Geometria superiore
1926-27

Geometria differenziale
negli iperspazi I

9

Geom. diff. negli iperspazi I

Geometria superiore

1926 - 1927

Geometria differenziale negli iperspazi

I

(*) Per le generalità sugli iperspazi v. le Introd. alla g. p. degli iperspazi di E. Bertini (1a, 2a ed. 1907). e l'articolo di Segre: Mehrdim. Räume 1912 nella Enz. d. Math. Wiss.
Leggere, a proposito della utilità degli iperspazi, alcune osservazioni di Segre in Riv. di Mat. vol I: Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche (1891)

Cap. I Generalità sugli iperspazi (iperspazi)

1 – Concetto di S_n. – In G. a. si è visto come i pt. di retta, piano, spazio, si individuino risp. con 1, 2, 3 numeri (coordinate): tanto che era p. es. la stessa cosa dire p. es. punto dello spazio oppure terna di numeri (x, y, z). Se si volevano considerare anche i P_∞ – come nella geom. pro. si individuavano quei pt. coi mutui rapporti risp. di 2, 3, 4 n.i non tutti nulli: e allora era p. es. la stessa cosa dire punto dello spazio oppure quaterna $x_1 x_2 x_3 x_4$ di n.i non tutti nulli. Per fissare le idee, consideriamo appunto coord.te omogenee.[1] I due concetti dello spazio geometrico (spazio della geom. proiettiva) e dello spazio ~~analitico~~ che possiamo chiamare analitico (cioè dove il pt. è concepito come $(x_1 x_2 x_3 x_4)$: allora lo spazio appare come la totalità delle quaterne $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ non tutti nulli, e identiche se ....) sono identici tra loro: tanto che, come si può verificare molto facilmente,[2] nello spazio analitico sono verificati i postulati della Geom. proi. (Il che va inteso bene: cioè nello spazio analitico – dove non si è definito che il pt. – si possono definire p. es. piani $(\sum a_i x_i = 0)$ e rette $(\sum a_i x_i = \sum b_i x_i = 0)$ e verificare ecc. ecc.). Dunque ~~tutta~~ la Geom. del nostro spazio (qui abbiamo fissato le idee sulla proiettiva: ma si può poi anche sviluppare la parte metrica, definendo con formule opportune distanze e angoli nello spazio analitico, pl. improprio $x_4 = 0$, ecc.) si può sviluppare partendo unicamente dal concetto dello spazio analitico $(x_1 x_2 x_3 x_4)$. Considerazioni analoghe – sebbene con qualche differenza – avremmo potuto fare per il piano $(x_1 x_2 x_3)$ o la retta $(x_1 x_2)$. Allora viene naturale di studiare allo stesso titolo che le coppie, o terne, o quaterne di n.i, le totalità di gruppi di n.i in numero qualunque, ciò è p. es. le $(n+1)$ple $(x_0, x_1 \ldots x_{n+1})$ non tutti nulli e a meno di un fattore: e nulla vieta di chiamare spazio analitico a n dimensioni o brevemente spazio a n dim. (iperspazio)

[1] e spazio. Con analoghe posizioni si può p. es. per il piano

[2] cfr. Enriques Geom. proi. 2a ed. p. 383.

o S_n, tale totalità: dove il pt. è ~~tra~~ ogni particolare (π_{ri}^{pk})
Quanto si è detto prima circa di S_1, S_2, S_3 per risp. retta, piano e lo spazio. Le x_i sono le coord. omogenee del pt. (ripetere S. ben definire le non omogenee con rapporti —)

~~Ve~~ Che tutto questo sia lecito non v'è dubbio. Ma v'è uno scopo, v'è un'utilità a studiare questi nuovi spazi? Sì, prima di tutto dal pt. di vista analitico: ogni risultato che si troverà — all'infuori del linguaggio geometrico — sarà un risultato di Analisi, relativo appunto a quelle (n+1)^{ple} di n° che hanno sostenuto diritto a essere studiate che le coppie o terne o quaterne. E, come tale, lo studio degli S_n ~~potrà ottenere~~ può ricevere svariatissime applicazioni, in tutte le questioni (p. es. anche di meccanica) dove entrano molte variabili. #

~~Ma se si vuole un fermarsi il lato geometrico occorrente~~ questo si ~~riconduce~~ ~~al tutto metrico di interno — che di sostanza potrei ricondurre al primo, ma che preferisco esporre sotto una luce semplice. Vero. E per chiarirlo meglio, comincio con un esempio.~~ questo

2.- Rappresentazioni su S_3, S_n. (Parallelità binarie, cerchi, sfere)

---

geom. degli iperspazi possa trovare applicazione immediata allo studio di enti geometrici dello spazio ordinario. Ciò resterà chiarito dagli altri esempi che ora darò in cui mostro come una classe di enti si possa studiare attraverso una opportuna rappresentazione nei punti di uno S_n (in particolare S_4, S_5).

---

1) p. citare un esempio su cui torneremo: le 6 coord. di retta. Si possono immaginare come coord. omog. in S_5 e così la geom. di S_5 ha — come vedremo diffusamente — immediate applicazioni nello spazio ordinario: di cui però che i pt. di S_5 che entrano in gioco sono solo quelli della $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0$ (quadrica). Ciò mostra su un esempio come la Π

Considero su retta con x coord. pr.[?] (per ascissa) proiettivi
$a x x' + b x + c x' + d = 0$
dove x x' son coord. di pt. omologhi nello stesso sist. di riferimento.

A ogni π faccio corrispondere nello spazio il pt. di coord. omogenee $(a\,b\,c\,d)$ e viceversa. Ho rappresentato le proiett.^{à} di 2 nei punti di S_3: allora si capisce come la geom.^{a} dello spazio si possa applicare allo studio delle π su 2. Approfondiamo un po' la rappresentazione. Ho

π degenere | Q^2 $ad - bc = 0$.

Delle Q ci conviene per il seguito tenere presente la possibile rappresent. parametrica $a : b : c : d = 1 : u : v : uv$ (è evidente che (α i pt. così ottenuti stanno su Q: e viceversa ~~per un pt. di Q~~ basta scrivere l'eq. di Q $\frac{d}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a}$ per vedere che preso un pt. $(a\,b\,c\,d)$ di Q basta prendere $u = \frac{b}{a}$, $v = \frac{c}{a}$ per avere per quel pt. la rappr. par.^{ca} indicata). Le $u =$ cost. ($\frac{b}{a} =$ cost. $\frac{d}{c}$ …) e così le $v =$ cost. sono rette: sono i due sist.^{i} di generatrici (perché una $u =$ cost. con $v =$ cost. si incontrano nel pt. che prende dai valori u, v dei par.^{i}, o come si può dire brevemente, del pt. (u, v).)

identità	$P \equiv (0, 1, -1, 0)$
involuzioni $(b = c)$	piano $b = c$: è il p. polare di P risp. Q (piano polare di $(a_0\,b_0\,c_0\,d_0)$ è $a_0 d + a d_0 - b_0 c - b c_0 = 0$)
proiett.^{à} cicliche, coppie $M(m)$ $M'(m')$ (son ∞^2)	i pt. (∞^2) del piano $mm'a + mb + m'c + d = 0$ cioè, come mostra la 1) polare di $(1, -m', -m, mm')$ cioè polare di un pt. M di Q: il pt $(-m', -m)$.
~~(cioè le $\bar{\pi}$ con …)~~	~~…~~

(~~Allora per le π det.e date coppie comuni~~
A coppia MM' viene così a corrisp.
~~ogni per le π det.e dalle coppie generiche~~
Finché M e variando M' o viceversa
Il teor.a fond.e delle proiett.a det. LL', MM', NN' con L ≠ M ≠ N; L' ≠ M' ≠ N' ~~nonché~~ esiste ed è unica la π (non degenere) che contenga quelle 3 coppie non ch. che unici: l'ipotesi del teor.a che

~~e piano polare punti della quadrica Q~~)
pt. M_0 di Q.

M_0 si muove su una gen.a dell'uno o altro sistema

~~Se~~ tre piani non di un fascio individuano un pt: sono piani tg. a Q risp. a $L_0\ M_0\ N_0$ e è facile vedere che non sono di un fascio (se no $L_0 M_0 N_0$ sarebbero allineati e coinciderebbero i 3 pt. L_0^{MN} ossia pt. L', M', N') e che il pt. comune non è di Q (anzi $L_0 M_0 N_0$ non in piani tg. : se no due sarebbero su una stessa generatrice e 2 proiett. LMN coinc.).

Così con diverso si può valorizzare la geom. dello spazio entro quella delle π. P.es. (invertito ora le colonne)

retta come insieme di suoi pt.: sia che un a b c d e a' b' c' d' gli altri $\lambda a + \mu a'$.

sist. di ∞¹ proiettività: se due sono $a\,xx'\ldots = 0$, $a'\,xx'\ldots = 0$ le altre sono $(\lambda a + \mu a')\,xx'\ldots = 0$.

fascio di proiett.a Due proiett.e individuano un fascio cui appartengono.

piano come insieme di suoi pt. in tre sui (a b c d) (a' b' c' d') (a'' b'' c'' d'') non allineati...

sist. di ∞² π. Se ne tre di un fascio, ottengo le altre con loro comb. lineari

Per una retta passano piani tg. a Q? Sì, gen.te due. Però

$(\lambda a + \mu a'\ldots)\,xx'\ldots = 0$.

Domandiamoci: le π di due fasci hanno mai coppie in comune?

Due fasci generici hanno 2 coppie comuni.

Domandiamoci: dati fasci e rette esistono π comuni? Sì ~~[illegible]~~ una e una sola, se il fascio sta nella rete.

Quante π degeneri in un fascio? Due

E così si potrebbe continuare: riassumendo: la rapp.e adottata delle proiettività su 2 nei pt. di S_3 permette di adoperare le proprietà note dello S_3 allo studio di quelle proiett.e.

Consideriamo i cerchi del piano cartesiano (x, y) (ort.li). Ha le equaz.

(1) $a(x^2+y^2) + 2bx + 2cy + d = 0$.

Pongo a ogni cerchio far corrispondere il punto (a b c d) e viceversa. Ho

cerchi rette $a = 0$	punti di un piano π $a = 0$.
cerchi nulli (ossia punti) $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c & d \end{vmatrix} = 0$ ... $ad - b^2 - c^2 = 0$	
cerchi ... $b^2 + c^2 \geq ad$	pt. di una quadrica Q $ad - b^2 - c^2 = 0$.
cerchi di fascio (λa + μa')... (o ancor più)	pt. di retta
cerchi di rete	pt. di piano.
cerchi ortog.li: la g.a casi: ... che la ... è proiettiva	

i punti il centro e il raggio sono $(-b/a, -c/a)$, $\dfrac{\sqrt{b^2+c^2-ad}}{a}$

$ad' + a'd - 2bb' - 2cc' = 0$
(le si trova subito in base al centro e al raggio) cioè: | pt. coniugati rispetto a Q

Quindi (de dette e miste) p. es. ogni rete di cerchi è costituita da cerchi ortogonali a un cerchio fisso | ogni piano ha un polo risp. Q

Così ogni fascio di cerchi con fascio ortogonale [illegible] | ogni retta ammette una retta polare risp. Q.

e così via in altre applicazioni delle geom. dello spazio ordinario ai cerchi di un piano fisso. (503)

Se io provo a fare qualcosa di analogo per le sfere dello spazio cart. ort. (xyz)

$a(x^2+y^2+z^2) + 2bx + 2cy + 2dz + e = 0.$

ecco che dovrò considerare le quaterne i sist. di valori a meno di un fattore di (abcde) e ho bisogno dello S_4.

Dunque la geom. p. es. dello S_4 troverà applicazione nello spazio ordinario per le geom. delle sfere.

Così, più in generale si comprende come anche altri campi di possibili campi di applicazione degli S_n siano i sist. lineari ∞^n p. es. di curve piane [illegible] due $f_i(x_1 x_2 x_3)$ [illegible] $n+1$ curve lin. ind. di [illegible] (x_1, x_2, x_3) (501)

Spazi subordinati di uno dato iperspazio[1]. — Intendo p. es. con a il pt (a_i) $(i = 1 \dots n+1)$. Se ho p. es. 2 pt. a, b indicherò con $\lambda a + \mu b$ il pt. $\lambda a_i + \mu b_i$, e dirò brevemente questo pt. comb. lin. di quelli. ~~[illegible]~~

Analog.te $\lambda a + \mu b + \nu c$, ecc. — Dico più pt. si dicano

[1] per maggiori partic. e spiegazioni cfr. Bertini: [illegible] diciamo [illegible] forme [illegible] lineari [illegible]

(coeff. non tutti nulli) lin. indip. se nessuna loro comb. lin. si riduce a zero, lin. dip. nel caso contrario." P. es. due pt. sono lin. dip. solo se coincidono (poiché $\lambda a_i = \mu b_i$ dà $a_i :: b_i$).

Considero p pt. lin. ind. $a^{(1)}\ a^{(2)} \dots a^{(p)}$ e il punto comb. lin. $x = \lambda_1 a^{(1)} + \lambda_2 a^{(2)} + \dots + \lambda_p a^{(p)}$.

Variando le λ (anzi i loro rapporti) ottengo tanti punti. Chiamo Σ_{p-1} la loro totalità. Dico che Σ_p è uno S_{p-1} (o [p−1]) (spazio a $p-1$ dim. contenuto in S_n, o subord. di S_n) [Invero le λ (i loro ::) individuano un pt. di Σ_{p-1}; viceversa x individua le λ: cioè non può esistere λ e μ non :: che diano le stesse x. Invero sarebbe $\lambda_1 a^{(1)} + \dots + \lambda_p a^{(p)} = \rho(\mu_1 a^{(1)} + \dots + \mu_p a^{(p)})$ da cui per l'indip. degli $a^{(i)}$ $\lambda_i = \rho\mu_i$]. D'altro lato i pt. di Σ_{p-1} si comportano dunque proprio come p ple di n.i (che si chiamano coordinate in S_{p-1}) cioè pt. di un S_{p-1}: (p pt. det. S_{p-1} [illegible] indiv. da 2 pt., S_1, S_2 = piano, S_3 = spazio; S_{n-1} = iperpiano.

Per $p = 1$ si ha 1 pt. Si definisce il simbolo S_0 come pt.

Se gli a non sono lin. ind. ~~[illegible]~~ x descrive un S_i con $i \le p-1$ (poiché p [illegible] Invece nel o meno possono presentarsi i due casi. Un esempio di $n+1$ [illegible])

[1] Più di $n+1$ pt. sono sempre lin. dip. Infatti sia per $n+1$ [illegible] $\lambda_1 a^{(1)} + \dots + \lambda_{n+2} a^{(n+2)} = 0$ sono [illegible] $n+1$ eq. [illegible] in $n+2$ incogn. [illegible])

diciamo punti indip. [illegible]

ad alcuni degli $a^{(h)}$ posso sostituire le loro espressioni come cb. lin. degli altri, e mi riduco alle cb. lin. di questi). Tornando al caso lin. ind. per $p = n+1$ trovo che $\sum \lambda_i a^{(i)}$ può coincidere con ogni pt. di S_n ($\sum \lambda_i a^{(i)} = \rho x$. Ho per le λ $n+1$ eq. in $n+1$ incognite ~~con determ. non nullo per le indip. lin.~~ (chiaro): vengono determinate: ~~a~~ a meno di un fattore in tutte le espressioni delle λ e si può trascurare). Quindi le due definizioni di S_n - quella iniziale e quella come S_p subordinato con $p = n$ vanno d'accordo. # v. p. 8

~~Lo S_{p-1} $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a^{(i)}$ si ottiene contracontraendo linearmente~~ le altre p^ple ~~Se x, y, z stanno in S_{p-1} lo spazio (S_n) da essi determinato~~ Se $x^{(1)}, \ldots x^{(i)}$ stanno in S_{p-1} lo spazio da quelli det.^te (S_{i-1} se lin. ind.) sta in S_{p-1} cioè è tutto di pt. di S_{p-1}, perchè

contiene) pt. lin. ind. i det. dagli $A_i (0 \ldots 1, \ldots 0)$, i considerati pt. fondamentali. È chiaro che se $\sum \lambda_i A_i = 0$ sono tutte le λ nulle. {Se più pt. sono lin. dip. qualcuno di essi è cb. lin. degli altri. Se pos. in $\sum \lambda_i a^{(i)} = 0$ ($i = 1 \ldots h$) e $\lambda_1 \neq 0$ ho $a^{(1)}$ cb. lin. ($a^{(2)} \ldots a^{(h)}$)}.[2]

[1] {In generale si può dire che la cdz. nec. e suff. perchè $n+1$ pt. non

ogni cb. lin. degli x è cb. lin. degli $a^{(1)} \ldots a^{(p)}$. Così, prendendo in S_{p-1} p pt. lin. ind. (il che è possibile in infiniti modi, come si vedrebbe facilmente) $x^{(1)} \ldots x^{(p)}$ posso ridetermin. lo S_{p-1} con $\sum \rho_i x^{(i)}$ (Invece si potrebbe vedere che in S_{p-1} non esistono più di p pt. lin. ind.) 503

a p. 7 Quando lo S_n lo si considera come presentato da $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a^{(i)}$ con gli $a^{(i)}$ lin. ind., le λ assumono un coord. ufficio di ogni pt. invece delle x. I punti fond.^li naturalmente cambiano: per il nuovo A_1 è $a^{(1)}$ etc. Si ha così le formule per trasf. di coordinate $\rho x_r = \sum_i \lambda_i a_r^{i}$ analoghe a quelle note.

