llegar a la conclusión que rige la (2) es decir la

$$R \geq 0 \qquad (5)$$

como consecuencia de la (3).

La idea de Legendre ha sido la siguiente: si, como caso particular fueran P y Q idénticamente nulas, la (3) resultaría

$$\int_{x_0}^{x_1} R\eta'^2 dx \geq 0 \qquad (6)$$

y entonces se desprendería la (5)- debido a que bajo el signo integral la R multiplica una expresión no negativa, y que la función $\eta(x)$ es, prescindiendo de pocas restricciones, una función arbitraria(p. 17)-; porque, de ser R negativa en un punto, y luego en un intervalo alrededor del mismo, podría ,podría encontrarse una función $\eta(x)$ para la cual dejaría de regir la (6). Pero, como en general P y Q no son idénticamente nulas, Legendre ha indicado una transformacion que permite llegar a la misma conclusión de manera parecida: se trata de escribir la función bajo el signo integral en la (4) como producto de R por un cuadrado perfecto. Se observa que si w(x) es una función arbitraria derivable en el intervalo $x_0 \leq x \leq x_1$ se tiene

$$\int_{x_0}^{x_1} (w'\eta^2 + 2w\eta\eta')\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}(w\eta^2)\, dx = w(x_1)\eta^2(x_1) - w(x_0)\eta^2(x_0) = 0$$

Luego la (4) puede escribirse

$$\Phi''(0) = \int_{x_0}^{x_1} [(P+w')\eta^2 + 2(Q+w)\eta\eta' + R\eta'^2]\, dx \qquad (7)$$

Si ahora la w(x) se elige de manera que cumpla con la ecuación diferencial de primer orden

$$(Q+w)^2 - R(P+w') = 0 \qquad (8)$$

la expresión entre corchetes en (7) es un cuadrado perfect y puede escribirse

$$\Phi''(0) = \int_{x_0}^{x_1} R\left(\eta' + \frac{Q+w}{R}\eta\right)^2 dx$$

de lo cual, aprovechando convenientemente la arbitrariedad de la función $\eta(x)$, y agregando algunas cosideraciones más que paso por alto, se llega a concluir que no puede ser R negativo, y luego rige la (5).

Comparando las condiciones necesarias con las condiciones suficientes que hemos indicado, se nota la considerable distancia que existe entre las primeras y las segundas. Sin embargo, podría demostrarse que dicha distancia en muchos casos es menor de lo que podría creerse. En efecto para los problemas regulares (p.75) &&&&&&&&&&&& ( en los cuales la condición de Legendre evidentemente siempre resulta necesariamente satisfecha), si un arco de extr. $E_{ol}$ no contiene ningún punto conjugado al punto O, es decir ningún punto de contacto de dicha extremal con la envolvente de las extremales que salen del punto O, es decir si cumple con la condición de Jacobi &&&&&&&&&&&& en sentido estrecho(esto es &&&&& no contiene esos puntos conjugados ni en su interior ni coincidentes con el extremo 1 ), el mismo brinda efectivamente un mínimo relativo. La idea en la cual puede fundarse la demostración consiste en aprovechar las hipótesis para encerrar $E_{ol}$ en un campo de extremales al cual pueda aplicarse el teorema general de suficiencia . Es claro que la nueva condición de suficiencia lleva la ventaja que en la hipótesis de la misma no se habla de ningún campo de extremales, sino sólo de la extremal que debe brindar el mínimo.

Aludiré ahora brevemente a algunos problemas de cálculo de las variaciones, de naturaleza un poco distinta de la de los problemas estudiados.

CASO DE MAS FUNCIONES INCOGNITAS.- En lugar de la integral (2) considero la integral

-63-

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')\, dx$$

Ahora F es una función de 2n ~~+1~~ argumentos, p.e. con derivadas ~~primeras y segundas~~ hasta las terceras continuas. Si consideramos n funciones de x

$$y_1 = f_1(x) \qquad \dots \qquad y_n = f_n(x) \quad (3')$$

definidas en el intervalo $x_0$ $x_1$ y reemplazo en F :

las $y_1, \dots\dots y_n$ por $f_1(x), \dots\dots\dots f_n(x)$

y

las $y_1', \dots\dots, y_n'$ por las derivadas $f_1'(x), \dots\dots, f_n'(x)$

(suponiendo que las n funciones $f_i(x)$ cumplan con las mismas condiciones de admisibilidad de p.11, fin), la integral I toma un valor bien determinado, que depende de esas funciones, y que podemos indicar con

$$I\{f_1, f_2, \dots f_n\}$$

A las funciones $f_i(x)$ se imponen además condiciones a los límites análogas a las consideradas hasta ahora: es decir cada una de ellas tiene que tomar un valor prefijado en cada uno de los dos extremos del intervalo: imponemos pues

$$f_i(x_0) = \cancel{y_0^{(i)}}\ y_i^{(0)} \qquad ; f_i(x_1) = y_i^{(1)} \qquad (i=1,..n)$$

siendo las

$$\cancel{y_0^{(i)}, y_1^{(i)}} \quad y_i^{(0)}, \; y_i^{(1)}$$

constantes prefijadas.

Se trata entonces de buscar los sistemas de funciones

$$f_1(x), \dots\dots\dots, f_n(x)$$

admisibles y que cumplen con las condiciones ~~a~~ en los límites consideradas, para las cuales la integral

$$I\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

se minimice

Para n=2 puede darse, como es claro, una interpretación geométrica al interpretar $x, y_1, y_2$ como coord cart p.e. ort en el espacio: entonces las (37) representan un arco de curva que une dos puntos dados

$$P = (x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}),\quad Q(x_1, y_1^{(1)}, y_2^{(1)})$$

Lo mismo podría hacerse al considerar un espacio de n + 1 dimensiones, para n cualquiera (tomando como coordenadas $x, y_1, \ldots\ldots y_n$). Para n=1 se vuelve al caso estudiado en las páginas anteriores.

¿Qué se encuentra ahora como análogo a la ecuación de Euler ?. Como se trata sólo de condiciones necesarias, podemos proceder así: imagino dejar invariadas todas las funciones (37) con excepción p. e. de la primera. Entonces volvemos al caso estudiado en las páginas anteriores, y concluimos que tiene que ser

$$F_{y_1} - \frac{d}{dx} F_{y_1'} = 0$$

Análogamente si me refiero a $y_2$, etc. Por lo tanto tenemos como necesario el sistema

$$(38)\quad \begin{cases} F_{y_1} - \frac{d}{dx} F_{y_1'} = 0 \\ F_{y_2} - \frac{d}{dx} F_{y_2'} = \\ \text{---} \\ F_{y_n} - \frac{d}{dx} F_{y_n'} = 0 \end{cases}$$

que puede explicitarse en la forma:

$$(39)\quad \begin{cases} F_{y_1} - F_{x y_1'} - F_{y_1 y_1'} y_1' - F_{y_2 y_1'} y_2' - \cdots - F_{y_1' y_1'} y_1'' - F_{y_1' y_2'} y_2'' - \cdots = 0 \\ F_{y_2} - F_{x y_2'} - F_{y_1 y_2'} y_1' - F_{y_2 y_2'} y_2' \cdots - F_{y_1' y_2'} y_1'' - F_{y_2' y_2'} y_2'' - \cdots = \\ \text{--- --- ---} \\ \text{--- ---} \end{cases}$$

Si F no contiene explícitamente la x, puede hacerse una servación análoga a la cifrada en la (12) de p. 35. En efecto en tal caso considero la expresión

$$E = F - \sum^{n} y_i' F_{y_i'}$$

Entonces, derivando con respecto a x

$$\frac{dE}{dx} = \sum_i F_{y_i} y_i' + \cancel{\sum_i F_{y_i'} y_i''} - \cancel{\sum_i y_i'' F_{y_i'}} -$$

$$- \sum_i y_i' \frac{d}{dx} F_{y_i'}$$

= (teniendo en cuenta las (3'8))

$$= \sum_i F_{y_i} y_i' - \sum_i y_i' F_{y_i} = 0$$

Por lo tanto la función E de x tiene derivada nula ,es decir es constante: tenemos así

$$F(y_1,\ldots y_n, y_1',\ldots y_n') - \sum y_i' F_{y_i'}(y_1,\ldots y_n, y_1',\ldots y_n') = \text{const.} \qquad (2)$$

<u>a lo largo de una extremal</u>

Si en cambio F no depende p.e. de la $y_1$ a lo largo de una extremal es

$F_{y_1'} = c_1$ ($c_i$ = constantes)

Análogamente si F no depende de $y_2$ o de $y_3$ etc.

El sistema (39), como es claro contiene n ecuaciones diferenciales de 2º orden en las n funciones incógnitas (37), lineales en las derivadas segundas. Las soluciones también ahora llámanse extremales(en la representación geométrica las líneas (37) llámanse líneas extremales).

P. e.;aunque demasiado sencillo, veamos el ejemplo del camino más breve entre dos puntos $P(x_o y_o z_o)$ y $Q(x_1 y_1 z_1)$ en el espacio, cuando el mismo camino se represente analíticamente con $y=y(x)$, $z=z(x)$. Tenemos ahora las dos funciones incógnitas $y(x)$, $z(x)$, con notaciones un poco distintas de las anteriores. La integral que minimizar es

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

de manera que

$$F(x,y,z,y',z') = \sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

La F no contiene x ni y,ni z, de manera que las (39) se escriben

$$F_{y'y'}\,y'' + F_{y'z'}\,z'' = 0$$

$$F_{z'y'}\,y'' + F_{z'z'}\,z'' = 0$$

Considerando este como una sist. de dos ec lin. en y",z", homogéneas en las misma incógnitas, se deduce que

$$y'' = z'' = 0, \qquad (30)$$

a meno que valga cero el det.te del sistema. Ahora

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}, \quad F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{\phantom{x}}} - \frac{y'^2}{(\sqrt{\phantom{xxx}})^3} =$$

$$F_{y'y'} = \frac{1+z'^2}{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}}$$

$$F_{y'z'} = -\frac{y'z'}{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}}$$ Luego el det.te vale

Otro ejemplo. Si se plantea el problema de la braquistócrona en el espacio, resultaría que hay que buscar $y(x)$, $z(x)$ de manera que se minimice

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{z}}\, dx.$$

En este caso $F$ no depende explícitamente de $x$, ni de $y$: aplicando p. 116. se tiene

$$\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{z}} - \frac{y'^2}{\sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}} - \frac{z'^2}{\sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = k_1 \quad (\text{const.})$$

y

$$\frac{y'}{\sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = k_2 \qquad \text{cst.}$$

Esto es (reduciendo la primera)

$$\begin{cases} 1 = k_1\sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}. \\ y' = k_2\sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2} \end{cases}$$

$(k_3 = \text{const.})$

y luego (dividiendo) $\quad y' = \dfrac{k_2}{k_1} \quad ; \quad y = \dfrac{k_2}{k_1}x + k_3$

Lo que comprueba que cada extremal está contenida en un plano vertical. El problema resulta por lo tanto reducido al que ya se trató en el plano.

$$\begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{z'y'} & F_{z'z'} \end{vmatrix} = \frac{(1+z'^2)(1+y'^2)-y'^2z'^2}{(1+y'^2+z'^2)^3}$$

quedará con denr. positivo y numr.

$= 1+z'^2+y'^2 > 0$

de forma que el dette es esencialmt positivo (no nulo). Rigen luego las (40)

Por lo tanto

$$y=Ax+B \quad , \quad z= Cx+D$$

siendo A,B,C,D constantes. Las líneas extremales son las rectas del espacio, como era claro a priori. Por los dos puntos dados P,Q pasa una y una sola extremal, etc.

Aludiré brevemente a otra aplicación. Considero un sistema mecánico con n grados de libertad: cada una de sus posiciones es determinada por n parámetros independientes

$$q_1, q_2, \ldots\ldots q_n$$

(p. e. si se trata de un único punto, n=3 y como $q_1, q_2, q_3$ pueden tomarse las 3 coord cart del punto; si se trata de dos puntos mantenidos entre sí a una dada distancia, n=5, y pueden tomarse para las $q_i$ las tres coord. de uno de los dos puntos y dos de los 3 cosenos directores de la recta que lo une al segundo punto (sobre la cual recta ese punto ya quedará determinado, debido al conocimiento de su distancia del primero).) . En mecánica, las $q_i$ son funciones del tiempo t, y sus derivadas

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$$

son las llamadas "componentes de la velocidad". Mediante las $q_i$ y las $\dot{q}_i$ se forma la llamada energía cinética del sistema. Cada uno de los puntos que integran el sistema tiene sus 3 coord. cart ort funciones de las $q_i$: entonces las componen tes de su velocidad según los ejes pueden expresarse mediante las $q_i$ y $\dot{q}_i$ (más precisamente es claro que serán lineales homogéneas en las $\dot{q}_i$ ),de forma pues que la energía cinética del sistema,semisuma de los productos de las masas de los varios puntos por los cuadrados de las velocidades, viene a ser un polinomio cuadrático homogéneo en las $\dot{q}_i$, cuyos coeficientes son funciones de las $q_i$ .Se tiene por consiguiente para la energía cinética T una expresión del tipo

$$(41)\qquad T\,(q_1,\dots q_n;\ \dot{q}_1,\dots \dot{q}_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q)\,\dot{q}_i\dot{q}_k$$

$$(a_{ik} = a_{ki})$$

(Como lo enseña la (41) la T no depende explícitamente del tiempo t, sino que depende del mismo sóloa través de las $q_i$)

Supondremos además que hay una ~~En mecánica también se considera la~~ energía potencial $U = U(q_1,\dots q_n)$ (que depende de las $q_i$ , pero no de sus derivadas, ni expplícitamente del tiempo).

Ahora bien, se tiene un principio de mínimo de Hamilton de acuerdo con el cual, el movimiento de un sistema dinámico en el intervalo de tiempo entre $t_o$ y $t_1$ , de una posición inicial a otra final,es tal que para ese movimiento la integral

$$I\{q_1,\dots,q_n\} = \int_{t_0}^{t_1} (T-U)\,dt$$

es mínima.(Quiere decir que podemos a priori imaginar varias expresiones de las $q_i$ en función del tiempo, y que entre ellas las que corresponden al efectivo movimiento son las que cumplen con la condiciñon de mínimo contenida en el principio de Hamilton). Por supuesto hay que tener en cuenta las condiciones a los límites: las funciones $q_i(t)$ tienen que tomar para $t=t_o$ y $t=t_1$ valores prefijados.

Pues bien, vamos a averiguar que las llamadas ecuaciones de Lagrange que son las ecuaciones fundamentales en la dinámica son consecuencias del principio de Hamilton. En efecto, para que se minimice la última integral escrita, las (38) nos dan las condiciones necesarias:

$$\frac{\partial (T-U)}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i=1,\dots n)$$

Pero U no depende de las $\dot{q}_i$ , de manera que queda

(42) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i=1,..n)$$

Las (42) son precisamente las ecuaciones de Lagrange.

De lo dicho podemos sacar otra consecuencia. La función T-U bajo el signo de integral es función de las

$$q_i(t) \quad , \dot{q}_i(t)$$

que reemplazan las

$$y_i(x) \quad , y_i'(x)$$

del caso general (la t reemplaza la x): ella no depende explícitamente de la variable independiente t , debido a que no dependen directamente de t ni T ni U. Por lo tanto se aplica al caso actual lo observado a p. 116, fórmula (2), y vemos que

$$T-U - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_i} = \text{const}$$

esto es (debido a que U no depende de las $\dot{q}_i$)

$$T-U - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \text{const}$$

Ahora T , de acuerdo con (42) es una forma cuadrática en las $\dot{q}_i$, y por consiguiente

$$\sum \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

(p. e. por el teor. de Euler sobre funciones homogéneas de grado n). Por fin, reemplazando y cambiando de signo

$$T+U = \text{const}$$

fórmula que expresa que durante el movimiento la suma de la energía cinética con la energía potencial no varía con el tiempo. Principio de la conservación de la Energía.

× p.e. para $n=2$ si $F = x^2+y^2+y'^2+y''^2$ la ec. de Euler es

$$2y - \frac{d}{dx}(2y') + \frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0$$

esto es:

$$y - y'' + y^{IV} = 0$$

×× El orden es $< 2n$ si $\frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}$ no contiene $y^{(2n)}$. P.e. si

$$F = x^2 + y^2 + y'^2 + y'y''$$

la ec. de Euler es

$$2y - \frac{d}{dx}(2y' + y'') + \frac{d^2}{dx^2} y' = 0$$

es decir

$$2y - 2y'' - \cancel{y'''} + \cancel{y'''} = 0$$

esto es

$$y - y'' = 0.$$

## INTEGRALES QUE DEPENDEN DE DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR DE LA FUNCION INCOGNITA.

La ecuación de Euler para la integral (2) tiene su análoga en el caso más general en que se sstudia una integral

$$(43) \qquad I\{f\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \dots y^{(n)})\, dx \qquad (y=f(x))$$

$f$ (por ejemplo)

donde F es una función de $n+2$ variables, continua con sus derivadas hasta el orden $n+2$ incluído. Como condiciones a los límites sensideramos las siguientes

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0)=y_0,\ f'(x_0)=y_0', \dots\ f^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \\ f(x_1)=y_1,\ f'(x_1)=y_1', \dots\ f^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)} \end{array}\right\} (44)$$

esto es la función desconocida tiene que tomar valores prefijados en cada uno de los extremos del intervalo $x_0 x_1$, y lo mismo pasa para la derivada primera, etc, hasta la de orden n-1 incluído.

Como funciones admisibles f(x) se consideran las que son continuas con sus derivadas hasta el orden 2n incluído en todo ese intervalo.

Entonces, para que se minimice la integral (43) se tiene como necesaria la condición que f(x) satisfaga a la ecuación diferencial de Euler( que escribimos con notaciones a las usadas hasta ahora para n=1):

$$(45) \quad F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - \frac{d^3}{dx^3}F_{y'''} \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0$$

Se trata de una ecuación diferencial ordinaria de orden 2n (porque la derivada de orden máximo de la función incógnita es precisamente la de orden 2n, que resulta al explicitar el último término de la (45), debido a que la $F_{y^{(n)}}$ ya depende de la derivada de orden n de f, y al derivarla n veces aparecerá la derivada de orden 2n). (En casos particulares la (45) puede resultar de orden < 2n.)

La demostración es análoga a la ya conocida para n=1. Junto con una f que brinde el mínimo consideramos las funciones

$$g(x) = f(x) + \varepsilon\eta(x)$$

siendo $\eta(x)$ una función cualquiera con tal que

1) seq continua con sus derivadas, hasta el orden 2n incluí do en todo el intervalo ( con el objeto que los mismo ocurra para g(x) )
2) se anule, junto con sus derivadas hasta el orden n-1 incluído en los dos extremos del intervalo( con el objeto que sigan subsistiendo las condiciones a los límites (44))

Parangonemos entonces la integral I calculada para f o para la función g. Si la f brinda un mínimo, puesto

$$I\{f+\varepsilon\eta\} = \Phi(\varepsilon)$$

tenemos como condición necesaria $\Phi'(0)=0$
es decir

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x, f+\varepsilon\eta, f'+\varepsilon\eta', \ldots, f^{(n)}+\varepsilon\eta^{(n)})\, dx\right]_{\varepsilon=0} = 0$$

También ahora podemos derivar bajo el signo de inte gral logrando

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\eta F_y + \eta' F_{y'} + \ldots + \eta^{(n)} F_{y^{(n)}}\right) dx = 0 \qquad (46)$$

Ahora integrando por partes y recordando 2)

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta' F_{y'}\, dx = \Big[\eta F_{y'}\Big]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{dF_{y'}}{dx}\, dx = -\int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{dF_{y'}}{dx}\, dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta'' F_{y''} = \Big[\eta' F_{y''}\Big]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta' \frac{dF_{y''}}{dx}\, dx = -\int_{x_0}^{x_1} \eta' \frac{dF_{y''}}{dx}\, dx$$

$$= -\left[\eta \frac{dF_{y''}}{dx}\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d^2F_{y''}}{dx^2}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d^2 F_{y''}}{dx^2}\, dx$$

0,30

0,90

~~27~~ 0,90
1,30
2,20

4.40 3.50

3,50 2,20
70

70
~~77,000~~

4.40 3.50
140
140
15,40

y así continuando. La condición necesaria (46) se transforma pues en

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta \left[ F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right] dx = 0$$

Esta condición tiene que cumplirse para cualquier función $\eta(x)$ que satisfaga a las restricciones 1) y 2): podemos aplicar un lema análogo al de p. 23 (análogo, pero distinto, debido a que ahora las funciones $\eta(x)$ constituyen una clase más restringida), que se demostraría de manera análoga. Concluímos que necesariamente tiene que ser nulo el coeficiente de $\eta$ bajo el signo de integral, es decir la ecuación de Euler para n cualquiera.

También en el caso actual las soluciones de la ecuación de Euler llámanse extremales, etc.

Sea p. e. dada una función u(x) continua en un intervalo $x_0$ $x_1$, y buscamos las extremales en el problema de minimzar la integral

$$I = \int_{x_0}^{x_1} (y''^2 - 2uy)\, dx$$

En este caso la F depende de la x a través de u, y además de y, y" (no de y´). La ecuación de Euler es la siguiente

$$-2u + \frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0 \quad \text{es decir} \quad \boxed{y^{IV} = u}$$

Es claro que si llamamos v(x) a una función de x que tenga como derivada cuarta la u(x), la solución más general de la ecuación de Euler es dada por

$$y = v(x) + ax^3 + bx^2 + cx + h$$

siendo a,b,c,h constantes arbitrarias, que pueden determinarse acudiendo a las condiciones a los limites. Tenemos

$$a x_0^3 + b x_0^2 + c x_0 + h = y_0 - v(x_0)$$
$$a x_1^3 + b x_1^2 + c x_1 + h = y_1 - v(x_1)$$
$$3a x_0^2 + 2b x_0 + c = y'_0 - v'(x_0)$$
$$3a x_1^2 + 2b x_1 + c = y'_1 - v'(x_1)$$

Son 4 ecuaciones lineales homogéneas en las 4 incógnitas a,b,c,d, cuyo determinante no es nulo, como puede averiguarse.

P. e. si tomamos u =0, &&&&&&&& podemos también adoptar v=0:si queremos minimizar la integral

$$\int_0^1 y''^2 dx$$

con una función tal que sea

$$f(0)=0 \,,\quad f(1)=0 \qquad f'(0)=1 \,,\quad f'(1)=-1$$

resulta fácilmente, al determinar los valores de a,b,c,& h de acuerdo con lo dicho:

$$f(x) = x - x^2$$

$h=0$; $a+b+c=0$
$c=1$; $3a+2b+c=-1$
Luego $\begin{cases} a+b=-1 \\ 3a+2b=-2 \end{cases}$
$a=0$; $b=-1$

La valor de la integral es entonces

$$\int_0^1 (-2)^2 dx = 4.$$

Por supuesto, hay que recordar que como funciones f(x) admisibles, de acuerdo con las hipótesis hechas, tomamos las que son continuas con sus derivadas hasta el orden 4 incluído en todo el intervalo (de manera que p. e. la función que corresponde al diagrama formado por la quebrada oH1 de la figura no entra en consideración: es claro que la misma llevaría a un valor nulo de la integral considerada, que habría que descomponer en dos, relativas a los dos intervalos de o a 1/2 y de 1/2 a 1 ).

Otro ejemplo vamos a considerar acudiendo a la noción del arco afín de una línea plana. Recuerdo que la geometría p. e. plana se divide en varias ramas, según el grupo que se adopta como fundamental. P.e. recuerdo que se distinguen las llamadas propiedades métricas de las proyectivas:las primeras integran la geometría métrica y lassegundas la geometría proyectiva.Se llama propiedades métricas a las que subsisten al mismo tiempo para una figura y todas sus iguales, o más generalmente semejantes :se dicen en cambio proyectivas las que se transmiten de una figura a sus transformadas proyectivas. P.e. la propiedad que en un cuadrado lados y ángulos son iguales es métrica, la propiedad armónica de polo y polar para las cónicas es projectiva.

De lo que sigue que entre las transf.^s de un grupo siempre hay la transformación idéntica o identidad.

(la cuya existencia en el grupo se prueba observando que es el producto de una transf. por su inversa

La distinción aludida puede convenientemente generalizarse, llevando precisamente a la clasificación grupal de la geometria. Para que una propiedad de una figúra pertenezca a la geometria siempre tiene que tener cierto grado de generalidad es decir, no debe subsistir tán sólo para una muestra aislada F de una fígura, sino que tiene que transmitirse a otros ejemplares, los cuales, aú que puedan diferir de F en algunos caracteres, tengan con F algo en común. P.e. en geometria elemental se considera la propiedad del cuadrado aludida más arriba; sin embargo no se considera como propiedad de un cuadrado la que eventualmente esté en un plano horizontal. La razon es que en geometria elemental o métrica se estudian las prepiedades de una figura S que de la misma se trasmiten a sus eguales(o semejantes) , es decir logradas mediante aquellas transformaciones geometricas que son las igualdades, (o semejanzas). Esa transmisibilidad subsiste en la primera propiedad del cuadrado, pero no en la segunda. Cosas análogas pueden repetirse para la geometria projectiva.

En definitiva al hablar de propiedades geometricas de la figuras, siempre está soprentendido, como lo dije, que tengan cierto grado de generalidad. Siempre está soprentendida la elección de un criterio en base al cual ciertas figuras distintas se consideran como equivalentes, es decir, como ejemplares distintos de una misma figura, de manera que cada propiedad de una figura subsiste al mismo tiempo para ella y todos sus equivalentes. Ese criterio ,en la geometria métrica, es el de considerar equivalentes figuras iguales o semejantes en la geometria projectiva figuras deducidas una de otra mediante projectividades. En los dos casos siempre se encuentra en la base misma de la geometria el conjunto de las transformaciones( grupo) fundamental: en el doble sentido de que se consideran como equivalentes figuras logradas una de otra mediante una transformación del grupo fundamental, y que se estudian propiedades transmisibles de una figura a todas sus equivalentes.

Digresión sobre grupos

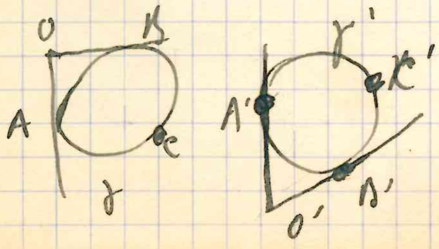
Recuerdo que se llama grupo a un conjunto de transformaciones, las cuales actuén dentro de un campo C o una clase C de objetos , cuando ese conjunto contiene los <u>productos</u> de todos los pares de transformaciones que lo integran, y contiene además la inversa de cada una de sus transformaciones(producto $T_1 T_2$ de dos transformaciones $T_1, T_2$ que operan dentro del campo $\mathcal{C}$ es la transformación lograda al actuar en un primer tiempo con la $T_1$, y luego -sobre los resultados así logrados - con la $T_2$: el producto generalmente no es commutativo). P.e. es claro que las igualdades directas entre un plano y sí mismo constituyen un grupo; analogamente las semejanzas o las projectividades. Analogamente las <u>afinidades</u>, es decir, limitandome al caso de planos superpuestos, aquellas particulares homografias de un plano en sí mismo, que dejan fija la recta impropia ( se representan análiticamente por una substitución lineal entera entre las coordenadas cartesianas x,y de un punto y las x',y' del transformado:

$$x' = ax + by + c$$
$$y' = lx + my + n \ ].$$

Como para las geometrias métrica y projectiva el grupo fundamental es respectivamente el grupo de las semejanzas o de las homografias, así llámase geometria afín a la cuyo grupo fundamental es el de las afinidades (p. e. la propiedad de un cuadrángulo de ser un paralelógramo es una propiedad de geometría afín, como es claro ; lo mismo ocurre de la que las diagonales de un paralelógramo se bisecan; id. id, la propiedad de una cónica de pertenecer a una de las tres clases integradas por elipses, hipérbolas o parábolas. En cambio la prpiedad de ser círculo no pertenece a la geometria afín, sino a la métrica debido a que las cónicas logradas de un círculo mediante afinidades generalmente ya no son círculos sino cónicas cualesquieras).