I punti comuni introdotti a S_p e $S_{p'}$ formano se esistono, uno spazio [se per essi ne trovo s lin. ind. e se più il loro S_{s-1} è contenuto in entrambi; ne vedremo altri pt. per ipotesi]

lin. ^ind dip. è che tutti ~~i~~ d ~~...~~ determ. delle loro coordinate non sia nullo. Analog.^te per $h < n+1$ pt.: se devono essere lin. ind. la matrice dei loro coeff.^ti è diversa da zero e viceversa come è noto dalla teoria dei sistemi di eq.^ni lineari.)[1]

Note per me. La trattazione esposta lascia a desiderare un punto di vista a desiderare. Infatti S_n non si identifica non in realtà con le ($x_0 \ldots x_n$) e spazi subordinati ~~...~~ nuovo, sarebbe unico. Ma si ammette in lunghezza

Due spazi S_p e S_q di S_n può darsi che siano entrambi contenuti in qualche spazio di dim $< n$ (p. es. due S_0 in S_1): ma se così è vi è uno ben determinato, di dimensione minima, che si chiama spazio congiungente di questi due (se ve ne ~~fossero~~ sono 2 di dim. ~~mi~~ uguale, S_p e S_q che son loro comuni stanno anche nella loro intersez. che ha dim. minore).

Fra le dim. l, r, p, q di S_l intersez. e di S_r congiungente sussiste la relazione $l + r = p + q$.

purchè si faccia $= -1$ la dim. della mancata intersezione [~~Siano al mas~~ Prendiamo in S_l $l+1$ pt. lin. ind. $C_1 \ldots C_{l+1}$ e prendiamo a det. S_p e S_q coi $D_{l+1} \ldots D_{p+1}$ e $E_{l+1} \ldots E_{q+1}$ (insieme coi C) (?). Tutti questi pt. sono anche lin. ind. fra loro. Invero da $\sum \gamma C + \sum \delta D + \sum \varepsilon E = 0$ risulta che $\sum \varepsilon E$ starebbe in S_q e in S_p cioè in S_l e sarebbe $= \sum \gamma' C$ contro l'ipotesi.

Perciò essi determinano uno $S_{[(l+1)+(p-l)+(q-l)]-1}$ $[p+q-l]$: questo spazio è proprio lo spazio congiungente S_p e S_q perchè li contiene, e ogni spazio che

contenga due contiene i pt. C, D, E. c.d.d. (Il caso ~~l=-1~~ $l = -1$ va bene perchè risponde all'ipotesi che i pt. C siano in numero di zero.) 503

Eq. di iperpiano. — Ogni ip.no ha un'eq. $\sum_{i=1}^{n+1} m_i x_i = 0$, e viceversa. Se invero è l'ip. $a^{(1)} \ldots a^{(n)}$, la cond. perchè x vi stia è det. $\begin{vmatrix} x_i \\ a_i^{(1)} \\ \vdots \\ a_i^{(n)} \end{vmatrix} = 0$ cioè $\sum m_i x_i = 0$ dove le m non sono tutte nulle per l'indip.za dei pt. a. ~~almeno un pt.~~

Viceversa, se p. es. $m_{n+1} \neq 0$, scriviamo l'eq.

$$x_{n+1} = -\frac{m_1}{m_{n+1}} x_1 - \cdots - \frac{m_n}{m_{n+1}} x_n$$

perciò il luogo contiene i pt.

$$\left(-\frac{m_1}{m_{n+1}}, 1, 0, 0 \ldots 0\right)$$

$$\left(-\frac{m_2}{m_{n+1}}, 0, 1, \ldots 0\right) \quad \text{etc.}$$

che sono n pt. lin. ind. Per la linearità dell'eq. contiene tutte le loro c.s. lin., che costituiscono un S_{n-1}; ma non contiene altri punti, se no tutto lo S_n e l'eq. sarebbe identica.

Quindi un iperpiano è individuato dai $\xi_i :: m_i$, coordinate di iperpiano: gli ip.ni danno come punti di un nuovo S_n — anzi gli iperpiani come elti. Ciò lascia presumere una legge di dualità studiata ... per altre particolarità (p. es. p. E 12)

Sist. lineari di iperpiani: spazi base. Prendo h $\leq n+1$ ip.ni lin. ind. (ha senso p. es. per dualità) $\sum m_i^{(r)} x_i = 0$. $(r = 1 \ldots h)$ definiscono un sist. lin.re: ha una base consistente nei pt. comuni a tutti gli h ip.ni dati. Dico che tale base è un S_{n-h} (p. $h \leq n$). Infatti è uno spazio perchè, per la linearità del sistema, quella base contiene, insieme a un numero qualunque di suoi punti, le loro cb. lineari ~~quindi data formata da ... $n-h+1$ pt. lin.~~ ind.ti ~~Ora ciò è vero per $h = 1$ (v. sopra) Ora per dualità~~ Data l'ind. lin. posso dare valori arbitrari a $n+1-h$ delle x e ricavare le altre: quindi fra i pt. della base vi sono $n+1-h$ lin. ind. (prendo p. es. ad arbitrio $x_1, x_2, \ldots x_s^{(1)}$ ~~$x_s \ldots$~~, prendendo più pt. della base, la matrice delle lin. ind. ha caratt. 73). Ne ho più di $n+1-h$. ... ragiono sull'esempio. ... $x^{(1)} \ldots x^{(r)}$ lin. ind.

---

[1] ragiona p. es. $\sum a_i x_i = \sum b_i x_i = \sum c_i x_i \ldots$ in S_q.

~~la matrice relativa ha caratt.~~ ? Per trovare la dimensione osservo che se $h = n$, ho 1 pt.; se $h = n-1$ uno S_1 che da ogni ulteriore generico S_{n-1} è incontrato in un punto cioè uno S_1; se $h = n-2$ un S_2 che da ogni ult. gen. S_{n-1} è incontrato in S_1, cioè S_2 e così via per ricorrenza. Viene si può dimostrare che ogni S_{n-h} si può ottenere come ...

Il concetto duale di S_h è S_{n-1-h} (det.e risp.te da $h+1$ pt. e $h+1$ iperpiani). Perciò ~~il duale del precedente teor.a è~~: gli ip.ni comuni a h pt. ~~lin. ind. cost. sist. lin.~~ enunciato il teor.a prec.te così: dati h ip. lin. ind. i pt. ad essi comuni sono cb. lin. di $n-h+1$ lin. ind., ho il duale: dati h pt. lin. ind. (S_{h-1}) ... gli ip. per cui sono cbl. lin. di $n-h+1$ (cioè costituiscono sist. lin. ∞^{n-h+1}): subito $h \mid h-1$ ho gli ip. per S_h sono $n-h$ lin. ind. e gli ip. per S_{n-h} sono h lin. ind. che inverte il teor.a di prima.

Osservazioni: A complemento di questo sopra osservo 1) se ~~$k+1$ punti sono lin. ind. stanno in S_k~~ ~~(come~~ $p+q \geq n$,

~~Lo spazio~~ si ha per la dim.^{ne} dello spazio int.^{ne}

Dopo ~~(spazio cong. = p - q = ... n - p - q~~

$p+q$ - dim. sp. cong $= p+q-(\leq n) \quad \geq 0$

così l'intersez. esiste sempre. Se invece $p+q < n$, non sempre l'esistenza dell'intersez. - Ciò però imposto. Ora in S_p esiste. $n-p$ equazioni. S_q .. $n-q$. In tutto ho $2n-p-q$ eq. lin. nelle x. Otteniamo sempre soluz. se le eq. sono meno che le incognite cioè se $2n-p-q < n+1$ cioè $p+q > n-1$, cioè $\geq n$. Invece non sempre soluz. (così l'analogia delle soluzioni e coordinate) se $2n-p-q \geq n+1$ cioè $p+q \leq n-1$. Cioè $p+q < n$. [Es.^{pio} rette e S_2 in S_4; $2 S_2$ in S_4 (vari casi); S_3 e .. in S_5; $2 S_2$ in S_5.

2). I pt. fond.^{li} danno luogo a *piramide fondamentale*, avente per facce gli $n+1$ iperpiani $x_i = 0$ (ognuna contiene n vertici e non quello opposto). I pt. di spigolo $A_1 A_2$ p. es. hanno $(x_1 x_2 0000)$ (tutte c.s. lin.) quelli del piano $A_1 A_2 A_3$ $(x_1 x_2 x_3 000..)$ ecc. ecc. - Poi pt. all'inf. su A_1 hanno già detto rispetto f. le altre x (punti c.s. lin. di $\overset{1000}{x_1 x_2 .. x_n}$); perciò ivi: Introducendo negli altri la locuzione di proiezione P_1' proi. di P da A_1 su $x_1 = 0$, P_1

ha le stesse coord. di x salvo la $1^a = 0$.

3) A proposito di proiezioni. Se si può spesso proiettare i pt. da uno S_ω ~~generico~~ mediante $S_{\omega+1}$ e tagliare poi gli $S_{\omega+1}$ proiettanti mediante $S_{n-\omega-1}$ (per avere un pt. solo poi): dunque da S_ω su $S_{n-\omega-1}$: così da centro su S_{n-1}, da una retta su S_{n-2}, da S_2 su S_{n-3} e così via. P. es. se proietto da $A_1 A_2$ su S_{n-2} opposto di pir.^{de} fondamentale. il pt. x otteniamo ivi $(0,0,x)$. [Invece ho $\lambda A_1 + \mu A_2 + \nu x$ con 1^a e 2^a coord. nulle e le altre con c. dir.$^{\underline{1}}$ delle ~~$\lambda + x_1 = 0$, $\mu + x_2 = 0$~~; dunque c.s. lin. uguali alle x_i].

Un'applicazione. - Siano s, s', s'' tre rette di S_4 generiche ~~...~~ ind. nel senso a due a due non incidenti, e non giacenti in stesso S_3. Dico che esiste una e una sola retta r incidente le tre. Invece se c'è è contenuta p. es. nello S_3 $s's''$ (con cui ha due pt. comuni) e quindi il suo pt. d'appoggio su s non può essere che il pt. $S \equiv s,(s's'')$. Ora per questo (in S_3 $s's''$) vi è una sola retta app. a $s's''$. E viceversa.

Applicando le p.^{tà} allo S_4 di spazio di p. S dove ogni pt. di S_4 cerchio (con S... di fasci) retta di S_4. si ha cerchi complanari (o incid. in 2 pt. e le ...) | rette incidenti. Ved. Pei 3 centri generici in S_3 ci è una bisettrice coniugata (ci si adatti in 2 pt.) a tutti 3.

Il teor.ᵃ si generalizza subito a S_p, S_q, S_r di $S_{p+q+r+1}$ ($\circ$ [$p+q+r+1$]) lin. ind. 2 a 2 e tali che ~~...~~ le coppie del tipo $(S_p S_q)_{p+q+1}$ S_r non abbiano pt. a comune (non del necessario (una)): allora ci è sempre una retta incidente i 3.

S_n proiettivi. Quadriche. Dati (x) e (y) si dice proi.ᵛⁱ o pure proiezioni omografie se (1) $\rho x'_i = \sum_k a_{ik} x_k$. ($i = \dots n$) con $A = |a_{ik}| \neq 0$. (Si chiama omografia anche per $A =$ ~~$\neq$~~ $A = 0$, ma allora ritrova le biunivoc. di corrisp. e si ha π degenere). La corrisp. è biunivoca (pb. teorema inverse): a pt. x di S_{n-1} corrisponde x' id. (perchè se ρ ... le x' sono legate linearmente ....). La corrisp. è dunque biunivoc. anche fra gli spazii. Si tra ... anche subito ~~...~~ le relaz. fra coord. di S_{n-1} corrispondenti: altre relaz. lineari. ~~...~~

~~S_4 ... x'~~ [per. S_3 in S_{5-1} ... in 2 S_4, ~~...~~ Fra ~~S_n~~ ~~Il piano~~ Lo stesso, con altre ... da ciò: se le pir.ᵈⁱ di riferim. si corrispondono (1) diventa $\rho x'_i = a_i x_i$ (perchè per es. per A_1 $(1 0 0 \dots 0)$ devono tutte le a_{1k} nulle salvo la prima). Poi allora ... dell S_{n-1} $x_{n+1} = 0$ corrisponde

$x'_{n+1} = 0$ cioè S_{n-1}. Anzi ~~...~~ quel S_{n-1} è: sulle ove ... che è ... π (perchè fra le coord. ... in cui ...). Anlog. per. a S_{n-2} $x_n = x_{n+1} = 0$ corrisponde id. id. Anche qui ... π. Poi a S_h corrisponde S_h e fra cui è ... π.

(potendosi il 1° S_h sempre considerare come $A_1 \dots A_{h+1}$).

~~Retta corrisp.~~ ~~sono π~~ ~~facilmente~~ In particolare rette corrisp. sono π (vale ~~...~~ sempre le distr. di ...); e birap.ᵗⁱ si conservano. ecc.

In particolare si può avere immag. ... pt. uniti: Con ... proced. di ... S_3 si prova che in generale $n+1$ pt. uniti, eventualmente ... , per ... convergenti ... ∞. e allora Spazi fondamentali di pt. uniti.

Così i ... $\rho x'_i = \left\{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right. x_i$ $(a \neq b)$ ... a per ... p primi, b per gli altri, ... $\rho x'_1 = a x_1$; $\rho x'_{p+1} = b x_{p+1}$; $\rho x'_p = a x_p$; $\rho x'_{n+1} = b x_{n+1}$

Tali. p. es. $x_1 \dots = x_p = 0$ ... si ha pt. uniti. Dunque S_{p-1}, e $[(n+1)-(p+1)-1] = S_{n-p-1}$ di pt. uniti (indip. ... ~~...~~ indiv. ... dati ... delle piramide!) ~~...~~

Vi ... (perchè se per. x_1 fra le prime e x_{p+1} fra le altre x sono $\neq 0$, ... $\rho x_1 = a x_1$, $\rho x_{p+1} = b x_{p+1}$ e

16

$p=a=b$). Si hanno dunque in tutto solo 2 sp. fond.: le omogr. si possono chiamare biassiali. La retta di 2 pt. corrisp. è incidente ai 2 spazi fondli $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_p & x_{p+1} & \dots & x_{n+1} \\ ax_1 & \dots & ax_p & bx_{p+1} & \dots & bx_{n+1} \end{pmatrix}$

Quindi per $bx-x' = (\dots\dots, 0\,0\,0 \dots 0)$ c.d.d. Così $ax-x'$ sta nell'altro spazio fondle. Osservo che il birto $(xx'\ bx-x',\ ax-x')$ è costante (sulla retta xx' è coord. π di $\lambda x + \mu x'$ (come in S_3 [illegible] si potesse succedere ridurre: non detta)). ~~invarianti~~ Per $p=1$ omologia. e per tutte altre possibilità.

Si hanno recipr. per $\rho\,\xi_i = \sum a_{ik} x_k$ non deg. o deg. ind A. Invertibile (cioè biunivoca: a pt. di S_{n-1}, S_{n-1} per punti) ecc. Nel caso [illegible] si giunge a recipr. involutorie; e si dimostra come in S_3 che i coeff. $a_{ik}=a_{ki}$ (polarità ordinarie) Oppure $a_{ik}+a_{ki}=0$ (pol.e nulle) dove è importante osservare che per n pari le polta nulle sono tutte degeneri (poiché A emisimm. d'ordine dispari è $=0$).

Il luogo dei pt. autoconi. (cioè appartenenti a S_{n-1} polare) in una polarità ord. è $\sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = 0$. (1) $(a_{ij}=a_{ji})$ quadrica[1] (detta non degenere) con A (discr.) $\neq 0$, e viceversa: così chi dispone partire da una tal quadrica, data dalla (1) e

[1] Cat. Segre "Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero

-17-

parlare della polarità $\xi_i = \sum_k a_{ik} x_k$ da essa definita (atteso perché è $a_{ik}=a_{ki}$), della S_{n-1} polare di ogni suo pt. e dello pt. polo di ogni sua S_{n-1}.

È imp. osservare che la corrisp. di polarità definita da Q è indip. dal sist.a di coordinate (cioè ... spiegare). Sia invece $\sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = 0$ dove sottintendo che gli indici variano da 1 a n+1, che sottopongo alle trasf. di coord.

$$x_i = \sum_l c_{il} y_l \quad \text{da cui} \quad \eta_m = \sum_i c_{im} \xi_i \quad (2)$$

Allora se di $P^{(x;y)}$ cerco la S_{n-1} polare nel 2° sistema ho intanto per Q $\sum_{ijlm} a_{ij} c_{il} c_{jm} y_l y_m = 0$, e perciò

$$\eta_m = \sum_{ijl} a_{ij} c_{il} c_{jm} y_l$$

Se invece la cerco nel 1° ho $\xi_i = \sum_j a_{ij} x_j$

cioè $\eta_m = \sum_{ij} c_{im} a_{ij} x_j =$

$= \sum_{ijl} c_{im} a_{ij} c_{jl} y_l$. e scambio i con j

$= \sum_{ijl} a_{ij} c_{jm} c_{il} y_l$ c.d.d. (Q è unica perché le altre polari [illegible])

(Non fatto a scuola: basta osservare che la polarità definita da (1) di pt. coniug. ecc. e l'eq. della S_{n-1} polare di $\bar{x}_i$ per coordinate .... cioè è

$\sum_i x_i \sum_k a_{ik} \bar{x}_k = 0$ come in S_2, S_3.

qualunque di dimensioni" Torino Memorie (2) 36, 1885.

L'eq. di ogni Q è riducibile scegliendo opport. sist. di riferimento alla forma canonica $\sum K_i y_i^2 = 0$. Per dimostrarlo - per ricorrenza - osserviamo che l'enunciato equivale a questo. Si possono scegliere $n+1$ forme lineari y_i nelle x tali che siano coincidenti le eq. $\sum a_{ij} x_i x_j = 0$ e $\sum K_i y_i^2 = 0$, cioè inglobando un fattore nelle K, che sia $\sum a_{ij} x_i x_j \equiv \sum K_i y_i^2$. Allora prendo A_1 fuori di Q e la faccia opposta nel suo S_{n-1} polare $(x_1 = 0)$. Ho $a_{11} \neq 0$ e $\sum_i a_{1i} x_i = 0$ ridotta a $x_1 = 0$ perciò di termini con x_1 ho solo $a_{11} x_1^2$ e l'eq. è $a_{11} x_1^2 + \varphi(x_2 \ldots x_{n+1}) = 0$. Quindi ammesso per φ è vero per Q. c.d.d.