La noción bosquejada lleva un principio de clasificación de importancia basica en la geometria, y constituye el contenido más importante del llamado <u>programa de ~~XXXXXXXXX~~ Erlangen</u> de Felix Klein .

El alcance de la misma va porsupuesto más allá de lo dicho. P.e. fijo en un plano una cónica $\gamma$ no degenerada, y




las homografias que la transforman en sí misma. Estas integrán un grupo $\infty^3$ o $G_3$( es decir un grupo cuyas transformaciones depende de tres parametros arbitrarios) debido a que entre dos cónicas distintas o superpuestas existe una

La transf lograda al aplicar antes la $T_1$ y luego la $T_2$ la indico con $T_1T_2$, poniendo el primer factor a la izquierda (podría adoptarse la convención contraria: lo que hay de importante es referirse a una, bien determinada de las dos convenciones). Lo afirmado consiste en que generalmente no es $T_1T_2=T_2T_1$. P.e. si (siendo C la clase de los números complejos) las transformaciones consideradas son respectivamente

$$T_1 \qquad x' = x + a \qquad (a\ \text{const.})$$

$$T_2 \qquad x' = bx \qquad (b\ \text{conxt.})$$

la trasnf. $T_1T_2$ es la que se logra al pasar sucesivamente desde el número cualquiera a $x+a$ y luego a $b(x+a)$ es decir

$$T_1T_2) \qquad x' = bx + ba$$

La $T_2T_1$ lleva desde el num $x$ a $bx$ y luego a $bx+a$; esto es, la transf. $T_2T_1$ es

$$T_2T_1) \qquad x' = bx + a$$

Es claro que los resultados son distintos ( a menos que sea $b=1$, es decir que la $T_2$ se reduzca a la <u>identidad</u> ) El ejemplo puede interpretarse geométricamente al tomar como clase C la de los puntos complejos de una recta fija r, cuyos puntos se representen con coord. abscisas( o proyectivas) x, resp. $x'$. Se trata entonces de dos proyectividades no permutables.

Si en cambio tomamos $T_1)$ $x'= ax$, $T_2)$ $x'=bx$ (siendo a,b constantes arbitrarias, $T_1T_2$ y $T_2T_1$ coinciden en la trasnformación

$$x'=abx$$

(transformaciones o proyectividades permutables).

Para averiguar que un conjunto de transformaciones es grupo, hay que averiguar que cumple con la definición de grupo dada más arriba. P.e. tomando como campo C el de los puntos de una recta, las simetrías con respecto a los varios puntos de la recta no forman grupo, porque el producto de dos de ellas (ambas discordes) es concorde y por lo tanto no puede ser una simetría, que es concorde.

En cambio las traslaciones de una recta en sí misma constituyen grupo.

Entre los tipos más importantes de grupo recuerdo:

a) los llamados grupos de orden finito, los cuales están integrado por un número finito de transformaciones (cuyo número llámase <u>orden</u> del grupo). En este caso, para averiguar que las transformaciones integran un grupo es suficiente averiguar que siempre el producto de dos de ellas pertenece al conjunto: de esta propiedad ya sigue que el conjunto, con cada una de sus transformaciones, contiene su inversa. En efecto si T es una transf. del conjunto, este contendrá también sus sucesivas potencias, las cuales no pueden ser todas distintas entre sí (por ser las transf. del conjunto en número finito): sea p. e.

$$T^m = T^n \qquad m \neq n$$

Sea p. e. $m < n$ y $r=n-m$. Multiplicando, como es lícito los dos miembros de la igualdad simbólica ahora escrita por la potencia m. esima de la inversa de T, que se indica con $T^{-1}$, es decir por

$$(T^{-1})^m \quad \text{que se escribe} \quad T^{-m}$$

resulta, actuando como si se tratara de una igualdad entre números

$$1 = T^r \qquad (1)$$

El pasaje está justificado, aunque no se trata de números, si al símbolo 1 se atribuye el significado de transformación idéntica (la cual hace corresponder cada elemento de la clase C a sí mismo). En efecto partimos de

$$\underset{(m \text{ factores})}{T.T\ldots T} = \underset{(n \text{ factores})}{T.T\ldots T}$$

lo que expresa que dá lo mismo aplicar a un elemento cual~~quiera de la clase C~~

quiera de la clase C la trasnf, T m o bien n veces. Si luego multiplicamos m veces por la inversa de T, el efecto sigue siendo el mismo, lo que comprueba la igual dad simbólica escrita.

Ahora bien el producto $T. T^{r-1}$ es la identidad, de forma que la trasnf $T^{r-1}$ es la inversa de la T. Por lo tanto ya resulta la existencia de la transf inversa

Notamos de paso que cada transformación de un grupo de orden finito es <u>cíclica</u> (así llamándose una transf T si existe un entero positivo r tal que rija (1) : el mínimo entero r en tales condiciones se llama <u>orden</u> de la transf cíclica). También de paso notamos que para una transf T que pertenezca al un grupo $G_n$ integrado por n trasnf. <u>el orden de la T es un divisor del orden n del grupo</u>. Se trata de un caso particular según el cual <u>un subgrupo</u> $G'_m$ <u>de un</u> $G_n$ (grupo de orden finito n: decir que G' es un subgrupo de G quiere decir que es un grupo cuyas transformaciones pertenecen todas al G) <u>tiene como orden</u> m <u>un divisor del orden n del grupo</u>. Sean en efecto

$$T_1, T_2, \ldots . T_m \qquad (2)$$

las m transf. de G'. Si no agotan G, sea S una trasnf de G no contenida en G'. Las n transf,

$$ST_1, \ldots . ST_m \qquad (3)$$

son distintas entre sí (si fuera $ST_i = ST_j$, multiplicando por $S^{-1}$ <u>a la izquierda</u> se deduciría $T_i = T_j$ ) y distintas de las (2) (si fuera

$$ST_i = T_j$$

se deduciría multiplicando a la derecha por $T_i^{-1}$, la cual forma parte de las (2), que sería

$$S = T_j T_i^{-1}$$

y luego S pertenecería a (2)) . Si las (2), (3) ya agotan las trasnf del $G_n$, tenemos n=2m , y el teor, está demostrado. Si no es así, se sigue de la misma manera, tomando una S' del grupo $G_n$ que no pertenezca a las (2) ni a las (3) y formando las m trasnf,

$$S'T_1, \ldots S'T_m \qquad (4)$$

todas distintas entre sí y de las (2) (como arriba), y también distintas de las (3), porque si fuera

$S'T_i = ST_j$ , multiplicando a la derecha por $T_i^{-1}$ se deduciría $S' = S(T_j T_i^{-1})$ y S' pertenecería a (3) contra lo supuesto

Si las (2) (3) (4) agotan el $G_n$, tenemos $n=3m$ y el teor está demostrado; si no se sigue de la misma manera.

Ejemplos:

I) las proyectividades de una recta g en sí que dejan in movil ( en su conjunto) una terna de puntos ABC integran un grupo, como es claro a priori, de 6 transformaciones: son las 6 proy. individualizadas por la terna ordenada ABC y la misma en una cualquiera de las 6 permutaciones de los 3 puntos dados. Este $G_6$, además de la identidad contiene las 3 involuciones( transf. cíclicas de periodo 2)

$$\begin{matrix} A & B & C \\ A & C & B \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} A & B & C \\ C & B & A \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} A & B & C \\ B & A & C \end{matrix} .$$

y las dos proyectividades cíclicas de orden 3

$$\begin{matrix} A & B & C \\ B & C & A \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} A & B & C \\ C & B & A \end{matrix}$$

cada una de las cuales últimas es la inversa de la otra

II ) Las proyectividades que dejan invariada una cuaderna genérica de puntos A B C D de una recta g. Son la identidad y las tres involuciones

$$I) \begin{matrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{matrix} \qquad J) \begin{matrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{matrix} \qquad H) \begin{matrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{matrix}$$

Es claro que $I^2=J^2=H^2=1$; $IJ=JI=H$; $IH=HI=J$; $JH=HJ=I$ de forma que se trata efectivamente de un $G_4$ y más precisamente de un $G_4$ abeliano (llamándose así un grupo cuando sus transformaciones son dos a dos permutables). Este grupo puede llamarse cuadrinvolutorio. Se llga a un grupo con la misma "tabla de multiplicación" considerando en un plano, además de la identidad las dos simetrías con respecto a dos rectas perpendiculares que salen de O y la simetría con respecto a O.

III) Sea ABCD un tetraedro regular: considero las igualdades directas ~~en~~ el espacio que lo transforman en sí mismo. Cada una de ella transforma es sí misma también el centro O de la esfera circonscrita: luego es una rotación alrededor de un diametro de dicha esfera (debido a que una igualdad directa en el espacio se engendra con un movimiento helicoidal que puede reducirse a una traslación o a una rotación: ahora debe verificarse el tercer caso debido a la presencia de un punto unido pro pio O) Que esas igualdades formen grupo es claro a priori: podemos por lo tanto hablar del grupo de las rotaciones del tetraedro en sí mismo. Aquellas rotaciones son en número finito porque al máximo puede existir una que lleve los 4 vértices en el orden A B C D a los 4 vértices en una de las 4!=24 permutaciones posibles. Por la misma razón el orden n no puede sobrepasar de 24. Antes bien n es un divisor de 24 debido a que las n substituciones sobre 4 letras que llevan A,B,C D a las permutaciones formadas por los cuatro puntos en el orden en que se encuentran después de una rotación del grupo en cuanto procedentes resp. de A,B,C,D constituyen evidentemente un subgrupo del grupo $G_{24}$ formado por las 24 substituciones sobre 4 letras( las 24 substituciones cada una de las cuales está definida por el pasaja de las 4 letras en el orden A,B,C,D a las mismas cuatro en una de las 24 permutaciones posibles) Sin embargo n es menor de 24: en efecto no existe ninguna rotación que lleve los vértices ABCD resp. en ABDC(porque A,B unidos estarián sobre el eje de rotación, lo que no es posible: una transf del grupo que deje fijos A,B es la identidad). Luego

$$n \leq 12 \qquad (5)$$

Más precisamente n=12. En efecto, el grupo contiene p. e. las dos rotaciones de 120°, en los dos sentidos, alrededor del diámetro OA. Con estas y las análogas ya tenemos 8 rotaciones, y con la identidad 9: de lo que resulta que n es un divisor de 24 mayor de 8 u no mayor de 12, y por lo tanto igual a 12. Si S,T son las dos rotaciones de 120°

$$S)\ \begin{matrix} A & B & C & D \\ A & D & B & C \end{matrix} \qquad\qquad T)\ \begin{matrix} A & B & C & D \\ B & D & C & A \end{matrix}$$

(S alrededor de OA,T alrededor de OC), la rotación SD lleva A,B,C,D resp. enB,A,D,C: la misma tiene por consiguiente caracter involutorio, es decir es una rotación de 180° esto es una simetría con respecto a un eje, que tiene que resultar perpendicular a la recta AB(la cual une los dos puntos corresp, A,B) y CD: más precisamente será este eje perpendicular común a las dos aristas opuestas AB,CD en sus puntos medios. Tenemos así una de las 3 rotaciones que aún faltaban. Ellas son las tres rotaciones alrededor de las tres rectas perp. comunes a pares de aristas opuestas en sus puntos medios. Estas tres últimas son de orden 2; las 8 anteriores de orden 3.

y una sola homografía que lleva tres puntos prefijados de la primera A,B,C en tres igualmente prefijados A´,B´C´ de la segunda( la homografía individualizada por las dos cuadernas de puntos correspondientes

$$\begin{matrix} A & B & C & O \\ A' & B' & C' & O', \end{matrix}$$

donde llamo O el punto de intersección de las tangentes a la conica en A, B ; y análogamente para O´. Es claro que dicha homografía lleva la primera cónica, en cuanto pasante por C, A con tangente AO, B con tangente BO, en una cónica pasante por C´ , A´ con tangente A´ O´ B´con tangente B´O´la cual por consiguiente coincide con la segunda cónica) Es evidente que las homografias de la cónica $\gamma$ en sí misma cumplen con las dos condiciones aludidas para definir la nocion de grupo, e integran por lo tanto efectivamente un grupo . Puede desarrollarse la geometria con respecto a ese grupo fundamental, la cual substancialmente vendría a ser la llamada geometria no euclidiana cuyo absoluto coincide con $\gamma$

Pues bien, en las varias geometrías puede definirse un concepto de arco de una línea,que depende de la naturaleza del grupo fundamental, y que se reduce al ordenario arco métrico en el caso en que el grupo fundamental es el de la geometría métrica. Cuando consideramos una línea y=f(x), su arco queda determinado por el conocimiento de su diferencial ds:

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (a)$$

Se trata de una forma diferencial lineal , esto es de un polinomio homogéneo lineal en dx, caso particular de

$$F(x,y,y')\,dx \qquad (b)$$

donde indicamos con F a una función cualquiera de los tres argumentos x,y, y´. Las x,y,y´que aparecen como argumentos son las dos coordenadas del punto que se considera y el coef. angular de la tangente. Independientemente de la referencia a una línea, podemos considerarlas como las "tres coordenadas de un elemento de primer orden $E_1$", llamando $E_1$ a la figura formada por un punto y una recta que se pertenecen y tomando como sus tres coordenadas las dos del punto y el coef angular de la recta

× En cambio el grupo de las semejanzas (directas) depende de 4 parámetros (cada una de ellas está definida por el par de puntos $I'$, $Q'$ que se prefijan como correspondientes a 2 ptos $I$, $Q$ dados)

Come es sabido, más generalmente se dice que dos o mas curvas, representadas cada una con un ecuación del tipo $y = f(x)$, en el punto $x,y$ tienen común un elemento de orden n $E_n$ cuando en ese punto(no singular) tienen un contacto de orden n, de manera que

$$x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$$

tienen el mismo valor para todas aquellas curvas. Las mismas cantidades ahora indicadas pueden adoptarse como las $n+1$ coordenadas de dicho $E_n$

La forma (a), que brinda el valor de la diferencial ds, tiene un caracter del cual generalmente la otra forma (b) carece: si adoptamos dos sistemas cartesianos distintos, y en un punto determinado de una dada curva calculamos (a) ya sea en un sistema o en el otro, el resultado no varía: en cambio esto no ocurre para la forma differencial (b). La diferencial (a) es algo vinculado intrinsicamente con la curva e independiente de su representacion analitica; no sólo, sino que al pasar de una curva a otra mediante una igualdad (transformación del grupo fundamental de la geometria métrica), la diferencial (a) no varía, esto es es invariante, mientras que en general la diferencial (b) variaria.

Imaginemos ahora de manera más general un grupo fundamental de transformaciones (G), y la geometria definida por el grupo. Una transformación de G puede depender de un número mayor o menor de parámetros segun la naturaleza del grupo. P. e.

1) el grupo de las igualdades depende de tres parametros debido a que un punto P dado y una recta a por el mismo pueden llevarse mediante una igualdad a otros punto y recta P´, a´ (por P´). Debido a que la figura P´a´ depende de tres parametros se concluye lo dicho

2) el grupo de las proyectividades depende de 8 parametros, debido a que una homografía plana puede individualizarse prefijando los cuatro puntos independientes A´B´C´D´ correspondientes de 4 puntos dados igualmente independientes A B C D ; y la figura A´B´C´D´ depende de 8 parámetros

3) el grupo fundamental de la geometria no euclidiana, (p. 137) depende de 3 parametros.

4) el grupo afín depende de 6 parámetros: en efecto depende de 6 parámetros en su conjunto, los 3 puntos propios ~~XXXXX~~ A´B´C´~~D´~~que pueden prefijarse como correspondientes de tres puntos propios dados A,B,C . Lo dicho se confirma por lo que la representación análitica de una afinidad(p. 135) aparecen 6 parámetros arbitrarios (una consideración análoga rige para el grupo de las homografias, debido a que en la conocida representación análitica de una homografía como substitución lineal entera entre coordenadas homogéneas de puntos correspondientes figuran 9 parámetros omogeneos arbitrarios, es decir 8 no omogeneos).

Para el grupo de las igualdades lo dicho expresa que mediante una conveniente igualdad cada elemento de primer órden $E_1$ puede llevarse a otro $E_1'$ arbitrario. En la teoria de los grupos esta circunstancia suele enunciarse al decir que ese grupo actúa transitivamente sobre los $E_1$. En cambio mediante una igualdad un $E_2$ dado no puede generalmente llevarse a otro $E_2$ prefijado. Pues bién circunstancias analogas se presentan para los otros tipos de grupos considerados. P.e. en el caso no euclidiano , el grupo sigue actuando transitivamente sobre los $E_1$, pero no sobre los $E_2$. En los otrs ejemplos indicados se comprende sin entrar en mayores particularidades que debido al mayor numero de parámetros de los cuales depende el grupo, pueden llevarse uno a otro elementos de orden mayor de 1. P. e. el grupo a 8 parámetros $G_8$ de las homografias actúa transitivamente sobre los $E_6$ (lo que es presumible debido a que las coordenadas de un $E_6$ son precisamente 8), pero no sobre los $E_7$ . El grupo de las afinidades, analogamente actúa transitimente sobre los $E_4$, pero no sobre los $E_5$.

Imaginemos para estudiar juntos todos los casos que el grupo fundamental actúe transitivamente sobre los $E_{r-2}$ ,pero no sobre los $E_{r-1}$. Entonce puede demonstrarse que existe una forma diferencial lineal

$$d\sigma = F(x,y,y' \dots y^{(r-2)})\,dx \qquad (c)$$

(donde F es una función de las coordenadas de un $E_{r-2}$) invariante con respecto al grupo. Es claro que esa forma es única a menos de un factor constante, porque si hubiera otra

$$F_1(x,y,y' \dots y^{(r-2)})\,dx$$

tambien sería invariante la razón de las dos, en la cual se elimina por supuesto dx ; tendriamos así un invariante finito de los $E_{r-2}$ con respecto al grupo considerado, y ese invariante necesariamente se rduce a una constante debido a la transitividad del grupo sobre los $E_{r-2}$

Es evidente que el elemento de la ordinaria geometria métrica (a) cumple con las condiciones ahora dichas con respecto al grupo métrico, y es la unica a menos de un factor constante. Des`pues de lo dicho, resulta natural , en la geometria respecto al grupo más general que acabamos de considerar <u>definir la diferencial del arco</u> (siempre a meno de un factor constante) <u>mediante la forma diferencial lineal invariante (c)</u>. **Mediante integración se pasa a la def. del arco**

Observese que no está dicho que para cada grupo la función F que aparece como coeficiente en la (c) depende efectivamente de todos los argumentos indicados, y particularmente de

$$y^{(r-2)}$$

depende si de él en el caso elemental del grupo métrico, pero no p.e. en el caso del grupo projectivo, en el cual el calculo efectivo brinda

$$d\sigma = \frac{\left[9y''^2y^{v} - 45y''y'''y^{iv} + 40y'''^3\right]^{1/3}}{y''}\,dx$$

(aparece $y^{v}$ pero no $y^{vi}$ ).Tampoco depende de él en el caso afin, sobre el cual voy a detenerme.

Observo previamente una cosa. El grupo fund. de la geom. métrica en realidad es el de las semejanzas: sin embargo a veces conviene reemplazarlo por el grupo más restringido de las igualdades: p. e. al adoptar este último para la definición del arco se logra efectivamente el arco ya conocido, mientras que resultados menos interesantes se lograrían al considerar la definición con respecto al $G_4$ (grupo a 4 parámetros: puede un par de puntos llevarse a otro) de las semejanzas.En este caso la forma Kds es claramente invariante(indico con K la curvatura, es decir el recíproco del radio $\rho$ de curvatura:al transformar en una semejanza $\rho$ y ds quedan multiplicados por un mismo factor, de forma que K ds es invariante), y como

18

Si se quisiera minimizar el "arco" así considerado, hay que observar lo siguiente:

* De $d\sigma = d\theta$ se desprende que $\int d\sigma = \int d\theta =$ ángulo entre las direcciones prefijadas en P, Q cualquiera sea el camino de integración.

(Es previsible que sea un caso análogo al de p. 53 bis. esto es que la ecuación de Euler se reduzca a una identidad.) Y efectivamente

$$F(x,y,y',y'') = \frac{y''}{1+y'^2}$$

de modo que

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{-2y'y''}{(1+y'^2)^2}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1+y'^2}\right) \cancel{=}$$

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{-2y'y''}{(1+y'^2)^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{-2y'y''}{(1+y'^2)^2}\right) \equiv 0.$$

$$K\,ds = \frac{ds}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{y''\,dx}{1+y'^2} = \frac{dy'}{1+y'^2} = d \operatorname{arc\,tg} y' = d\theta \quad (1)$$

se ve en primer término que Kds es el elemento $d\sigma$ de arco con respecto a las semejanzas, y que- al llamar $\theta$ el ángulo qur la tangente a la curva forma con el eje x- ese elemento de arco viene a coincidir con el ángulo formado por dos tangentes infinitamente vecinas de la curva, y luego el arco con respecto a las semejanzas coincide con el ángulo que unatangente variable de la curva forma con una tangente fija: el mismo por lo tanto no lleva a ningún concepto nuevo. Lo que es más importante es en este caso considerar el arco con respecto a ese subgrupo[2] del grupo de las semejanzas, que es brindado por el grupo de las igualdades.

Algo parecido pasa con respecto a la geometría afín, donde generalmente no se considera el gripo afín, sino ese subgrupo del mismo que está formado por las afinidades equivalentes(Recuerdo que en una afinidad plana es constante la razón entre un area cualquiera yel area transformado: la afinidad se llama equivalente cuando esa razón vale 1, es decir figuras correspondientes tienen la misma area: la afinidad de p. 135 es equivalente cuando am-bl = 1). Las afinidades equivalentes integran por lo visto un grupo a 5 parámetros, el cual actua transitivamente sobre los $E_3$. Se dice generalmente arco afín al arco con respecto a este grupo, y resulta

$$d\sigma = y''^{1/3}\,dx. \quad (d)$$

(de forma que no aparece en el segundo miembro la y''' , como podría esperarse a priori ). También ahora , desde luego, podríamos multiplicar la diferencial considerada por una constante arbitraria

---

[2] Llámase subgrupo de un grupo dado a un grupo contenido en el grupo dado.

(1) Por lo demás, que $K\,ds = d\theta$ es consecuencia inmediata de la definición de curvatura

Que la diferencial (d) sea invariante en el grupo afín equivalente se averigua así: Sea

$$\begin{cases} x = aX + bY + c \\ y = lX + mY + n \end{cases} \quad \text{con } am - bl = 1$$

una afinidad equivalente. La línea $Y = Y(X)$ sea llevada por la misma en la $y = y(x)$.

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{l + m\frac{dY}{dX}}{a + b\frac{dY}{dX}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m\left(a + b\frac{dY}{dX}\right) - b\left(l + m\frac{dY}{dX}\right)}{\left(a + b\frac{dY}{dX}\right)^2} \cdot \frac{\frac{d^2Y}{dX^2}}{\frac{dx}{dX}}$$

$$= \frac{(am - bl)\frac{d^2Y}{dX^2}}{\left(a + b\frac{dY}{dX}\right)^3} = \frac{1}{\left(a + b\frac{dY}{dX}\right)^3}\frac{d^2Y}{dX^2}$$

Luego

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{a + b\frac{dY}{dX}}\left(\frac{d^2Y}{dX^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{dX}{dx}\left(\frac{d^2Y}{dX^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

es decir

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{1}{3}} dx = \left(\frac{d^2Y}{dX^2}\right)^{\frac{1}{3}} dX \quad \text{c.q.d.}$$

La longitud afin de la curva y=f(x) entre los puntos de abscisas $x_0, x_1$ es por consiguiente

$$\int_{x_0}^{x_1} y''^{1/3}\, dx$$

Después de esta digresión, vuelvo al cálculo de las variaciones para buscar las líneas estremales en el problema de minimizar el arco afin( serán luego líneas que de este punto de vista desempeñan en la geom afin el papel que en geom. métrica desempeñan las rectas) Aplicando la (45) p.125 encontramos la ecuación de Euler en la forma:

$$\frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0 \quad \text{es decir} \quad \left(y''^{-2/3}\right)'' = 0$$

ecuacipn dif del 4º orden, de la que deducimos

$$y''^{-2/3} = ax+b$$

con a,b constantes y luego

$$y'' = (ax+b)^{-3/2} \; ; \quad y' = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c$$

$$(c \text{ const}) \quad \text{es decir} \quad y' = -\frac{2}{a}(ax+b)^{-\frac{1}{2}} + c$$

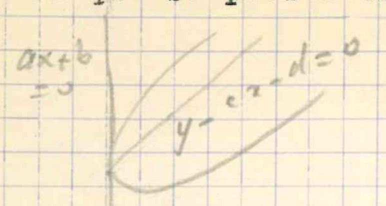
$$y = -\frac{2}{a}\,\frac{1}{a}\,\frac{(ax+b)^{1/2}}{1/2} + cx + d \qquad (d \text{ const})$$

$$= -\frac{4}{a^2}(ax+b)^{1/2} + cx + d \quad \text{y por tanto}$$

$$(y-cx-d)^2 = \frac{16}{a^4}(ax+b) \tag{47}$$

ecuación de segundo grado en x,y en la que los términos cuadráticos forman un cuadrado perfecto. Vemos así aue <u>las líneas extremales buscadas son parábolas</u> Más precisamente son <u>todas</u> las parábolas: en otras palabras al variar las 4 constantes arbitrarias a,b,c,d la (47) representa las

∞ parábolas, como es presumible a priori debido al número 4 en que se presentan las constantes arbitrarias, y como se ve




de la manera siguiente: para una parábola cualquiera , sea ax+b=0 la ecuación de su tangente paralela al eje y, y sea y-cx-d=0 la ecuación del diámetro que pasa por el punto de contacto de la misma.Entonces, la parábola pertenece al haz individualizado por esta última recta contada dos veces, y al par integrado por aquella tangente junto con la recta impropia, de forma que efectivamente su ecuación (al incluir una oportuna constante multiplicativa en a,b) se presenta en la forma (47).

También en este ejemplo,como en el tratado a p. 129-131, es claro que puede generalmente encontrarse una y una sola extremal que cumple con las condiciones a los límites consideradas.En efecto estas condiciones se traducen ahora en las de pasar por un dado punto P con una tangente dada p, y por otro punto Q con una tangente dada q (p.125) .Si P,p,Q,q son dados genéricamente se trata de encontrar una parábola que pase por dos puntos dados con tangentes dadas: es claro que existe una y una sola parábola en estas condiciones( cónica de la cual se conocen tres tangentes y los puntos de contacto de dos de ellas).

CASO DE UNA FUNCION DE MAS VARIABLES.- Aludiré brevemente a la manera de extender la ecuación de Euler al caso en que se trata de una función incógnita de más, diré de dos, variables. Considero , en lugar del intervalo $x_0\,x_1$ del eje x, una línea simple cerrada (es decir una línea cerrada que no se corte) $\gamma$ en el plano xy; en lugar de las f(x) de las páginas anteriores, las funciones z=f(x,y) que en la región R encerrada por $\gamma$ son continuas con sus derivadas parciales peimeras y segundas.Como condiciones a los límites para las f tenemos ahora las que sobre el contorno $\gamma$ (en cada punto del mismo) la función f tome valores prefijados. Se trata entonces de minimizar la integral

$$I\{f\} = \iint_R F(x,y,z,p,q)\,dx\,dy$$

.

siendo F una función continua con sus derivadas 1.as, p.e ~~y~~ 2.as, y 3.as de sus 5 argumentos: se entiende que z,p,q tienen que ser reemplazadas resp.te por

$$z= f(x,y) \; ; \; p= \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Para encontrar cond. necesarias, analogamente al caso ya conocido, parangonamos una función f(x,y) que resuelva el problema con otras

$$f(x,y) + \varepsilon\, \eta(x,y)$$

siendo $\varepsilon$ constante, y $\eta(x,y)$ una función <u>nula al contorno</u>, y continua con sus der. primeras y segundas en R. Entonces

$$I\{f+\varepsilon\eta\}$$

es una función de $\varepsilon$, $\Phi(\varepsilon)$: hay que imponer $\Phi'(0) = 0$,

es decir

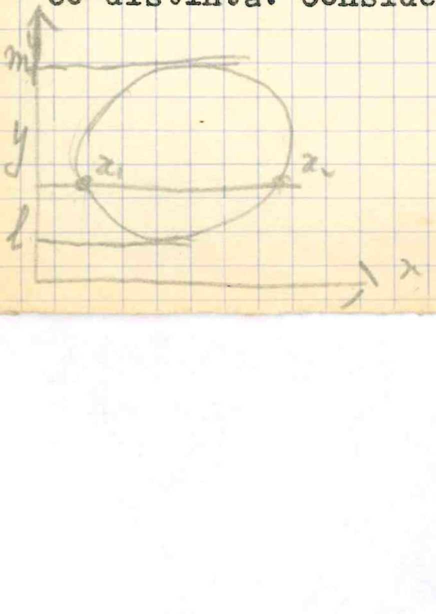
$$\left[\frac{d}{d\varepsilon}\iint_R F(x,y,f+\varepsilon\eta,\ f_x+\varepsilon\eta_x,\ f_y+\varepsilon\eta_y)\,dx\,dy\right]_{\varepsilon=0}=0$$

que puedo escribir

$$\iint_R (\eta F_z + \eta_x F_p + \eta_y F_q)\,dx\,dy = 0 \qquad (48)$$

Bajo el signo de integral se presentan términos en $\eta_x$, $\eta_y$

que conviene transformar(siempre análogamente a lo hecho en el caso ya conocido, pero ahora hay que actuar de manera un poco distinta. Considero (V figura)




$$\iint_R \eta_x F_p\,dx\,dy = \int_l^m dy \int_{x_1}^{x_2} \eta_x F_p\,dx =$$

15)

$$= \int_{l}^{l_1} dy \left\{ \left[ \eta F_p \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{\partial}{\partial x} F_p \, dx \right\}$$

(hemos efectuado una integración por partes en la integral con respecto a x) .-Hay que aclarar lo siguiente: como es claro hemos indicado con $F_x, F_y, F_z, F_p, F_q$ las derivadas parciales de la F con respecto a sus 5 argumentos: cuando imaginamos reemplazar z por f(x,y), p por $f_x(x,y)$ y q por $f_y(x,y)$ , la F viene a ser función compuesta de x,y : su derivada total con respecto a x la indico con ~~d/dx ( y no con~~ $\partial/\partial x$ ), ~~aunque se trata de derivada parcial~~.Lo mismo para ~~d/dy~~ $\partial/\partial y$.

Volviendo a la transformación de la integral, recordando que la $\eta$ es nula al contorno, & y escribiendo en lugar de la integral repetida una integral doble, como ya había al principio, tenemos

$$\iint_R \eta_x F_p \, dx\,dy = -\iint_R \eta \frac{\partial}{\partial x} F_p \, dx\,dy$$

Análogamente

$$\iint_R \eta_y F_q \, dx\,dy = -\iint_R \eta \frac{\partial F_q}{\partial y} \, dx\,dy$$

Por consiguiente la (48) se escribe

$$\iint_R \eta \left( F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_p - \frac{\partial}{\partial y} F_q \right) dx\,dy = 0$$

la cual subsiste para todas las $\eta$ consideradas. Podemos aplicar un Lema análogo al de p. 23 y concluir que necesariamente la f buscada cumple con la condición

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_p - \frac{\partial}{\partial y} F_q = 0 \qquad (49)$$

La ~~&&&~~ (49) es la ecuación diferencial de Euler para ~~&~~l caso actual. Se trata ahora de una <u>ecuación a derivadas parciales de segundo orden</u> en la función desconocida $z=f(x,y)$ ; DE! bido a que al formar p. e.

$$\frac{\partial}{\partial x} F_p$$

se introducen generalmente las derivadas parciales segundas de f.

<u>Ejemplos</u> .-

1) Sea

$$I\{z\} = \iint_R (p^2+q^2)\,dx\,dy$$

$$= \iint_R \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

(integral de Dirichlet). La correspondiente ec. de Euler es

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

es decir

$$\Delta_2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (50)$$

es decir la <u>ecuación de Laplace</u> , con la cual cumplen las llamadas <u>funciones armónicas</u> .(1)

En esta circunstancia estriba el llamado principio de Dirichlet, por el cual - hasta que no fueron expresadas algunas dudas sobre el rigor de tal procedimiento- se ~~&&&~~ ~~&&&&&&~~ consideró en pasado demostrada la posibilidad de resolver el llamado problema de Dirichlet, el cual consiste en buscar una función armónica en un dado recinto R, la cual sobre el contorno del mismo tome valores prefijados

(1) Ejemplos de f$^s$ armónicas. $z$ = const.; $z = ax+by+c$ (a, b, c, const). / Sigue p. 155 bis

El razonamiento era el siguiente: se consideran las funciones (sometidas, como lo sobrentendemos a ciertas restricciones cualitativas) que sobre el contorno toman los valores prefijados, y para cada una de ellas se forma la integral de Dirichlet (cuyo valor es obviamento no negativo). Al variar la función considerada f, se logra una clase de números no negativos $I\{f\}$. "Sea f la cunción que lleva al número mínimo m de tal clase" Dicha función cumple con la ecuación de Laplace, y luego es una función armónica que toma los dados valores al contorno . El hecho es que lo dicho entre comillas presupone la existencia de un mínimo dentro de la clase, lo que a priori no es seguro. Dicha clase tiene un límite inferior, pero no puede decirse sin más que sea un mínimo.

Como es sabido, con razonamientos parecidos, es decir que estriban en la hipótesis de la existencia de un mínimo o máximo, puede llegarse a absurdos: p. e. se demostraría que el número 1 es el máximo entero positivo, al observar que cada entero positivo n mayor que 1 no puede ser el máximo, debido a que entonces $m^2 > m$

---

Sigue de p. 155. Entre los polinomios cuadráticos homogéneos

$$ax^2+2bxy+cy^2$$

son armónicos los para los que $2a+2c=0$ , es decir

$$a(x^2-y^2)+2bxy$$

con a,b const. arbitrarias. P. e. para $a=1, b=0$ $x^2-y^2$ ; para $a=0, b=1$ $2xy$. -Otros ejemplos sencillos se logran al buscar una función armónica que resulte producto de una función de la sola x, sea h(x) por una de la sola y, sea g(y). la (50) viene a ser

$$g(y)\,h''(x)+h(x)\,g''(y)=0$$

de la cual se desprende que

$$\frac{h''(x)}{h(x)}=-\frac{g''(y)}{g(y)}$$

El valor común de los dos miembros no puede depender de y ni de x, y es luego una const. m. Si p. e. m es positivo resulta fácilmente

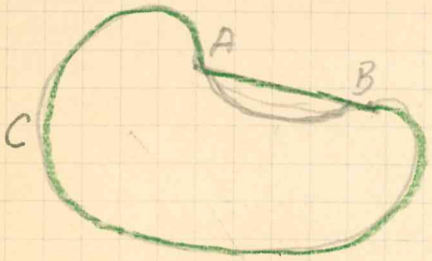
$$z=\left(Ae^{\sqrt{m}\,x}+Be^{-\sqrt{m}\,x}\right)\left(C\,\mathrm{sen}\sqrt{m}\,y+D\cos\sqrt{m}\,y\right)$$

con A, B, C, D constantes arbitrarias

Por la misma razón no pueden considerarse satisfactorias las demostraciones elementales con las cuales Steiner quería comprobar la llamada <u>propiedad isoperimétrica</u> del círculo es decir que, entre las líneas simples cerradas de dada longitud L, la que contiene el area máxima es el círculo.

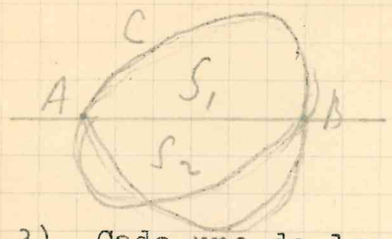
Como ejemplo de las demostraciones dadas por Steiner, he aquí la idea de una de tal tipo.

1) Se observa en primer lugar que cuando se realiza el máximo, el contorno C debe ser convexo (es decir el segmento AB que une dos puntos cualesquiera A, B del contorno C no puede contener puntos exteriores a C). Si en efecto no fuera así, si la cuerda



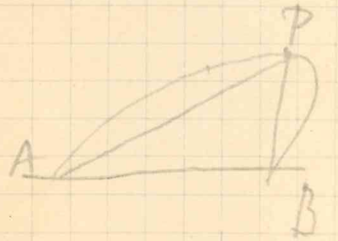

AB no es interior, reemplazando el contorno C por uno de los arcos AB y la cuerda AB se lograría un contorno menor que encerraría una area mayor. Alterando en una semejanza hasta que el contorno venga a igualar L, el area crecería, y tendríamos una línea de longitud L que encerraría una area mayor.

2) Si sobre el contorno C se fija un punto A, y se determina luego el punto B del contorno tal que los dos arcos AB tienen la misma longitud, decimos que las areas $S_1$ y $S_2$ encerradas entre cada uno de los dos arcos y la cuerda AB son iguales. En efecto,

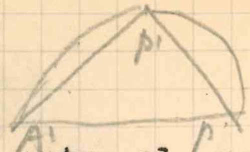



de no ser así, sea p.e. $S_1$ la mayor. Entonces se reemplaza $S_2$ por el area de la figura simétrica respecto a AB de la que encierra el area $S_1$. El contorno no varía, y el area crece.

3) Cada uno de los dos arcos AB ahora considerados es un semicírculo de diámetro AB. Esto se comprueba demonstrando que si P es un punto de uno de dichos arcos, el ángulo APB debe ser




recto. Supongamos así no sea; y construyase a parte un triángulo rectángulo A′P′B′, rectángulo en P′ tomando A′P′= AP y B′P′=BP. Se construye luego sobre A′P′ un arco igual al arco AP del contorno




C; y sobre B´P´un arco igual al BP.El arco A´P´B´ tiene la misma longitud del APB;pero la nueva area comprendida entre dicho arco y A´B´es mayor de la compren dida entre el arco ABB y la cuerda AB;porque ,de las tres partes de las que se compone, dos son iguales a las correspon dientes pero una es mayor(debido a que un triángulo rectángulo de catetos p, q es mayor de un triángulo no rectángulo com dos lados p, q). Luego completando por simetría la figura modificada, se obtendría otra con el mismo contorno, pero de area mayor.

A primera vista demostraciones así parecen satisfactorias, pero en realidad no lo son. La demostración no tiene valor mayor de la de p. 155 bis donde se comprobaba que el máximo número entero es 1. Aquí en realidad se comprueba que , si existe un contorno que brinde el máximo, debe ser una circun ferencia.Pero hasta no se demuestre que existe un contorno que brinde el máximo, la demostración no es conclusiva.

La propiedad isoperimétrica del círculo puede demostrarse de manera satisfactoria de otras maneras, p. e. demostrando que entre la longitud L y el area S determinados por una linea simple cerrada susbsiste la desigualdad

$$L^2 - 4\pi S \geq 0$$

y que el signo = rige únicamente en el caso del círculo(de modo pues que en todos los otros casos

$$S < \frac{L^2}{4\pi} < \text{area circulo}$$

2) Superficie de area minima. Sea dado en el espacio un contorno ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ simple cerrado $\Gamma$ que se proyecta (simplemente) ortogonalmente sobre el plano xy según la línea $\gamma$ de p. 149. Entre las superficies

$$z= f(x,y) \qquad (51)$$

que pueden extenderse dentro del contorno $\Gamma$ se busca la de area mínima (problema de Plateau, ya considerado al principio del curso, de un punto de vista distinto). Fijada la superficie (51) el area considerado es

$$I\{z\} = \iint_R \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy$$

Luego la ec dif de Euler viene a ser

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0$$

es decir si ponemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

$$r\sqrt{1+p^2+q^2} - p\,\frac{pr+qs}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + t\sqrt{1+p^2+q^2} - q\,\frac{ps+qt}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0$$

esto es

$$r(1+\cancel{p^2}+q^2) - \cancel{p^2 r} - pqs + t(1+p^2+\cancel{q^2}) - qps - \cancel{q^2 t} = 0$$

$$\boxed{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0} \qquad (52)$$

La (52) es la llamada ec a derivadas parciales de las superficies de area mínima : si una superficie (51) proporciona el area mínimo para un conveniente contorno trazado sobre la misma, necesariamente la función f tiene que ser una solución de la (52)

Indiquemos algunas soluciones de la ec. (52). P. e. busquemos las superficie de area minina que son de rotación, p. e. alrededor del eje x. A pesar del planteo ahora un poco distinto de la cuesión(debido a la distinta naturaleza de los contorno allí considerados) es presumuble que entre las soluciones se encuentren (v. p. e. p.41, etc) los catenoides engendrados por la rotación de una catenaria que tenga el eje x como directriz alrededor de este mismo eje. Efectivamente veremos que no existem soluciones distintas de esta.

Sea

$$\sqrt{y^2+z^2}=\varphi(x)$$

(línea meridiana en el plano xy : $y=\varphi(x)$)

la ecuación de una sup. de rotación alrededor del eje x, es decir

$$z=\sqrt{\varphi^2(x)-y^2}. \qquad (53)$$

Tratemos de determinar la función desconocida $\varphi(x)$ de manera que la función (53) sea una solución de (52). Pues bien,

$$p=\varphi\varphi'(\varphi^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\ ; \quad q=-y(\varphi^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$r=(\varphi'^2+\varphi\varphi'')(\varphi^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}-\varphi^2\varphi'^2(\varphi^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$s= \qquad \varphi\varphi' y(\varphi^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$t=\quad -(\varphi^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \quad -y^2(\varphi^2-y^2)^{-3/2}$$

Reemplazando en (52)

$$\left(1+\frac{y^2}{\varphi^2-y^2}\right)\left\{\frac{\varphi'^2+\varphi\varphi''}{\sqrt{\varphi^2-y^2}}-\frac{\varphi^2\varphi'^2}{(\varphi^2-y^2)^{3/2}}\right\}+$$

$$2\varphi^2\varphi'^2y^2\frac{1}{(\varphi^2-y^2)^{5/2}}+$$

$$+\left(1+\frac{\varphi^2\varphi'^2}{\varphi^2-y^2}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{\varphi^2-y^2}}-\frac{y^2}{(\varphi^2-y^2)^{3/2}}\right)=0$$

es decir

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi^2-y^2}}\left(\varphi'^2+\varphi\varphi''-1\right)+\frac{1}{(\varphi^2-y^2)^{3/2}}\left[y^2\varphi'^2+y^2\varphi\varphi''-\varphi^2\varphi'^2-\varphi^2\varphi'^2-y^2\right]$$

$$+\frac{1}{(\varphi^2-y^2)^{5/2}}\left(-\varphi^2\cancel{\varphi'^2}y^2+2\varphi^2\cancel{\varphi'^2}y^2-\varphi^2\cancel{\varphi'^2}y^2\right)=0$$

o, multiplicando todo por $(\varphi^2-y^2)^{3/2}$

$$\varphi^2\varphi'^2+\varphi^3\varphi''-\varphi^2-y^2\varphi'^2-\cancel{y^2\varphi\varphi''}+\cancel{y^2}+y^2\varphi'^2+\cancel{y^2\varphi\varphi''}$$

$$-2\varphi^2\varphi'^2-\cancel{y^2}=0 \quad \text{y dividiendo por } \varphi^2$$

$$\boxed{-\varphi'^2+\varphi\varphi''=1}$$

Esta ec. dif. de 2º orden es la misma (16) de p. 40 que (pp. 35, 37, 39) se integró en

$$\boxed{\varphi=b\,\mathrm{ch}\,\frac{x-a}{b}} \qquad (a, b \text{ const arb.})$$

Queda así comprobado lo enunciado a p. 159

Para indicar un ejemplo nuevo de superficie de area mínima busquemos aquellas que son regladas, y más precisamente son <u>conoides rectos</u>, es decir cuyas generatrices son perpendiculares a una recta fija(eje). que adoptamos como eje z en un sistema cartesiano ortogonal. La ecuación de un conoide recto en estas condiciones es

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{54}$$

siendo $\varphi$ una función arbitraria de y/x) ( porque las ecuaciones de una recta perpendicular al eje z son del tipo z= a, y =bx, con a, b const; se obtiene un conoide recto al suponer a,b variables y funciones de un mismo parámetro,p. e. de b, de modo pues que $a = \varphi(b)$; se logra la ecuación de la superficie eliminando el parámetro b entre las dos ecuaciones

$$z = \varphi(b); \; y = bx$$

y el resultado de la eliminación es precisamente la (54) ). Tratemos por lo tanto de determinar la $\varphi$ de manera tal que se cumpla (52). Ahora

$$p = -\frac{y}{x^2}\varphi' \qquad q = \frac{1}{x}\varphi'$$

$$r = \frac{2y}{x^3}\varphi' + \frac{y^2}{x^4}\varphi''$$

$$s = -\frac{\varphi'}{x^2} - \frac{y}{x^3}\varphi''; \quad t = \frac{\varphi''}{x^2}$$

de forma que la (52), oportunamente reducida viene a ser

$$2y\varphi' + \frac{x^2+y^2}{x}\varphi'' = 0$$

Llamemos provisionalmente t al argumento y/x del cual depende la función $\varphi$ .Esta tiene por lo tabto que satisfacer a la ecuación diferencial de 2º orden

$$2t\varphi' + (1+t^2)\varphi'' = 0$$

Ahora bien[1]

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} + \frac{2t}{1+t^2} = 0$$

se integra en

$$\log \varphi' + \log(1+t^2) = \log A$$

(A const.) es decir

$$\varphi' = \frac{A}{1+t^2}$$

y luego

$$\varphi = A \operatorname{arctg} t + B$$

siendo B otra constante arbitraria.Por lo tanto la ecuación (54) es

$$z = A \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + B \qquad (55)$$

Desplazando el origen a lo largo del eje z la constante B puede hacerse igual a cero:la ecuación

$$z = A \operatorname{arc\,tg} (y/x) \qquad (56)$$

representa como es claro un helicoide conoide recto de eje z (superficie de la escalera de caracol, lugar de las rectas perpendiculares bajadas sobre el eje z desde los varios puntos de una hélice que tiene el eje z como eje: en efecto si la hélice tiene ecuaciones paramétricas x=Rcosu, y=Rsen u, z =Au, la perp al eje z desde el punto de par. u tiene ecuaciones z= Au, y/x = tg u, y eliminando u resulta precisamentela ec (56) . Encontramos así el helicoide conoide recto como sup de area mínima, y antes bien como la única sup de area mínima que es al mismo tiempo un conoide recto.

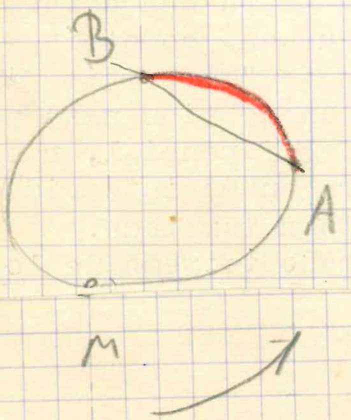
[1] Para $\varphi \neq$ const.

× que suponemos además distinta: supporremo altresì
la curvatura $K(s)$ costantemente distinta da zero,

La segunda parte del curso será dedicada a una intro ducción a la geometría diferencial de las superficies, es decir teoría de las superficies estudiada con el auxilio del cálculo diferencial.

En geom. diferencial , &&&&& se estudian muy a menudo propiedades <u>locales</u> de curvas, superficies, etc., es decir propiedades que dependen de un entorno del punto que se considera, y no de la figura en su integridad. Así p.e. en la teoría de las curvas, el concepto más sencillo de naturaleza diferencial, él de la recta tangente, o de curvatura: sobre ellos no tiene ningún influjo la forma de la curva en un punto alejado del punto que se estudia. Lo mismo para el plano tangente de una superficie en un punto. Es una circunstancia muy distinta de la que se presenta en la geometría algebraica (estudio e las curvas, superficies, etc algebraicas, es decir definidas por ecuaciones algebraicas, logradas al anular polinomios: $F(x,y)=o$, $F(x,y,z)=0$) donde las figuras se estudian en su integridad y no localmente: p. e. ya en la noción de orden p.e. de una curva plana algebraica C, cuando se habla del orden como del número de las intersecciones con una recta genérica del plano: esas intersecciones pueden estar muy lejos entre sí. Lo dicho no quita que en geometría diferencial a veces se consideran cuestiones de "geometría diferencial en grande" es decir tales que, aunque tienen su punto de salida en nociones de naturaleza diferencial, recién se plantean al considerar una figura en su integridad. Indico un ejemplo de cuestiones de esta naturaleza.

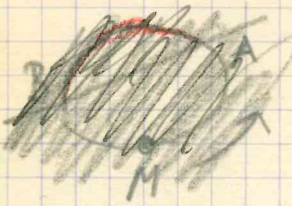
El mismo consiste en el llamado <u>teorema de los cuatro vértices</u>&& relativo a una curva plana, y más precisamente a un <u>óvalo</u> ,es decir una línea (simple) cerrada tal que ninguna recta la corte en más de dos puntos. Supondré que esté dotado de tangentes variables con& continuidad, y aún más que &&&&&&&&&&&&&& a lo largo de la misma, al considerar x,y (coord cart ort) como funciones del arco& s, las funciones x(s), y(s) tengan derivadas segundas continuas (de manera que la curvatura k es también función continua de s) ~~[illegible]~~ los puntos de la curva son todos regulares ($dx/ds$, $dy/ds$ no contemporáneamente nulos.) Una elipse nos da un ejemplo de óvalo, pero existen por supuesto óvalos que no son elipses. Agrego previamente que sobre una línea L un punto P se llama un vértice cuando en P la curvatura tiene un máximo o un mínimo relativo, o eve


B
A
M

tualmente un punto donde aún siendo $dk/ds = 0$ no se averigue ni máximo ni mínimo: diré un valor estacionario, para cubrir todas esta evetualidades. P. e. en un vértice de una elipse según la acepción común, tenemos efectivamente un máximo o un mínimo: cada punto de un círculo ( $k=$ const. y luego $dk/ds = 0$) hay que considerarlo como un vértice según la definición dada.

El teorema aludido expresa que en las hipótesis hechas sobre cada óvalo existen por lo menos cuatro vértices. La noción de vértice, de acuerdo con la def. dada, es estrictamente local: sin embargo el teorema se refiere a toda la curva considerada en su conjunto. Hé aquí la demostración.

. Hay que tener presente que se debe comprobar la existencia de por lo menos 4 vértices: si se tratara de dos el asunto es más facil: en efecto, al variar $s$ entre $0$ y $g$, donde llamo $g$ a la longitud total del óvalo, la función $k(s)$, continua, tiene un máximo y un mínimo,(1) y en cada uno de ellos $dk/ds=0$. Sean por lo tanto $A, B$ dos vértices, cuya existencia ya resulta comprobada: sean $x=x(s)$, $y=y(s)$ las ecuaciones paramétricas (en coord cart ort) ,siendo el arco $s$ contado a partir desde luego de un punto fijo $M$ (de manera que $x(g)=x(0)$, $y(g)=y(0)$ ). Supongo, si posible, que no existan otros vértices: entonces en ninguno de los arcos $AB$, excluyendo los extremos la $k'=dk/ds$ se anula , y por lo tanto conserva en el interior de cada uno de los dichos arcos un signo constante. Fijo las ideas suponiendo el óvalo recorrido en el sentido de la flecha, y que máximo y mínimo tengan lugar resp.te en los puntos $A$ y $B$: entonces siendo $k$ máximo en $A$ y mínimo en $B$, y $k(s)$ por lo visto monotona en el arco colorado, no podrá ser que decreciente, de forma que $k' < 0$ en el arco colorado: análogamente $k' > 0$ en el otro arco.




Supongo ahora tomar como eje de las $x$ la recta $AB$ (que por hipótesis, al tratarse de un óvalo no corta la curva en otros puntos): entonces uno de los dos arcos, digamos el colorado está "por arriba" del eje $x$, y el otro por debajo. En el primero $y$ es positiva, en el segundo negativa. La integral

$$\int_0^g y(s)\, k'(s)\, ds$$

extendida del origen $M$ de los arcos ($s=0$) al

(1) si no es constante (pero entonces el teor. es trivial)

mismo $(s=g)$



va entonces a llevarnos a una contradiccón.

En efecto, ~~xxxxxxxxxx~~ tomo por simplicidad M=A, y && llamo b al valor del arco en B. Entonces

$$\int_0^g y(s)\,k'(s)\,ds = \int_0^b y(s)\,k'(s)\,ds + \int_b^g y(s)\,k'(s)\,ds$$

En el segundo miembro, en la primera integral el factor y(s) es positivo, el segundo $k'(s)$ negativo; en la segunda integral el primer factor es negativo y el segundo positivo. Por lo tanto el producto es siempre negativo; ambas integrales son negativas. El primer miembro es por consiguiente negativo.