L'inv. di polarità mostra che $A = 0$ è cond. invariante. (il significato intrinseco sarà trovato poi) perchè significa che esiste pt. comune agli S_{n-1} polari. Quindi se $A \neq 0$ nella forma canonica tutte le K_i sono $\neq 0$. (e volendo si possono supporre $= 1$). la caratt. è invariante per trasf. di coord. (perchè se p. es. è n, vuol dire che gli iperp. polari passano per S_0, e non per S_1)

Se $A = 0$, di caratt. n, delle K_i una sola è nulla; $\sum_1^n K_i y_i^2 = 0$. Se caratt. $n-1$, ve ne son $n-1$ $\neq 0$.

7) ho dimostr. con i non costruendo piramide autopolare per costruire alcune [illegible] che saranno necessarie per dimostr. l'indipendenza dei punti ottenuti, e la possibilità di scegliere ogni pt. fuori di Q.

e cui per degenere di specie h la $\sum_{i=1}^{n-h+1} K_i y_i^2$. Se [illegible] massima è $n-h+1 = 1$, cioè $h = n$: allora Q è costituita da un iperpiano doppio. Se per $h=1$ [illegible] cono di specie h

~~Due Q non~~ Se due Q non degeneri o degeneri di stessa specie h sono $\left(\sum_{i=1}^{n-h+1} K_i y_i^2 = 0\right.$, $\sum_{i=1}^{n-h+1} K_i' z_i^2 = 0$. Basta porre $K_i y_i^2 = K_i' z_i^2$ cioè $y_i = \sqrt{\frac{K_i'}{K_i}}\, z_i$ (e [illegible] indici per arrivare a n+1 prendo per es. $y_i = z_i$ per eccesso.

Q e iperpiano di segano in Q di S_{n-1} (prendo p. es. $x_1 = 0$) a meno che [illegible] appartenga a Q, nel qual caso questo si spezza in 2 iperpiani. Per ricorrenza Q e S_{n-1} si segano in Q di generale, e così via. - Quindi segando cono di specie h con S_{n-h} generico ho Q, cioè cono quadrico di specie h appare come costituito da S_h proiettanti da S_{h-1} i pt. di una quadrica di S_{n-h} (quadrica non ~~singolare per degenere avendo 1 pt singolare, la costituita~~, come si vedrebbe p. es. rappresentandola con l'annullare somme di quadrati, passando a S_{n-1} ecc.)

Se $n-h+1$, vi è S_{h-1} comune agli S_{n-1} polari: allora la Q si dice degenere di specie h (vedremo ora poi il significato)

Retta ~~gg~~ incontra Q in 2 pt. (eventualmente coincidenti) o vi sta (perchè ...). Preso P su Q cerco le rette aventi ivi 2 incontri. Ho $f(x)=0$ indicando con x le coord. di P e con y di un pt. di r ~~che si computa x da~~ del tipo richiesto (come in S_2, S_3). che $\lambda^2 f(x) + 2\lambda\mu f(xy) + \mu^2 f(y) = 0$ deve avere $\lambda=0$ doppia. cioè $f(x,y)=0$. Ciò prova che il luogo delle rette r è un ~~piano~~ S_{n-1} per ~~g~~ x. che coincide coll'~~piano~~ S_{n-1} polare di x. (S_{n-1} tangente). Vi è eccezione se $f(x,y)\equiv 0$ cioè se le $f_i(x)$ son nulle: allora ogni retta per x ha ivi 2 intersez.: pt. doppio.

Ogni pt. doppio sta su S_{h-1} singolare e viceversa (perchè $f_i(x)=0$ dà i pt. di tale S_{h-1}). Richiamare esempi di S_2, S_3.

Su Q vi sono rette (già in S_3, quindi in S_n, pensando alle sue sezioni con S_3): si può presumere che vi siano anche spazi più ampi. Precisamente Q non degenere contiene spazi fino alle dimensione $\frac{n-1}{2}$ se n è dispari e $\frac{n}{2}-1$ se n è pari. Precisamente per ogni pt. di Q passano di questi spazi. Dimostro p. es. la 1a cosa (la 2a viene analog.te). Se A_{n+1} ~~sta su Q, toccandovi~~

Prendo su Q pt. qualunque (perciò semplice): vi ~~sia~~ sia A_{n+1} e come S_{n-1} tg. prendo $x_n = 0$. L'eq. è

$$x_{n+1}x_n + \varphi(x_1, \dots x_n) = 0 \qquad (1)$$

con φ quadratica (perchè il coeff. di x_{n+1} uguagliato $=0$, ecc.)

~~Osservo che anche~~ Ogni pt $x_n = \varphi = 0$ è congiunto a P da retta di Q (perchè variando x_{n+1} ecc..) e viceversa (perchè se una tal retta varia solo x_{n+1} e se il 1° membro di (1) è nullo per ogni x_{n+1}, è $x_n = \varphi = 0$). Dunque le totalità delle rette per Q ha tale eq.ni (e perciò, si può osservare, costituiscono l'int. di Q collo S_{n-1} tangente). ~~Cerco se ecc~~ Voglio cercare se esse si raggruppano in spazi più ampi: Ora quelle rette posso ritenere nascano proiettando da A_{n+1} le loro traccie su $x_{n+1}=0$ cioè i pt. per cui

$$x_n = x_{n+1} = 0, \quad \varphi(x_1, \dots x_{n-1}, 0) = 0.$$

quadrica dello S_{n-2} $x_n = x_{n+1} = 0$; quadrica non degenere perchè il discr. di Q è

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & a_{n-1\,1} & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n-1\,n} & a_{nn} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

Dunque si p. es. si usa in S_5, si proietta da P quadrica di S_3 e vien per P due sist. ∞^1 di piani; in S_5 si hanno ~~ß~~ S_2 e così via. La dimostr. prova che non esisto ~~no~~ spazi più ampie per ogni P passano ~~ß~~ ~~sist. ∞^1 di~~ spazi di dim. mass. ma. Le dimostr. per n pari è del tutto analoga ~~praticamente tirare che per~~ ~~ogni punto passano ∞ spazi di dim. massima~~ ~~(per in S_2 infinite rette)~~

Agli stessi risultati si giungerebbe mediante le ~~proi.~~ rappr. stereografica, del tutto analoga a quella di S_3. (~~in fondo~~ strettamente connesse col metodo precedente) cui si fa da pt. ~~O~~ O di Q, su S_{n-1} ω e si ha rapp. biunivoca [(*)] dei pt. di Q e quelli di ω: si trova che alle sez. iperpiane di Q corrispondono in ω della Q seganti uno S_{n-2} α_{n-2} in una sua quadrica non degenere γ (traccia sull α dal cono di rette di Q uscenti da O) (ciò per $n=3$, ...; per $n=5$. ho rapp. su S_3 con quadriche segnati piano α in conica fissa γ). Allora ogni S_m di Q si rappresenta in S_m di ω ma non viceversa (dato questo lo proietto in S_{m+1} che generalmente sega quadrica non spezzata in S_m): e si trova (cfr. p. es. Bertini) che gli S_m di ω rappresentativi di S_m di Q sono quelli che passano per uno S_{m-1} contenuto

in γ. Per es.^{pio} per $n=4$. avrò S_1 ciascun. negli S_1 (per S_0 di, cioè appoggiati a γ). Per $n=5$. ho S_2 immag. riguardo per gli S_1 di γ. Di qui si vede che in S_5 (come già in S_3) gli spazi massimi S_2 si ripartiscono in 2 sist.[(1)] mentre ciò non ha luogo in S_4 né in S_6; ed è facile convincersi che ciò vale risp. negli spazi dispari e pari.

Quanto agli spazi massimi su Q degeneri, le cose vanno diversamente. Essi ~~hanno~~ possono avere dim. più ampia. P. es. in S_4, se ho uno S_0 singolare, avrò Q proiettata da esso O di S_2; e può contenere piani; ecc. ecc. Notiamo che se Q di S_n ha spazi massimi (anche uno sol.) di dim. maggiore di quelle previste dal teor.^a sulla Q non degeneri, ciò basta a concludere che la Q è degenere. Perciò di spazi la dim. $\leq \left(\frac{n+h-1}{2}\right)$

(*) cfr. p. 22. – generalmente: ma si hanno le eccezioni 1) a O corrisponde tutto lo S_{n-2} α_{n-2}; 2) a ogni pt. di γ corrisponde la retta di Q di cui è traccia.

(1) In S_4. S_3 per rette di quadrica di S_2. Per ogni retta posso condurre ∞^1 S_3 (sist. lineare) (duale di S_0 di S_2): cioè ho due sist. ∞^3 di piani.

Dei vari spazi esistenti su Q si possono studiare le incidenze. Facciamo il caso di S_5. Allora le proi. stereografiche mostrano che due S_5 λ, μ dello stesso sistema hanno per imag. λ' μ' incident. fuori di γ, (perchè le loro intersez. con γ sono rette sghembe) e poi due S_2 dello stesso sist. si incontrano sempre in un pt. Per sist.^{i} diversi l'intersez. di μ' è un γ, e quindi (essendo γ eccezionale per le ~~assi~~ proi. stereogr.) 2 S. di sist. diversi in generale non si incontrano. ~~se~~ ~~si hanno 1 pt. in comune, ne hanno infiniti (come perchè allora vi è un pt. comune a λ' μ' fuori di γ (come si vede scegliendo il centro di~~ ~~proiezione opportuno)~~ ~~Confermiamo tutto ciò per altra via~~. Però se λ e μ di sist. diversi si incontrano, hanno in comune addirittura una retta [se λ' μ' hanno S_0 comune fuori di γ, avendo pure un pt. in comune per γ hanno comune una retta, incidente a γ, e così λ e μ...; rimane dubbio se λ e μ si incontrassero in un punto di una retta uscente da O: basterebbe però scegliere il centro di proi. fuori di tale retta].[1]

Confermiamo tutto ciò per altra via: le Q rappresentativa delle

[1] Con lo stesso ragion. si prova che per n dispari due $S_{\frac{n-1}{2}}$ massimi dello stesso sist. sono in generale (non) incidenti, ecc. (diverso)

rette di S_3 è ~~posto~~ $p_{12}p_{34}$ - - - $= 0$. è non degenere (perchè il discr. è $\begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} \neq 0$) quindi per l'analogo modo di distrib. degli spazi basta studiare tale Q (ossia, come si è visto, tutte le altre sono π). Ora ai fasci di rette di S_3 corrispondono rette di Q (p_{12}... e p'_{12}... incidenti, le $\lambda p_{12} + \mu p'_{12}$... sono ~~le~~ coord. ~~delle~~ di rette, e precisamente di rette del loro fascio; poichè in S_5 ... i due pt. consec. (su Q) sono anche su rette di Q; e viceversa). Perciò, se su Q vi è un piano, siccome 2 qualunque suoi pt. stanno su rette di Q, gli corrisponde un sist.^{a} di rette a due a due incidenti, cioè situate in un piano, o ~~per~~ stella. Viceversa, i vertici di S. d. r che se p p' p'' son 3 rette nell'uno o nell'altro caso, le $\lambda p + \mu p' + \nu p''$ ...... Quindi abbiamo su Q due sist. di piani corrisp. ai piani rigati e stelle. Son 2 sist. ∞^3: sulle rappres.^{i} diciamo che per P di Q passano ∞^1 piani di ogni sistema, e anche il comportamento riguardo alle intersez. di piani di sist. uguali o opposti.

Due risultati nel campo reale. - Consideriamo Q reale (cioè γ. a coeff. an::

[1] Nota per me. Anche nel dubbio che i sist. di rette corrisp. a priori a piani non esaurissero piano rigato o stella, vi saranno sempre 3 rette lin. ind.; e a posteriori per riempire il piano di Q ci vuole tutto il piano rigato o stella.

reali, si possono ritenere reali). Dimostro 2 risultati: (non riferimento a Q non degeneri).

1) (teor.ᵃ d'inerzia di Sylvester): comunque si riduca la me eq. a forma canonica, il n° dei coeff. positivi e neg. resta lo stesso, salvo le possibilità che si scambino;

2) se ho l coeff. positivi e gli altri $n+1-l$ negativi con $l \leq n+1-l$, la Q contiene S_{l-1} reali, ma non S_l reali. Basta dimostrare il 2°, perchè ~~se~~ messe in relaz. gli spazi massimi reali col n° dei termini + o −. Ora sia

$$a_1 x_1^2 \dots + a_l x_l^2 - a_{l+1} x_{l+1}^2 \dots - a_{n+1} x_{n+1}^2 = 0$$

con le $a > 0$. Pst $y_i = \sqrt{a_i}\, x_i$ mi riduco, ad per far prima posto $a_i = 1$. Allora la $x_1^2 \dots + x_l^2 \dots = 0$ contiene gli spazi $x_1 = x_{l+1}, \dots x_l = x_{2l}, x_{2l+1} \dots = x_{n+1} = 0$ sono $l + (n-2l+1) = n-l+1$ equazioni. ~~Tutti gli sp.~~ (lin. ind. perchè intercorrono sempre x diverse): ho così $S_{n-(n-l+1)} = S_{l-1}$. Non vi è S_l reale se no, ~~appunto attraverso~~ preso lo S_{n-l} $x_1 \dots = x_l = 0$, si staccherebbe un pt. reale su $a_{l+1} x_{l+1}^2 + \dots + a_{n+1} x_{n+1}^2 = 0$ che è impossibile

Linee ~~algebr.~~ in S_n di S_n: generalità. Consider. $x_i = f_i(t)$ dove (quindi analitiche nel ~~campo complesso~~) le f_i sono fun. derivabili più volte, e non: a costanti. Scrivo più brevemente $x = f(t)$ (o: $x(t)$). Retta tangente è la pos. limite della retta $x(t)$, $x(t+\Delta t)$ per $\Delta t \to 0$, cioè del 1° pt e c.

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta(t)}$$

(c.s. lim. d. sulla; cioè di $x(t)$ con $x'(t)$)

Piano osc. in $x(t)$ è il piano pos. limite di piano per retta tg. in x e pt. $x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta(t)\, x'(t) + \frac{\Delta t^2}{2} x''(t+\vartheta \Delta t)$, cioè del piano per x, x' e $x''(t+\vartheta\Delta t)$: al limite è il piano di x, x', x''. Ma si può definire così S_3 osc. in x generico (limite di S_3 congiungente il piano osc. in $x(t)$ con un ulteriore pt. della linea, che tende a t): è, c.s., ~~il piano~~ lo S_3 $x\, x'\, x''$ x'''; in generale definisco S_k osculatore, e trovo che ~~è definito da~~ lo S_k dei punti è da $x, x', x'', \dots x^{(k)}$. (scriverò ~~per~~ comodamente x', x'', invece di $x^{(k)}$). — A ciò si può capire eccezione, nel senso che i punti $x, x' \dots x^{(k)}$, dai quali si ottengono per ch. lin. i punti dello S_k osc. non siano lin. ind.: allora lo S_k non si può più ritenere determinato, almeno nel modo che precede. Ora ~~si~~ può darsi che tale eccezioni si presenti solo in qualche punto della linea (pt. singolari), e su tale caso non voglio soffermarmi [punti in g. d. si studiano prevalentemente delle proprietà che sono valide in campi abbastanza ristretti, p. es. in un tratto abbastanza breve di linea, e allora si prescinde da certe — non stiamo a precisare meglio [illegible] di quei punti eccezionali); oppure in tutti i pt. della linea. Vogliamo vedere quando ciò avviene. Allora esistono funzioni $\alpha_i(t)$ tali che

$$\alpha_0 x^{(k)} + \alpha_1 x^{(k-1)} + \dots + \alpha_{k-1} x' + \alpha_k x = 0 \quad (1)$$

cioè le x sono soluz. di una stessa eq. diff. ~~[illegible]~~ lineare omogenea di ordine K. Allora è noto che ~~gli~~ tutti gli $\int$ di tale equaz. si ~~[illegible]~~ possono ottenere facendo comb. lin. a coeff. costanti di certi K $\int$ particolari, chiamiamoli $u_r(t)$ $(r = 1, \dots K)$. Allora

$$x_i(t) = \sum_{r=1}^{k} c_{ir} u_r(t). \quad \text{o} ~~\text{sopprimendo l'ind.}~~$$

~~[illegible] le $x_i(t)$~~ e cioè chiamando c_r il pt. che ha per coord. le c_{ir} $(i = 1 \dots n+1)$. Ho

$$x(t) = \sum_r u_r(t)\, c_r$$

: ogni pt. della curva sta nello spazio ~~degli~~ dei K punti $c_1 \dots c_r$, cioè in S_{k-1} o meno. Dunque ~~solo per~~ se in ogni pt. generico di linea non vale la proprietà che lo S_k è osc.[o] di $x \dots x^{(k)}$, la

linea sta in S_{k-1} o **meno** (così in particolare si ha anche il fatto che se il piano osc. in $x x' x''$ si ha $(k=2)$ per linea sta retta, cioè linea retta; e il fatto che le eq. se $x x'$ solo se la linea si riduce a un punto, caso per noi escluso. Per linee che stanno proprio in S_n e non meno, ho degli $S_1, S_2, \dots S_{n-1}$ osculatori in ogni punto generico.

<u>linee di S_n e eq. diff. lineari di ordine $n+1$.</u> — Sia

$$a_0 x^{(n+1)} + a_1 x^{(n)} + \dots + a_{n+1} x = 0 \quad (1)$$

eq. diff. lin. per $x = x(t)$. di ordine effettivo $n+1$. cioè $a_0 \neq 0$. (Posso supporlo allora $= 1$): essa ha $n+1$ $\int$ lin. ind. — da cui tutti gli altri si ottengono per comb. lin. a coeff. cost. Sia $x_1(t) \dots x_{n+1}(t)$. Se considero i pt. di S_n dove le x_i sono = a tali funzioni ho una linea di S_n, sia γ. Essa sta proprio in S_n (il suo <u>spazio</u> <u>di appart.</u> = cioè è S_n e non meno): se stesse invece solo in S_{n-1} si avrebbe fra le $x_i(t)$ relaz. lin. omog. a coeff. cost. mentre le x_i sono lin. ind. — Essa non è individuata dalla (1): ma tutte le altre linee γ' che si possono ottenere dalla (1) sono trasf. proi. di γ. [Se infatti prendo altre $n+1$

integrali $y_1(t) \ldots y_{n+1}(t)$ [illegible]; e la γ' da cui definite

$$y_i(t) = \sum_r c_{ir}\, x_r(t)$$

coi coeff. costanti (a determ. non nullo, se no, si vede che si potrebbe[ro] comb. lin. le $y_1 \ldots$ in modo da avere zero). E allora la

$y = \sum_r c_{ir}\, x_r$ son le eq. di omogr. in cui a γ corrisp[on]de γ']. A ogni eq. (1) corrisponde dunque una γ ben definita a meno di trasf. π.