Razonando de otra manera vamos a concluir un resultado distinto, es decir que la integral del primer miembro es nula. En efecto, siendo s el arco tenemos $ds^2 = dx^2 + dy^2$ es decir && $x'^2+y'^2 = 1$ : derivando con respecto al arco tenemos

$x'x'' + y'y'' = 0$ Por lo tanto $x'', y''$ son proporcionales a $-y', x'$: llamando m el coef de proporcionalidad, escribo

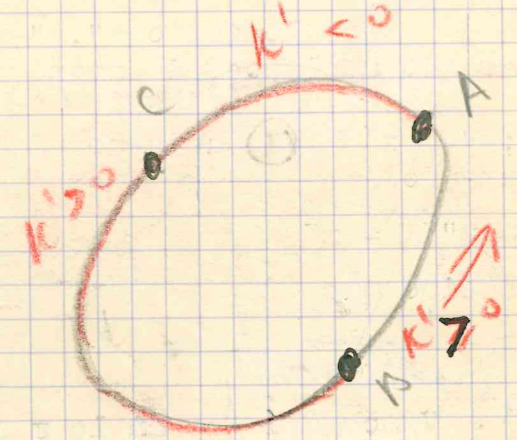
$x'' = -my'$ ; $y'' = mx'$ (1) Queda por determinar m: ahora cuadrando y sumando

$$x''^2 + y''^2 = m^2$$

Por otra parte es sabido que

$$x''^2 + y''^2 = \frac{1}{(\text{radio curv.})^2} = k^2$$

de forma que $m = \pm k$. Más precisamente podemos decir que en esta igualdad hay que tomar el mismo signo en todos los puntos de la curva: en efecto en ningún punto de ésta pueden anularse las dos derivadas $x'(s)$, $y'(s)$ al mismo tiempo ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~, de manera que de una por lo menos de las (1) puede siempre sacarse la m como &&&&&&&& cociente de dos funciones de s, ambas &&&&&&&&& y&&&por&&lo&&tanto&&uniforme&y&continua&& uniformes y continuas, y es por lo tanto función uniforme y continua de s. Lo mismo ocurre de k(s), y luego la razón $m(s)/k(s)$, considerada como función de s (el denominador es siempre distinto de cero) es una función continua: por lo visto vale 1 o -1: luego, debido a la continuidad tiene &&&&&&& constantemente uno de estos dos valores. Luego, puesto $\varepsilon = \pm 1$, tenemos:


k' < 0
C
A
k' > 0
D

$$y'' = -\varepsilon k x' \quad , \quad x'' = \varepsilon k y'$$

Pues bien, integrando por partes

$$\int_0^g y k' ds = [y k]_0^g - \int_0^g y' k \, ds$$

$y(0)k(0) = y(g)k(g)$

En el segundo miembro el primer sumando es nulo porque $y(0)$ ~~...~~ $=$ $y(g)$ ~~...~~ El segundo sumando también es nulo porque

$$\int_0^g k y' ds = -\varepsilon \int_0^g x'' ds = -\varepsilon (x'(g) - x'(0)) = 0.$$

Hemos llegado así a una contradicción. Esto quiere decir que partimos de una hipótesis equivocada: sobre uno por lo &&&&&& menos de los dos arcos AB existe un punto donde $k' = 0$.

Queda así asegurada la existencia de un tercer vértice C. Sin embargo hay que dar un paso más pra llegar al número de 4.

Para fijar las ideas supondré que es tercer vértice C &&&& esté en el arco AB colorado: en el caso opuesto se razo&&&&nería de manera análoga.

(si no hay más vértices)

Supongamos por lo tanto (para demostrar que no es posible) que existan <u>tan sólo</u> los tres vértices A,B,C . Si en el arco AC (en el interior del cual por hipótesis $k'$ no es nulo) y en el arco CB (id. id) el signo de $k'$ fuera el mismo, podría repetirse el razonamiento de arriba, y se llegaría a una contradicción. Por consiguiente en dichos dos arcos $k'$ tiene signos opuestos: será negativo en el primero y positivo en el segundo. Pero, como en el caso anterior $k'$ es positivo en el arco BA. Esto significa que al recorrer la curva en el sentido de la flecha, $k'$ sería sí nulo en B, pero positivo antes de B y después de B: por lo tanto no podría& $k(s)$ tener un mínimo en B

Llegamos así a un absurdo, lo cual comprueba la existencia de por lo menos 4 vértices.

Aunque, como lo dijé, nos ocuparemos de la teoría de las superficies, recuerdo que en la teoría de las curvas en el espacio se demuestran las llamadas fórmulas de Frenet. Sea la curva C representada paramétricamente (coord. cart ort.) por

$$x = x(u),\ y = y(u),\ z = z(u) \qquad ; (1)$$

$u$ es un parámetro variable en cierto intervalo; las tres funciones en los segundos miembros son analíticas (es decir desarrollables en series de Taylor alrededor de cada valor de $u$). Así a menudo se supone, aunque generalmente es suficiente hacer hipótesis menos restrictivas, p. e. que admiten derivadas terceras continuas. Suponemos considerar un arco regular, es decir que en ningún punto del mismo se anulen al mismo tiempo las tres derivadas primeras.

En lugar de las (1) se puede considerar una fórmula vectorial que las incluye, considerando el vector $\bar{x}$ que va del origen al punto que recorre la curva: es un vector cuyas componentes son dadas por las (1), y puede considerarse como un vector función de la variable $u$

$$\bar{x} = \bar{x}(u) \qquad (2)$$

La única ecuación (2) es una manera abreviada para escribir las (1)

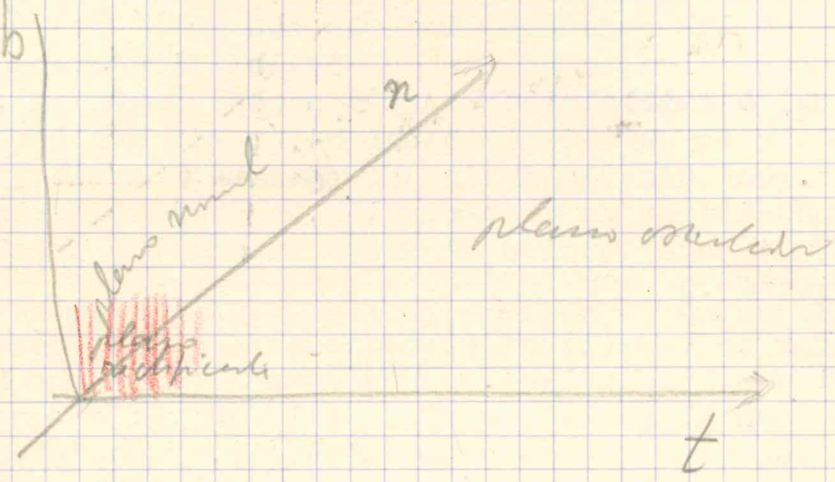
En un punto P de la curva consideramos la recta tangente t y el plano osculador $\tau$. Se considera entonces cierta terna de vectores unitarios (es decir de módulo, o longitud 1) dos a dos ortogonales. (Recuerdo que un vector unitario también llámase versor). El primero de ellos está dirigido a lo largo de la tangente t, y lo llamaré T. Más precisamente, fijado sobre la curva un sentido de los arcos s crecientes, tomamos el sentido de T de acuerdo con el mismo, lo que determina completamente T. Las componentes de t resultan

$$\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}$$

Más concisamente

$$T = \frac{d\bar{x}}{ds}$$

(en el segundo miembro aparece la derivada de un vector $\bar{x}$ funciñon de la variable $u$, la cual puede definirse directame


b
n
plano normal
plano osculador
plano rectificante
t

aplicando a los vectores funciones de una variable la noción de derivada

$$\lim_{h=0} \frac{\bar{x}(\vartheta+h) - \bar{x}(\vartheta)}{h} \quad ;$$

el numerador figura una diferencia de vectores, es decir un vector, etc )

La terna de versores se completa considerando uno de ellos, N a lo largo de la normal principal (recta &&&&&&&&&&&&n perpendicular a la tangente t en P y situada en el plano osculador, es decir intersección del planonormalen P -plano perp. en P a la recta tangente- con el plano osculador en P) y el otro, B, a lo largo de la binormal (recta por P perpendicular al plano osculador: la misma por supuesto, siendo perpendicular a todas las rectas de este plano que pasan por P es en particular perpendicular a la tangente, y luego está en el plano normal en P) b. Las tres rectas t,n,b dos a dos perpendiculares son aristas de un triedro trirectángulo, cuyas caras son :una (tn) el plano osculador, otra (nb) el plano normal,;la tercera, tb llámase el plano rectificante.

Para determinar completamente los versores N,B, hay que tener en cuenta el sentido.Esto puede hacerse de la manera siguiente. En primer lugar, si en P tomamos un plano tangente(es decir pasante por la recta tangente) pero distinto del osculador, en proximidad de P la curva queda toda por una misma parte de ese plano. En efecto, sea ,indicando con X,Y,Z las&& coordenadas corrientes,

$$a(X-x) + b(Y-y) + c(Z-z) = 0$$

la ecuación de dicho plano λ Como las ecuaciones de la tangente t son

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'} \qquad \left(\text{ponemos } x' = \frac{dx}{du}, \text{ etc.}\right)$$

el hecho que el plano pasa por t equivale a decir que los coeficientes a,b,c cumplen con

$$ax' + by' + cz' = 0 \qquad (2)$$

En cambio el hecho que ese plano no es osculador se traduce en

$$ax'' + by'' + cz'' \neq 0 \qquad (3)$$

En efecto el plano osculador contiene el punto x,y,z y los de coordenadas homogéneas x', y', z', 0 ; y x", y", z", 0: && los dos &&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& primeros&&&&&&&&&&& están en el plano considerado: por lo tanto éste no debe contener el tercero, lo que (al imaginar la ecuación del plano en coord homogéneas) lleva precisamente a la (3). Ahora bien la distancia de un punto $M(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ de la curva del plano $\lambda$ se logra al escribir la ecuación del plano en &la llamada forma normal, substituyendo luego las coordenadas& corrientes por las de M: esa distancia es por lo tanto

$$\delta = \frac{a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

(el signo del radical depende de la orientación del plano $\lambda$ y es por lo tanto independiente de la elección del punto M). El signo que resulta para la distancia es el mismo para todos los puntos que se encuentran por una misma parte del plano $\lambda$, y varía al atravesar el plano . Ahora bien, al considerar las funciones x,y,z de u tenemos (puesto $h=\Delta u$)

$$\Delta x = hx' + \frac{h^2}{2}x'' + \varepsilon_1\ ,\quad \Delta y = hy' + \frac{h^2}{2}y'' + \varepsilon_2$$

$$\Delta z = hz' + \frac{h^2}{2}z'' + \varepsilon_3$$

siendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ infinitésimos de tercer orden con respecto a h. Luego

$$\delta = \frac{h(ax'+by'+cz') + \frac{h^2}{2}(ax''+by''+cz'') + \varepsilon}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{h^2}{2}\,\frac{(ax''+by''+cz'')}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \varepsilon$$

siendo $\varepsilon$ un inf.mo de tercer orden. El signo de $\delta$ depende por lo tanto únicamente del signo de

$$ax''+by''+cz''$$

cantidad distinta de cero de acuerdo con (3): se trata de una camtidad independiente de h, lo que comprueba lo dicho.

En particular , si tomamos el plano rectificante, la curva queda en proximidad del punto considerado P por una misma parte de ese plano: tomamos la normal principal positiva (la normal principal es precisamente normal al pl. rect) dirigida hacia el semiespacio donde está la curva. Esto fija el sentido del versor N (1). Por fin, el sentido de b, es decir de B se fija al pedir que el triedro tnb sea orientado como el de los ejes xyz, es decir, como generalmente se conviene, en sentido directo(ejes x,y,z couperpnibles a los dedos pulgar, índice, medio de la mano derecha, o- lo que da lo mismo- medio,indice, pulgar de la izquierda).

Siendo así completamente determinados los tres versores T, N, B, las tres fórmulas de Frenet( o de Frenet- Serret) tienen el significado siguiente.Cada otro vector puede representarse como una combinaciñon lineal de esos tres( es decir es completamente individualizadps por sus componentes paralelas a los tres T,N.B).En particular esto rige de los vectores derivados de esos tres con respecto al arco.Las fórmulas son las siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{ds} = \dfrac{N}{\rho} \\[2ex] \dfrac{dN}{ds} = -\dfrac{T}{\rho} - \dfrac{B}{\tau} \\[2ex] \dfrac{dB}{ds} = \dfrac{N}{\tau} \end{cases}$$

En estas fórmulas $\rho$, $\tau$ indican respectivamente los radios de primera y de segunda curvatura, o radios de flexión y torsión.Recuerdo que la curvatura en P $1/\rho$ es el límite de la razón entre el ángulo de la tangente en P y de la tangente en un punto próximo $P_1$ de la misma curva y el arco $PP_1$, cuando $P_1$ tiende a P, tomando ese límite constantemente en valor absoluto( de manera que $\rho$ nunca es negativo). La torsión en P $1/\tau$ se define de manera análoga, al considerar el ángulo de los planos osculadores en $P,P_1$ en lugar ~~del~~ ángulo entre las tangentes , con la variante que se le

(1) Por lo tanto el sentido de N no depende del sentido en que se miden sobre la curva los arcos positivos, a diferencia de lo que pasa para el vector T.

En cuanto a B, es claro que ,lo mismo como T, su sentido varía con él de los arcos positivos.

atribuye un signo determinado, como se puntualizará a continuación.

Es claro entretanto que a las ~~&&&&&&&&&~~ fórmulas de Frenet en lugar de la forma vectorial de arriba puede darse forma cartesiana al introducir las componentes de cada uno de los tres versores T, N, B según los ejes x, y, z, o – lo que da lo mismo – al introducir los cosenos directores de las tres rectas orientadas t, n, b :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Recta | t | cosenos direct. | $\alpha, \beta, \gamma$ |
| " | n | " " | $\xi, \eta, \zeta$ |
| " | b | " " | $\lambda, \mu, \nu$ |

Entonces es claro que las fórmulas de Frenet se escriben:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{\rho}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\eta}{\rho}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\zeta}{\rho}$$

$$\frac{d\xi}{ds} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{\tau}, \quad \frac{d\eta}{ds} = -\frac{\beta}{\rho} - \frac{\mu}{\tau}, \quad \frac{d\zeta}{ds} = -\frac{\gamma}{\rho} - \frac{\nu}{\tau}$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\xi}{\tau}, \quad \frac{d\mu}{ds} = \frac{\eta}{\tau}, \quad \frac{d\nu}{ds} = \frac{\zeta}{\tau}$$

Ahora bien, al tomar como parámetro u el arco s tenemos $x' = \alpha$ y análogas. Las fórmulas de la primera línea dan entonces

$$x'' = \frac{\xi}{\rho}, \quad y'' = \frac{\eta}{\rho}, \quad z'' = \frac{\zeta}{\rho}$$

y ~~las demas~~ derivando y teniendo en cuenta (las de la 2ª línea

$$x''' = \frac{\xi'}{\rho} - \frac{\xi\rho'}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}\left\{-\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{\tau} - \frac{\xi\rho'}{\rho}\right\}$$

y análogas. Por lo tanto el determinante

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

, reemplazando vale

$$\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\xi}{\rho} & \frac{\eta}{\rho} & \frac{\zeta}{\rho} \\ \cancel{-\frac{\alpha}{\rho}}-\frac{\lambda}{\tau}-\cancel{\frac{\xi\rho'}{\rho}} & \cancel{-\frac{\beta}{\rho}}-\frac{\mu}{\tau}-\cancel{\frac{\eta\rho'}{\rho}} & \cancel{-\frac{\gamma}{\rho}}-\frac{\nu}{\tau}-\cancel{\frac{\zeta\rho'}{\rho}} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\rho^2\tau}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}^{(1)} = -\frac{1}{\rho^2\tau}$$

Luego

$$\frac{1}{\tau} = -\rho^2\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Esta fórmula tiene un caracter muy distinto de la que expresa la primera curvatura, la cual(siempre al tomar como parámetro u el arco s) se logra al escribir

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$$

en la forma $\rho^2(x''^2+y''^2+z''^2)=1$ de manera que

$$\rho^2=\frac{1}{x''^2+y''^2+z''^2} \qquad (5)$$

---

(1) Hay que tener presente que este determinante vale 1.En efecto si tenemos tres rectas dos a dos ortogomales con cos dir. $a_{11}, a_{12}, a_{13}; a_{21}, a_{22}, a_{33}; a_{31}, a_{32}, a_{33}$, las condiciones de ortogonalidad enseñan que el cuadrado del determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ vale uno: por consiguiente el mismo det.te vale $\pm 1$ : si el triedro trirect. formado por las tres rectas es directamente igual al xyz tenemos el valor +1, y el valor -1 en el caso opuesto.

La (5) no permite despejar racionalmente $\rho$, sino sólo su cuadrado: por esto se convino de tomar $\rho$ siempre positivamente. En cambio (4) expresa la $\tau$ con un signo perfectamente determinado.

El signo de la torsión en un punto tiene un significado geométrico. Podría tenerse la duda que dependa del sentido en que se cuentan positivamente los arcos, debido a que el mismo se tuvo en cuenta en algunas definiciones. Sin embargo no es así, como resulta observando que en la tercera fórmula de Frenet en forma vectorial $dB/ds = N/\tau$ , al invertir dicho sentido B cambia, y luego $dB/ds$ no cambia signo; lo mismo tiene que ocurrir en el segundo miembro: en esto N no cambia signo y por lo tanto $\tau$ queda invariado. Esto comprueba que efectivamente ese signo tiene que tener un significado intrínseco relacionado con la curva.

Consideremos en primer lugar, para buscarlo , una hélice circular, representada por las ecuaciones paramétricas

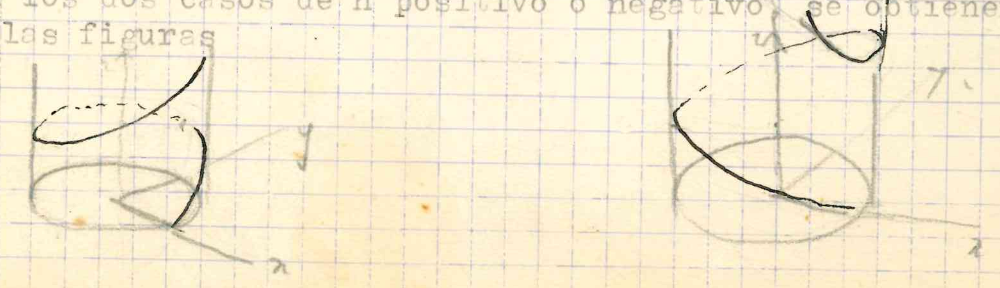
$$x = R\cos u, \quad y = R \operatorname{sen} u \quad ; z = hu$$

siendo R,h dos constantes, la primera de las cuales se supone positiva . Siendo

$$x^2 + y^2 = R^2$$

es claro que la helice está trazada sobre el cilindro circular de radio R que tiene como eje el eje z. La helice es la trayectoria de un punto que gira uniformemente alrededor del eje z mientras su proyección ortogonal sobre el mismo va desplazándose también uniformemente. Para $u=0$ tenemos el punto $(R,0,0)$: si h es positivo, el punto sube al crecer de u(tiempo); si h es negativo el punto baja. Cuando el punto da una vuelta entera, $u = 2\pi$, y $z = 2\pi h$ : esta cantidad, tomada en valor absoluto, es el llamado paso de la helice, mientras que se dice paso reducido a $|h|$ , desplazamiento vertical correspondiente al giro de un radian.

En los dos casos de h positivo o negativo, se obtienen resp te las figuras



En el primer caso un observador que mire a la curva desde fuera del cilindro la ve subir hacia la derecha, y, si es que la mira desde el interior del mismo cilindro, la ve subir hacia la izquierda. No existe acuerdo completo acerca de la manera de llamar esa helice: algunos la llaman derecha, otros izquierda, según que se refieren al primero o segundo observador. Pasando a la segunda helice lo que era derecha viene a ser izquierda y viceversa. Blaschke propuso de llamar a los dos tipo respec.te tipo <u>vid</u> y <u>tipo lúpulo</u> debido a que en esas dos plantas se encuentran resp.te el primer y el segundo tipo. Yo las llamo resp.te helice <u>derecha</u> e <u>izquierda</u>(es decir me refiero al observador desde fuera: si se coloca el cilindro al revés, la helice sigue siendo derecha)

Es sabido que la helice corta a las infinitas tangentes del cilindro bajo un mismo ángulo(p. e. porque el movimiento helicoidal que deja desplazar la helice sobre sí misma lleva generatrices en generatrices, y el dicho ángulo queda invariado), y que por lo tanto al desarrollar el cilindro sobre un plano la helice se dispone según infinitos segmentos paralelos cuyos extremos están situados sobre las dos posiciones que en el desarrollo corresponden a la generatriz a lo largo de la cual se corta el cilindro. La helice derecha e izquierda corresponden a los dos desarrollos

suponiendo que la página corresponda al exterior del cilindro.

Si queremos calcular las dos curvaturas de la helice considerada, tenemos que preparar la representación paramétrica con respecto ~~[illegible]~~ al ~~[illegible]~~ arco

Ahora $\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = R^2+h^2.$

Luego $ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2 = (R^2+h^2)\,du^2$

Tomamos

$$s = \sqrt{R^2+h^2}\;u$$

Entonces, si pongo $p = \sqrt{R^2+h^2}$ tenemos

$$x = R\cos\frac{s}{p}, \quad y = R\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{p} \qquad z = \frac{hs}{p}$$

$$x' = -\frac{R}{p}\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{p}, \quad y' = \frac{R}{p}\cos\frac{s}{p} \qquad z' = \frac{h}{p}$$

$$x'' = -\frac{R}{p^2}\cos\frac{s}{p}, \quad y'' = -\frac{R}{p^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{p} \qquad z'' = 0$$

$$x''' = \frac{R}{p^3}\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{p}, \quad y''' = -\frac{R}{p^3}\cos\frac{s}{p} \qquad z''' = 0$$

Luego

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{R^2}{p^4} \quad ; \quad \rho = \frac{p^2}{R}.$$

$$\frac{1}{\tau} = -\frac{\rho^4}{R^2}\,\frac{h}{p}\,\frac{R^2}{p^5}\left(\cos^2\frac{s}{p} + \mathrm{sen}^2\frac{s}{p}\right) = -\frac{h}{p^2}$$

Luego

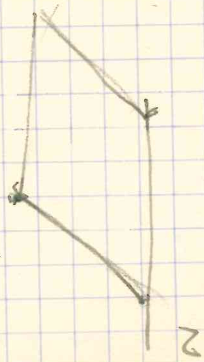
$$\boxed{\rho = \frac{R^2+h^2}{R} \;;\; \tau = -\frac{R^2+h^2}{h}}$$

Estas fórmulas ponen de relieve que $\rho$ y $\tau$ tienen un mismo valor en todos los puntos de la curva, lo que geométricamente

Entonces

$$x = R\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\,,\quad y = R\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\,,\quad z = \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\,s$$

$$x' = -\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}$$




+ el vector N es ∥ al que une O con la proy. ortogonal de (x y z) sobre el plano xy. Lo que comprueba lo dicho.

es claro a priori, debido a la posibilidad de desplazar con un movimiento helicoidal la helice a lo largo de sí misma, de manera que un punto de la curva puede llevarse a cualquier otro de la misma. En otras palabras la helice tiene constantes las dos curvaturas. Sin embargo, lo que más nos interesa en este momento es que el signo de la torsión depende del signo de h, y precisamente es el opuesto del signo de h. Por consiguiente la torsión es negativa para las helices derechas y positiva para las izquierdas.

Los resultados podrían oportunamente extenderse a las demás curvas alabeadas. Observo en primer lugar que en un punto P de la helice la normal principal es la perpendicular llevada por el mismo al eje de la helice (es decir, eje del cilindro que contiene la helice): en efecto los valores de $\xi, \eta, \zeta$ son proporcionales a x", y", z" y (p. 191) z"=0; ~~la normal principal es perpendicular al eje~~ $x'' : y'' = -x : -y$, es decir

Imaginemos ahora las perpendiculares de los puntos P de la helice al eje como escalones de una escalera de caracol: es claro que quien suba la escalera tiene el "eje de la escalera":

a la izquierda para una helice derecha, es decir $\tau < 0$
a la derecha " " " izquierda esto es $\tau > 0$

Estas propiedades ya pueden considerarse en relación con dos escalones. Por lo tanto si tomamos en el espacio dos rectas r, s, y su perpendicular común n, podemos imaginar de colocar la figura de manera que n sea vertical y concebir r, s como escalones de una escalera de eje n que los una con una rotación menor de un ángulo recto: entonces podemos llamar al par de retas r, s un par derecho o resp.te izquierdo de acuerdo con que para quien suba la escalera el eje esté a la derecha o bien a la izquierda. La definición tiene sentido con tal que r, s no sean ortogonales entre sí. Por lo tanto la torsión de una helice es negativa o positiva, según que dos normales principales próximas constituyen un par izquierdo o derecho.

Pues bien, en esta última formulación podría comprobarse que el resultado sigu e subsistiendo para las demás curvas alabeadas: por lo tanto la torsión de una curva alabeada e un punto P es negativa o positiva según que la normal principal en P y aquella en otro punto próximo a P constituyen un par izquierdo o derecho.

Pasamos ahora a la teoría de las superficies. Generalmente la superficie (S) se supndrá dada mediante una repr. paramtrica en coordenadas cart ort.

$$x=x(u,v), \quad y=y(u,v) \quad ,z=z(u,v) \qquad (1)$$

Las tres funciones de u, v se suponen analíticas, aunque a veces es suficientes hacer hipótesis menos restrictivas , es decir suponer que tengan cierto número de derivadas sucesivas continuas. Las mismas funciones se consideran en ciertos campos de variabilidad de los parámetros u,v, es decir- si se imaginan u,v como coordenadas en un plano auxiliario $\pi$ - en convenientes regiones (R) de este plano.

Análogamente a lo que se hizo ~~para~~ pa ra las curvas, podemos imaginar el vector que une el origen O con el punto P variable sobre la superficie como función de u,v, y escribir, en lugar de las (1), la única fórmula vectorial

$$\bar{x} = \bar{x}(u,v) \qquad (2)$$

Refiriéndome a las (1) hay que poner cuidado en una circunstancia: no debe ser idénticamente en la región R (poniendo acá y a continuación

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad x_v = \frac{\partial x}{\partial v}, \text{ etc})$$

$$\begin{Vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{Vmatrix} \equiv 0 \qquad (3)$$

Como es sabido, la escritura (3) expresa que los tres determinantes de segundo orden extraídos de la matriz en el primer miembro son todos nulos. Si así fuera, las tres funciones $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u.v)$ tendrían dos a dos el determinante jacobiano idénticamente nulo, &y por consiguiente serían dos a dos vinculadas funcionalmente: luego existirían funciones F,G de dos argumentos tales que sería idénticamente

$$F(x(u,v), y(u,v))=0 \,,\, G(x(u,v), z(u,v)) = 0$$

y entonces los puntos representados paramétricamente por la (1) cumplirían con las dos ecuaciones $F(x,y)=0$, $G(x,y)=0$, y pertenecerían a la línea representada por este sistema. La representación paramétrica (1) llevaría a una línea y no a una superficie. Este caso excepcional se presentaría p. e. si adoptáramos la representación param.

$$x = u+v \,,\quad y = (u+v)^2 \,,\quad z = (u+v)^3$$

de la cual sigue

$$y = x^2 \,,\quad z = x^3.$$

Para evitar ese peligro, hay precisamente que suponer que no subsista la (3).

Al estudiar cuestiones de carácter local, podemos también suponer que en ningún punto de la región R sea

$$\left\| \begin{matrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix} \right\| = 0$$

En efecto, no cumpliéndose idénticamente (3) podemos partir de un par (u,v) para el cual la matriz no sea nula, y limitar la región R a un entorno de dicho valor en el cual, por continuidad, esa matriz siga siendo no nula.

Siempre en cuestiones de carácter local, la dicha&f&&& región R puede s uponerse(siempre en el plano $\pi$) un rectángulo con los lados paralelos a los ejes u,v; porque, si así no es, podemos substituir a la región R ya considerada un rectángulo de esa naturaleza contenido en la misma.

A menudo conviene que la correspondencia entre los puntos de R y los correspondientes de la superficie S considerada sea biunívoca. Podemos comprobar que esto siempre puede obtenerse al empequeñecer convenientemente la región R Decir que la correspondencia no es biunívoca quiere decir que existen en R dos puntos distintos $(u_1\ v_1)$ $(u_2\ v_2)$

tales que

$$x(u_1,v_1)=x(u_2,v_2),\quad y(u_1,v_1)=y(u_2,v_2),\quad z(u_1,v_1)=z(u_2,v_2) \qquad (4)$$

Por otra parte, en un dado punto de R sea no nulo p. e. el determinante funcionál

$$\begin{vmatrix} x_u(u,v) & y_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) \end{vmatrix}$$

La función de cuatro variables u´v´u" v"

$$\varphi(u'v'u''v'')=\begin{vmatrix} x_u(u'v') & y_u(u''v'') \\ x_v(u'v') & y_v(u''v'') \end{vmatrix}$$

distinta de cero para u´=u,v´=v,u" =u,v" =v sigue siendo distin de cero para valores de u´, etc bastabte próximos a ellos, y lu go en cierto rectangulo R´,interior a R.Si substituyo ese rectángulo al rect. R, no pueden subsistir las (4): en efecto de las dos primeras (4) se deduciría

$$(u_2-u_1)\,x_u(u'v')+(v_2-v_1)\,x_v(u'v')=0$$
$$(u_2-u_1)\,y_u(u''v'')+(v_2-v_1)\,y_v(u''v'')=0$$

siendo los puntos (u´v´), (u" ,v" ) interiores a R.Pero de las últimas ecuaciones seguiría

$\varphi(u,v,u',v')=0$ lo que se excluyó.

Los parámetros u,v desempeñan particularmente bien el papel de <u>coordenadas curvilíneas</u>, cuando se realiza la biunivocidad a la cual acabamos de aludir. Sin embargo, no siempre es preciso que tal biunivocidad subsista sin excepciones.

La representación paramétrica pone de realce sobre la sup. S los dos sistemas $\infty^1$ de líneas

u= const. ; v= const.

(<u>lineas coordenadas</u> ). LLamaré líneas u aquellas sobre las cuales varía tan sólo la u (es decir las v= const.);y analog. líneas v aquellas donde varía sólo la v(líneas u=const.). Algunos autores intercambian las dos denominaciones. angular del polo Norte[2]

P.e. ~~sobre~~ para la esfera de radio R y centro en el origen O[1], llamando u a la ~~colatitud (complemento de la latitud)~~ distancia y v la longitud (ángulo del plano meridiano que pasa por un punto con el plano meridiamo fijo xz) tenemos las ecuaciones paramétricas

(1) concebida como sup. de rotación de eje z | (2) = colatitud (compl. de la latitud) en el hemisferio Norte

$x = R \operatorname{sen} u \cos v, \; y = R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \; z = R \cos u$

Las líneas u son meridianos, las líneas v son paralelos. Aunque se fijen convenientemente los intervalos de variabilidad de u,v p.e.

$$0 \leq u \leq \pi \;, \; 0 \leq v < 2\pi$$

la correspondencia entre los puntos de (toda) ~~la~~ esfera y los pares (u, v) no es completamente biunívoca: ~~pues~~. por cada uno de los polos pasan todas las líneas u . En general, cuando la correspondencia es biunívoca ,los valores de u,v en un punto de S son dados por las líneas u=const. ,v= const. que pasan por ese punto.

Una línea sobre la S puede representarse mediante una ecuación F(u,v) =0, o bien representando u,v como funciones de un parámetro .

Fijado sobre S un punto P($u_o$,$v_o$) si consideramos sobre S las varias líneas L que pasan por P, y sus ecuaciones en la forma v=v(u) - siendo por supuesto $v(u_o)=v_o$ - las líneas para las cuales dv/du , en P tiene un mismo valor m son todas tangentes entre sí, debido a que la recta tangente a una de dichas líneas en P es la que une P al punto impropio de coordenadas

$$x_u + m x_v, \; y_u + m y_v, \; z_u + m z_v, \; 0 \qquad (5)$$

Por lo tanto, fijar una recta tangente en el punto P da lo mismo como prefijar el valor de la derivada dv/du para $u=u_o$

Puede agregarse la observación que el valor de m que acabamos de considerar desempeña el papel de coordenada proyectiva en el haz de las rectas tangentes en P, debido a que desempeña tal papel en la puntual impropia descripta por el punto (5), la cual es sección del haz de las tangentes.

Un sistema $\infty^1$ de líneas sobre S puede representarse mediante una ecuación

$$F(u,v,c) = 0 \qquad (6)$$

en la cual aparezca una constante arbitraria c. Muy a menudo un sistema $\infty^1$ de líneas se obtiene a partir de una ecuación diferencial ordenaria de primer orden, resuelta con respecto a la derivada primera

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u,v) \qquad (7)$$

donde p.e. φ se supone analítica

Cambio de coordenadas curvilíneas . A veces, conviene, para una dada superficie S efectuar un cambio de coordenadas curvilineas, poniendo

$$u=u(u_1,v_1) \; ; \; v=v(u_1,v_1) \qquad (0)$$

endonde las dos funciones que figuran en los segundos miembros son p. e. funciones analíticas de dos nuevas variables $u_1,v_1$ . De tal forma las x,y,z vienen a ser (a través de las u,v) funciones de $u_1,v_1$ , y estas actúan como nuevas coordenadas curvilíneas.

Se sobreentiende que el determinante funcional

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)}$$

no debe ser idénticamente nulo. Luego, localmente, puede también suponerse constantemente distinto de cero, y las fórmulas anteriores se invierten en las

$$u_1=u_1\,(u,v) \; ; \; v_1=v_1\,(u,v)$$

Si, como caso particular

$$u=u(u_1), \quad v=v(v_1)$$

las líneas coordenadas no varían.

En particular, se efectuan a veces cambios de variables en las condiciones siguientes. Se tienen dos sistemas $\infty^1$ de líneas, $\Sigma_1$ y $\Sigma_2$ ,sobre la S ,dados respectivamente por las ecuaciones

$$\varphi(u,v,u_1)=0 \; ; \; \psi(u,v,v_1)=0$$

en donde llamamos ahora $u_1$ y $v_1$ los dos parámetros que figuran respectivamente en las dos ecuaciones. Despejando de este sistema las u,v, resultan ecuaciones del tipo (0): luego pueden tomarse las $u_1,v_1$ como nuevas coordenadas curvilíneas (en una región conveniente). Se logra así que los dos sistemas dados actúen como sistemas de líneas coordenadas.

 (como ocurre seguramente si $\varphi$ es analítica

Si se supone p. e. satisfecha la condición de Lipschitz etc( ~~véase p. e. curso 1941~~), puede considerarse una región R tal que exista una y una sola solución de (7) que cumple con la condición inicial $u=u_0, v=v_0$: es decir(lograda la biunivocidad de la corr. entre los puntos de la sup S y los pares u,v) por cada punto de S pasa una y una sola línea integral (linea $v=v(u)$ con $v(u)$ solución de (7)).En otras palabras se logra en S un sistema de curvas del tipo (6).

El significado geométrico de lo dicho es el siguiente: si para cada punto P de S prefijamos una recta tangente t (con restricciones equivalentes a la que a la ecuación (7) sea aplicable el teor de existencia etc) , queda definida sobre S un sistema $\infty^1$ de líneas que pasan por cada punto con la tangente prefijada —

Una de las primeras nociónes relativas a una sup fundamental S es la de la llamada primera forma(cuadrática ) diferencial.El cuadrado del elemento de arco ds de una línea L trazada sobre S es (cuadrado del elemento lineal)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$= (x_u\,du + x_v\,dv)^2 + (y_u\,du + y_v\,dv)^2 + (z_u\,du + z_v\,dv)^2$$

$$= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \qquad (8)$$

donde E, F, G son funciones de u, v definidas por

$$E = \sum x_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \bar{x}_u^2$$

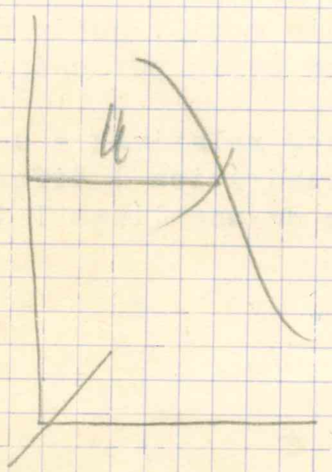
$$F = \sum x_u x_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = \bar{x}_u \times \bar{x}_v$$

$$G = \sum x_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = \bar{x}_v^2.$$

En forma vectorial

$$ds^2 = d\bar{x}^2$$

Debido a su significado geométrico la forma diferencial (8) , en el campo real, no es susceptible de valores negativos, antes bien es necesariamente positiva para pares de valores no ambos nulos de du, dv.Se trata luego de una


u

forma cuadrática definida positiva , de modo pues que

$$EG-F^2>0 \qquad (9)$$

Es la llamada primera forma cuadrática diferencial& de la superficie considerada.

Sea p. e. S una sup de rotación alrededor del eje z: para un punto genéricoPde la misma sean U el radio del &&&& paralelo y v la longitud( ángulo del plano merid por P con el plano meridiano fijo xz).Es claro que

$$x=U\cos v,\quad y=U\operatorname{sen} v,\quad z=f(U)$$

si z=f(x) es la ecuación del perfil meridiano en el plano xz Entonces, con respecto a los parámetros U,v

$$E=1+f'^2;\quad F=0,\qquad G=U^2$$

($f'= df/dU$) es decir

$$ds^2=(1+f'^2)\,dU^2+U^2\,dv^2$$

Podemos obtener otra forma del $ds^2$ si, dejando invariada v, reemplazamos U por otro parámetro u, función del mismo(y no de v), al tomar para u el arco de meridiano (contado a partir de cierto paralelo)( de modo que &&&&& en el plano xz para el perfil meridiano &&& z=f(x) du es la dif del arco, esto es $du^2=dU^2+dz^2 = dU^2+f'^2\,dU^2$.Tenemos así el cambio del paráme tro U definido por

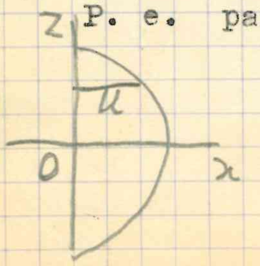
$$du^2=(1+f'^2)\,dU^2 \qquad (10)$$

Es claro que, al usar el nuevo par de parámetros, el $ds^2$ toma la nueva forma

$$ds^2=du^2+U^2(u)\,dv^2 \qquad (10')$$

siendo U(u) la función de u inversa de la función u(U) obtenida mediante la(10) (radio del paralelo en función del arco de meridiano)

P. e. para la esfera de radio R(figura) $z=\sqrt{R^2-U^2}$




$$f(U)=\sqrt{R^2-U^2};\quad f'=\frac{-U}{\sqrt{R^2-U^2}}$$

$$ds^2=\left(1+\frac{U^2}{R^2-U^2}\right)dU^2+U^2dv^2=\frac{R^2}{R^2-U^2}\,dU^2+U^2\,dv^2$$

Para introducir el parámetro u, si queremos aplicar (10)

$$du^2 = \frac{R^2}{R^2-U^2}\, dU^2 \ ; \quad du = \frac{R}{\sqrt{1-\left(\frac{U}{R}\right)^2}}\, \frac{dU}{R} ; \quad u = R \operatorname{arc\,sen} \frac{U}{R}$$

(contando los arcos p. desde el polo Norte) ; $U = R \operatorname{sen} \frac{u}{R}$

(<u>claro a priori</u>). Entonces (como es claro aplicando directamente 10')

$$\boxed{ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{sen}^2 \frac{u}{R}\, dv^2} \qquad (11)$$

valor del $ds^2$ esférico en las condiciones actuales. Si en lugar de la longitud u del arco de meridiano introdujéramos la distancia angular $u_1$ como a p. 199 (entonces llamada u), tenemos $u=Ru_1$ , y la (11) se escribe

$$ds^2 = R^2 du_1^2 + R^2 \operatorname{sen}^2 u_1\, dv^2$$

o bien, reponiendo u en lugar de $u_1$

$$ds^2 = R^2 du^2 + R^2 \operatorname{sen}^2 u\, dv^2 \qquad (12)$$

(en la cual u tiene un significado geom. distinto ~~&&~~ que en ~~&&~~ (11))

Como se ve en los ejemplos considerados, el $ds^2$ de una superficie S toma un aspecto distinto de acuerdo con el sistema de coordenadas curvilíneas que se adopta, loque es claro a priori. Tampoco es suficiente, para determinar el $ds^2$, prefijar las lineas coordenadas, debido a que un cambio de parámetros del tipo $u=u(u_1), v=v(v_1)$, aunque no varía las líneas coordenadas, varía generalmente el $ds^2$ . En cambio es claro que, si cambiamos los parámetros curvilineos u v en otros $u_1$ $v_1$ al poner

$$u=u(u_1,v_1) \quad ; \quad v =(u_1,v_1) \qquad (13)$$

el $ds^2$ calculado en los dos sistemas , aunque tiene dos aspectos distintos, es el mismo, debido a su significado geométrico, es decir, si lo llamamos resp. te

$$\left.\begin{aligned} &E(u,v)\, du^2 + 2F(u,v)\, du\, dv + G(u,v)\, dv^2 \\ &E_1(u_1,v_1)\, du_1^2 + 2F_1(u_1,v_1)\, du_1\, dv_1 + G_1(u_1,v_1)\, dv_1^2 \end{aligned}\right\} (14)$$

tenemos idénticamente

$$E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2=E_1\,du_1^2+2F_1\,du_1\,dv_1+G_1\,dv_1^2$$

En otras palabras, se pasa del $ds^2$ en coordenadas curvilineas $u,v$ al $ds^2$ en coord curv $u_1,v_1$ al efectuar materialmente la transf.(13) .

Las dos formas cuadráticas resultan equivalentes , en cuanto llámanse precisamente equivalentes dos formas cuadráticas del tipo (14) cuando puede pasarse de una a otra mediante una transf. del tipo (13) (1)

Para el plano, p. e. $z=0$, si tomamos $u=x, v=y$ tenemos

$$ds^2=du^2+dv^2 \qquad (15)$$

si en cambio tomamos $u_1,v_1$ dadas por las coord polares, es decir

$$x=u_1\cos v_1\ ;\ y=u_1\,\mathrm{sen}\,v_1$$

logramos

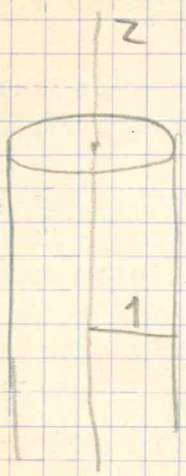
$$ds^2=du_1^2+u_1^2\,dv_1^2 \qquad (16)$$

Las (15),(16) nos brindan por lo tanto un nuevo ejemplo de formas cuadr dif equivalentes.En cambio ellas no son equivalentes p. e. a la (11), como resultará implícitamente de los desarrollos ulteriores de este curso.

El hecho de que las dos expresiones del $ds^2$ para una misma S, en dos distintos sistemas de coord curvilineas, se transforman idénticamente una en la otra puede expresarse al decir que la forma considerada tiene carácter intrínseco(depende de la S, per no de las u,v, en cuanto se imaginen los diversos aspectos de dicha forma precisamente como aspectos distintos de una misma forma en varios sistemas de coordenadas curvilineas), debido a que efectivamente depende tan sólo de la S.

Además ,puede decirse que dicha forma es invariante, en el sentido de que(debido a su significado geom) no varía al substituir a la S otra sup. igual, o -lo que da lo mismo- al referir la S a distintos sistemas cartesianos ortogonales.

(1) Dos formas cuadr. (14) generalmente no son equivalentes, como resultará. El resultado es plausible debido a que si tratáramos de transformar las (14) una en otra mediante un cambio de variables del tipo (13), tendríamos para determinar las dos funciones $u(u_1v_1), v(u_1v_1)$ tres ecuaciones

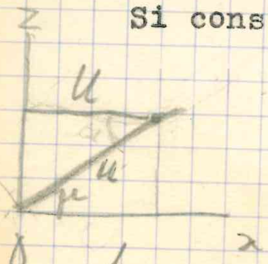

z
1

He dicho que el $ds^2$ de una dada sup puede tomar aspectos distintos, en &&& distintos sistemas de coord curvilineas. Viceversa, desde ahora observo( y sobre el asunto volveremos a continuación) que es posible que a dos superficies corresponda un mismo $ds^2$ . p.e. si considero un cilindro de rota& ción de eje el eje z y radio unitario, puedo aplicar lo dicho a p. 205, siendo ahora $U(u) = 1$ ; la (10´) da

$$ds^2 = du^2 + dv^2 \qquad (15)$$

de manera que reencontramos el mismo $ds^2$ ya encontrado para el plano.

Si considero un cono de rotación, engendrado por la recta $y=0$, $z = x\, tg\, \mu$, tenemos ~~....~~ (contando ~~....~~ las distancias sobre las generatrices desde el vertice) $U = u \cos\mu$ y



luego

$$ds^2 = du^2 + u^2 \cos^2\mu\, dv^2$$

Si luego reemplazamos el parámetro $v$ por otro $v_1$ definido por $v_1 = v\cos\mu$

$$ds^2 = du^2 + u^2 dv_1^2$$

que es el $ds^2$ encontrado para el plano en coordenadas polares.

OBSERVACION. En relación con el $ds^2$ pueden considerarse sobre la& sup. S(anal.ca) las llamadas <u>líneas nulas</u> o <u>isótropas</u>. En general, una línea L del espacio(prescindiendo de si pertenece o no a una sup S prefijada) llámase nula o isótropa cuando sus tangentes son todas rectas isótropas(apoyadas al absoluto).Sim buscar aquí la representación analítica más general de una línea isótropa podemos convercenos fácilmente de que sería factible encontrarla.En efecto,&&&&&& imaginando intruitivamente el plano osculador en P como plano de la tangente en P y de otra tangente consecutiva, es claro que para L isótropa el plano osculador en P es isótropo(es decir tangente al absoluto);

* Efectuando los cálculos se lograrían de tal ~~paso las~~ manera las ecuaciones paramétricas de la línea isótropa más general en la forma

$$
\begin{cases}
x = i\left(f - t f' + \dfrac{t^2-1}{2} f''\right) \\
y = f - t f' + \dfrac{t^2+1}{2} f'' \\
z = i\left(t f'' - f'\right)
\end{cases}
$$

siendo $f = f(t)$ una función arbitraria (derivable dos veces) del parámetro $t$.

y viceversa. Luego para encontrar de la manera más general una línea L isótropa, se comprende que puede llevarse por cada tangente del absoluto un plano arbitrario, y buscar luego (con operaciones de derivación) el punto segundo característico de cada uno de ellos (punto común al plano, y a dos otros "consecutivos). Excepto casos de degeneración, este punto describe una línea que admite como osculadores los planos dados es decir una línea nula. x ~~-En el caso particular de las líneas nulas trazadas sobre~~ S, A lo largo de tal línea (cuyas tangentes cortan al absoluto, línea que tiene en coord homogéneas las ecuaciones $x_4=0$; $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$) tenemos necesariamente

$$dx^2+dy^2+dz^2=0$$

( porque las coord $x_1 x_2 x_3$ del punto impropio de la tangente en un punto son prop. a $dx, dy, dz$). Luego a lo largo de las líneas isótropas de la sup. S:

$$E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2=0 \qquad (17)$$

La (17) es una ec dif ord de primer orden y segundo grado en dv/du para v imaginada como función desconocida de u. La ecuación no admite soluciones en el campo real; pero si en el campo complejo. De la misma podemos despejar dv/du de dos maneras distintas

$$\frac{dv}{du}=\Phi(u,v) \quad ; \quad \frac{dv}{du}=\Psi(u,v) \qquad (18)$$

siendo

$$\left.\begin{matrix}\Phi\\ \Psi\end{matrix}\right\} = \frac{-F\pm i\sqrt{EG-F^2}}{2G}$$

Se logran así dos ec. resueltas en dv/du, y cada una de ellas lleva a un sist $\infty^1$ de líneas isótropas (p. 201). Se concluye así que <u>por cada punto de la sup. S pasan dos líneas isótropas</u>. P.e. si S es una esfera, sus propias rectas generatrices son rectas isótropas, de manera que los dos sistemas de líneas que acabamos de determinar se reducen a los dos sistemas de generatrices.

El resultado logrado era previsible geométricamente, debido a que el cono isótropo que tiene su vétrice en un punto genérico P de S corta el plano tangente en P en dos rectas; al variar P, cada una de ellas describe un sistema de rectas tangentes, y se aplica lo dicho a p. 203.

Obsérvese que las dos ecuaciones (18) son distintas entre sí, debido a (9). Si admitiéramos aún superficies S no reales, la (9) podría dejar de subsistir, y podrían lograrse superficies con un solo sistema, sistema de líneas isótropas.

Si se adoptaran las líneas isótropas sobre la sup. (ahora nuevamente real) S como líneas coordenadas, la ec. (17) tendría que iintegrarse en u=const. v= const., es decir reducirse a du dv=0, de modo que sería idénticamente

$$E=0; \quad G=0$$

y por consiguiente

$$ds^2 = 2F\,du\,dv \quad (1) \qquad (19)$$

(Para realizar materialmente la trasnf del $ds^2$ a la forma (19), si se integran las (18) en la forma

$$\varphi(u,v) = \text{const.} \qquad \psi(u,v) = \text{const.})$$

habría que realizar el cambio de parámetros

$$u_1 = \varphi(u,v), \qquad v_1 = \psi(u,v)$$

P.e. para limitarme al ejemplo banal del plano, en coord. cart ortogonales u v, la (17) viene a ser

$$du^2 + dv^2 = 0$$

de modo que las (18) se integran en $u + iv = \text{const.}$

$u - iv = \text{const.}$ Pondríamos luego $u_1 = u + iv$, $v_1 = u - iv$ y lograríamos

$$ds^2 = du_1 dv_1 . \qquad )$$

---

(1) Es claro que en las condiciones actuales deja de regir la (9), que substistía en la hipótesis de una superficie no sólo real, sino referida a coordenadas curvilíneas reales, como es obvio.

× p.e. para duas linhas gerae linhas

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Dejando ahora las líneas isótropas para volver a las consideraciones generales sobre el $ds^2$, observamos que, si se supone conocer el $ds^2$ de una superficie, pueden efectuarse sobre la S ciertas mediciones, sin aprovechar nada más que dicho $ds^2$.

1) Dados sobre S dos puntos $(u_0 v_0)$ $(u_1 v_1)$ sobre una dada línea $v=v(u)$, puede calcularse la longitud de esta línea entre los puntos dados, debido a que es suficiente calcular

$$\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E+2F\frac{dv}{du}+G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\;du$$

Ya resulta posible por lo tanto medir los arcos de líneas sobre S.

2) Puede calcularse el ángulo (p. e. agudo o como caso límite recto) de dos líneas L, L′ que ∫ de S se cortan en un dado punto P (es decir, el ángulo de sus tangentes en P). Es suficiente recordar de la geom ana la fórmula que expresa el coseno del ángulo $\omega$ de dos rectas en función de sus cosenos directores. Si llamamos $d, \delta$ las diferenciales a lo largo resp. de L, L′, tenemos

$$\cos\omega = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\,\sqrt{\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2}}$$

$$= \frac{(x_u\,du + x_v\,dv)(x_u\,\delta u + x_v\,\delta v) + \dots}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}\,\sqrt{E\,\delta u^2+2F\,\delta u\,\delta v+G\,\delta v^2}}$$

es decir

$$\boxed{\cos\omega = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + \delta u\,dv) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}\,\sqrt{E\,\delta u^2+2F\,\delta u\,\delta v+G\,\delta v^2}} \quad (20)}$$

(tomando todo en valor absoluto si queremos $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$)

Podemos observar, de paso, que la (20) da a conocer la condición para que dos líneas sean ortogonales,

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0 \quad (21)$$

de modo que, en particular la condición para que las líneas coordenadas de los dos sistemas resulten ortogonales( o formen como se dice un doble sistema ortogonal) es que la última ecuación se cumpla para (p.e.) $du = \delta v = 0$ y $dv$, $\delta u$ arbitrarios, es decir

$$F = 0 \qquad (21)\,.$$

(véanse p. e. las formas del $ds^2$ plano (15),(16) , o la esférica(12) o más generalmente la (10) de las superficies de rotación, donde las líneas coord eran paralelos y meridianos, los cuales precisamente integran un doble sistema ortogonal).

3).El elemento de area $d\sigma$ sobre S puede escribirse

$$d\sigma = \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

(de forma que también las areas se calculan, si se conoce el $ds^2$).

Vemos así que el conocimiento del $ds^2$ de una superficie S permite efectuar sobre la S mediciones de distancias, ángulos etc.y luego permite remontar a muchas propiedades geométricas de la S. Sin embargo no puede llevar a todas, debido a que, como ya se observó, puede un mismo $ds^2$ corresponder a superficies distintas(p.e. plano y cilindro p 211).

Si imaginamos un velo flexible e inextendible adaptado sobre una superficie S y lo deformamos adaptándolo o ,como puede decirse, aplicándolo sobre otra superficie S′ las longitudes de las líneas trazadas sobre S son las mismas de las correspondientes sobre S′, de modo que el $ds^2$ resulta el mismo. Dos superficies como las S,S′ se dicen aplicables una sobre otra , o deformables una en otra. Por lo tanto para dos superficies aplicables el $ds^2$ es el mismo, y tiene una misma expresión con tal que se adopten sobre S,S′ los mismo parámetros u,v, es decir con tal que la correspondencia entre S,S′ que procede de la aplicabilidad se aproveche para hacer corresponder a cada punto P′ de S′ aquellos valores que corresponden al punto correspondiente P de la S.

X véanse p. e. a p. 211 el cilindro de rotación y el cono de rotación cuyos ~~ds~~ $ds^2$ coincidian con $ds^2$ planos.

XX En efecto, tomo el helicoide conoide recto lugar de las normales principales a la helice $x=R\cos v$, $y=R\,\mathrm{sen}\,v$, $z=hv$ Las ecuaciones paramétricas de dicho helicoide son evidentemente

$$x=u\cos v \quad ,y= u\ \mathrm{sen}\ v; \quad z =hv$$

de manera que, con respecto a los parámetros empleados resulta

$$ds^2 = du^2 + (u^2+h^2)\,dv^2 \qquad (º)$$

(El hecho que sea $F=0$ puede relacionarse con lo que las líneas $u$ y $v$ son respectivamente las rectas generatrices del helicoide, y las hélices trayectorias de los varios puntos de una generatriz en el movimiento helicoidal con el que puede engendrarse el helicoide: con respecto a una cualquiera de éstas , lo mismo como para la considerada más arriba, el helicoide puede considerarse como lugar de las normales principales, de manera que las líneas coordenadas sobre la sup. constituyen efectivamente un doble sistema ortogonal)

Por otro lado, tomo el catenoide engendrado por la rotación alrededor del eje z de la catenaria $x = h\,ch\frac{z}{h}$ contenida en el plano $y=0$. En este caso, con las notaciones de p.205, tenemos $U= h\ ch(z/h)$ ;

$$du^2 = dz^2\left[\left(h\frac{1}{h}\,sh\frac{z}{h}\right)^2+1\right] = \left(sh^2\frac{z}{h}+1\right)dz^2 = ch^2\frac{z}{h}\,dz^2$$

y luego integrando y disponiendo convenientemente de la const de integración $u = h\,sh\frac{z}{h}$. Luego, para expresar U en función de u $U = h\sqrt{1+sh^2\frac{z}{h}} = h\sqrt{1+\frac{u^2}{h^2}} = \sqrt{u^2+h^2}$: El $ds^2$ del catenoide, calculado con la (10`)p 205 oincide luego con el (º) c.d.d. Obsérvese que en la aplicación las generatrices del helicoide se extienden a lo largo de los meridianos del

sigue p. [illegible]

Viceversa si tomamos dos superficies con el mismo $ds^2$, de lo dicho anteriormente se desprende que longitudes correspondientes, ángulos corr. etc son los mismos. Por tal razón dos superficies S,S′ en tales condiciones se dicen isométricas. Cabe preguntarse si dos superficies isométricas siempre son aplicables en el sentido que acabamos de explicar. La contestación es afirmativa, con la única reserva que en ciertos casos una de las superficies no es aplicable sobre la otra, sino sobre la simétrica de la otra( E E Levi). Sin embargo, muy a menudo los términos de isometría y aplicabilidad se usan como sinónimos.