Viceversa ogni γ di S_n (e non app. a spazio minore) dà luogo a una eq. (1). ben determinata[1]) Su γ, i pt. $x, x', \ldots, x^{(n+1)}$ ~~[illegible]~~ Se una $x_i = x_i(t)$ ~~[illegible]~~ son $n+2$, sono certo lin. dip. i coeffic. [illegible] sulla relaz. sono le a_i; ~~[illegible] (1) [illegible] $x_i(t)$:~~ funzioni di t; cioè ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

$$a_0\, x_i^{(n+1)} + a_1\, x_i^{(n)} + \ldots + a_{n+1}\, x_i = 0 \quad (1)$$

dove a_0 è cert. $\neq 0$ (se no già $x \ldots x^{(n)}$ lin. dip. e γ in spazio minore ~~[illegible]~~

~~[illegible] $n+1$ eq. [illegible] in $n+2$ incognite i sdeg. [illegible]~~

l'eq. è determinata (se ne avessi 2 eliminerei $x^{(n+1)}$ e ne verrebbe

~~[illegible] Ma qui ce n'è una sola [illegible] (a meno di fattore)~~

[illegible] $\S$. Altri, secondo la p. 28, è impossibile.

~~perchè la matrice dei coeff. è $\neq 0$. Se fosse nulla, la se-~~

~~[illegible] il determ. $|x_i^{(n)} \ldots x_i|$ e i pt $x, x', \ldots x^{(n)}$ sa-~~

~~rebbero lin. indip.: ma allora la γ sta in spazio $< n$.~~

La γ si chiama anche integrale della (1)

Un esempio. Sia $x^{(n+1)} = 0$: essa è soddisfatta da tutti i polinomi in t di grado $\leq n$; cioè [illegible] comb. lin. a c.c. di $t^n, \ldots, 1$.

1) perchè si parte per la γ da una ben determinata rappr. parametrica.

Si può dunque prendere la γ

$$x_1 : \ldots : x_{n+1} = t^n : t^{n-1} : \ldots : t : 1. \quad (2)$$

Questa è una curva algebrica (le x_i sono funz. alg. del parametro t), razionale (~~[illegible]~~ polinomi in t). Si vede anche che vi è biunivoca corrisp. fra i valori di t e i pt della γ (perchè $t = \frac{x_n}{x_{n+1}}$)[1]). Un ~~iperpiano~~ S_{n-1} generico $\sum m_i x_i = 0$ ha poi n intersez. con la γ (fra [illegible] distinti e coincidenti): si dice allora che la γ è d'ordine n. Tale γ^n razionale è normale, nel senso che non è proiez. di γ^n di S_{n+1}, o poi: viceversa γ^n raz. appartenente a S_m è $m \leq n$. [perchè liberati i 2i membri delle eq. parametriche dagli eventuali divisori comuni, ci risultano polinomi in t di grado $\leq n$. perchè una loro comb. lin. $= 0$ dà come n radici,[2]) cosicchè son comb. lin. di $t^n, \ldots, 1$, e poi di $n+1$ fra cui son certo lin. dip. Quindi n $m+1 >$ $n+1$, cioè $m > n$. La γ^n ha uno spazio di appartenenza $<$ dell'ambiente).– Le altre γ^n integrali di $x^{(n+1)} = 0$, di con-

1) spiegare che non è sempre così; ma quando non è, si può applicare il teor. di Lüroth (spiegandolo)

2) qui sorvoliamo su una difficoltà – senza mostrare come si possa

si ottengono le eq. param. ponendo nei 2i membri po: linomi di grado n in t – sono come sappiamo, $\overline{\text{c}}$ a γ^a. e quindi ~~[illegible]~~ son cu γ^a. raz. ecc. ecc. Del resto anche con diffeomorfismo ostrongichi delle prime γ^a. potrebbesi, con un cambiamento di coord. ridurre le loro eq. param. alle forme volute, come si vedrebbe subito.

<u>Ogni C^n raz. di S_m con $m < n$ è proi. di γ^a raz. norm. di S_n</u>. Dunque possiamo scriverne (cfr. sopra. Teor. di Lüroth ecc.) per C^n le

$$x_i = \sum_{k=0}^{n} a_{ik} t^k \qquad (i = 1, \ldots m+1).$$

con 2° membri lin. ind. Aggiungo ad esse eq. analoghe con $i = m+2, \ldots n+1$ coi membri che l'insieme dei 2° membri sia lin. ind. Ho così in S_n γ^n, e quella di S_m si può considerare come sua proi. da spazio $A_{m+2} \ldots A_{n+1}$ sullo spazio opposto $x_{m+2} = \ldots x_{n+1} = 0$.

Lo S_{n-1} osc. a γ^n raz. nor. in $\overset{x}{i}(t)$ si troverebbe col proce:

Supponiamo. E così si potrebbe a priori supporre che cercando le intersez. delle curva con un iperpiano generico, si trovi un più ma[illegible] magari di grado n, ma poi un iperpiano di grado $2n$ con tutte le radici doppie, e così via. Difficoltà analoga a p. 32.

dimostrato generale. Qui lo applico così. Esso è da riguardare come avente n intersez. con γ^n coincidenti in x. [Ciò è fatto generale per le γ di S_n, come qui non sto a verificare, accontentandomi di verificarlo per il nostro caso. Se $\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i x_i = 0$ è tale S_{n-1}, cercando le sue intersez. con γ^n corrisp. ai valori T trovo $\xi_1 (T)^n + \ldots + \xi_n x_n(T) + \xi_{n+1} x_{n+1}(T) = 0$ (1). Ora se è $\sum \xi_i x_i(t) = 0$, $\sum \xi_i x_i'(t) = 0, \ldots, \sum \xi_i x_i^{(n-1)}(t) = 0$ dunque per (1) eq. in T, $T = t$ è radice n^{pla}. c.d.d.]. Perciò la $\sum \xi_i x_i(T) = 0$ deve coincidere con $(T-t)^n = 0$. Dunque

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = -\binom{n}{1} t, \ldots \quad \xi_n = (-1)^{(n-1)} \binom{n}{1} t^{n-1}, \quad \xi_{n+1} = (-1)^n t^n.$$

Segue il <u>teor. di Clifford</u> sullo S_{n-1} osc. corrisp. a pt. di contatto in polarità ordin.ª nullo secondo che n è pari o dispari (ricordare S_2, S_3) (invero le ~~$\xi_1 = x$~~

$$\xi_1 = \qquad x_{n+1}$$
$$\xi_2 = \qquad -\binom{n}{1} x_n$$
$$\vdots$$
$$\xi_{n+1} = (-1)^n x_1$$

dan le eq. di ..., polar. e detta è symm. o emisymm. secondo che n è pari o dispari

<u>Un altro esempio</u>. Se l'eq. (1) è <u>a coeff. costanti</u> per risolverla si ricorre all'eq. caratteristica $a_0 k^{n+1} \ldots + a_{n+1} = 0$. Siano le stesse supponendo che abbia radici distinte: allora

-34-

... possono ammettere per le g integrali

$x_i = e^{k_i t}$ $(i = 1 \dots n+1)$ (1).

o col nuovo parametro $e^t = \vartheta$, $x_i = \vartheta^{k_i}$

Le curve così ottenute (e più in generale quelle Sol. di eq. a coeff. costanti, anche se le radici dell'eq. caratteristica non sono tutte distinte) si chiamano curve W. Evidentemente le g^{ni} di S_n sono W particolari (col carattere che le eq. caratt. abbia una radice $n+1^{pla}$). Un altro esempio di curve W dello S_3 è l'armonica elica circolare $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = ht$. Infatti poiché $\frac{x}{r} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, $\frac{y}{r} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$; $\frac{z}{h} = t$. Poi $\frac{x + iy}{r} = e^{it}$, $\frac{x - iy}{r} = e^{-it}$, $\frac{z}{h} = t$. Basta fare la trasf. di coordinate (passare a coord. $\bar{x}$) $\frac{x_1}{x_4} = \frac{x+iy}{r}$, $\frac{x_2}{x_4} = \frac{x-iy}{r}$, $\frac{x_3}{x_4} = \frac{z}{h}$ per avere $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = e^{it} : e^{-it} : t : 1$ per cui le g appaiono come integrali dell'eq. $y^{IV} + y'' = 0$, come si trova subito). – Una proprietà notevole delle curve W qui considerate (e delle altre) è di trasformarsi in sé mediante ∞^1 omografie (costituenti un gruppo, ecc. a me....). Invero la omografia $x_i' = m^{k_i} x_i$ dove m è una

-35-

costante arbitraria porta il pt. ϑ^{k_i} nel punto $m^{k_i}\vartheta^{k_i} = (m\vartheta)^{k_i}$, cioè ogni pt. di g in punti di g. È evidente la proprietà di gruppo perché x per m^{k_i} e poi per n^{k_i} equivale a moltiplicare per $(mn)^{k_i}$.

Osservazione. Si è osservato che a ogni g rapp. parametricamente corrisponde eq. diff. (1) ben definita. È però da osservare che al variare delle rappr. parametriche le (1) varia; e le rappr. parametriche si può variare moltiplicando x_i per uno stesso fattore, e poi cambiando la variabile indipendente col porre $t = t(t')$. Quindi chi voglia studiare int. le propr. proiettive delle g di S_n mediante eq. (1) dovrà vedere come si rispecchiano su (1) tali trasformazioni, vale a dire prendere di mira quelle propr. della (1) che sono invariantive rispetto alle due trasf.^{ni} ora ~~cui~~ indicate. Proiettivi dell. Cfr., specialmente per S_2 e S_3 Wilczynski: Proj. diff. geom. of curves and ruled surfaces.

Digressione sulle espressioni diff. lineari $\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^{n+1-k}(t) = \cancel{a_0}\, x^{n+1} + a_1 x^{(n)} + \dots + a_n x'' + a_{n+1} x$ e sulle loro (espressioni) aggiunte di Lagrange. – Eq. aggiunta della (1). – Indico con $F(x)$ l'espressione considerata, e cerco fuori se possibile, $g(t)$, tale

[1] pongo sempre $x^{(0)} = x$

se $y\,\mathfrak{F}(x) = \frac{d}{dt}(b_0 x^{(n)} + \dots + b_n x)$ (2) dove le b sono funzioni di t sempre le stesse qualunque sia la f. $x(t)$ che si considera, e la (2) vale per $x(t)$ funzione arbitraria.

Ora, qualunque siano x, y, ho la id.^ca (1) che ottengo così:

$$y^{(h)} x^{(k-h)} = \frac{d}{dt}\left(y^{(h)} x^{(k-h-1)}\right) - y^{(h+1)} x^{(k-h-1)} \quad (h=0,1\dots k-1).$$

× $(-1)^h$ e sommo fra i limiti di variabilità (*) k qualunque

$$\sum_{h=0}^{k-1}(-1)^h y^{(h)} x^{(k-h)} = \frac{d}{dt}\sum_{h=0}^{k-1}(-1)^h y^{(h)} x^{(k-h-1)} + \sum_{h=0}^{k-1}(-1)^{h+1} y^{(h+1)} x^{(k-h-1)}$$

cioè mutato l'indice nell'ultima sommatoria. Viene $(h+1=l)$

$$\dots = \dots + \sum_{l=1}^{k}(-1)^l y^{(l)} x^{(k-l)}.$$

Perciò

$$y x^{(k)} = (-1)^k x y^{(k)} + \frac{d}{dt}\sum_{h=0}^{k-1}(-1)^h y^{(h)} x^{(k-h-1)} \quad (3).$$

~~Ora da~~ Ora, in base alla (3) applicata per $k \mid n+1-k$, e $y \mid a_k y$, ho

$$y\,\mathfrak{F}(x) = \sum_0^{n+1} a_k x^{(n+1-k)} y =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\left\{(-1)^{n+1-k} x (a_k y)^{(n+1-k)} + \frac{d}{dt}\sum_{h=0}^{n-k}(-1)^h (a_k y)^{(h)} x^{(n-k-h)}\right\}$$

(*) Nota per me: nell'ultima somma per $k=n+1$ in $x^{(n-k-h)}$ non viene

scritta a espressione

Il 2° membro consta di 2 parti: la 2ª è lineare in x e nelle derivate fino all'ordine n (perchè per derivata massima si ha per $k=h=0$ e viene $x^{(n)}$). Se il 1° termine è nullo, cioè se

$$(4) \qquad \sum(-1)^{n+1-k}(a_k y)^{(n+1-k)} = (-1)^{n+1}\mathfrak{G}(y) = 0.$$

cioè se si è scelto per y un ∫ di quest'equazione, il risultato è raggiunto

$$\mathfrak{F} = (-1)^{n+1} x\,\mathfrak{G}(y) + \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{h=0}^{n-k}(-1)^h (a_k y)^{(h)} x^{(n-k-h)}$$

dove $\mathfrak{G}(y)$ è il 1° membro dell'eq. aggiunta di p. 50ª.

Viceversa dico che se il risultato è raggiunto cioè se l'espressione testè trovata che scrivo

$$(-1)^{n+1} x\,\mathfrak{G}(y) + \frac{d}{dt}\sum_{r=0}^{n}\left(c_r x^{(n-r)}\right) = \frac{d}{dt}\sum_{r=1}^{n} b_r x^{(n-r)}$$

è $\mathfrak{G}(y)=0$. Invero posto $b_r - c_r = e_r$ ho che la

$$(-1)^{n+1} x\,\mathfrak{G}(y) = \frac{d}{dt}\sum_{r=0}^{n} e_r x^{(n-r)}$$

è un'identità rispetto alla funzione x: scritta

$(-1)^{n+1} x\,\mathfrak{G}(y) = (e_0 x^{(n)} \dots + e_n x)^{(1)}$ viene successivamente $e_0=0, \dots e_n=0$ e poi $\mathfrak{G}(y)=0$ c.d.d.

nulla perchè non ci son valori ammissibili di h.

38.

Porto le Σ dove ma $= \Psi(x\,y)$. ho

$$y\,F(x) + (-1)^n x\, G(y) = \frac{d}{dt}\Psi(x,y)$$

Ora il 2° membro è una ... delle derivate $0 \dots n$
(perchè il massimo indice è ...)
delle y: quindi se $F(x)=0$, $x\,G(y)$ diventa le derivate esatte di un'espressione lineare nelle $y \dots y^{(n)}$ moltiplicate per x. Ciò prova che $F(x)=0$ è a sua volta l'aggiunta di $G(y)=0$: la relazione fra un'eq. e la sua aggiunta è dunque reciproca.

Quanto si è detto lascia già presumere dei legami fra il problema dell'integr. di un'eq. e di quello della sua aggiunta. Ora proverò che la ricerca dell'integrale di un'eq. e della sua aggiunta sono due probl. equivalenti. Sia noto l'integrale delle date cioè $C_1 x_1 \dots + C_n x_n$, ossia x costituenti un sist. fondamentale: pongo

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n+1} & x_{n+1}' & \dots & x_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

39

e chiamo Δ_{ij} il complemento di $x_i^{(j)}$ $(i=1 \dots n+1;\ j=0 \dots n)$. Con le form. antitetiche pongo

$$\Theta_i(x) = \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{i0}\,x + \Delta_{i1}\,x' \dots + \Delta_{in}\,x^{(n)}\right) \quad (i=1 \dots n+1)$$

Ho

$$\Theta_i(x_i) = 1, \quad \Theta_i(x_j) = 0 \quad j \neq i.$$

$$\Theta_i(C_1 x_1 \dots + C_{n+1} x_{n+1}) = C_i$$

e quindi $\dfrac{d\,\Theta_i(x)}{dt} = 0$ per ogni integr. x delle date.

Questa è una nuova eq. diff. lineare di ord. $n+1$ ammettente gli integr. delle date, e differisce per un fattore: lo determino coi coeff. di $x^{(n+1)}$ e ne viene

$$\frac{d\,\Theta_i(x)}{dt} = (-1)^n \frac{\Delta_{in}}{\Delta} F(x)$$

Poi $\dfrac{\Delta_{in}}{\Delta}$ è un moltiplicatore delle date, ne viene che

$$y_i = \frac{\Delta_{in}}{\Delta} \quad (i=1, \dots n+1)$$

è integr. dell'aggiunta. Ho così $n+1$ int. dell'aggiunta.

Sono lin. ind. – Infatti posto $\sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i = (xy)$ ecc.

ho $(xy) = (x', y) \dots = (x^{(n-1)}, y) = 0;\ (x^{(n)}, y) = 1$

da cui, per derivaz. e tenendo conto delle stesse

$(xy^{(1)}) = (x^{(1)}y^{(1)}) = \dots = (x^{(n-2)}, y^{(1)}) = 0, \ (x^{(n-1)}, y^{(1)}) = -1$

e così

$(xy^{(2)}) \dots = (x^{(n-3)} y^{(2)}) = 0; \ (x^{(n-2)} y^{(2)}) = 1.$

e così via fino a

$(x\, y^{(n-1)}) = 0, \ (x^{(1)} y^{(n-1)}) = (-1)^{n-1}$

$(x, y^{(n)}) = (-1)^n.$

Riassumendo $(x^{(p)}, y^{(q)}) = 0$ per $p+q \leq n-1$.