Ejemplos muy sencillos de superficies aplicables son los de las superficies llamadas desarrollables, es decir aplicables sobre el plano. Tales son los conos y cilindros (cualesquiera), como es claro imaginando de cortarlos a lo largo de una generatriz; y las superficies regladas desarrollables formadas por las tangentes de una línea alabeada (o, como se dice circunscriptas a una línea alabeada) L: también esto es intuitivo imaginando dichas superficie integrada por pequeñas regiones angulares comprendidas entre ~~&&&&&&&&&&&&~~ pares de tangentes de la L. El resultado se demostraría de manera rigurosa al referir dichas superficies a convenientes sistemas de coordenadas curvilineas y averiguar que su primera forma cuadr fund. toma la forma (15) ~~&&&&&&&~~. Y también resultaría que no hay más superficies desarrollables. Otro ejemplo sencillo de superficies aplicables es brindad por el catenoide y el helicoide de conoide recto. XX

Las propiedades de una superficie que dependen únicamente de la consideración de su primera forma cuadr se trasmiten por lo visto a todas las deformadas, es decir son propiedades invariantes a través de las deformaciones: a menudo se dice que son propiedades interiores de la superficie, esto es independientes de las relaciones de la superficie con el espacio exterior a la misma, pero sí vinculadas con entes( como longitudes etc) que ya tienen un significado( o son susceptibles de adquirirlo) únicamente en relación con la superficie. La consideración de propiedades de este tipo se remonta a Gauss, el cual reflexionando sobre la posibilidad de reconstruir la forma de la superficie terrestre mediante mediciones efectuadas sobre la misma se dió cuenta que de tal manera no era posible reconstruir la forma de la tierra, sino sólo el $ds^2$. Sigue 221 bis-II

(sigue de p. 220)

catenoide( se trata sobre ambas superficies de las líneas u) y las hélices consideradas sobre el helicoide se extien den a lo largo de los paralelos ( son las dos veces las líneas v) La recta eje del helicoide (a lo largo de la cual u=0;caso límite de las hélices ahora mencionadas) correspon de al "circulo de garganta"del helicoide, paralelo de radio mínimo, a lo largo del cual resulta precisamente u=0 (véase arriba u=h sh(z/h) :suponer u=0 da lo mismo como suponer z=0)

En relación con la primera forma cuadr fund. aludo breve mente a las llamadas transformaciones <u>conformes</u> o <u>isogonales</u> entre dos superficies S,S´. Así llámase una correspond. entre los puntos de las dos cuando conserva los ángulos.

Supongo referir las S,S´ a un mismo par de parámetros u,v, de manera que la correspondencia se origine al llamar corres pondientes dos puntos P de S y P´ de S´ cuando proceden de un mismo par u,v. Sean

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2$$

las primeras formas resp.te de S,S´. La fórmula (21) de p. 219 enseña que si

$$E:F:G = E_1:F_1:G_1 \qquad (a)$$

la correspondencia es conforme.

Viceversa, si la corr es conforme, a las líneas nulas de S en cuanto autoperpendiculares corresponden sobre S´ líneas autoperpendiculares y luego nulas, de manera que las dos ecuaciones

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0; \qquad E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2 = 0$$

tienen que ser equivalentes, de forma que rigen las (a). Vemos así que las (a) son necesarias y suficientes para que la co rrespondencia considerada sea conforme.

Podemos deducir la posibilidad de referir en una correspondencia conforme dos sup. analíticas cualesquiera. En efecto si sobre cada una de las dos adop tamos a líneas coordenadas las líneas nulas, los $ds^2$ toman respectivamente la forma (p. 215)

$$2F\,du\,dv, \qquad 2F_1\,du_1\,dv_1$$

El resultado podría conseguirse sin salir del campo real.

Luego si adoptamos $u_1=u_1(u)$, $v_1=v_1(v)$ se consigue la proporcionalidad entre las dos primeras formas, es decir las (a).—

P. e. si como S´ se toma un plano, referido a coord. cart. ortogonales u,v, se deduce que para una superficie S siempre puede reducirse la primera forma al tipo

Aquí $$ds^2 = \lambda(u,v)(du^2+dv^2) \qquad (b)$$

siendo $\lambda(u,v)$ una función que brinda al mismo tiempo el valo de los coeficientes E,G. La forma (b) del $ds^2$ llámase isoterma, y los parámetros u,v que llevan a ella parametros isotermos. A veces se dices que un doble sistema isotermo (doble sistema de las líneas coordenadas u,v relativas a parámetros isotermos) divide la superficie S en cuadrados infinitésimos, en el sentido que ellas constituyen un doble sistema ortogonal (F=0) y además los elementos de arco a lo largo de ellas son

$\sqrt{\lambda}\,du$, $\sqrt{\lambda}\,dv$ y luego son iguales si se toma du=dv.

Un ejemplo bien conocido de transf conforme es brindado por la que se logra entre una esfera S y una sup $S' = \pi$ plana, cuando se proyecta estereográficamente S p. e. desde el polo Norte N sobre el plano $\pi$ del ecuador. Podemos verificarlo como consecuencia de lo dicho de la manera siguiente. Sea R el radio de S. Si tomamos un sistema cart ort cõmo a p. 205 y como u la distancia angular y como v la longitud, como a p.207, tenemos p. 6 (12)

$$x = R\operatorname{sen} u \cos v, \quad y = R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad z = R \cos u \qquad (c)$$

$$ds^2 = R^2(du^2 + \operatorname{sen}^2 u\, dv^2) \qquad (d)$$

Desde el polo Norte (0,0,R) proyecto el punto (c) sobre el plano xy. El radio proyectante tiene ecuaciones

$$\frac{x-0}{R\operatorname{sen} u \cos v} = \frac{y-0}{R\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} = \frac{z-R}{R(\cos u - 1)}$$

y luego corta el plano $\pi$ (z=0) en el punto

$$x = R\,\frac{\operatorname{sen} u \cos v}{1-\cos u}, \qquad y = R\,\frac{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{1-\cos u}$$

Luego el $ds^2$ plano se calcula [illegible] de las

$$x_u = \frac{\cos u \cos v\,(1-\cos u) - \operatorname{sen}^2 u \cos v}{(1-\cos u)^2}\,R = \frac{-\cos v\,(1-\cos u)}{(\quad)^2}\,R = \frac{-\cos v}{1-\cos u}\,R$$

$$x_v = -R\,\frac{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{1-\cos u}$$

$$y_u = -\frac{\operatorname{sen} v}{(1-\cos u)}\,R\,; \qquad y_v = R\,\frac{\operatorname{sen} u \cos v}{1-\cos u}$$

Luego para el plano

$$E_1 = \frac{R^2}{(1-\cos u)^2}\,; \quad F_1 = 0 \quad G_1 = \frac{R^2 \operatorname{sen}^2 u}{(1-\cos u)^2}$$

Luego $E_1, F_1, G_1$ son proporcionales a los valores de EmF,G que se leen en la (d). La transf. es conforme.

OBSERVACION. Una transf. conforme conserva todos los ángulos, y luego en particular los ángulos rectos., luego también los dobles sistemas ortogonales. Si en cambio considero una trasnf NO conforme entre S, S', lograda al adoptar también ahora los mismos parámetros u, v sobre las dos, etc. lo observado a p. 201 sobre el significado de dv/du comprueba que si P. P' son dos puntos correspondientes, las rectas tangentes en ellos a líneas homólogas de la dos superficies se corresponden en una proyectividad. Si esta no es una igualdad( y en el caso actual no es tal, para P genérico), se sabe por la geom proyectiva que existe un ángulo recto en el haz de las tangentes en P al cual corresponde un ángulo recto en el haz de las tangentes en P'. Sigue por lo tanto la existencia de un doble sistema ortogonal(único) de la S al cual corresponde sobre S' un doble sistema ortogonal en una transf no conforme entre S, S'(teor de Tissot)

Volviendo a una trasnf conforme entre S, S' el hecho de que lod $ds^2$ son proporcionales tiene el significado intuitivo que al varia r un arco infinitésimo alrededor de un punto P, el arco correspondiente varía alrededor del corr.te P' de manera tal que la ra zón de los dos siempre queda la misma(pro varía de un punto P a otro, por lo general). Por esto, además que por la definición misma a menudo se dice que una transf conforme actua como una semejanza en regiones infinitésimas.

No siendo suficiente el $ds^2$ para reconstruir completamente la superficie, se considera también una segunda forma cuadrática fundamental ( La razón por qué conviene estudiar la S sobre dichas formas cuadr. más bien que sobre las ecuaciones paramétricas consiste en que éstas varían al pasar de la S a otra superficie igual, mientras que las formas cuadr. consideradas quedan las mismas. Como se estudian propiedades invariantes por igualdades - (véase las consideraciones desarrolladas sobre la geometría con respecto a un grupo) es lógico tender a una representación analítica que sea la misma para todas las superficies iguales entre sí) Fijo la normal positiva en un punto genérico P de S, y sobre la misma un vector unitario $\bar{n}$, cuyas componentes (cos direct de esa normal) llamo X,Y,Z. Introduzco entonces como segunda forma cuadrática fund

$$-d\bar{x} \times d\bar{n} = -(\bar{x}_u du + \bar{x}_v dv) \times (\bar{n}_u du + \bar{n}_v dv)$$

que escribo

$$\mathcal{D}\, du^2 + 2\mathcal{D}'\, du\, dv + \mathcal{D}''\, dv^2$$

poniendo

$$\mathcal{D} = -\bar{x}_u \times \bar{n}_u = -\sum x_u X_u$$

$$2\mathcal{D}' = -\bar{x}_u \times \bar{n}_v - \bar{x}_v \times \bar{n}_u = -\sum x_u X_v - \sum x_v X_u$$

$$\mathcal{D}'' = -\bar{x}_v \times \bar{n}_v = -\sum x_v X_v$$

Estas expresiones de D,D',D" pueden escribirse de manera un poco distinta observando que, siendo el vector $\bar{n}$ normal y el vector $\bar{x}_u$ tangente, lo mismo como el vector $\bar{x}_v$, $\bar{n}$ es ortogonal a los dos vectores $x_u, x_v$, de forma que

$$\bar{x}_u \times \bar{n} = 0, \qquad \bar{x}_v \times \bar{n} = 0.$$

Derivando:

$$\bar{x}_u \times \bar{n}_u = -\bar{x}_{uu} \times \bar{n}, \quad \bar{x}_u \times \bar{n}_v = -\bar{x}_{uv} \times \bar{n}$$

$$\bar{x}_v \times \bar{n}_u = -\bar{x}_{uv} \times \bar{n}, \quad \bar{x}_v \times \bar{n}_v = -\bar{x}_{vv} \times \bar{n}$$

Por consiguiente

$$\mathcal{D} = \sum X x_{uu}, \quad \mathcal{D}' = \sum X x_{uv}, \quad \mathcal{D}'' = \sum X x_{vv}$$

Por otra parte siendo $\sum X x_u = 0$ $\sum X x_v = 0$ resulta

$$X : Y : Z = \left\| \begin{matrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix} \right\|$$

El factor de proporcionalidad se determina al observar que el cuadrado de la matriz vale

$$\begin{vmatrix} \sum x_u^2 & \sum x_u x_v \\ \sum x_u x_v & \sum x_v^2 \end{vmatrix} = EG - F^2 \quad \text{luego}$$

$$X = \frac{1}{\pm\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \quad \text{etc.} \quad (\text{indeciso el} \pm \text{en} \sqrt{\ })$$

y

$$\boxed{\mathcal{D} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \end{vmatrix} \quad \mathcal{D}' = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix} \quad \mathcal{D}'' = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \end{vmatrix} \quad (22)}$$

Las (22) permiten calcular los coef. de la segunda forma a partir de las ecuaciones paramétricas.

Es claro que también la segunda forma es intrínseca, debido a que en su definición inicial no se hace referencia a ningún sistema particular de coordenadas curvilíneas sobre la S. Además la misma segunda forma es también invariante lo que no es directamente evidente sobre su definición, en la cual aparece el vector $\bar{x}$ que depende del origen. Sin embargo si pasamos a otro origen $O_1$ con respecto al cual llamamos $\bar{x}_1$ el vector $O_1P$, mientras llamamos $\bar{k}$ al vector constante $OO_1$ tenemos

$$\bar{x}_1 = \bar{k} + \bar{x}$$

y luego

$$d\bar{x}_1 = d\bar{x}$$

Por lo tanto $d\bar{x}_1 \times d\bar{n} = d\bar{x} \times d\bar{n}$, y se comprueba lo dicho.

Para el plano, adoptando p. e. $x=u, y=v, z=0$, las (22) dan $D=D'=D''=0$, de manera que la segunda forma se reduce idénticamente a cero (independientemente de la elección de los parámetros debido al carácter intrínseco de la forma).

Para la sup. de rotación de p. 205 referida a la longitud v y al radio del paralelo (entonces llamado u) que llamo u

$$x = u\cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v \quad z = f(u)$$

tenemos

$$x_u = \cos v, \quad y_u = \operatorname{sen} v, \quad z_u = f' \qquad \sqrt{EG-F^2} = u\sqrt{1+f'^2}$$

$$x_v = -u \operatorname{sen} v, \quad y_v = u\cos v, \quad z_v = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} \cos v & \operatorname{sen} v & f' \\ -u \operatorname{sen} v & u \cos v & 0 \\ 0 & 0 & f'' \end{vmatrix} \frac{1}{u\sqrt{1+f'^2}} = \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}}$$

$$D' = 0\,; \qquad D'' = \frac{u f'}{\sqrt{1+f'^2}}$$

Hemos visto que para el plano la segunda forma se anula idénticamente. ¿ Ocurre esta circunstancia para otras superficies ? La contestación es negativa. En efecto, si se supone que sea S una superficie en tales condiciones, la represento localmente con una ecuación del tipo z=f(x,y) . Debido al caracter intrínseco de la segunda forma, la hipótesis sigue verificándose. Entonces puesto $p=f_x$, etc., las (22) expresan que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & r \end{vmatrix} = 0 \text{, es decir } r=0 \text{, y así } s=0 \text{, } t=0$$

Entonces f tiene derivadas segundas idénticamente nulas, y es por lo tanto un polinomio lineal en x,y , z= Ax + By + C, lo que comprueba lo dicho.

Cabe preguntarse por lo tanto, para una sup S no plana , qué son las líneas de S a lo largo de las cuales se anula la segunda forma(cuestión análoga a la planteada anteriormente para la primera forma, la que nos llevó a las líneas nulas: sin embargo en el caso actual las líneas a las cuales llegaremos pueden ser reales). La ecuación diferencial de primer orden

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0 \quad . \quad (20)$$

representa sobre S (véase p. 213) un doble sistema de líneas, reales o no. Estas líneas llámanse líneas <u>asintóticas</u> de S. De las mismas pueden darse otras definiciones. P.e. puede decirse que una línea L es asintótica de la S cuando en cada punto de la L el plano osculador de la L coincide con el plano tangente de la S o bien es indeterminado, es decir o bien la L es una recta trazada sobre la S . Esta segunda definición tiene la ventaja que, como es evidente, tiene carácter proyectivo, y pone por lo tanto de realce que las asintóticas de una superficie S, al transformar homográficamente la S en otra sup S', se transforman en las asintóticas de S'(es decir que el concepto de líneas asintótica es un concepto proyectivo, lo que no era evidente sobre la defininción anterior la cual estribaba en conceptos de naturaleza métrica). Podemos asegurarnos que la segunda definición equivale a la primera: observo que en coordenadas corrientes $\xi\ \eta\ \zeta$ , con notaciones evidentes, el plano tangente en el punto P tiene ecuación $(\xi - x,\ x_u,\ x_v) = 0$ de forma que su recta impropia es la que une los dos puntos impropios

$$(x_u\ y_u\ z_u\ 0) \qquad (x_v\ y_v\ z_v\ 0) \qquad (x_u x_v)$$

Si a lo largo de $\mathcal{L}$ $v = v(u)$, el plano os. a $\mathcal{L}$ en $P$ tiene como recta impropia la que une los puntos

$$x_u + v' x_v, \quad y_u + v' y_v, \quad z_u + v' z_v, \qquad (°)$$

$$x_{uu} + 2v' x_{uv} + v'^2 x_{vv} + v'' x_v, \quad \text{etc} \qquad (°°)$$

el primero de los cuales está alineado con los puntos (25)

Luego para la coincidencia de los 2 planos es nec. y suf. que lo mismo ocurra del segundo, es decir

$$\begin{vmatrix} x_{uu} + 2v' x_{uv} + v'^2 x_{vv} + v'' x_v & x_u & x_v \\ y_{uu} + 2v' y_{uv} + v'^2 y_{vv} + v'' y_v & y_u & y_v \\ z_{uu} + 2v' z_{uv} + v'^2 z_{vv} + v'' z_v & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0$$

(desarrollando; véanse las (22)) es decir) que se cumple (25). Y viceversa (En el razonamiento se supone $\mathcal{L}$ no recta; si es recta los puntos ~~$\frac{dx}{du}$ $\frac{dx}{du}$~~ impropios $\left(\frac{dx}{du}, \ldots\right)$ $\left(\frac{d^2x}{du^2}, \ldots\right)$ es decir (°) y (°°) coinciden, de forma que el 2°, lo mismo como el primero pertenece a la recta que une los puntos (25))

X P.e. sobre una cuádrica reglada los dos sistemas de asin tóticas son los dos sistemas de rectas generatrices. - Otro ejemplo: sobre un helicoide conoide recto, las hélices tra- yectorias de los puntos de las generatrices en el movimiento helicoidal con el que se engendra la superficie pertenecen al segundo sistema de asintoticas. En efecto, si L es una de ellas, su plano osculador en un punto P está determinado por la tangente en P y la normal principal en el mismo pun to, que coincide con la generatriz del helicoide por P, de manera que ese plano osculador tiene dos rectas comu nes con el plano tangente a la sup en P y luego coincide con el mismo.

Otra df que podría darse de las líneas asintóticas es la siguiente, como me limito a enunciar. Es sabido que la cortar la sup S (analítica) con el plano tangente en un punto genérico P, sea $\pi$, se obtiene una línea sección L ,que tiene en P un punto doble. En el mismo existen dos tangentes a la L reales o no, distintas o no; reales y distintas si para L el punto P es nudo, reales y coincidientes si cúspide, imaginarias conjugadas si punto doble aislado. En los tres casos el punto llámase, con respecto a la superficie, un punto <u>hiperbólico</u>, <u>parabólico</u>, <u>elíptico</u> (ejemplos resp.te: un punto de una esfera, de un cilindro, de un paraboloide hiperbólico z=xy). Las dos tangentes a la L en P llámanse <u>tangentes principales</u> a la S en P. Pues bien las líneas asintóticas resultan definibles como líneas tales que en cada punto admiten como tangente una tangente principal ___

Sin entrar en particularidades, también observo brevemente lo siguiente. Una tangente principal en P (piénsese p. e. en el caso en el que S es una superficie algebraica) tiene (por lo menos) 3 de sus intersecciones con la L y luego también con la S absorbidas por el propio punto P, por la cual razón justamente las tangentes principales también llámanse tangentes tripuntas. Esto deja prever - lo que precisamente ocurre- que en general un plano llevado por una tangente principal en P corta la superficie en una línea que tiene en P un punto de inflexión, con esa tangente cono tangente de inflexión.

Las tangentes principales en P, y con ellas las asintóticas que pasan por P pueden ser reales o no, etc. La (23) enseña que el punto P es

hiperbólico si $DD''-D'^2 < 0$
elíptico $> 0$
parabólico $= 0$

En el primero y segundo caso por P pasan resp.te dos asintóticas reales o dos imaginarias. En el tercer caso pueden presentarse circunstancias sobre las que no me detengo.

Si S es una superficie reglada, un sistema de asintóticas evidentemente está integrado por las generatrices rectilíneas. Si además S es desarrollable, todos los puntos son parabólicos y por consiguiente dicho sistema ya agota las asintóticas (porque entonces el primer miembro de (23) es un cuadrado perfecto, y la (23) se resuelve de manera única con respecto a

* p.e. $x_u = x' + v x''$, $x_v = x'$, $x_{uv} = x''$ de modo que $x_u = x_v + v\, x_{uv}$ etc. y luego $D' = 0$.

Además:

dv/du) .En efecto si S es cono o cilindro, siempre puedo reducirme al caso del cilindro mediante homografía, y para el cilindro $z=f(x)$ ,según las (22):

$$\mathcal{D} : \mathcal{D}' : \mathcal{D}'' = \begin{vmatrix} r & 0 & 0 \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

de modo que $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'' = 0$ y

$$\mathcal{D}\mathcal{D}'' - \mathcal{D}'^2 = 0$$

Para la desarrollable circunscripta a una línea

$x = x(u)$ , $y = y(u)$ , $z = z(u)$

puedo tomar ecuaciones paramétricas

$x = x(u) + v\,x'(u)$ , $y = y(u) + v\,y'(u)$ , $z = z(u) + v\,z'(u)$

de modo que $x_{vv} = y_{vv} = z_{vv} = 0$, luego $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'' = 0$ , y $\mathcal{D}\mathcal{D}'' - \mathcal{D}'^2 = 0$

El resultado es invertible, esto es, podría comprobarse que si una superficie S tiene todos sus puntos parabólicos(y luego un único sistema de asintóticas) necesariamente es una desarrollable. Una manera para realizar la demostración podría ser la siguiente: referirse a la S en la repr. cartesiana $z=f(x,y)$. Entonces la hipótesis $DD''-D'^2=0$ se escribe

$$rt-s^2 = 0 \qquad (25)$$

Es esta una ec a der parc de 2º orden para la $f(x,y)$.Ella tiene otra interpretación geométrica: los planos tangentes a la S son sólo $\infty^1$ , es decir dependen de un único parámetro.En efecto el plano

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

tiene ,de sus 4 coord homog. una igual a $-1$, y las otras a

$$p,q,z-px-qy$$

La condición para que subsista lo dicho es que se anule la matriz jacobiana de estas 3 funciones de las variables ind $x,y$. pues bien, al escribir

$$\left\| \begin{matrix} r & s & \cancel{p}-\cancel{p}-rx-sy \\ s & t & \cancel{q}-\cancel{q}-sx-ty \end{matrix} \right\| = 0$$

se escribe precisamente la (25). Las superficies buscadas son luego las que sólo admiten $\infty^1$ planos tangentes (cada uno de ellos será tangente no en un único punto, sino en todos los puntos de una línea). Buscando cuáles son las superficies en tales condiciones, se logran justamente las superficies desarrollables. (Esta es sólo un esbozo de la demostración)

Excluyendo el caso ahora aludido, se tienen dos sistemas de asintóticas: al adoptarlos como sistemas de líneas coordenadas, la (23) tiene que reducirse a du dv=0, de forma pues que la segunda forma fundamental se reduce a

$$2D' \, du \, dv$$

es decir $D=D''=0$.

Recuerdo el concepto de tangentes <u>conjugadas</u> en un punto (Dupin), en cuanto vinculado con él de las tangentes principales. Si c es una curva de S que pasa regularmente por P, y admite en P una recta tangente t, al tomar sobre c otro punto Q que tiende a P, el plano tangente en Q corta el plano $\pi$ tangente en P en una recta que, cuando Q tiende a P, tiende a una posición límite t′, que pertenece al haz P $\pi$, es decir es tangente en P, pero generalmente distinta de t, y depende tán solo de t. Se encuentra que la relación entre t y t′ es recíproca, y más precisamente que t, t′ son un par de una involución que admite como rectas unidas (reales o no) las tangentes principales en P. Dos rectas como t, t′ llámanse <u>conjugadas</u>. Si el punto P es parabólico, la involución degenera, como es claro, y de las dos tangentes conjugadas una coincide constantemente con la única tangente principal.

P. e. en una esfera dos tangentes conjugadas, de acuerdo con la definición, son constantemente perpendiculares, porque si tomo p. e. como línea c un círculo máximo por P, los dos planos tangentes en P,Q son perpendiculares al plano del mismo, de manera que también su intersección es perpendicular a este plan, y al límite perpendicular a la tangente t en P. Una confirmación de lo dicho es la siguiente: para la esfera las tangentes principales en P son las dos generatrices isó

X Dada una línea L sobre la superficie S, las tangentes conjugadas a las de L en los varios puntos de esta línea recubren una superficie reglada desarrollable (porque los $\infty^1$ planos tangentes a la S en los puntos de L tienen como rectas características precisamente dichas tangentes conjugadas, a raiz de la definición de tangentes conjugadas). Dicha superficie reglada llámase la desarrollable circunscripta a la superficie S a lo largo de la línea L.

P. e. sobre una superficie de rotación meridianos y paralelos constituyen un doble sistema conjugado (p. e. porque a p. 227, al adoptar como líneas coordenadas meridianos y paralelos precisamente resultaba $D'=0$). Ahora bien las tangentes a los varios meridianos en los puntos de un mismo paralelo forman precisamente un cono de rotación (con el centro sobre el eje), es decir una desarrollable). Y las tangentes a los paralelos en un punto de un meridiano constituyen otra desarrollable, a saber un cilindro cuyas generatrices son perpendiculares al plano del meridiano considerado (debido a que en una sup de rotación la tangente al paralelo en un punto es perpendicular al plano del meridiano que pasa por dicho punto)

La desarrollable circunscripta a S a lo largo de una línea L puede servir para llegar a la noción del paralelismo de Levi Civita. La idea es la siguiente. En el plano podemos comparar entre sí dos direcciones, realizándolas con rectas por un mismo punto. Sobre una sup. S para hacer algo análogo con respecto a dos direcciones que salen una de P y otra de P', faltaría un procedimien o análogo, para el cual sería preciso definir una dirección por P paralela a otra dada por P'. El inconveniente puede salvarse esta manera: unir P, P' con una línea L trazada sobre S: dichas dos direcciones (tangenciales) pertenecen también a la desarr. circunscr a lo largo de L: si esta la desarrollamos en un plano, tenemos dos direcciones en un plano, que podemos comparar entre sí. P. e. puede hablarse de dos direcciones paralelas, si se llevan en el plano a dos direcciones paralelas. Se tiene así una noción

(sigue p. 240)

tropas: luego dos tangentes conjugadas, siendo conj armónicas con respecto a ellas, son perpendiculares.