$(x^{p}, y^{(q)}) = (-1)^q$ per $p+q = n$

Quindi il prodotto di Δ per $\Delta' = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \\ y_{n+1} & y_{n+1}' & \dots & y_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix}$

eseguito per verticali dà

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & & & 1 \\ 0 & \vdots & & \cdot & \\ \vdots & \vdots & \cdot & & \\ 0 & (-1)^{n-1} & & & \\ (-1)^n & & & & \end{vmatrix}$$

Dove i termini a destra della diag. considerata non si sono scritti

$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ col segno della permutaz. di $n+1 \dots 1$ cioè

$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} = 1$. Quindi $\Delta' \neq 0$ e le y sono lin.te indipendenti (per il teorema del Wronskiano).

Osserv. ancora che in base alle relaz. delle 1e colonna in principio della pagina oltre le $(xy) = 0$ si possono esprimere le x mediante le y in modo

analogo a quello con cui si esprimono le y mediante le x; cioè, indicando con Δ'_{in} i minori ... di Δ' si ha

$x_i = (-1)^n \dfrac{\Delta'_{in}}{\Delta'}$ {come si trova subito: Δ' viene scritto scambiando le orizz. e verticali] 505

Concetto duale di linea in S_n. – Interpretaz. geom. dell'eq. aggiunta: A linea di S_n corrisp. per dualità: (punti ∞^1) iperpiani dipendenti da un parametro: cioè $\xi_i = \xi_i(t)$ o brevemente $\xi = \xi(t)$. ~~Si ha allora~~ ~~Più precisamente~~. Tale (iperpiani passano per punto fisso se vogliamo che γ non stia in un iperpiano) figura si chiama inviluppo ∞^1 di iperpiani. Traduciamo: traduciamo per dualità alcuni concetti:

Rette legate a γ in P	S_{n-1} "caratteristico" o "1° caratt." di ~~π~~ Π_{n-1} per l'inviluppo Γ: è l'interz. di $\xi(t)$ con $\xi'(t)$. Π_{n-2}
S_2 osc. a γ in P	Π_{n-3} "2° caratt." interz. di Π_{n-2} 1° caratt. di Π_{n-1} con altri Π_{n-1} dell'inviluppo infinit. vicini; è l'int. di $\xi, \xi'\xi''$
S_r osc. a γ in P	Π_{n-1-r} "r° caratt." definito per ricorrenza. è $(\xi, \xi' \dots \xi^{(r)})$. fino a trovare
S_{n-1} ~~caratt.~~ osc.	~~Π_0~~ $(n-1)$° caratt. è $(\xi\xi' \dots \xi^{(n-1)})$

È bene osservare il fatto evidente che ~~...~~ allo stesso modo ∞^1 di iperpiani è retto considerando non come sempre le coordinate d'iperpiani in funz. di t, ma eq. del tipo $\sum u_i(t)\, x_i = 0$:

allora p.es. lo S_{n-2} [illegible] il Π_{n-1} 1° caratt. [illegible] $\Sigma m_i z_i =$ $\Sigma \frac{dm_i}{dt} z_i = 0$, ecc. Ciò posto provo che i due concetti di linea di S_n e di svil. ∞^1 di iperp. in S_n non differiscono (sempre che sia linea di S_n e non di sp. per pt. fissi) essenzialmente tra loro, in quanto, come si prova:

se parte da svil. ∞^1 e considera per ognuno Π_{n-1} il punto ultimo caratteristico Π_0, il luogo di questo è una linea γ i cui S_{n-1} osc.^{ri} sono precisamente i Π_{n-1} dell'sviluppo (e viceversa, cioè dualmente, partendo da γ, e prendendo i suoi S_{n-1} osc., il loro sviluppo, ecc. ecc.). 503

Dimostro la 2ª cosa: [illegible] lo S_{n-1} osc. $\Xi(t)$ e pongo prodotto $(\xi, x) = \sum_{1}^{n+1} \xi_i x_i$, ho [illegible] $(\xi x) = (\xi^{(1)} x) = \dots = (\xi^{(n-1)} x) = 0$

da cui [illegible] come a p. 50, meno l'ultima relazione, 504 $^{*)}$ cioè $(\xi^{(1)} x) = \dots (\xi x^{(n-1)}) = 0$ che esprimono l'assunto.

In altre parole, il concetto di linea di S_n quando la si consideri con luogo di punti ha per duale lo stesso concetto, ma dove le linee appaiono come inviluppi dei suoi iperpiani osculatori. La stessa tabella

*) v. cont. $(\xi x) = 0$, $(\xi' x) = 0$, $(\xi x') = (\xi' x') =$, $(\xi x'') = (\xi'' x')$, $(\xi^{n-1} x) = 0$, $(\xi^{n-1} x') = 0$, $(\xi^{n-2} x'') = 0$, $(\xi', x^{n-2}) = 0$, $(\xi^{n-1}, x) = 0$

mostra anche che il Π_{n-1} caratt. di S_{n-1} osc. in x è lo S_{n-1} osc. in x (1ª e 2ª linea) e viceversa. Si corrispondono dunque per dualità il concetto di S_r osc. a γ in x e S_{n-1-r} ivi osculatore.

Le figure formate da γ, coi suoi $S_1, S_2, \dots$ osc. [illegible] si chiamano spesso "sviluppabile" e si chiamano pure anche ∞^1 di S_r svil.^{li} le figure degli S_r osc. a γ.

In quanto si è detto si è supposto gli ∞^1 iperpiani non per punto fisso (per trattare per dualità di γ di S_n). Si può dunque dire di [illegible] ∞^1 ip.^{ni} per S_0, e più in generale per S_i fisso: si continua a definire così i vari spazi caratt. ma c'è la differenza che, giunti agli S_i vanno come S_i fisso, e non si può più parlare di spazi caratt. con dim. $< i$. Anche le figure formate da tali ∞^1 ip.^{ni} con tutti i loro succ. spazi caratt. si chiamano ancora svil.^{li}

*) $(\xi x) = 0$ $(\xi x') = 0$ — $(\xi x^{n-1}) = 0$
$(\xi' x) = 0$ $(\xi' x') = 0$ $(\xi' x^{n-2}) = 0$

$(\xi^{n-1} x) = 0$

Tuttavia solo a sviluppabili. Non per punti però.

~~Quindi~~ Come una g è integrale di eq. diff. lin. d'ordine $n-1$, lo stesso vale per sviluppi di $\infty^1 S_{n-1}$ nel senso che detto ~~[illegible]~~ sviluppo riferito a un parametro t, $z = z(t)$, esiste eq. diff. lin. d'ord. $n-1$ soddisfatta dalle z_i, e viceversa queste, avendo $n-1$ integr. lin. ind. a fun. param. per un sviluppo, conducono a tale sviluppo. (più precisamente a infiniti sviluppi ∞^1 tutti = fra loro).

Riguardando dunque g come luogo e sviluppo con determinato parametro t e determinati x_i, z_i: $x(t)$, $z(t)$... sono da considerare ora non più una, ma due eq. diff. lin. d'ord. $n-1$, quella soddisfatta dalle $x(t)$ e quella dalle $z(t)$. Ebbene le due equazioni (o più precisamente la 1ª e l'aggiunta della 2ª ~~[illegible]~~ $y = \vartheta\,\zeta$) sono aggiunte l'una dell'altra. Basta pensare che le x_i sono sol. della prima e quindi le y_i d'p. sg dell'aggiunta. Ma tali y_i non sono che le z_i (a meno di un fattore) e quindi civetta[?] come $z = (x\; x'\; y''\, \ldots\, x^{(n-1)})$

le z_i sono ::

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_1' & \ldots & x_1^{(n-1)} \\ \vdots & & & \\ x_{n+1} & & & \end{matrix} \right\|$$

$\downarrow$ scegliendo opportunamente il fattore di proporzionalità per le z si può ritenere $z \equiv y$.

che sono precisamente le Δ_{in}.

Questo spiega (ma è un giro vizioso) come a posteriori perchè ~~saputo~~ ~~[illegible]~~ noto l'integrale generale di eq. diff. lin. si sa trovare quello dell'aggiunta: poichè allora è noto una curva g, luogo, e di questa si passa allo sviluppo.

<u>Le equazioni</u> <u>lineari</u> <u>autoaggiunte</u>. - È possibile che una equazione coincida con la sua aggiunta? (sia autoaggiunta) La questione è importante anche per applicazioni a altri rami delle matematiche, p. es. nel calcolo delle variazioni[1] Quella coincidenza si può intendere in <u>senso stretto</u> (se l'eq. e l'aggiunta hanno senz'altro gli stessi integrali), o in <u>senso largo</u>, se gli $\int$ dell'aggiunta coincidono con quelli della data previa moltiplicazione per ~~uno~~ stesso fattore (lo stesso per tutti gli integrali), vale a dire se l'aggiunta si può trasformare nella data (eq. in $y(t)$) con una sostituzione del tipo $y = \vartheta(t)\,\zeta(t)$, dove ϑ è da scegliersi opportunamente e $\zeta(t)$ è la nuova funzione incognita.

[1] Nota per me. Cfr. per. Kneser Variationsrechnung Encykl II A 8. n° 13, 15

Ogni soluz. del probl. in senso stretto lo è in senso largo; ma non viceversa. Però si può vedere che da ogni soluz. in senso largo se ne può dedurre una in senso stretto, come segue. (Se $\mathcal{F}$ è soluz. in senso largo, ho

con $\omega \equiv \vartheta$ per l'uguaglianza dei coeff. di $x^{(n)}$

$G(\vartheta x) = \omega \mathcal{F}(x)$ e posto $x = \varphi X$ con φ per ora arbitraria

$G(\vartheta \varphi X) = \vartheta \mathcal{F}(\varphi X)$

e così indicando con $\bar F(X)$ la trasformata ho

$G(\vartheta \varphi X) = \vartheta \bar F(X)$

cioè (v. p. 50b)

$$\frac{\text{espr. aggiunta } \bar F(\vartheta \varphi X)}{\varphi} = \vartheta \bar F(X)$$

scelto dunque $\varphi = 1/\vartheta$ ho

espr agg. $\bar F(X) = \varphi \vartheta \cdot \bar F = \bar F$

~~dove $\varphi\omega$ è certo $= 1$ per l'uguaglianza dei coeff. di derivate massime~~. Dunque espr. agg. $\bar F \equiv \bar F$. ; cioè si può sempre trasf. la data con sostit. $x = \varphi X$ in modo che la trasformata sia autoaggiunta in senso stretto, se la data lo era in senso largo) *)

Il problema delle eq.ni autoaggiunte si può - oltre alle distinzioni precedenti, [illegible], come si è detto, trattare

in due modi: A) proponendosi direttamente la ricerca delle eq.ni autoaggiunte p. es. in senso stretto; oppure B) cercando di caratterizzare direttamente la natura delle loro curve integrali (e questo avverrà parlando di una cl. probl. in senso largo). - Accenno brevemente al problema A): la soluz. si trova - almeno per le eq. d'ordine pari - in Jacobi (v. sui ~~Theorie~~ Zur Theor. der Variations-Rechnung und der Differentialgleichungen. Crelle t XVII p. 68. 1836); v. per il caso dell'ordine dispari. Darboux Théor. des Surf. vol II cap. V. (1a ed.): per l'ordine pari ~~per n pari~~ $2p$ sono autoaggiunte (in senso stretto) tutte e sole le eq.ni

$$(A_p x^{(p)})^{(p)} + (A_{p-1} x^{(p-1)})^{(p-1)} \dots + A_0 x = 0 \qquad (1)$$

Per l'ordine $2p-1$ tutte e sole le

$$(A_p x^{(p-1)})^{(p)} + (A_p x^{(p)})^{(p-1)} + (A_{p-1} x^{(p-2)})^{(p-1)} + (A_{p-1} x^{(p-1)})^{(p-2)} + \dots + (A_1 x)^{(1)} + (A_1 x^{(1)}) = 0. \qquad (2)$$

*) vale per tutte le soluz. in senso stretto, con le trasf. $x = \varphi X$ si han tutte quelle in senso largo (aggiunte per le [illegible] [illegible])

Dimostriamo però il risultato relativo alla (1): si tratta di un risultato puramente algoritmico e meno interessante che quello relativo a B). Ora che $\left(A_p x^{(p)}\right)^{(p)}$ è espressione autoaggiunta.

Invece $F(x) = \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} A_p^{(r)} x^{(2p-r)}$. e allora per l'espr. aggiunta si ha

$$G(x) = \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \binom{p}{r} \left[A_p^{(r)} x\right]^{(2p-r)} =$$

$$= \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \binom{p}{r} \sum_{s=0}^{2p-r} \cancel{A^{(r+s)}} \binom{2p-r}{s} A_p^{(r+s)} x^{(2p-r-s)}$$

Dunque in $G(x)$ il coeff.te di $x^{(2p-h)}$ è $A_p^{(h)}$.

~~la parte delle x~~

$$\times \sum_{r=0,\, s=0,\, r+s=h}^{p,\, 2p-r} (-1)^r \binom{p}{r} \binom{2p-r}{s} =$$

dovrà anche essere: $s = h - r$ è certo; $s = h - r \leq 2p - r$ perchè $h \leq 2p$.

$$A_p^{(h)} \cdot \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \binom{p}{r} \binom{2p-r}{h-r}.$$

$$= A_p^{(h)} \binom{p}{h}^{*)} = \text{coeff. di } x^{(2p-h)} \text{ in } F(x). \text{ Dunque}$$

$G(x) = F(x)$

*) la formula combinatoria risulta da ciò che indicano con x una variabile $\sum_{r=0}^{p} (-1)^r \binom{p}{r} x^r (1+x)^{2p-r} =$

Ciò posto osserviamo che (delle leggi di formazione aggiunte è chiaro che) sommando o sottraendo più $F(x)$ dello stesso ordine altrettanto avviene delle relative $G(y)$. Perciò se $F(x)$ ~~è~~ (date) (sono) autoaggiunte, le differenze è anche autoaggiunte. Quindi se $F(x) = a_0 x^{(2p)} + a_1 x^{(2p-1)} + \ldots$ è autoaggiunta, lo è anche $H = F - (a_0 x^{p})^{(p)}$. Diciamo però che H è autoaggiunta, come risulta da quanto si è detto, come espressione diff.le lineare di ordine $2p$, in cui il 1° coeff.te è nullo. Non è detto senz'altro che essa lo sia anche tenuto conto del suo ordine effettivo che è $q \leq 2p-1$. (1)

(*) perchè non è detto che costruendo l'aggiunta di tale espressione considerata come del suo ordine effettivo, o di un ordine superiore, coi primi coeff.ti $= 0$, si trovi lo stesso risultato). Anzi dall'espressione generale dell'aggiunta è evidente che per ogni espr. $H(x)$ [illegible]

$$(1+x)^p \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \binom{p}{r} x^r (1+x)^{p-r} = (1+x)^p (1+x-x)^p =$$

$= (1+x)^p$. Dunque a 1° membro il è $\binom{p}{h}$ il coeff. di x^h. Cioè

$$\sum_{r=0}^{p} (-1)^r \binom{p}{r} \cancel{x^r} \binom{2p-r}{h-r} \cdot \cancel{x^{h-r}} = \binom{p}{h} \cancel{x^h} \quad \text{c.d.d.}$$

Due effettivo q e virtuale 2p si ha

Aggiunta .... effettiva $\equiv (-1)^q$ aggiunta virtuale.

Quindi se q è dispari si ha

Aggiunta ... effettiva $H \equiv - H$

il che è assurdo per l'identità di coeff.te di ~~gr~~

derivate massime. Dunque q è pari. Cioè

$F(x) = (a_p x^{(p)})^{(p)}$ + H autoaggiunta d'ordine pari $\leq 2p-2$

E continuando per ricorrenza si ha la necessità delle condizioni trovate. Dalle cose dette ne emerge anche dagli altri la sufficienza.

c. d. d.

Il problema B) - per il quale ~~citiamo~~ esistono lavori di Fano (Sulle eq. diff. lin. che appartengono alle stesse specie delle loro aggiunte. - Torino Atti 35. 1899) e Borel (Sur l'équation adjointe ..... Ann. Éc. Norm. (3. 9). 1892 conduce a sviluppi più interessanti. Qui mostrerò anzitutto come le curve integrali sono negli spazi pari (tutte) quelle ~~che~~ i cui sp.^{ioni} osc. corrispondono ai pt. nel gli ordini del 2° modo di (1) sono ogni antiaggiunta (effettiva) e quindi anche virtuale

(e già noto l'esempio delle eq. norm. $x^{n+1} = 0$ autoagg.te)

di contatto in polarità ordinaria (quindi sono tracciate su Q e in ogni pt. ammettono come sp. osc. il sp. tangente a Q), e negli spazi dispari id. id. ... polarità nulla.

Dopo darò un cenno del modo come effettivamente si possono trovare tutte le linee in tali condizioni.

(e ξ il relativo sviluppo)

Se x e ξ integrali di eq. autoaggiunta (in senso largo): le x_i e le ξ_i (elementi per ..., chiamo ξ_i i nuovi valori) sono integrali di una stessa eq. diff. lin. di ordine n+1. Quindi esistono costanti c tali che

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_1 = c_{11} x_1 (1) \quad - - - \quad + c_{1\,n+1} x_{n+1} (1) \\ - - - - - - - - \\ \xi_{n+1} = c_{n+1,1} x_1 (1) - \quad + c_{n+1,n+1} x_{n+1} (1) \end{array}\right\} (1)$$

Osservo che il det. C delle c è $\neq 0$; se no ($x\, C_{11} \dots C_{n+1,1}$) varrebbe una cb. lin. delle ξ a coeff. cost.ti = 0, cioè tutti gli sp.^{i} osc.^{ti} passerebbero per pt. fisso. Pertanto le (1) ove le x_i si lascino indeterminate sono eq. di reciprocità non degenere. cioè esiste reciprocità R in dunque che porta ogni pt. di γ nel relativo iperpiano osculatore: Dico ~~che~~ che istante che essa è involutoria.

Se infatti chiamo Σ e Σ' i sp.^{i} ..., per Σ ha γ e in Σ' l'invol.^ne: all'ip.^ne Σ in Σ considerata. Inversamente (volendo parlare in modo rigoroso) come ip.^ne di x e di altri $n-1$ pt. inf. vicini ad essa su γ corrisponde in Σ' il pt. d'inters. degli ip. corrisp.^ti, cioè il pt. d'int. di [illegible] con $n-1$ ult. ip.^ni osc. inf. vicini cioè il pt. caratteristico con ? in Γ, cioè x. Dunque inteso i pt. di γ e i relativi ip.^ni di Γ si corrispondono in doppio modo.

Di qui si passa a dimostrare che le repr. così involutorie rimanti in tutte le repr. osservando che esiste una e una sola repr. (omogr.) tra Σ e Σ' in cui a $n+2$ pt. arbitr. di Σ corrisp. $n+2$ ip.^ni (pt.) arbitr. di Σ' con la cond. che gli $n+2$ pt. (o ip.^ni) siano indip.^ti [1] cioè si vuol dire, cioè mai $n+1$ in ip.^ne (o per un pt.). [1]

[1] La dimostr. ~~per~~ p. es. per omogr. si fa scegliendo i vertici della piramide in Σ. Σ' in $n+1$ pt. dati $A_1 \dots A_{n+1}$ ecc. e poi A_{n+2}, A'_{n+2} l'ultima coppia. La corrisp. dei vertici porta subito a scrivere le eq. della omogr. cercata sotto la forma $x'_i = m_i x_i$ e se $A_{n+2}: (a_1 \dots a_{n+1})$, $A'_{n+2}(a'_1 \dots a'_{n+1})$ le m_i si determinano da $m_i = \frac{a'_i}{a_i}$ il che è lecito ($a_i = 0$ vorrebbe dire ...) e porta a $A \neq 0$ (per le $a'_i \neq 0$).

[1] Indip. vuol dire linearmente: è solo una loc. abbreviata

Quindi se io prendo in modo generico $n+2$ pt. da γ so che $n+1$ di essi non sono mai in ip.^no, e $n+1$ ip. osc. in essi non passano mai per un punto [1] — visto che γ non sta in ip.^ne e che gli ip. di Γ non passano tutti per un punto — vi è una sola repr. in cui essi corrisp.^no ai relativi ip.^ni osculatori: ma a questa cond. per quanto precede soddisfa anche la repr. involut. Dunque le repr. considerate coincide con l'inversa, cioè è involutoria. E siccome non è degenere, segue già che per spaz. pari essa è polarità ordinaria: negli spaz. dispari non possiamo ancora affermare se sia ordinaria o nulla. Risulterà dal seguito che è nulla.

Proponiamoci ora di mostrare come effettivamente si trovino le γ dicasi pure autopolari per polarità

[1] (per me: qui si dovrebbe precisare meglio. ma è ok in linguaggio)

ordinaria. Così, oltre a completare la ricerca proposta per spazi pari, risulterà durante il corso provato che la pol.tà ordinaria è impossibile negli sp. dispari. Consideriamo infatti la Q dei pt. autoconiug. nella polarità: supponiamo la sua eq.ne $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 0$, come è ~~sempre~~ sempre possibile. y sarà $x(t)$ con le x soddisfacenti a (1): inoltre per le contropolarità deve l'sp. tg. a Q in x — che le per cons. le stesse x — contenere $x' \ldots x^{(n-1)}$: avremo così le condizioni già scritte per $x = x(t)$

$(x, x) = 0, \ldots \qquad (x, x^{(n-1)}) = 0$

da cui col solito procedimento. V. per. p. 53.

$(x' x) = 0 \ldots \qquad (x' x^{(n-2)}) = 0$

$(x^{(n-1)}, x) = 0.$

Ottenute $(x^{(\alpha)}, x^{(\beta)}) = 0$ con $\alpha + \beta \leq n-1$. Facciamo vedere intanto l'impossib. per n dispari $= 2p+1$. Allora sulla via uno scritte delle tabelle precedenti:

$(x^{(p)} x) \ldots \qquad = (x^{(p)} x^{(p)}) = 0$

derivando l'ultima viene $(x^{(p)}, x^{(p+1)}) = 0$, così questo scritto si può prolungare di una formula: lo stesso vale per le successive. Allora si ha $(x^{(n)}, x') = 0$ e poi $(x^{(n)} x) + (x^{(n-1)} x') = 0$. Dunque l'sp. tg. a Q in x con-

~~tiene~~ cui osc. a y in x contiene anche $x^{(n)}$; cioè $x^{(n)}$ è legata lin. a $x \ldots x^{(n-1)}$; cioè y è sviluppabile di eq. d'ordine n ciò che è assurdo. c.d.d.

A questo punto si è dunque dimostrato l'enunciato di pp. 50-51 e si è visto che tutte le curve in cui coincidono sono y di eq. autoaggiunte (prendendo y e Γ con polarità dove particolari rispetto).

Per spazi pari, vediamo come si possano trovare tutte le y. Posto $n = 2p$, la tabella precedente

~~$(x, x) \equiv \ldots (x, x^{(2p-1)})$~~.

mostra che per $\alpha = 0 \ldots p-1$, $\beta = 0 \ldots p-1$ (risultando sempre $\alpha + \beta \leq 2p-2 < n-1 = 2p-1$) è $(x^{(\alpha)} x^{(\beta)}) = 0$. Dunque lo spazio $x\, x' \ldots x^{(p-1)}$, cioè S_{p-1} è tutto contenuto su Q (poiché ~~essendo~~ con λ_i arbitrari la $\sum(\lambda_0 x_i + \lambda_1 x_i' \ldots + \lambda_{p-1} x_i^{(p-1)})^2$ ~~...~~ sviluppata dando $\lambda_0^2 (x x) + \lambda_1^2 (x' x') + \ldots + 2\lambda_{p-2}\lambda_{p-1}(x^{(p-2)}, x^{(p-1)})$ che è nulla). Quindi le y cercate sono tali che i loro S_{p-1} osc. sono tracciati su Q (e quindi a maggior ragione gli S osc. minori). Ricordando l'n_{i-1} di p. 20 che è su $\frac{2p}{2} - 1$ ne viene dunque che gli S_{p-1} osc. di y sono per gli spazi massimi di **Q**. Viceversa questa cond. è sufficiente perchè γ sia autopolare rispetto a Q. Infatti, dalle $\Sigma(\lambda_0 x_i + \dots + \lambda_{p-1} x_i^{(p-1)})^2 = 0$ per ogni λ seguono le $(x^{\alpha} x^{\beta}) = 0$ per $\alpha + \beta \leq p-1$ e allora dalle tabelle triangolari di p. 54 dunque la parte quotata in alto a sinistra, la cui ultima orizz.ale $(x^{p-1}, \cdot) = 0$ coincide con tutta la p^{ma} delle tabelle triangolari [poichè termina con (x^{p-1}, x^{p-1}), ma ne segue per derivazione $(x^{p-1} x^{p}) = 0$, e che $2p-1 = n-1$]: quindi con derivazioni successive si ristabilisce la parte inferiore delle tabelle triangolari, e ciò con tutta la 1ª colonna, da cui segue che l'S_{p-1} tg. a Q in x è osc. in γ.

La ricerca è così ricondotta a quella delle γ tracciate su Q tali che stiano su Q anche il loro successivi spazi osc. fino a S_{p-1} incluso.

Trattiamo allora prima del fondo il caso di S_4 (si vede è evidente che le γ sono C^n: negli spazi pari superiori si ragiona in modo perfettamente analogo, riducendo il problema per ricorrenza.). Proiettando stereograf. Q su Σ_3 – dove le rette di Q hanno per immagini

 di piano π

gini rette appoggiate a conica fissa λ. Ebbene (come base per le immagini delle sez. iperpiane) γ sono linee di Σ_3 le cui tangenti incontrano ~~tra~~ λ. Per trovarle tutte, osservo che i piani osc. di γ sono tangenti a λ (come è evidente riguardando in modo intuitivo tangenti e piani osc. come congiungenti...; e come si potrebbe verificare in modo rigoroso), e viceversa, questa cond. è suff. (id. id.) Quindi per trovare γ basta prendere ∞^1 piani tg. a λ: il loro inviluppo è precisamente la γ! Per ~~avere~~ giungere a formule esplicite basta tradurre analit. il procedimento. Supponiamo Q) $x_1^2 - x_2 x_3 - x_4 x_5 = 0$ (sempre possibile con trasf. π); e da A_5 la proietto stereograf. sul Σ_3 $x_5 = 0$: il pt. x si proietta in y con $y_1 : \dots : y_4 = x_1 : \dots x_4$; e y corrisponde su Q al pt $\left(y_1 \dots y_4, \frac{y_1^2 - y_2 y_3}{y_4}\right)$ cioè $(y_1 y_4, \dots y_4^2, y_1^2 - y_2 y_3)$. Allora per avere γ dico in Σ_3, $\lambda \equiv y_4 = y_1^2 - y_2 y_3 = 0$, come è chiaro dalle rappr. prendo ∞^1 piani tg. a λ; ~~l'eq. di uno di essi~~ per avere uno prendo su λ rappr. parametrica $y_1 : y_2 : y_3 = t : t^2 : 1$, nella q. cui tg è $2t y_1 - y_2 - t^2 y_3 = 0$, $y_4 = 0$; piano per essa $2t y_1 - y_2 - t^2 y_3 + 2\varphi(t) \cdot y_4 = 0$; ne viene il pt. 2° caratt.

$$y_1 \qquad -t y_3 + \varphi' y_4 = 0$$
$$-y_3 + \varphi'' y_4 = 0$$

e ho $y_3 = \varphi'' y_4$. $y_1 = t\varphi'' y_4 - \varphi' y_4 = (t\varphi''-\varphi') y_4$.
$y_2 = (2t^2\varphi'' - 2t\varphi' - t^2\varphi'' + 2\varphi) y_4$. e quindi ho per γ le formole parametriche

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 =$$
$$(t\varphi''-\varphi') : t^2\varphi''-2t\varphi'+2\varphi : \varphi'' : 1 :$$
$$\boxed{(t\varphi''-\varphi')^2 - (t^2\varphi''-2t\varphi'+2\varphi)\varphi''} \quad \varphi'^2 - 2\varphi\varphi''$$

con φ funzione arbitraria. Come si vede, si hanno così tutte le linee γ richieste (non solo in modo esplicito ma) senza nessuna quadratura

Per n dispari mi limito al 1° caso (dopo $n = 1$ che non dà luogo a nulla) $n = 3$. Le γ sono allora linee di S_3 autopolari rispetto a polarità nulla. Le tg. a γ in x stanno in un Σ e sono rette del compl. lin. definito dal sist. nullo. Dunque le tg. di γ appartengono a un cpl. lin.: si dice allora brevemente che γ appartiene ad esso cpl. lineare (ecc.)

tale cond. è sufficiente (perchè la polarità nulla definita dal cpl. trasforma le tg. di γ in pl. quindi ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ – limitandoci a consid. intuitive che si potrebbero rendere rigorose – immaginando γ come serie di pt. successivi ABCD... a B ≡ AB.BC compete il piano ABC). – Ora interpretando rette in pt di S_5, il probl. diventa: trovare in S_5 le immag. delle tg. di γ, cioè una linea della quadrica **R** che: a) stia in S_4, b) sia immagine di rigata (non genericamente) di tangenti in S_3 [515]

Allora mi domando: su **R** curva generica è img. di rigate sviluppabili i.e. due quando è la svil.ta circoscritta d'una linea sghemba? * (necess. suff. è) ~~[illegible]~~ ciò avviene quando ho pure le sue tg su **R** [~~[illegible]~~ 506 de p. 5. 515

che ciò non può valere per i piani ... ma per le tg. non vi è impedimento) Quindi per ... λ deve essere linea di quadrica Q di S_4 ... di R, con tgenti tracciate sulla stessa Q. È il problema già risolto a pp. 56-58. Tornando a S_3 si ha la rapp. parametrica di tutte le γ, con una funz. arbitraria φ. Resta solo da tradurre in formule il proced. indicat. - Se prendo p.es. il cpl. $p_{12} = k^2 p_{34}$ (come si può sempre supporre prendendo A_1A_2, A_3A_4 in 2 rette polari, cosicchè gli altri 4 spigoli sono rette del cpl., ecc.), in S_4 devo cercare λ sulla Q di S_4.

$p_{12} = k^2 p_{34}$, $k^2 p_{34}^2 + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$.

in tale S_4 ho le 5 coord. $p_{12} \dots p_{34}$; faccio che $X_1 = k p_{34}$, $X_2 = p_{13}$, $X_3 = p_{42}$, $X_4 = -p_{14}$, $X_5 = p_{23}$ (prendo qui le maiuscole per evitare confusioni) e ho $X_1^2 - X_2X_3 - X_4X_5 = 0$. Quindi per p. 58 ho per le tg. di γ

$p_{12} : p_{34} : p_{13} : p_{42} : p_{14} : p_{23} =$

$k(t\varphi''-\varphi') : \frac{t\varphi''-\varphi'}{k} : -t^2\varphi''+2t\varphi'-2\varphi : \varphi'' :$

$-1 : \varphi'^2 - 2\varphi\varphi''$ da cui per (5) di p. 508

$-x_1 = -k(t\varphi''-\varphi')' : \varphi''' = -kt$

e poi per le (5) p. 508

$x_2 = -k(t\varphi''-\varphi') + kt\varphi'' = \cancel{\dots} + k\varphi'$

$x_3 = t^2\varphi'' - 2t\varphi' + 2\varphi - t(t\varphi''-\varphi')$

$= \cancel{\dots} - t\varphi' + 2\varphi$

Si ha così finalmente, con $x_4 = 1$, le

$x_1 = kt$, $x_2 = k\varphi'$, $x_3 = 2\varphi - t\varphi'$

~~$x_1 = -kt$, $x_2 = \dots k\varphi'$, $x_3 = \dots - t\varphi' + 2\varphi$.~~

per la più generale γ di cpl. lin. di S_3.

[Verifica $p_{12} = k^2\begin{vmatrix} t & \varphi' \\ 1 & \varphi'' \end{vmatrix} = k^2(t\varphi''-\varphi')$,

$p_{34} = \begin{vmatrix} 2\varphi - t\varphi' & 1 \\ \varphi' - t\varphi'' & 0 \end{vmatrix} = t\varphi''-\varphi'$ c.d.v.]

P.es. per $k = 1$, $\varphi = t^3$ ~~...~~.

$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = t : 3t^2 : -t^3 : 1$ cioè C^3;

per $\varphi = t^4$

$x_i = t : 4t^3 : -2t^4 : 1$ cioè $C^4_{2^a}$ :: $t^4 : t^3 : t : 1$

che ha 2 tg.ti tripunte ($t=0$, $t=\infty$: la 1a p.es. perchè un piano per $x(0)$, $x'(0)$ cioè per A_4, A_3, cioè $x_1 + kx_2 = 0$ conduce a $t=0$ tripla.[2]

1) Con opp. scelta del tetr. di riferimento

2) Si potrebbe mostrare che ... dal quadro di queste ... ogni C^4 di 2a specie con 2 tg.ti tripunte è di complesso lineare

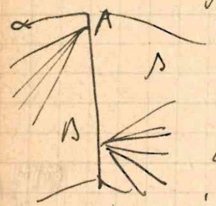
Applicazioni alle superficie rigate dello spazio ordinario. – Rigate di S_3 ha, come sappiamo, immagine γ di R in S_5: punti punteggiate γ sta in sez. iperp. (S_4). ~~La~~ Le rigate ha le generatrici in ~~congruenza~~ complesso lineare[1]; con S_3 cgr. (allora due direttrici; o cgr. lin. speciale) e S_2, cioè schiera.