Al tratar analiticamente la cuestión , resultaría que la condición para que dos tangentes(corr resp. a diferenciales $d, \delta$) sean conjugadas es:

$$D\,du\,\delta u + D'(du\,\delta v + dv\,\delta u) + D''\,dv\,\delta v = 0 \quad (26)$$

Formalmente ella recuerda la condición de ortogonalidad, lo que se comprende, debido a que las dos veces se trata de dos direcciones conjugadas arm. con respecto a las que anulan la primera o segunda forma cuadr. fund.

~~(26)~~ Con la noción de tangentes conjugadas se vincula aquella de doble sistema conjugado , integrado por dos familias $\infty^1$ tales que las dos líneas de las dos familias que salen de un punto P genérico tengan como tgtes dos tgtes conjugadas. Si está dada una de las dos familias, la otra se obtiene integrando una ec dif del primer orden y precisamente la propia (26), en la cual se tomen $\delta u, \delta v$ a lo largo de las líneas del sistema dado: se despeja entonces $dv/du$ como función conocida de $u,v$.

Si las líneas coord integran un doble sistema conjugado, la (26) enseña que

$$D'=0$$

y viceversa.

Si las líneas coordenadas son las asintóticas, de forma pues que $D=D''=0$, la misma (26) enseña que el sistema $\infty^1$

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u,v)$$

tiene como conjugado

$$\frac{dv}{du} = -\varphi(u,v)$$

Paso ahora a relacionar las formas cuadráticas fund. con la noción de curvatura. Al estudiar la curvatura de las secciones normales en un punto P de una sup S (supuesto no parabólico) se encuentra que existen generalmente en el mismo dos secciones normales principales, producidas por 2 planos perpendiculares entre sí, cuyos radios $R_1$ , $R_2$ (1) de curvatura toman los valores extremos. Los demás radios de las secc norm, son dados por las fórmulas de Euler

(1) llamados radios principales de curvatura en P

(sigue de p.238)

de <u>paralelismo superficial</u>.Hay que tener presente sin embargo que en la definición del paralelismo de Levi Civita de dos direcciones por P, P′ desempeña un papel la línea L que se considera como línea que une los dos puntos(línea de trans porte)&.únicamente en casos particulares (p. e. plano, super ficie S desarrollable) la noción de paralelismo es indepen diente de la línea de transporte .Sin embargo, si dadas dos direcciones $t_1$, $t_2$ por P las transportamos a lo largo de L en dos direcciones $t_1'$,$t_2'$ por P′,cabe observar que(cualquier sea la línea L) el ángulo de las dos direcciones ha quedado invariado(porque queda invariado en elcplano sobre el cual aplicamos la desarrollable circunscripta, y los ángulos son invariantes a través de las deformaciones)

Aunque no resulte de lo dicho, otra razón de la importan cia del paralelismo de Levi Civita es que es invariante por deformaciones( puede definirse con referencia únicamente a la primera forma cuadr. fund.)

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{R_2} \qquad (27)$$

siendo $\varphi$ el ángulo que el plano normal considerado forma con el plano normal principal que corresponde a $R_1$. Hay que recordar que en la (27), a diferencia de lo que se hace generalmente para las curvas planas, los valores de R se consideran con su signo, de acuerdo con que, sobre la normal en P. el correspondiente centro de curvatura esté por una parte u otra de P. Los valores extremos de R son, como se dijo, $R_1$ y $R_2$, lo que se confirma al considerar el primer miembro de (27) como función de $\varphi$: la derivada que vale

$$2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$$

se anula para $\operatorname{sen}\varphi = 0$, $\cos\varphi = 0$, etc. Esto subsiste si $R_1$ y $R_2$ son distintos entre sí. En el caso opuesto todos los valores de R son iguales entre sí en el punto considerado: el punto P es un "punto umbilical" de la S (p. e. se presenta en este caso un punto cualquiera de una superficie esférica)

Si $R_1$, $R_2$ tienen el mismo signo, lo mismo ocurre de los demás valores de R: es el caso que se presenta en los puntos elípticos, como lo veremos dentro de poco. En cambio en los hiperbólicos $R_1$ y $R_2$ tienen signos opuestos.

El conocimiento de los dos radios principales en P permite calcular la curvatura de cada sección normal y luego formarse una idea aproximada de la forma de la superficie alrededor de P. El mismo objeto, como es claro, se consigue si se conocen las dos expresiones $R_1 + R_2$ y $R_1R_2$, o bien

$$K = \frac{1}{R_1R_2} \qquad (28)$$

y

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad (29)$$

K,H se llaman respectivamente curvatura total y curvatura media de la S en P (A veces es la H/2 que recibe el nombre de curvatura media). Cada una de ellas brind algunas analogí con la curvatura de una línea plana, más particularmente K.

Busco una expresión de la curvatura de una línea L trazada sobre S , y pasante por P, mediante las dos formas cuadr. fund. Sea L referida al arco s;y sean T,N versores a lo largo de su tangente y normal principal. Entonces(Frenet) $dT/ds = N/\rho$ siendo $\rho$ el radio de curv de L en P. A lo largo de L, tenemos

$$T \times \bar{n} = 0$$

($\bar{n}$ sigue con el sign de p.223): derivando con respecto a s

$$\frac{dT}{ds} \times \bar{n} = -T \times \frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{d\bar{x}}{ds} \times \frac{d\bar{n}}{ds} =$$

$$= -\frac{d\bar{x} \times d\bar{n}}{ds^2} = \frac{2^a \text{ forma}}{1^a \text{ forma}}$$

Luego, al multiplicar la mencionada fórmula de Frenet escalarmente por $\bar{n}$ resulta

$$\boxed{(30) \qquad \frac{N \times \bar{n}}{\rho} = \frac{2^a \text{ forma}}{1^a \text{ forma}} = \frac{\mathcal{D}\,du^2 + 2\mathcal{D}'\,du\,dv + \mathcal{D}''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}$$

En particular, apliquemos (30) al caso en que L es una sección plana normal en P. Entonces el plano osc a L en P coincide con el plano de la sección, y luego N,n son vectores unitarios a lo largo de la normal a S en P, que pueden o no coincidir aún en el sentido (depende de la orientación de la recta normal a S en P). Por consiguiente $N \times \bar{n} = \pm 1$. Por otra parte , debido a que $\rho$ es positivo y R tiene signo, $\rho = \pm R$. En definitiva,

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{\mathcal{D}\,du^2 + 2\mathcal{D}'\,du\,dv + \mathcal{D}''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} \qquad (31)$$

Un examen un poco más detenido de la cuestión de los signo, permite precisar la (31) en la forma

$$\frac{1}{R} = \frac{\mathcal{D}\,du^2 + 2\mathcal{D}'\,du\,dv + \mathcal{D}''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} \qquad (32)$$

con la convención que para las secciones normales se tome R positivo o negativo, según que el correspo centro de curvatura está sobre la semirecta normal positiva o no. Sin embargo en algunos libros(p. e. Bianchi) se hace la convención contraria, y la (32) se escribe entonces con -.

De (32) podría deducirse la ecuación de Euler. Más bien, deduzco de la (30) el llamado teor. de Meusnier, que relaciona la curvatura en P de una sección plana cualquiera, producida por un plano $\alpha$, con la de la sección normal hecha por el plano $\lambda$, normal a S en P, llevado por la recta t ~~tangente a~~ tangente en P a la sección considerada. Para las dos secciones los segundos miembros de (30) coinciden, luego también los primeros. Pero para la primera sección $N \times \bar{n}$ es el coseno del ángulo $\theta$ ~~entre el ángulo~~ entre la normal a la sección en P y la normal a la S, es decir el ángulo entre el plano $\alpha$ y el plano $\lambda$ Tenemos así

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{1}{R} \text{ es decir } \qquad \boxed{\rho = R\cos\theta}$$

que es la fórmula de Meusnier.

Paso ahora a expresar las curvaturas total y media de S en un punto P en función de los 6 coeficientes de las dos formas fund.

Con este objeto, parto de la observación que si R coincide con un radio principal de curvatura, existe una única sección normal que lleva a dicho valor(se sobrentiende que se excluyen los puntos umbilicales), mientras que cada otro valor de R, si corresponden al ángulo $\varphi$ también procede, según la fórmula de Euler, del ángulo $-\varphi$.

Por lo tanto si R es un radio princ. , existe un único valor de dv/du tal que sea

$$(33) \quad (R\mathcal{D} - E)\,du^2 + 2(R\mathcal{D}' - F)\,du\,dv + (R\mathcal{D}'' - G)\,dv^2 = 0$$

La fórmula de Gauss permite atribuir un sentido a la expresión "curvatura de una forma cuadrática diferencial en dos variables"- se entiende para un determinado par de valores de la misma. Es, por definición, la expresión que resulta como valor de H al plicar la fórmula de Gauss, es decir la curvatura total de una superficie que admita dicha forma (definita) como primer forma cuadr. fundamental

P. e. la forma

$$2U(u)\ V(v)\ du\ dv$$

tiene curvatura nula idénticamente, porque la fórmula wue sigue, para $E=G=0$, $F=2U(u)\ V(v)$, da $K=0$.

La (33) , como ecuación en dv/du tiene que tener discr. nulo, luego

$$(RD-E)(RD''-G)-(RD'-F)^2=0$$

es decir

$$(DD''-D'^2)R^2-(ED''-2FD'+GD)R+(EG-F^2)=0$$

Es esta una ecuación de segundo grado cuyas raices son $R_1$ y $R_2$ .Luego

$$\boxed{K=\frac{1}{R_1R_2}=\frac{DD''-D'^2}{EG-F^2} \qquad (K)}$$

$$\boxed{H=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{ED''-2FD'+GD}{EG-F^2} \qquad (H)}$$

[illegible] subsistiendo para pun[illegible]bólicos.

Estas fórmulas las hemos deducidas para puntos no parab. (porque para ptos no parab. hemos definido $R_1$, $R_2$) .En un pt parabolico podrían adoptarse las (K),(H) como definiciones, con tal que se averigue que los segundos miembros son intrínsecos, lo que es evidente para K .Entonces(v.p.233) los puntos elipt. parab.,hiperb. corresponden resp. a $K>0$, $K=0$, $K<0$.

La curvatura total en un punto , según (K) , es cierta función de D D'D" E F G .Existe otra fórmula, de Gauss, que expresa K únicamente en función de E,F,G.la cual tiene importancia conceptual, en cuanto comprueba que la curvatura total es invariante por deformaciones, loque no es por nada evidente en la definición de K, ni en la fórmula (K). A la fórmula de Gauss llegamos como sigue.

$$K=\frac{DD''-D'^2}{EG-F^2}=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uu} & y_{uu} & z_{uu}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} \cdots \\ \cdots \\ x_{vv}\cdots\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \cdots \\ \cdots \\ x_{uv}\cdots\end{vmatrix}^2\right\}$$

(24) p. 245

$$=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix} E & F & \Sigma x_u x_{vv} \\ F & G & \Sigma x_v x_{vv} \\ \Sigma x_u x_{uu} & \Sigma x_v x_{uu} & \Sigma x_{uu} x_{vv}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} E & F & \Sigma x_u x_{uv} \\ F & G & \Sigma x_v x_{uv} \\ \Sigma x_u x_{uv} & \Sigma x_v x_{uv} & \Sigma x_{uv}^2\end{vmatrix}\right.$$

Ahora $\sum x_u x_{uu} = \frac{1}{2} E_u$, $\sum x_v x_{vv} = \frac{1}{2} G_v$

$$\sum x_u x_{uv} = \frac{1}{2} E_v, \quad \sum x_v x_{uv} = \frac{1}{2} G_u$$

Además de $\sum x_u x_v = F$, derivando se

$$\sum x_{uu} x_v + \frac{1}{2} E_v = F_u \qquad (°)$$

$$\sum x_u x_{vv} + \frac{1}{2} G_u = F_v$$

Derivando (°) con respecto a $v$ tenemos

$$\sum x_{uu} x_{vv} = -\frac{1}{2} E_{vv} + F_{uv} - \sum x_{uuv} x_v$$

Por otra parte $\left(\sum x_{uv} x_v\right)_u = \left(\frac{1}{2} G_u\right)_u$ de

$$\sum x_{uv}^2 = \frac{1}{2} G_{uu} - \sum x_{uuv} x_v \quad \text{de modo que}$$

$$\sum x_{uu} x_{vv} - \sum x_{uv}^2 = F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv} - \frac{1}{2} G_{uu} \quad \text{y}$$

reemplazando

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \begin{vmatrix} E & F & F_v - \frac{G_u}{2} \\ F & G & \frac{G_v}{2} \\ \frac{E_u}{2} & F_u - \frac{E_v}{2} & F_{uv} - \frac{E_{vv}}{2} - \frac{G_{uu}}{2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & F & \frac{E_v}{2} \\ F & G & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} & 0 \end{vmatrix} \right\} \qquad (34)$$

UNA OBSERVACION SOBRE LAS SUPERFICIES DE AREA MINIMA. –

Si tomamos la ecuación de una sup. en la forma z=f(x,y), la curvatura media puede calcularese con la (H) donde ahora

$$E = 1+p^2 \qquad \mathcal{D} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & r \end{vmatrix} = \frac{r}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$F = pq$$

$$G = 1+q^2 \qquad \mathcal{D}' = \frac{s}{\sqrt{EG-F^2}} \qquad \mathcal{D}'' = \frac{t}{\sqrt{EG-F^2}}$$

Luego, si escribimos que la curvatura media es nula (en todos los puntos de la S) encontramos la condición

$$(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = 0$$

Se trata de la misma ec a der parc que ya encontramos (p.157) para las superficies de area mínima. Luego las superficies de area minima pueden caracterizarse como <u>superficies de curvatura media nula</u>.

También las superficies de area minima tienen la propiedad caracteristica de que sus dos sistemas de asintóticas integran un doble sistema ortogonal. En efecto, si simpoemos a una sup. S esta última condición, y la referimos p. e. a las asintóticas, de forma que D=D"=0, la condición es F=0 y coincide con la que expresa que la curvatura media es nula a saber

$$\cancel{E}D'' - 2FD' + \cancel{G}D = 0$$

P.e. para el helicoide conoide recto (que como sabemos es una sup de area minima) las asintóticas son las que se indicaron a p.232 y forman precisamente dos familias de líneas perpendiculares.

La (34) es precisamente la fórmula de Gauss.

La invariancia de K a través de aplicabilidades da a la curvatura total una particular importancia.

Para las superficies desarrollables sobre el plano (p. e conos cilincdros, etc) la invariancia de la K implica que K=0, confirmándose así el resultados que para ellas $DD'' - D'^2 = 0$ (p. 235).

En conexión con lo dicho, aludo a las <u>líneas de curvatura</u> de una superficie S. Se llaman tangentes de curvatura en un punto las que son perpendiculares a sus conjugadas. Debido a que en una involución no circular existe uno y un único par de rectas comjugadas y perpendiculares, en la involucioń de las tangentes conjugadas en P existe un par y uno sólo forma do por tangentes perpendiculares, es decir existe uno y un único par de tangentes de curvatura, con tal que dicha invo lución sea la involución circular . El caso de excepción se ~~presenta cuando distinta de~~

presenta, como es claro cuando las tangentes principales por P (rectas dobles de la involución de las tangentes conjugadas) coinciden con las tangentes isótropas por P, es decir cuando las dos ecuaciones

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0$$

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0$$

coinciden, es decir cuando $D:D':D'' = E:F:G$. Pero entonces la (32) enseña que para las varias secciones normales en P, R tiene un mismo valor, esto es cuando el punto P es un punto umbilical.

Sobre una superficie S cuyos puntos no sean todos umbili cales (las S con todos los puntos umbilicales, si no son planas son esferas, como podría comprobarse), si consideramos una región que no contenga puntos umbilicales, las dos tangentes de curvatura envuelven dos familias $\infty^1$ de líneas, que son precisamente las llamadas <u>líneas de curvatura</u> . Es claro que el doble sistema de las lineas de curvaturas puede defi nirse come un doble sistema que es al mismo tiempo conjugado y ortogonal.

Al tomar las líneas de curvatura como líneas coordenadas, las dos formas cuadr fund. se reducen a los tipos:

Otra propiedad característica de las líneas de curvatura es la siguiente que me limito a enunciar: las normales a la S en los puntos de una línea de curvatura integran una desarrollable

$$E\,du^2 + G\,dv^2 \qquad \mathcal{D}\,du^2 + \mathcal{D}''\,dv^2 \qquad (35)$$

P.e. sobre una sup. de rotación las líneas de curvaturas son dadas por meridianos y paralelos (pp.205,227). X

Las (35) permiten escribir (32) en la forma

$$\frac{1}{R} = \frac{\mathcal{D}\,du^2 + \mathcal{D}''\,dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2}$$

la cual enseña que los valores extremos de R corresponden a du=0, dv=0. Luego las tangentes de curvatura son las trazas sobre el plano tangente de las secciones normales principales

Si la superficie S está representada en parametros curvilíneos cualesquiera, y se quiere la ec dif de las líneas de curvatura, puede observarse que para ellas rigen la (21) p. 219 y la(26) p.239. Eliminando p. e. las diferenciales $du, dv$ resulta la ec buscada en la forma

$$\begin{vmatrix} \mathcal{D}\,du + \mathcal{D}'\,dv & \mathcal{D}'\,du + \mathcal{D}''\,dv \\ E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \end{vmatrix} = 0 \qquad (36)$$

~~Formulas&&&&&&&~~ Ecuaciones fundamentales. Formulas de Codazzi-Mainardi.- Analogte a lo observado a p.181 a proposito de las formulas de Frenet, en cada punto de la S tenemos tres vectores no coplanares

$$\bar{x}_u \qquad \bar{x}_v \qquad \bar{n}. \qquad (37)$$

Cada otro vector del espacio puede representarse como una combinación lineal de ellos. En particular esto ocurre de

$$\bar{x}_{uu}, \quad \bar{x}_{uv}, \quad \bar{x}_{vv}, \quad \bar{n}_u, \quad \bar{n}_v \qquad (38)$$

(los vectores derivados de los propios vectores (37). Las ecuaciones fundamentales son las que expresan efectivamente dichas combinaciones lineales.

P.e., si escribimos

$$x_{uu} = \alpha x_u + \beta x_v + \gamma n$$

y queremos determinar efectivamente $\alpha, \beta, \gamma$, si multiplicamos internamente resp. te por $\bar{x}_u, \bar{x}_v, n$, tenemos

$$\frac{1}{2}E_u = \alpha E + \beta F, \quad F_u - \frac{1}{2}E_v = \alpha F + \beta G, \quad \mathcal{D} = \gamma$$

de las cuales se despeja

$$\alpha = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)}, \quad \beta = \frac{-FE_u + 2EF_u - EE_v}{2(EG-F^2)}, \qquad \gamma = D \qquad (39)$$

Luego, podemos escribir

$$\bar{x}_{uu} = \Gamma_{11}^{1}\bar{x}_u + \Gamma_{11}^{2}\bar{x}_v + D\bar{n} \qquad (40)$$

si llamamos $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$ a las expresiones ahora encontradas de $\alpha, \beta$.

$\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$ (que son por lo visto ciertas expresiones dependientes de la p imera forma cuadr fund.) son los llamados símbolos de Christoffel de segunda especie relativos a la primera forma.

En general, para una forma cuadr diferencial en n diferenciales

$$du^1, du^2, \dots\dots\dots, du^n$$

$$\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(u^1, \dots u^n)\, du^i du^k \qquad (g_{ik} = g_{ki})$$

o como se escribe más brevemente sobrentendiendo que se sume con respecto a cada letra que aparezca contemporaneamente por debajo y por arriba

$$g_{ik}\, du^i du^k$$

se definen simbolos de christoffel de primera especie y de segunda especie. Los primeros por

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right) \quad (i,j,k = 1 \dots n)$$

(no hay ninguna sumatoria). Los de segunda especie por

$$\Gamma_{ij}^{k} = g^{k\alpha}\,\Gamma_{\alpha,ij}$$

(hay sumatoria con respecto a $\alpha$), donde llamé $g^{k\alpha}$ al complemento de $g_{k\alpha}$ en el determinante de los coef. $g_{k\alpha}$

(discriminante de la forma cuadr.) dividido por el propio dis criminante.

Si se aplican estas definiciones al caso en que la forma cua drática es la primera forma cuadr de la sup. S , $\Gamma_{11}^{1}$ y $\Gamma_{11}^{2}$ coinciden con los calculados en las (39).

Como para (40) puede actuarse para expresar $\bar{x}_{uv}, \bar{x}_{vv}$ Así se tienen las ecuaciones fundamentales

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^{1}\,\bar{x}_u + \Gamma_{11}^{2}\,\bar{x}_v + D\,\bar{n} \\ \bar{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^{1}\,\bar{x}_u + \Gamma_{12}^{2}\,\bar{x}_v + D'\,\bar{n} \\ \bar{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^{1}\,\bar{x}_u + \Gamma_{22}^{2}\,\bar{x}_v + D''\,\bar{n} \end{aligned}\right\} (41)$$

Los valores de $\Gamma_{22}^{1}, \Gamma_{22}^{2}$ pueden escribirs explicitamente dedu ciendolos por simetría de los de $\alpha, \beta$. Además resulta

$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma_{12}^{2} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)}$$

Por lo que respecta a los otros vectores (38), si escribimos

$$\bar{n}_u = \lambda\,\bar{x}_u + \mu\,\bar{x}_v + \rho\,\bar{n}$$

y otra vez multiplicamos internamente por $\bar{x}_u, \bar{x}_v, \bar{n}$ , tenemos

$$-D = \lambda E + \mu F, \quad -D' = \lambda F + \mu G, \quad 0 = \rho$$

(el primer miembro de esta última ecuación es cero, porque derivando $n^2 = 1$ se deduce $n \times n_u = 0$ ). Luego

$$\left.\begin{aligned} \bar{n}_u &= \frac{FD' - GD}{EG-F^2}\,\bar{x}_u + \frac{FD - ED'}{EG-F^2}\,\bar{x}_v \\ &\text{y análoga} \\ \bar{n}_v &= \frac{FD'' - GD'}{EG-F^2}\,\bar{x}_u + \frac{FD' - ED''}{EG-F^2}\,\bar{x}_v \end{aligned}\right\} (42)$$

Entonces, podemos formar las condiciones de integrabilidad de las (41), es decir escribir que las dos expresiones del vector $x_{uuv}$ deducidas por derivación de la primera o de la segunda (41) coinciden; y análogte para & $x_{uvv}$. En el cálculo hay que utilizar las (42). Actuando p. e para $x_{uuv}$, tenemos

$$\frac{\partial \Gamma_{11}^{1}}{\partial v}\bar{x}_u + \frac{\partial \Gamma_{11}^{2}}{\partial v}\bar{x}_v + \mathcal{D}_v\bar{n} + \Gamma_{11}^{1}\left[\Gamma_{12}^{1}\bar{x}_u + \Gamma_{12}^{2}\bar{x}_v + \mathcal{D}'\bar{n}\right] +$$

$$+ \Gamma_{11}^{2}\left[\Gamma_{22}^{1}\bar{x}_u + \Gamma_{22}^{2}\bar{x}_v + \mathcal{D}''\bar{n}\right] + \mathcal{D}\left\{\frac{F\mathcal{D}''-G\mathcal{D}'}{EG-F^2}\bar{x}_u + \frac{F\mathcal{D}'-E\mathcal{D}''}{EG-F^2}\bar{x}_v\right\} =$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{12}^{1}}{\partial u}\bar{x}_u + \frac{\partial \Gamma_{12}^{2}}{\partial u}\bar{x}_v + \mathcal{D}'_u\bar{n} + \Gamma_{12}^{1}\left[\Gamma_{11}^{1}\bar{x}_u + \Gamma_{11}^{2}\bar{x}_v + \mathcal{D}\bar{n}\right]$$

$$+ \Gamma_{12}^{2}\left[\Gamma_{12}^{1}\bar{x}_u + \Gamma_{12}^{2}\bar{x}_v + \mathcal{D}'\bar{n}\right] + \mathcal{D}'\left\{\frac{F\mathcal{D}'-G\mathcal{D}}{EG-F^2}\bar{x}_u + \frac{F\mathcal{D}-E\mathcal{D}'}{EG-F^2}\bar{x}_v\right\}$$

La comparación de los coef de $\bar{n}$ brinda

$$\mathcal{D}_v - \mathcal{D}'_u - \Gamma_{12}^{1}\mathcal{D} + \left(\Gamma_{11}^{1} - \Gamma_{12}^{2}\right)\mathcal{D}' + \Gamma_{11}^{2}\mathcal{D}'' = 0 \qquad (43)$$

Análogte

$$\mathcal{D}''_u - \mathcal{D}'_v + \Gamma_{22}^{1}\mathcal{D} + \left(\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{12}^{1}\right)\mathcal{D}' - \Gamma_{12}^{2}\mathcal{D}'' = 0 \qquad (44)$$

Hemos así deducido que necesariamente entre los seis coeficientes de las formas cuadr fund de una sup. S subsisten las relaciones (43),(44), Las mismas llámanse ecuaciones de &&&&& Codazzi-Mainardi. Otra fórmula conceptualmente análoga es la de Gauss (34). Podríamos también igualar los coeficientes de $x_u$, y los de $x_v$: sin embargo el cálculo efectivo enseñaría que se volvería a la ec de Gauss.

La importancia de las fórmulas de Codazzi y de Gauss consiste en que , como puede demostrarse no sólo son necesarias sino también suficientes para que exista una superficie p&&& que tenga las $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, $\mathcal{D}\,du^2 + 2\mathcal{D}'\,du\,dv + \mathcal{D}''\,dv^2$ como formas fundamentales [illegible]demás dicha superficie resulta individualizada por el conocimiento de las dos formas a menos de movimientos.

Se trata de un resultado particularmente importante, que permite reemplazar el estudio de la superficie realizado sobre las ecuaciones paramétricas por el estudio realizado sobre el par de las formas cuadráticas fundamentales, con la ventaja que estas representan al mismo tiempo la superficie y sus superficies iguales(véase p. 223)

Lo dicho también permitiría encarar el problema de la deformación de una superficie bajo el aspecto siguiente. Dado el $ds^2$, buscar cuáles son las ternas de funciones

$$D(u,v),\ D'(u,v),\ D''(u,v)$$

que cumplen con la ecuación de Gauss y las de Codazzi.

P. e. el estudio de las superficies de curvatura(total constante) podría hacerse empezando por estudiar los $ds^2$ que tienen su curvatura(p. 246) constante, considerando luego las ternas de funciones $D, D', D''$ que cumplen con dichas ecuaciones. Algo sobre las sup. de curvatura total const. se encuentra en el curso de Metodología, en relación con la geom. no euclidiana.