[1] Conviene ~~sidereamente~~ premettere che nelle rappresentazioni dei pt. rette (p_{ik}) in pt. p_{ik}. a rette di complesso lin. $\sum a_{ik} p_{ik} = 0$ corrisponde C pt. di sez. iperpiana (e viceversa) (le ~~quadrat~~ molte punte a cpl. id. d., S_4, e viceversa); a rette di cgr. K $\sum a_{ik} p_{ik} = \sum b_{ik} p_{ik} = 0$, pt. di S_3 (a cgr. lin. S_3); e viceversa; a rette di ~~una~~ schiera S $\sum c_{ik} p_{ik} = \sum b_{ik} p_{ik} = \sum c_{ik} p_{ik} = 0$, rette di S_2 (conica) e viceversa. Con qualche osservazione. Conviene premettere che se il cpl. (1) è speciale, e formato dalle rette incidenti retta fissa m_{ik}, la (1) esprime che lo S_4 immagine del cpl. è polare del pt. (m_{ik}) di R. e quindi è tangente a R in m_{ik}. Così per una cgr. lin. con due direttrici m, n. ~~Lo S_3 immagine è~~ (intersez. dei 2 cpl. speciali di ~~direttrici~~ direttrici m. n) lo S_3 immagine è intersez. degli S_4 tg. a m, n, cioè è polare dello S_1 ~~$m.n$~~. Se la cgr. lin. è speciale, cioè ha una sola direttrice, lo S_1 polare dello S_3 img. due ha una sola intersez. $m \equiv n$. cioè è tg. a R in m, immagine dell'unica direttrice. È poi possibile

~~alla~~ (e degenerazione) bile con ~~alterazione~~ semplificazione della ~~cpl.~~ cgr.: se lo S_1 polare dello S_3 sta su R: allora lo S_3 sta in tutti gli S_4 tg. lungo ai singoli punti di uno S_1: le sue intersez. con R consta di due piani di sist. diversi. (Invero, da p. 20 risulta che le sez. di R con S_3 per suo pt. P entro S_4 in esso tg. ha in P un punto doppio. perchè tutte le rette di altre sez. di R con lo S_3 per P hanno 2 intersez. con R coinc. in P: quindi la S_3 polare di r ~~di~~ da R ha in ogni pt. di r un pt. doppio. cioè è quadrica di S_3 con rette doppie, spezzata due piani. Questi sono su R di sist. diversi, avendo in comune una retta: in base alle interpret. in S_3): allora la cgr. è costituita da una piano rigato e una stella aventi in comune un fascio. Altri casi non sono possibili. Quanto, alla rigata ~~sipuo~~ esse in sue punti essendo ~~quadrica~~ quando sono rappresentate da S_2 generici (cioè coniche ecc.), o da coppie di rette, o rette doppie, o piano di R. – Senza stare troppo tutti i casi[*] ~~Nel~~ primo caso se π, è l'imag. di schiera rigata S il piano π' polare è l'immagine della ulteriore schiera rigata S tracciata sulla stessa quadrica: infatti la relazione di coniugio $R(a, a') = 0$ [per pt. delle due coniche di π e π'] equivale a quella di incidenza [di rette delle due schiere:]

[*] ~~comm~~ sono solo due casi

Però, disponendo le 2ª schiere come luogo ~~dei punti~~ delle rette appoggiate alle 1ª, si ha che le rette cong. contengono i punti di B polari dei punti delle rette cong. alle 1ª. **Nel 2° caso** la "schiera" è costituita da due fasci distinti aventi a comune un raggio cioè ~~in piano e st~~ con $\alpha \neq \beta$, $A \neq B$



(se fosse poi $\alpha = \beta$, i due fasci starebbero in un piano rigato e lo S_2 di S_3 starebbe tutto su R): lo S_2 polare ha per rette cong. come 30 per una altra schiera rigata.. di rette rimarrebbe le per certo che (se non passano per B stanno in β, ecc. e più) sono i due fasci $A\beta$. $B\alpha$. – Sopra formano nel 2° caso (in cui si ha un fascio contato due volte, ma sarebbe necessario qualche ult. osservazione), nel 4° appaiono come schiere rigate degeneri anche i piani e stelle rigate (con ∞^2 rette assieme ∞^1). Finalmente la rig. di R con S_1 ha per cong. 2 rette se S_1 è non tangente; si coincidono se è tg. i un fascio se S_1 sta su R. (nel 2° caso le 2 rette coincidenti si possono pensare, più precisamente, come le 2 dir. cr. [illegible] della cgr. lin. [illegible] corrisp. allo S_3 polare):

Due cpll. lin. si dicono in involuzione quando i loro

S_4 cong. sono coniugati rispetto a R, o ciò che è lo stesso per le df. di coniugio quando son coss. i poli dei gruppi S_4. La cf. equivalente a questa, che, nel fascio determinato da C, C' [illegible] c.c. rispetto ai 2 cpl. speciali del fascio (invece i due S_4 cong. di C, C' son c.c. rispetto ai 2 S_4 tg. del fascio di S_4 da essi determinato: ~~per~~ [illegible] siccome fasci di S_4 rappresentano fasci di C, ecc. ecc. – Premettere che un fascio di cpl. è una F_1, per mezzo del λ/μ). Una coppia di CC' in invol. si ha tirando 2 ~~sch~~ cpl. per le due opposte schiere di una quadrica (in S_5 due S_2 per due S_2 polari sono polari).

~~Una~~ Un altro criterio di classif. delle rigate: sviluppabili (i 2 tipi già noti) e sghembe ~~le rigate~~ (tutte le altre): la ragione del nome risiede in ciò che per le prime la relaz. di incidenza fra 2 rette inf. vicine $p(t)$, $p(t+dt)$ cioè $R(p, p(t+dt)) = 0$ cioè $R(pp) + dt\, R(pp') + \frac{dt^2}{2} R(pp'') \ldots = 0$ è sempre vera a meno di termini del 3° ordine (almeno) – quindi $R(pp'') = 0$ – come si vede derivando $R(pp') = 0$ equivale a $R(p'p') = 0$ (v. p. 59-511), e per le altre no $R(pp'') \neq 0$, [illegible] per [illegible] p generale. Altre diff. verrà in seguito.

Se p è gen. non singolare di rigata, i piani tg. a essa nei pt. di p corrisp.te ai pt. di contatto in proiettività non degenere (teor.a di Chasles) dove per gen. sing. si intende una lungo la quale il piano tgente è fisso. (Premettiamo def. geom. del piano tg. Per $x(u,v)$ la tg. in x a $v(u)$ va da x a $\frac{dx}{du} = x_u + v' x_v$; sta dunque nel piano $x\ x_u\ x_v$ (un esame più approfondito mostrerebbe che $\|x\ x_u\ x_v\| \neq 0$ se (x) è sup. e non degenera in curve)[1]. Quindi l'eq. del piano tg. è $(X, x, x_u\ x_v) = 0$.[1] Per rigate $y = ax + b$, $z = cx + d$, ove $c = a(v)$ ecc. il pian tg. in $(x\ y\ z)$ è (v. corso 1925-26)

$$-(a'x + b')(cX + d - Z) + (c'x + d')(aX + b - Y) = 0$$

passa per gen. p (evid. geometric...) e ...

$$\lambda = \frac{a'x + b'}{c'x + d'}. \qquad \text{c.d.d.}$$

~~perchè~~ ~~piano~~ fisso se non è $\mp$ n. dg. λ è fisso.

1) Se in coord. non omog.

$$\begin{vmatrix} X - x \\ x_u \\ x_v \end{vmatrix} = 0.$$

1) in coord. non omogenee .... Significato $v = v(u)$. $dv/du = \psi(u, v)$

Vice versa cond. di sing. è $a'd' - b'c' = 0$. Se ogni gen. è sing. rigata è sviluppabile evidentemente (cond. di incidenza di p e $p(t+dt)$ è:

$$(a - \bar{a})x + b - \bar{b} = 0. \quad (c - \bar{c})x + d - \bar{d} = 0.$$

cioè $\begin{vmatrix} da & db \\ dc & dd \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} dt\, a' + \dots & dt\, b' \dots \\ dt\, c' + \dots & dt\, d' \dots \end{vmatrix} = 0$

Or $a'd' - b'c' = 0$ è cond. perchè ciò sia vero del 3° ordine almeno. p. 65. c.d.d.

In altre parole, le le rigate sole le sviluppabili hanno lungo ogni gen. piano tg fisso

Digressione sulle ~~tangenti~~ principali. asintotiche

Come linee tali che il piano osc. in x coincida col piano tg. in x $\left[x, x_u, x_v, \frac{d}{du}\left(x_u + \frac{dv}{du} x_v\right) = x_{uu} + 2x_{uv}\frac{dv}{du} + x_{vv}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \frac{d^2v}{du^2} x_u\right]$ ampliamenti

$|x, x_u\, x_v, \ x_{uu}\, du^2 + 2x_{uv}\, du\, dv + x_{vv}\, dv^2| = 0$. eq. (in coord. non omogenee ....) di 1° ordine 2° grado.. $L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2 = 0$)

o siano rette[1]: si possono caratterizzare le loro tangenti (principali o asintotiche) come tangenti ~~principali~~ in x. nel senso che si dimostrerà che supposta la sup. analitica

1) per ogni pt. due (tan. anche si). dove de $LN - M^2 = 0$ e allora si dimostra che è svil. l. Dpt. dove $LN - M^2 > 0$ si dicono parabolici. Se reali iperb. se imag. ellittici

curve cilindr. di un cono gen. generico, per p. es. nel caso [illegible] e un x tangente ~~[illegible] [illegible] mentre divisibile~~ posto $y = z = 0$ nell'equazione delle sup." risulta divisibile per x^2: invece per tg. principali per x^3.[2)]

[inters. di sup. con piano tangente ... spiegare]

Spiegare le tg.^{ti} principali come raggi uniti dell'invol.^{ne} delle tg. coniugate.

Per rigate Γ consideriamo gen.^{te} non singolare g: le rette tangenti lungo g stanno pel teor.^{a} di Charles in congruenza lineare speciale : questo proviene ~~[illegible]~~ considerando rette appoggiate a g e $\bar{g}$, ... come limite delle cgr. di direttrici $g\,\bar{g}$ ~~ma il passaggio al limite non~~ [parimenti: ma tale procedimento, se lo si volesse usare ~~[illegible]~~ per provare che è cgr. lin. speciale dovrebbe un fatto concreto]: congruenza lin. speciale delle tangenti a Γ lungo g. (K) ~~(congruenza spec. delle osculatrice)~~: in S_5, su γ nel punto g la sua immagine è lo ~~polo~~ S_3 polare g_1 della retta tg. a γ in g. Siano S_3 e S_1 polari si individuano si può assumere a rappresentare in S_5 queste rette tgti. In modo analogo, il piano osc. a γ

1) Scritte per posizione le idee g: assi di posiz. in x, y.

Tale allora si possono / caratterizzare le sost. come corrispondenti delle tg. principali. (Risultano dai detti sost.... di g. di F cioè sost. così di una corrispondenza, retta due tg. [illegible] - p. 65 - e da dV/dx - [illegible] dx/dx : $\varphi(x, y)$.)

in g (al suo polare) ~~[illegible]~~ rappresenta la schiera rigata osculatrice a Γ lungo g, definita come limite della schiera rigata individ. della congruenza K coniugata col complesso lineare $\bar{g} \to g$. [in S_5 ho S_2 individ. di S_3 polare di $S_1(g)$ così S_2 polare di g' e per polarità $S_2 \equiv S_1(g) \cdot g' \equiv S_2(g)$][*)] - Finalmente possiamo considerare una congr. lin. osc. a Γ lungo g ~~[illegible]~~ in e un complesso lin. osc (individuato risp. da S_4, o S gen.....) e rappresentati c. s. da S_3, o S_4 osculatori a γ in g.

Ciò ha conseguenze ovvie per rigate di cgr. o compl. lin. (p. es. nel 1° caso - γ in S_3, ~~tutte~~ le cgr. osculatrici contengono tutte le Γ; non ha senso parlare di cpl. osc.; ecc.)-

Per le rigate sghembe una sost. d'ast. è quella delle generatrici (r.s.f.): non ne ha una 2.^{a}, l'asint. generalmente curve (sulle quadriche è la 2.^{a} schiera ecc., per il quale sussiste il teor.^{a} di P. Serret: ... punteggiano proiettivamente le generatrici: la cosa è

*) le generatrici della schiera rigata osculatrice lungo g sono le 2.^{e} tg. principali

è costituita da figure

$(P_1 Q_1 \ldots \pi\ Q_1 Q_2 \ldots)$. Si potrebbe

dimostrare in modo rigoroso scrivendo

l'eq. delle asint. in una delle forme date

$$dv \left\{ 2(a'd' - b'c')\, dx + \left\| \begin{matrix} a''x + b'' & c''x + d'' \\ a'x + b' & c'x + d' \end{matrix} \right\| dv \right\} = 0 .$$

che si spezza in v = costante e $\dfrac{dx}{dv} = P(v)x^2 + Q(v)x + R(v)$ — eq.

di Riccati: quella mai integrabile con funz.ⁱ elementari. e

cui si interpreta geometricamente nel teor.ᵃ di Segre. — Oss.ⁿᵉ di

Lie per le Γ di complessi o congr. lineari: v. corso 1925-26. *)

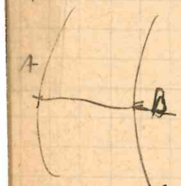
Trasf.ⁿⁱ asintotiche fra curve e fra sup. rigate. — Due curve

(A) luogo di A e (B) luogo di B si dicono in trasf. ast. se

il piano osc. in A passa per B e viceversa. La rigata del

... è da una sua ast. della rigata AB, e viceversa (perché

... alle il pian. osc. in A e (A) contiene 2 g. e è tg. in A,



e è un osc. ... ecc.: viceversa, come si chiama). La

denominazione è del Bianchi (Sulle configurazioni

mobili di Möbius ... Rend. Palermo. XXV. 1908).

e pure a lui è dovuto, fra altro, il teor.ᵃ di permutabilità.

(che qui stabiliremo diversamente ricorrendo a curve d.ⁿᵉ trasf. asintotiche)

Qui darò qualche cenno della teoria, strettamente connessa

con quella delle trasformazioni asintotiche fra rigate, o trasf.

per congruenze W (Due rigate Γ e Γ' si dicono in trasf.

*) Fatto il calcolo è semplice: per dividere sui $dv = 0$.

ast. quando son corrispondenti pt. per pt. in modo che P, P'

le rette PP' toccano Γ e Γ' risp. in P e P', e si corrispondono

le generatrici e le asintotiche ~~curve~~ del 2° sistema. — Per chiarire l'importanza

delle 2ᵉ denominazioni, a più di generale ~~spiegare~~ Congruenze come

sist. di rette dipendenti da 2 parametri; ~~e di cui si vedrà~~

~~più avanti come~~ ognuna ammette 2 falde focali cui le sue

rette sono tg. in casi di degenerazione. potendo le 2 falde

coincidere, o ridursi a ~~curve~~ linee in entrambe o a una soltanto" —

le cgr. di falde focali S, T, si dice W se fra corrispondono

le asintotiche: spiega il caso attuale *) f. Lo studio delle

cgr. W in generale. anche quando le falde non sono rigate, è

importante, e per fatto di ... la geometria del presente di certe

diverse: lo vedremo più avanti)

*) quindi ... generalizzare

Dimostr. che la cgr. $a(u,v)$, $b(u,v)$ ... λ tale che $a + \lambda b$,

$(a+\lambda b)_u$, $(a+\lambda b)_v$ ~~etc.~~ contenga c, S. cioè a, b, $a_u + \lambda b_u$, $a_v + \lambda b_v$

compl. ... (nel campo complesso) come già suppongo analitiche 2 valori per λ. Quindi le 2

falde focali: eccez. se le altre che per radice sono doppie, se il

determ. si annulla perché ... cpl. di x, x_u, x_v, c, S, è moltiplicato

in quanto x x_u x_v ... (le rette incidenti nel. c, S):

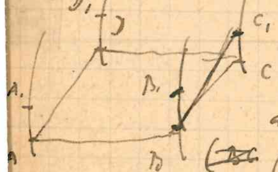
allora falda focale è costituita da ~~rette incid.~~ curve direttrici)

Qui ... i casi non degeneri

Si chiamano fuochi di una retta i pt. che ... le sup. (curve) focali

Le trasf.ast. f. curve di uno e di rigate luogo a una config.ne degenere: si
ordinate
tratta di quaterne (A)(B)(C)(D) in trasf.ast.[1] tali che
ciascuna è in trasf.ast. con la successiva e l'ultima con la pri-
ma modo da giungere da ogni A, attraverso B,C,D, allo stesso A.
Non posson ABCD esser sempre complanari; ma possono esser
allineati (punti sullo piano, p.es. con piano di AB, e AC
sull. osc. a (A) in A e le 4 curve anche gli stessi p.ni
osc.ni): escludo il caso di ABCD allineati: allora si tratta
di trasf. di stesse rigate. — Quando dice[2] se (A)(B)(C)(D)
è quaterna in t.c., le rigate (AB) e (CD) sono in trasf.
~~ast. corrispondenti purchè~~ le quaterne con AB e CD.

Sono ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ due quaterne di pt. corrisp.
inf. vicine, le 4 rette AB_1, A_1B_1, CD_1, C_1D_1 si appoggi



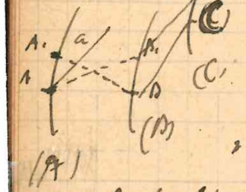
alle BC_1, B_1C appartenenti alle
c qu. lin. di cui determinate;
analog. alle 4 di distin. AD_1, A_1D
(riv., p.es. le 1a e la 5a si appoggi evidentem.

[1]) AB, p.es. è certa non osc. (l'ultimo punto) Le due caratteristiche
curve, v. sotto a p. 70. | [2] di questa e dei successivi teoremi
do solo giustificaz. intuitiva che non sono vere dimostr-
(tutti i punti ...)
considerazioni curve come poligonali, ecc. ecc. sono solo tesi.

a BC_1, poi A_1B_1 vi si appoggia, perchè i 4 pt. stanno
nel piano osc. a (B) in B_1 e CD perchè i 4 pt. nel
piano osc. a (C) in C; ecc.). Ora se che BC_1, B_1C sono
sghembe, se non si incontrano le AB, CC, e BC
(p. 51, contro) descriverebbero curve osc. ... rette a prop
dalle per. AD, e BC, son sghembe perchè ... a AD, BC sghembe.
prec. Quindi le quattro rette considerate si appoggiano
a ~~4 appoggi~~ rette sghembe — cioè stanno in
~~2 sghembe; stanno alle loro sistem.~~ ~~schiera~~; non
~~nemmeno~~ — cioè ... S_1, se non AB, CD di
~~fascio ... non è punteggiata~~ schiera rigata; e si
appoggia p. 51?

Se delle 3 curve sghembe (A)(B)(C) la 1a e la 3a sono trasf.ast.
della 1a, esistono ∞' curve sghembe (D) ciascuna delle quali
dà luogo a quaterne (A)(B)(C)(D) in trasf.ast. — ~~...~~ terne di permute ...
~~il piano osc. a (A) in A ...~~
~~osculante ...~~ Se curva (D) con pt. ter. prec. è tale che
~~...~~ AD, A_1D_1, BC, B_1C_1 sono di schiera, cioè le rette AD si
passaggi al limite che esigono quelle ulteriore
sviluppo.

$a_1 = A_1D_1$, dove una tale che $a a_1$, BC, B_1C_1 sono in schiera. Quindi sia a è in α (osc. a (A) in A), cioè è osculante; se cioè comincio a costruire rigate (a). le osculanti a (A) tali che rigate (a) e (BC) siano in trasf. ast. cui a, a_1, BC, B_1C_1 in quadrica. Ora presa una a sulla ad A, le che c, BC, B_1C_1 si appoggiano ad AB, A_1B_1, AB_1



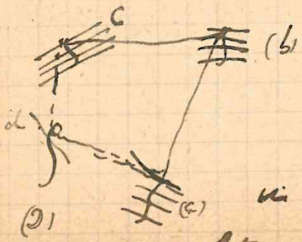
(le a sta on A_1B ecc.); cui esse, e con le rette delle loro schiere stan nella cgr. H che ha tali direttrici.