---

El hecho que una sup. ya está individualiza ~~(&&&&&&&&&&&&&&&~~ (en el grupo de los movimientos) por sus dos formas cuadr. fundamentales, resta importancia a la introdución de otras formas cuadr. en cuanto estas tengan el objeto de representar la superficie. Sin embargo, con prescindencia de tal objeto, la consideración de otras formas puede ser útil. Hay una tercera forma cudrática

$$d\bar{n}^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 \qquad (45)$$

Después de lo dicho es claro que sus coeficientes deben poderse expresar mediante EFGD D'D''. En realidad, el cálculo efectivo enseña que

$$e = -KE + HD, \quad f = -KF + HD', \quad g = -KG + HD'' \qquad (46)$$

de forma pues que

$$eg - f^2 = K^2(EG - F^2) - KH(ED'' - 2FD' + GD) + H^2(DD'' - D'^2)$$

es decir, reemplazando el segundo parñntesis con el numerador de H(p.247) etc

$$= K^2(EG-F^2) \cancel{- KH^2\cdot(EG-F^2)} \cancel{+ H^2K\cdot(EG-F^2)}$$

es decir

$$eg - f^2 = K^2(EG-F^2) \qquad (47)$$

La tercera forma cuadr. de la sup.S tiene una interpretación geométrica muy sencilla.Por el punto O(origen) llebo la paralela a la normal positiva variable de la sup.S y con la misma corto la esfera unitaria de centro O, logrando en correspondencia a cad punto P de la S un punto P'de la esfera, llamado su imagen esféi co.Al variar P sobre una porción de sup S ,el punto P'varía generalmente sobre la esfera, recubriendo una porción de la misma llamada a su vez imagen esférico de la porción anterior. Es obvio que el vector $\bar{n}$ actua para la sup imagen esférico como el vector $\bar{x}$ para la S:luego la (45) es al mismo tiempo tercera forma cuadr. fund de la S y primera para la esfera(con respecto a los mismo parámetros u,v empleados paea la S).

Esta consideración nos lleva fácilmente a un significado geom de K.Si alrededor de un punto P consideramos una porción S de la sup.(1), e indicamos con $\sigma$ la correspondiente porción de la es fera considerada como imagen ,tenemos

$$\text{area } S = \iint_R \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv; \quad \text{area } \sigma = \iint_R \sqrt{eg-f^2}\,du\,dv$$

Si ahora empequeñecemos el area de S alrededor de P en todas las direcciones y la hacemos tender a cero, tenemos

$$\lim \frac{\text{area } \sigma}{\text{area } S} = \lim \frac{\iint_R K\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv}{\iint_R \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv}$$

Este significado de la curvatura total en un punto P qcerca la curvatura total de una sup. en un punto al concepto de la curvatura en un punto de una curva plana, para& la cual, debido a su definición ,se tiene un significado análogo(acudiendo a un "imagen circular"de la curva considerada).

### Lineas geodésicas.

Termino con algunas pocas nociones sobre las geodésicas de una superficie

(1) [illegible] en un area R del plano u,v.

Históricamente se han introducido por primera vez las líneas geodésicas de una sup. S en relación con el problema del camino minimo sobre la S para unir dos puntos dados, en substancia como lineas extremales en el problema de minimizar la integral que expresa dicho camino. Imaginando a lo largo de las lineas consideradas $v=v(u)$, si $P(u_0\ v_0)$ y $Q(u_1 v_1)$ son los dos puntos de S, se trata de la integral

$$\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E+2Fv'+Gv'^2}\,du$$

La ecuación de Euler(ec dif de segundo orden de las extremales) es por lo tanto

$$\frac{\partial\sqrt{\ }}{\partial v} - \frac{d}{du}\frac{\partial\sqrt{\ }}{\partial v'} = 0$$

esto es sucesivamente

$$\frac{E_v+2F_v v'+G_v v'^2}{2\sqrt{\ }} - \frac{d}{du}\frac{F+Gv'}{\sqrt{\ }} = 0,$$

y

$$\frac{E_v+2F_v v'+G_v v'^2}{2\sqrt{\ }} - \frac{\frac{d}{du}(F+Gv')}{\sqrt{\ }} + \frac{(F+Gv')\frac{d}{du}(E+2Fv'+Gv'^2)}{2(E+2Fv'+Gv'^2)^{3/2}} = 0$$

$$\boxed{(E+2Fv'+Gv'^2)\left[E_v+2F_v v'+G_v v'^2-2\frac{d}{du}(F+Gv')\right] + (F+Gv')\frac{d}{du}(E+2Fv'+Gv'^2)=0 \qquad (1)}$$

El coeficinnte de la derivada segunda v" en la ec dif (1) es

$$-2G(E+2Fv'+Gv'^2)$$
$$+(F+Gv')(2F+2Gv') = -2(EG-F^2) \neq 0$$

y por consiguiente por cada punto genérico de la S, en cada dirección prefijada pasa una y una única geodésica .También es claro que el concepto de línea geodésica es invariante por deformaciones.

A las lineas geodésicas puede llegarse tambiéb desde otros puntos de vista, independientemente de todo problema de mínimo. Las líneas geod. como extremales etc. se presentan como análogas de lo que para una sup. S plana son las líneas rectas (líneas de camino mínimo).Ahora en el plano las rectas pueden caracterzarse de otras maneras, y estas otras caracterizaciones pueden generalizarse a las demás superficies S, llevando así a otras depfinciones de las geodésicas, que coinciden con la anterior.

P. e. en un plano pueden considerarse las rectas como líneas de curvatura nula.Para una línea L de S, en un punto , puede darse una definición de cierta curvatura, dependente de L y de la S, llamada curvatura geodésica, análoga a la curvatura de una línea plana.Hecho èsto, pueden definirse las geodésicas como líneas de curvatura geodésica nula

El aludido concepto de curvatura geodésica de L en P puede aclararse de varias maneras.P.e. si a lo largo de L el vector $\bar{x}$ se expresa como función del arco s

$$x = \bar{x}(s)$$

puede la curv geod. definirse como producto mixto

$$\frac{1}{\rho_g} = \bar{x}_s \wedge \bar{x}_{ss} \times \bar{n} = \begin{vmatrix} x_s & y_s & z_s \\ x_{ss} & y_{ss} & z_{ss} \\ X_s & Y_s & Z_s \end{vmatrix} \qquad (2)$$

$\rho_g$ llámase el radio de curvatura geodésica. La definición tiene caracter intrínseco,siendo el primer miembro independiente de lo ejes, como igual a seis veces el volumen del paralelepípedo construído sobre los vectores $x_s$ (unitario tangente ), $x_{ss} = N/\rho$ y n

Si la superficie S se reduce a un plano, la curvatura geodésica (prescindiendo eventualmente del signo) se reduce a la curvatura ordinaria, porque, si la curva está p.e. en el plano xy resulta

$$\frac{1}{\rho_g} = \begin{vmatrix} x_s & y_s \\ x_{ss} & y_{ss} \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{\rho}$$

Volviendo al caso de S cualquiera, <u>la curvatura geodésica es invariante a través de las deformaciones</u> ,a pesar de que ésto no es evidente sobre la definición (2). Con este objeto es suficiente asegurarse de que puede aclcularse mediante únicamente la primera forma cuadr. .Debido al caracter intrínseco, puedo suponer las líneas coordenadas ortogonales, de modo que F=0.Entonces a lo largo de L que supongo sea una línea u [illegible],

$$\bar{x}_s = \bar{x}_u \frac{du}{ds} = \frac{\bar{x}_u}{\sqrt{E}}$$

$$\bar{x}_{ss} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\bar{x}_u}{\sqrt{E}}\right) = \frac{\bar{x}_{uu}}{E} - \frac{1}{2} E_u E^{-3/2} \frac{1}{\sqrt{E}} \bar{x}_u =$$

$$= \frac{\bar{x}_{uu}}{E} - \frac{E_u}{2E^2} \bar{x}_u$$

Luego (ec. fund. (4,1) p. 257)

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{\sqrt{E}} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ \frac{x_{uu}}{E} - \cancel{\frac{E_u}{2E^2}} x_u & \frac{y_{uu}}{E} - \cancel{\frac{E_u}{2E^2}} y_u & \frac{z_{uu}}{E} - \cancel{\frac{E_u}{2E^2}} z_u \\ X & Y & Z \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{E^{3/2}} \begin{vmatrix} x_u & & \\ \cancel{\Gamma_{11}^1 x_u} + \Gamma_{11}^2 x_v + \cancel{DX} & \cdots & \\ X & \cdots & \end{vmatrix} = \quad (\text{p. } 225)$$

$$= \Gamma_{11}^2 E^{-3/2} \frac{1}{\sqrt{EG-\cancel{F^2}}} (EG - \cancel{F^2}) = \Gamma_{11}^2 \frac{\sqrt{G}}{E}$$

$$\left(\text{p. } 255 \text{ para } F=0 \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{-E_v}{2G}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho_g} = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\sqrt{E}\right)_v} \quad (3)$$

La (3) comprueba lo enunciado.

De lo visto puede deducirse otro significado de la curvatura geodésica, en base al cual también se la llama curvatura de desarrollo. Digo previamente que si dos superficies son tangentes a lo largo de una línea L, esta tiene, en cada uno de sus puntos, la misma curvatura geodésica con respecto a las dos superficies (si se quiere que resulten coincidentes aún los signos, hay que orientar de la misma manera la normal positiva a las dos en los puntos de L): es suficiente, para comprobarlo, fijarse en la definición (2) de la curvatura geodésica. Ahora bien, si ~~a lo largo de~~ L consideramos la superficie S´desarrollable circunscripta a la S a lo largo de L (p.238) puede aplicarse lo dicho a S y S´: además, al desarrollar S´sobre un plano, la curvatura geodésica no varía. En definitiva tenemos para la curvatura geod en un punto de L el significado siguiente: a lo largo de L se circunscribe la desarrollable circunsripta a la S y se desarrolla la misma sobre un plano: la curvatura geodésica en un punto de L coincide con la curvatura ~~xxx~~

en el punto correspondiente, de la línea plana así lograda.

La curvatura geodésica también recibe el nombre de curvatura tangencial, debido a que, si P es un punto de L , y la L se proyecta ortogonalmente en una línea L´en el plano tangente a S en P. la curvatura ~~tan~~ geodésica de L en P es igual (prescindiendo del signo) a la curvatura en P de la línea plana L´,como podría averiguarse.

OBSERVACION. La (3) expresa la curvatura geodésica de una línea particular(una línea u) en un sistema de coordenadas curvilíneas particulares(ortogonales, etc.).Cabe preguntarse cuál es más generalmente la expresión de la curvatura geodésica de una línea cualquiera, siendo también cualesquiera los parámetros curvilíneos u,v. Si la línea considerada tiene sobre la S la ecuación

$$\varphi(u,v) = 0$$

o más generalmente $\varphi(u,v) = \text{const.}$ la contestación está contenida en la siguiente fórmula de Bonnet que me conformo con enucniar( a la cual podría llegarse introduciendo convenientemente el útil concepto de los llamados parámetros diferenciales)[1]

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\left(\frac{F\varphi_v - G\varphi_u}{\sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_v\varphi_u + G\varphi_u^2}}\right)_u + \left(\frac{F\varphi_u - E\varphi_v}{\sqrt{\cdots\cdots}}\right)_v\right\}$$

(1) La idea es la siguiente. Para una función $\varphi(u,v)$ , o para un sistema de más funciones $\varphi(u,v),\ \psi(u,v)\ldots$ se llama parámetro diferencial a una expresión que dependa de las funciones consideradas y algunas de sus derivadas, además que de los coeficientes de una forma cuadrática adoptada como fundamental

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

que escribimos también(p.255)

$$g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}\,du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2$$

cuando dicha expresión disfruta del caracter de invariancia con respecto a los cambios de variables. Resulta que tales son p. e.

a) para una función $\varphi(u,v)$ el parámetro diferencial prime-

Sigue en esta p. 275

Aclarado así el concepto de curvatura geodésica, puede darse otra definición de las geodésicas, como lineas de la superfi&&cie que tienen nula la curvatura geodésica en toȡos sus puntos. Es claro que la noción así definida es, lo mismo como la de curvatura geodésica, invariante por deformaciones.

La nueva definicón equivale a la siguiente: una línea L de la S es geodésica si la L tiene en cada uno de sus puntos genéricos su plano osculador normal a la S ( o bien si L es una recta). Compárease con la defincíón de asintótica, pero se trata por supuesto de cosas distintas. En efecto para una L no recta el plano osculador està definido por los dos vectores $\bar{x}_s$ y $\bar{x}_{ss}$ : pedir que el plano osc sea normal a la S equivale a pedir que el plano de los mismo contenga también el vector n es decir( formula (2) )que se anule la curvatura geodes. Para L recta &&& el vector $x_{ss}$ se anula, etc.

---

(sigue de la p. anterior)
ro(así llamado porque el orden máximo de las derivadas de $\varphi$ que aparecen en el mismo es el primero)

$$\Delta_1\varphi = g^{rs}\varphi_r\varphi_s = \frac{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}{EG-F^2}$$

b)para la misma funciín el parámetro diferencial segundo

$$\Delta_2\varphi = g^{rs}\left(\varphi_{rs} - \Gamma^{\alpha}_{rs}\varphi_\alpha\right) =$$

que se indica con el símbolo $\Delta$ debido a que en el caso en que

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

se reduce precisamente al $\Delta$ (En el paréntesis $\varphi_{rs}$ indica, conformemente a las notaciones de este curso la derivada de $\varphi$ con respecto a $u^r, u^s$ : todo el paréntesis podría definirse como derivada segunda covariante de la misma función, siempre con respecto a la forma cuadr. adoptada como fund. e indicarse con ese mismo símbolo $\varphi_{rs}$ )

c) para dos funciones $\varphi(u,v)$ $\psi(u,v)$ el parámetro diferencial primero mixto

$$\nabla_1(\varphi,\psi) = \frac{E\varphi_v\psi_v - F(\varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u) + G\varphi_u\psi_u}{EG-F^2}$$

(Sigue nota a p. 257)

P. e. de acuerdo a la nueva definición es evidente que sobre un cilindro de rotación las hélices que tienen como eje el eje del cilindro son geodésicas(el pl osc a la hélice pasa por el radio del cilindro, luego es normal a éste) - lo que por lo demás es evidente a priori pensando en el desarrollo del cilindro sobre un plano. También la misma defininción hace evidente que sobre una esfera los círculos máximos son geodésicas.(También puede pensarse en la curvatura geod. de dicho círculo como curvatura tangencial: el círculo se proyecta en un segmento, etc.)

Puede observarse que sobre una esfera(donde cada punto es umbilical) cada línea puede considerarse como línea de curvatura: luego en particular los círculos máximos son también líneas de curvatura.Pues bien, se ve que en este caso las líneas que son al mismo tiempo geodésicas y líneas de curvatura son además líneas planas. En general, cualquier sea S si una geodésica es plana, es también línea de curvatura, porque el plano de la línea , considerado como osculador a la misma en cada uno de sus puntos,contiene la normal a la superficie en dicho punto, de manera pues que las normales a la superficie en los puntos de la línea integran una desarrollable (resucida en este caso a un plano), y se aplica p. 252.

La definición de geodésicas de p. 275 también puede ponerse en esta otra forma, que acerca de otro punto de vista las geodésicas de una superficie con las rectas de un plano.Como una rectas tiene en sus varios puntos la misma dirección, análogamente sobre S una geodésica puede definirse como línea <u>autoparalela</u>, en relación con el paralelismo de Levi Civita aludido a p. 238. En efecto, si se considera una línea L autoparalela, al desarrollar sobre un plano la desarrollable circunscripta a lo largo de L, esta línea se dispone en el plano según una línea autoparalela en el plano, es de

---

(sigue de la nota a p anterior) A la fórmula de Bonnet podría llegarse partiendo de la (3) y acudiendo oportunamente a los parámetros diferenciales, escribirla en la forma

$$\frac{1}{\rho_g} = -\frac{\Delta_2\varphi}{\sqrt{\Delta_1\varphi}} - \nabla\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1\varphi}}\right)$$

cir una recta. Luego el significado de curvatura geodésica como curvatura de desarrollo nos dice que L tiene curvatura geodésica nula, y por consiguiente es una geodésica.

Nos queda por averiguar que la definición geométrica de geodésica de p. 275 coincide con la de las geodésicas como extremales en el sentido de p. 265. Fon este objeto, parto de la nueva definición, formo la ec dif de las líneas que cumplen con ella, y averiguo materialmente que coincide con la (1) de p. 265. Me sirvo por lo tanto, para la línea considerada cuya ecuación imagino en la forma v=v(u), es decir $\varphi(u,v)=0$ siendo

$$\varphi(u,v) \equiv v - v(u),$$

de la fórmula de Bonnet de p. 273. La ec. dif. es por lo tanto (observando que $\varphi_v = 1$, $\varphi_u = -v'$)

$$\left(\frac{F+Gv'}{\sqrt{E+2Fv'+Gv'^2}}\right)_u - \left(\frac{Fv'+E}{\sqrt{\cdots}}\right)_v = 0$$

que transforma como sigue

$$\frac{(F+Gv')_u}{\sqrt{\cdots}} - \frac{(Fv'+E)_v}{\sqrt{\cdots}} - \frac{(E+2Fv'+Gv'^2)_u(F+Gv')}{2\left(\sqrt{\cdots}\right)^3} + \frac{(E+2Fv'+Gv'^2)_v(Fv'+E)}{2\left(\sqrt{\cdots}\right)^3} = 0,$$

$$2(E+2Fv'+Gv'^2)(F_u+G_uv'+Gv''-F_vv'-E_v) -$$
$$-(F+Gv')(E+2Fv'+Gv'^2)_u + (Fv'+E)(E+2Fv'+Gv'^2)_v = 0$$

Ahora a lo largo de la línea:

$$(F+Gv')\frac{d}{du}(E+2Fv'+Gv'^2)-(F+Gv')(E+2Fv'+Gv'^2)_u$$

$$+(E+2Fv'+Gv'^2-E-Fv')(E+2Fv'+Gv'^2)_v$$

luego la ec. anterior viene a escribirse

$$(E+2Fv'+Gv'^2)\left(2F_u+2G_uv'+2Gv''-\cancel{2F_vv'}-2E_v+E_v+\cancel{2F_vv'}+G_vv'^2\right)$$

$$-(F+Gv')\frac{d}{du}(E+2Fv'+Gv'^2)=0$$

es decir

$$(E+2Fv'+Gv'^2)\left\{2\frac{d(F+Gv')}{du}-2F_vv'-G_vv'^2-E_v\right\}-$$

$$-(F+Gv')\frac{d}{du}(E+2Fv'+Gv'^2)=0$$

lo que es precisamente la ec. 24 de p. 265

c d d

La misma ec. dif. puede ponerse en una forma un poco distinta, que indico más generalmente para el caso de una geodésica considerada en forma paramétrica. Para escribir que la línea $u=u(t)$ $v=v(t)$ es geod. tenemos que escribir (p. 275) que en cada punto de la misma los tres vectores

$$\bar{x}_u du+\bar{x}_v dv,\quad \bar{x}_{uu}du^2+2\bar{x}_{uv}du\,dv+\bar{x}_{vv}dv^2+\bar{x}_u d^2u+\bar{x}_v d^2v,\quad \bar{n}$$

son coplanares, es decir que el determinante de los coeficientes es nulo, cuando ellos se expresan como combinaciones lineales de los tres vectores $x_u$, $x_v$ & $\bar{n}$, es nulo

Aplicando las ec. fund. p. 257 llegamos

× ~~Obs~~. Para el $ds^2$ en forma geod. $ds^2 = du^2 + G\,dv^2$

tenemos

(de p. 255, 252) $\Gamma^1_{11} = 0,\ \Gamma^2_{11} = 0,\ \Gamma^1_{12} = 0,\ \Gamma^2_{12} = \dfrac{G_u}{2G},\ \Gamma^1_{22} = -\dfrac{G_u}{2},\ \Gamma^2_{22} = \dfrac{G_v}{2G}$

Por lo tanto la (4) se escribe (tomando $u$ como var. ind.)

$$v'' + \frac{G_u}{G} v' + \frac{G_v}{2G} v'^2 + \frac{G_u}{2} v'^3 = 0 \qquad (4').$$

Si p. e.

$$G = e^{2u/R}$$

(pseudoesfera, y más generalmente sup. pseudoesféricas)

la (4) es

$$v'' + \frac{2}{R} v' + \frac{1}{R} e^{2u/R} v'^3 = 0$$

Puesto $v' = f$ la ec. $f' + \dfrac{2}{R} f + \dfrac{1}{R} e^{2u/R} f^3 = 0$

pertenece al tipo de Bernoulli, etc. etc. $\left(\dfrac{1}{f^2} = \varphi, \text{ etc}\right)$

A

$$0=\begin{vmatrix} du & dv & 0 \\ \Gamma^1_{11}du^2+2\Gamma^1_{12}du\,dv+\Gamma^1_{22}dv^2+d^2u, & \Gamma^2_{11}du^2+2\Gamma^2_{12}du\,dv+\Gamma^2_{22}dv^2+d^2v, & D\,du^2+2D'du\,dv+D''dv^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

esto es

$$\boxed{dv\,d^2u-du\,d^2v+\Gamma^2_{11}du^3+(2\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{11})du^2dv+(\Gamma^2_{22}-2\Gamma^1_{12})du\,dv^2-\Gamma^1_{22}dv^3=0 \quad (4)}$$

que es la ecuación buscada

Acudiendo convenientemente a las geodésicas, puede ponerse el $ds^2$ de la S en una forma particular, llamada la forma geodésica del elemento lineal. Considero (por supuesto en una región convenientemente limitada) una familia $\infty^1$ de geodésicas, que tomo como líneas u, y tomo sus trayectorias ortogonales como líneas v. De la ortogonalidad sigue F=0. Además las líneas u tienen su curv. geod nula: aplicando a ellas la fórmula (3) p.267

$$\frac{1}{\rho_g}=-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}$$

resulta que E=E(u). Luego

$$ds^2=E(u)\,du^2+G(u,v)\,dv^2$$

y tomando como nuevo parametro u

$$\int\sqrt{E(u)}\,du$$

tenemos

$$\boxed{ds^2=du^2+G\,dv^2} \quad (5)$$

Sin profundizar la cuestión, observo brevemente que en una región R como aquella considerada una geodésica del sistema adoptado como líneas u brinda efectivamente la longitud mínima del camino superficial entre dos puntos $P(u_0,v_0)$, $Q(u_1,v_0)$. En efecto a lo largo de una línea $u=u(t)$ $v=v(t)$ que una dichos puntos, dentro de la región, la distancia entre P y Q es

$$\lambda = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

Ahora $G > 0$, luego si la línea no es una línea u

$$\lambda > \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2}\,dt = |u_1-u_0|$$

mientras que la longitud de la geodésica u que une los puntos considerados es

$$\lambda^* = |u_1-u_0| \qquad (6)$$

De la consideración del "campo" de geodésicas consideradas, y más precisamente de la (6) sigue, como es claro, que dos trayectorias ortogonales cortan sobre dos geodésicas cualesquiera de la familia arcos de la misma longitud. Dos de las trayectorias ortogonales (las cuales pueden lograrse una de otra, llevando en los puntos de la primera las geodésicas perpendiculares y llevando sobre las mismas arcos igualmente largos) llámanse líneas geodésicamente paralelas.

Volviendo a lo dicho sobre geodésicas y caminos mínimos cuando se parte de una geodésica, y se estudia la cuestión de si efectivamente brinda el camino mínimo, habría que estusiar la posibilidad de considerarla como geod. de un campo, estudiar la cond. de Jacobi, etc.

Más bien termino indicando, en relación con las geod el teor de Bonnet, o de Gauss-Bonnet (que me limito a enunciar): Considero una porción S de sup., encerrada en una línea simple anal.: se llama curvatura total de S a la integral

$$\Omega = \iint K\,dS = \iint_R K\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

(p. 26.) $= \iint_R \sqrt{eg-f^2}\,du\,dv$

es decir al area dela correspondiente imagen esférica. Pues bien la fórmula aludida expresa que, llamando $\gamma$ al contorno, recorrido en uno determinado de los dos sentidos (area a la izquierda)

$$\Omega + \int_{\gamma} \frac{ds}{\rho_g} = 2\pi$$

Para el caso de la curvatura total de un triángulo geod., véase Metodología.

(de p. [illegible]5)

"Grosso modo " puede decirse que para resolver el problema general de cálculo de las variaciones && planteado en la p. 5 hay que escribir la ecuación diferencial de Euler , y aprovechando las dos constantes arbitrarias que figuran en su integral buscar una línea extremal que pase por los && dos puntos prefijados P,Q. Esta es sin embargo únicamente una indicación && que puede servir como guía, debido a que en primer término no está dicho que pueda efectivamente en&& contrarse una extremal que pase por dos puntos arbitrarios prefijados, y en segundo término que la misma brinde efectivamente un mínimo (no tenemos por ahora condiciones sufi - ciente).

En cuanto a la primera posibilidad, de la no existencia de una línea extremal que pase por dos puntos prefijados arbitrariamente ( a diferencia de lo que ocurre en el ejempl tan elemental de la línea de longitud mínima entre P y Q ahora estudiado, en el cual siempre existe una extremal(línea && recta) que une P con Q ) damos el ejemplo siguiente . Sea

$$I = \int_{x_0}^{x} e^x \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

la intehral que se debe minimizar, con las condicionrs en los límites que ya conocemos. En este ejemplo la $F(x,y,y')$ depende tan sólo de $x,y'$, de modo que se aplica lo observado & en la p. 33 bis, y la ecuación de Euler puede escribirse

$$F_{y'} = \text{const},$$

es decir

$$\frac{e^x y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \alpha \qquad (1)$$

donde $\alpha$ indica una constante arbitraria. Si $\alpha=0$ ,se tiene $y'=0$ :es decir &&&&&& $y=$ const. Tenemos así una primera clase de extremales que dependen tan sólo de una constante arbitraria: <u>las paralelas al eje x</u>

Supongamos en cambio $\alpha \neq 0$ , &&& e introduzcamos otra cons tante h definida por

$$\alpha = \pm e^{h}$$

de acuerdo con el signo de $\alpha$ .Despejando y´de la (1) resulta

$$e^{2x} y'^2 = e^{2h}(1+y'^2)$$

es decir

$$y'^2(e^{2x} - e^{2h}) = e^{2h},$$

$$y' = \pm \frac{1}{\sqrt{e^{2(x-h)} - 1}}$$

( de modo que cabe considerar una linea integral só o para $x > h$) . Integrando,e indicando con k otra constante

$$\pm(y-k) = \arccos e^{-(x-h)}$$

(como p. e. puede &&&& comprobarse a posteriori por dérivación).Luego las lineas integrales son

$$\cos(y-k) = e^{-(x-h)}$$

es decir

$$e^{(x-h)} \cos(y-k) = 1$$

siendo h,k constantes arbitrarias. Es claro que todas las líneas integrales así logradas se obtienen de una de ellas mediante traslaciones arbitrarias.Por otra parte, p. e. para h=k=0 es claro que la línea

$$e^{x} \cos y = 1$$

al variar y entre 0 y $\pi/2$ da lugar a abscisas crecientes de 0 a $\infty$ , mientras que para y entre 0 y $-\pi/2$ se obtiene un arco simétrico del anterior con respecto al eje x: se tiene así un arco comprendido en la faja $y = \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2}$. Análogamente para los demás arcos, de modo que la curva queda &&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&, integrada por arcos cada uno de los cuales está comprendido en una faja de ancho $\pi$ con lados // al ,y &&&&& no se puede pasar de uno de estos a&

cos a otro sin pasar por un punto impropio. Lo mismo para las demás curvas integrales. Luego es claro que si se tom& man dos pun os P,Q no situados dentro de una faja de an&& cho $\pi$ con sus lados paralelos al eje x, por esos puntos no puede pasar ninguna curva extremal.