Anche il fascio $A_1\alpha_1$ sta in tale cgr. (il suo centro A_1 è sulla dir.^{ce} A_1B_1 e il suo piano α contiene A e B_1 e perciò l'altra direttrice AB_1): ogni fascio (S_1) e ogni rigata (S_2) di H hanno in comune (fino $(S_0$ di $A)$ ecc.) una retta a_1: cioè vi è a_1 di $A_1\alpha_1$ tale che a, c, B_1C, B_1C_1 stanno in schiera. Ciò da a_1 poi costruisco le seguenti ecc. e ho rigate (a) nelle relaz. richieste con (BC). La sua ast.^{ca} corrisp. alle (C) della (BC) - sia (D) - è trasf. ast. anche di (A) (poiché (A) e (D) son ast. due rigate), ma anche di (C), poiché (C) e (D) risultano ast. in (CD): invero queste rigate e la (AC) son tg. lungo (C) - poiché

CD che con tg. a (C) in C determina il piano tg. a (CD) in C sta nel pia. tg. a (AC) in C (poiché le (a).(BC) ... cgr.); e analog. per (D): quindi (C) e (D) risultano pure ast.^{che} in (CD).

L'arbitrarietà delle soluz.^{ni} dipende dalle scelte di a in $A\alpha$.

Il principio delle pag. mostra che se (a) (b) sono trasf. ast. le ast. corrisp.^{ti} (A) (B) lo sono pure. Quindi dati (A) (b) (C) per trovare (d) che dia quaterna di rigate in trasf. ast. (ciò che due rigate concorrenti lo siano, cioè modo che è lecito il pt. A di (a) si trovi ...) dovrò prendere (A)(B)(C) ast. corrisp. e cercare di trovare (d) fra le rigate di cui è ast. ogni delle ∞^1 (D) (rigate di osculanti) pratiche. Per ogni (D) una dice: siano a, b, c (con osculanti) si appoggiano ad AC, BD, le loro schiere stanno una quadrica contenente queste due rette:



e per D (pt. di BD) passa una retta d della schiera: essa è osculante in D perché si appoggia a AC (nel piano osculatore a (D) in D). La rigata (d) è trasf.

art. di (a): cioè aa_1, dd_1 stanno in una schiera {Infatti in S_5 ho aa_1, bb_1, in S_4: bb_1, cc_1, in S_4: ~~cd~~ ~~pt. in~~ gli S_4 hanno in comune S_3, dunque stanno in S_3 (al meno*); ma [illegible] si potrebbe dimostrare non, le 6 rette aa_1, cc_1 in cgr. lin. H. Poi aa_1, dd_1 [AD in appoggio anche di delle schiere ... cd_1 (delle a, b, c)] si appoggiano a $A\mathfrak{D}_1$, $A_1\mathfrak{D}$ per i comuni motivi; cioè stanno in cgr. lin. K diversa dalla precedente (poiché p. es. b non si appoggia ad $A\mathfrak{D}_1$, perché b è sghemba alla [inf. vicina] $A\mathfrak{D}$; se no la famiglia di piani β (contenenti A e $\mathfrak{B}$ contenente $\mathfrak{D}$, e i quattro pt. $ABCD$ sarebbero complanari (Nota per me)). Quindi aa_1, dd_1 stanno in S_3. cioè schiera rigata}. Analog. per (d) e (c).

Si ha così quaterna di rigate in trasf. art.: cioè se (a) (b) (c) [d] le r_e d'una trasf. art. delle 4 [illegible] ... rigate (d) tali che (a). Ed è quaterna di rigate in trasf. art. (teorema di permutabilità). Ma per completare la dimostr. bisogna provare che la corrispondenza composta fra le rigate riporta ogni pt. in sè (risultando dalle dimostr. fatte che due portano ogni gen.[e] in sè)

* V. la mia nota Sulle sup. con un sistema di art. in cgr. lin. Torino Atti. LIX 1924.

Ora, partendo p. es. da d_1, descrivo. la schiera [illegible] π (schiere...), ... a, b; b, c; c, d; quindi partendo da P su d si torna a P' con $P \underset{\pi}{=} P'$. Ora $dd_1 \equiv \mathfrak{D}$ si torna a $P' \equiv \mathfrak{D}$, e così, indicando con R, S i pt. di appoggio di d alle r, s direttrici supposte distinte delle cgr. [schiere] cui appartengono aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, ... (r appartenendo ... a (d) e (c) ecc. ecc.) [... la π fra P e P' è identità] (se $r \equiv s$, si conclude ... per altra via). Si potrebbe provare che si hanno così tutte le quaterne di rigate in trasf. art.[ca] (v. mia nota citata)

Cap. IV.

Generalità sulle superficie e varietà.

Sup. in S_n. Come in S_3, si definiscono ponendo $x_i = x_i(u,v)$ (1)
con parametri essenziali — direi subito come definizione

Bisogna escludere di avere pt. fisso (x_i :: costanti) o curva. Come? Prendiamo coord. omogenee $X_i = \frac{x_i}{x_{n+1}}$ ($i=1..n$)

Allora se (1) è curva, avviene che le $X_i = X_i(u,v)$ vanno date da costanti $t(u,v)$ per cui $X_i(u,v) = X_i(t(\text{[illegible]}))$ cioè le n funz. X_i sono a 2 a 2 funzionalmente dipend.^ti e poi

$$\left\|\begin{matrix}\frac{\partial X_1}{\partial u} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial u}\\ \frac{\partial X_1}{\partial v} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial v}\end{matrix}\right\| = 0$$

e viceversa. (La condiz. vale anche per sup. degenere in pt. come si può vedere)

In coord. omogenee la cond. è

$$\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x_1/x_{n+1}}{\partial u} & \dots & \frac{\partial x_n/x_{n+1}}{\partial u}\\ \frac{\partial x_1/x_{n+1}}{\partial v} & \dots & \frac{\partial x_n/x_{n+1}}{\partial v}\end{matrix}\right\| = 0. \quad (2)$$

che si trasforma subito in

$$\left\|\begin{matrix} x_1 & \dots & x_{n+1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial u}\\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial v}\end{matrix}\right\| = 0 \quad (3)$$

ci basa all'oss. (di Jacobi) che

$$\frac{\partial\left(\frac{x_i}{x_{n+1}}, \frac{x_j}{x_{n+1}}\right)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{x_{n+1}^3}\begin{vmatrix} x_i & x_j & x_{n+1}\\ \frac{\partial x_i}{\partial u} & \frac{\partial x_j}{\partial u} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial u}\\ \frac{\partial x_i}{\partial v} & \frac{\partial x_j}{\partial v} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial v}\end{vmatrix}$$

[È una trasf. di determ. p. es. pongo $x_i = x$, $x_j = y$, $x_{n+1} = z$. Allora

$$\frac{\partial}{\partial(u,v)} = \frac{1}{z^4}\begin{vmatrix} x_u z - x z_u & y_u z - y z_u \\ x_v z - x z_v & y_v z - y z_v\end{vmatrix}$$

che aggiunto a

$$A = \begin{vmatrix} x & y & z\\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix} \quad \text{è} \quad \frac{1}{z^4}\left(A_{32}A_{21} - A_{31}A_{22}\right)$$

$= \frac{1}{z^4}$ minore di A_{33} nel recipr. cioè $= \frac{1}{z^4} a_{33} A = \frac{1}{z^3} A$ c.d.d.]. Perciò se vale (2), in (3) sono nulli tutti i determ. di 3° ordine in cui c'entra l'ultima colonna, e quindi tutti, a meno che sia $x_{n+1} \equiv 0$, e tutte le x divisibili. Ma allora ne prendo un'altra ecc. Il ragion. è invertibile: cioè (3) è nec. e suff. — Cfr. o dimostr. p. 66 per S_3.

La eq. trovata si può enunciare: le x_i sono soluz. di eq. alle d. p. lin. omog. del 1° ordine $A\vartheta_u + B\vartheta_v + C\vartheta_w$

Varietà in S_n. - Analog.te si defin. una V_k (varietà a k dimensioni in S_n $k<n$) da $x_i = x_i(u_1 \dots u_k)$, param.ti essenziali cioè non deve essere possibile esprimere le x_i con funz. di un minor numero di parametri. Si ragiona analogamente. (con teor.a di Jacobi (le applican non solo a $x_1 \dots x_k$ ma a tutte le x ...)

$$\frac{\partial\left(\frac{x_1}{x_{n+1}} \dots \frac{x_k}{x_{n+1}}\right)}{\partial(u_1 \dots u_k)} = \frac{(-1)^k}{x_{n+1}^{k+1}} \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_k & x_{k+1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_1} & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial}{\partial u_k} & & & \end{vmatrix}$$

trovando in coord. doppie caso non omog. le relative

$$\frac{\partial(X_1 \dots X_n)}{\partial(u_1 \dots u_k)} \neq 0 \text{ e in omogenee}$$

$$\left\| \begin{matrix} x \\ \frac{\partial x}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial x}{\partial u_k} \end{matrix} \right\| = 0,$$ cioè le x sono soluzioni di eq. alle d. p. lin. omog.

$$A_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial u_1} \dots + A_k \frac{\partial \vartheta}{\partial u_k} + A\vartheta = 0.$$

Oss. - La formula di metà delle p. precedenti si dimostra per via diretta del cangiam.to ... per $\frac{\partial(x/z \ y/z \ t/z)}{\partial(u,v,w)}$ cioè $\breve{E} =$

$$\frac{x_w z - x z_w}{z^2} \frac{1}{z^3} \begin{vmatrix} y & t & z \\ y_u & t_u & z_u \\ y_v & t_v & z_v \end{vmatrix} - \frac{y_w z - y z_w}{z^2} \frac{1}{z^3} \begin{vmatrix} x & t & z \\ x_u & - & \\ y_v & - & \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{t_w z - t z_w}{z^2} \frac{1}{z^3} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_u & - & \\ x_v & - & \end{vmatrix} = -\frac{1}{z^4} \begin{vmatrix} x & y & t & z \\ x_u & y_u & t_u & z_u \\ x_v & y_v & t_v & z_v \\ x_w & y_w & t_w & 0 \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{z_w}{z^5} \begin{vmatrix} x & y & t & z \\ x_u & y_u & t_u & z_u \\ x_v & y_v & t_v & z_v \\ x & y & t & \end{vmatrix} = 1^o - \frac{z_w}{z^5} \cdot z \begin{vmatrix} x & y & t \\ x_u & & \\ x_v & & \end{vmatrix} =$$

$$-\frac{1}{z^4} \begin{vmatrix} x & y & t & z \\ x_u & & & \\ x_v & & & \\ x_w & & & \end{vmatrix}$$ c. d. d.

Esempio di V_k e S_k da $x = \lambda_1 a_1 \dots + \lambda_{k+1} a_{k+1}$.

i k parametri sono $\lambda_1 : \lambda_2 \dots : \lambda_{k+1}$.

S_k tg. a V_k $x(u_1 \dots u_k)$ in suo pt. generico x, cioè S_k contenente le rette tg. alle curve della V_k è $(x, \frac{\partial x}{\partial u_1} \dots \frac{\partial x}{\partial u_k})$.

Invero si ha curve per $u_i = u_i(t)$. e la tg. va da x a $\sum \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt}$. questa tg. sta dunque sempre nello S_k ...

In alcuni pt. speciali (singolari) le cose vanno diversamente (lo S_k tangente viene sostituito da figure più complicate: ciò avviene quando nel punto x considerato le derivate $\frac{\partial x}{\partial u}$ svaniscono, o presentano altre particolarità).

Per $k = n-1$ le varietà si chiamano anche *ipersuperficie*: $X_i = X_i(u_1 \ldots u_{n-1})$: eliminando le u viene equazione $\Phi(X) = 0$ o in coord. omogenee $\varphi(x) = 0$. Così le quadriche sono ipersuperficie (algebriche (Df.). D'altri (Df.) 2.). Per un ~~quando~~ con parametri le X e ponendo poi le x si ha $\ldots$ 515 (per poter esprimere le ridondanze)

Due ~~ipers~~ (ipersup.) V_{n-1}, ~~...~~ supposte analitiche, che non abbiano in comune parti V_{n-1} hanno in comune V_{n-2} intersezione: punti di $\varphi(X) = 0$, $\psi(X) = 0$ ossia $X_{n-1} = X_{n-1}(X_1 \ldots X_{n-2})$, $X_n = X_n(X_1 \ldots X_{n-2})$. Così 3 V_{n-1} se non hanno ~~in comune~~ varietà più ampie di una interseg. V_{n-3}. E in generale p V_{n-1} se non hanno in comune varietà più ampie V_{n-p} (una o più) loro *intersezione*. Per avere le V_{n-p} tg. si calcolano fra le interseg. degli S_{n-1} tg. (segue da D.). 516

Si chiamano *algebriche* le V_k intersezioni di ~~iper~~ V_{n-1} algebriche: con l'avvertenza (a titolo di informazione) che bastano ~~...~~ C^0 di S_3: per altre C di S_3 occorrono 4 V_2) per avere interseg. completa non bastano generalmente $n-k$ V_{n-1}, ma possono occorrere fino a $n+1$. Per V_k in questo caso basta per V_k in generale si taglian ancora in qualche altra V_k

algebriche si potrebbe definire un *ordine*: n.° dei pt. che hanno in comune con un S_{n-k} generico. (di varietà spaz. -ampiezza razionale) Studiamo p. es. la *sup. di Veronese*[2], in S_5 "pure"

data $x_1 : \ldots : x_6 = u^2 : v^2 : uv : u : v : 1$

È algebrica (eliminando nei vari modi u e v tra eqn. come intersez.) (in par. u, e v; se le scrivo u/w, v/w viene $u^2 : v^2 : uv : uw : vw : w^2$ — in par.ti omogenei). La sup. *sta* in S_5 (non sta in nessun S_4: lin. a coeff. cost. di $u^2, v^2 \ldots \equiv 0$). Conviene interpretare $u : v : w$ come coord. omog. in piano π. Allora a ogni pt. di π corrisponde *un* *punto* alla sup., F, e *viceversa*[1] (pt. multipli $u' : v' : 1 = u : v : 1$ esige $u = u'$, $v = v'$). La corrisp.za fra F e π è biunivoca *senza eccezioni*.

~~A sez. iperpiana~~ pt. di F ha in comune con iperpiano $\Sigma a_i x_i = \ldots$ diventano punti di conica $a_1 u^2 + \ldots = 0$. cioè costituiscono *curva* (sez. ip. di F), che ha per immag. conica di π e viceversa. F è del 4° ordine (F_2^4): punti a comune inters. con $S_3 = 2 S_4$. corrisp. interseg. di 2 coniche generiche, che sono 4. — Essa con: ...punti. Anche se pone $w = 0$, prendendo $\frac{u}{v}$, $\frac{w}{v}$, o ecc.)

[1]) Studiata da Veronese e Segre verso il 1885.

tiene ∞^2 coniche: per 2 pt. ne passa una; su le imag. delle rette di π (Invece queste han per imag. linee che stanno in ∞^2 S_4, cioè in piani [ma con solo S_4. ma S_3 per cui passano $\infty^1 S_4$. duali di S_3 per S_1] e pure han in comune con F i gruppi di 2 pt. dunque con rette di loro piano (tracce di iper: piano) id. dunque coniche). Due coniche si incontrano in un punto: stanno in S_4 immagini di C^2 di π oppure. - I piani tangenti sono a due a due incidenti: p. es. in A e B contengono le tg. i ... alla conica di F per AB. È proprietà caratteristica, ridotta $n>1$ per le sup. di Veronese e i coni (Del Pezzo). Verifichiamo per es. quanto si è detto in altro modo: ~~tutti~~ un S_4 tgte[1] a F in x piano per $x\ x_u\ x_v$: cioè indicando con ξ le due coordinate si ha $\sum \xi_i x_i = 0$ $\sum \xi_i x_{iu} = 0$. $\sum \xi_i x_{iv} = 0$. Allora corrisp. su π le curve $\sum \xi_i x_i(u,v) = 0$ che passan con ... il punto per il pt. (u,v): e tutti i tali punti si annulla le $\frac{\partial}{\partial u}$. $\frac{\partial}{\partial v}$ del 1° membro all'es.

[1] Tanti per S_4 tangente - la coppia generale.

Quindi le curve ... in (u,v) con pt. doppio. cioè coppie di rette per (u,v). Quindi Viceversa (il rag. è invertibile): quindi le rette doppie $(u\,v)$ $(u'v')$ è imag. di ... S_4 tg. in $x(u,v)$ e in $x(u'v')$. cioè quest S_2 stan in S_4. c.d.d. - Un'altra proprietà è questa: le ∞^4 corde ricoprono solo una V_4 invece di ricoprire lo S_5 (la corda AB sta nel piano della conica per AB: ... con le rette di ∞^2 piani, che ricoprono una V_4). Anche questa proprietà per $n>1$ è caratt. di coni e sup. di Veronese (Severi). Qui mostrerò solo come questa propr.ª equivale a quella di Del Pezzo. Le condiz. ... perchè

$$|x\ x_u\ x_v\quad x(\bar u\bar v)\ \ \bar x_u(\bar u\bar v)\quad \bar x_v(\bar u\bar v)| = 0.$$

e la 1ª dice che le ... $x(u,v) + \lambda x(\bar u\bar v)$ è V_4 cioè $|x+\lambda\bar x, \bar x, x_u, x_v, \bar x_u\ \bar x_v| = 0$ come ...

c. d. d.

La V_4 ricoperta dai piani delle ∞^2 coniche contiene pure gli ∞^2 S_2 tangenti: invero ... A, B per una conica, così passa una conica per A con dati tangente; dunque ogni retta del fascio delle tg.ti in A ...

nel piano di una conica, e lo S_2 tg. alle V_4.
Cerchiamo l'eq. di tale V_4, ~~la~~ considerata come luogo degli S_2 tg. Lo S_2 tg. in $x(u,v)$ è x, x_u, x_v cioè usando parametri omogenei $x(u_1,u_2,u_3)$, $x_{u_1}, x_{u_2}, x_{u_3}$ ... le coord. di $x_{u_1} x_{u_2} x_{u_3}$ dove sono $u_1 u_2 u_3$ ho

u_1^2	u_1u_2	u_1u_3	u_2^2	u_2u_3	u_3^2
$2u_1$	u_2	u_3	.	.	.
.	u_1	.	$2u_2$	u_3	.
.	.	u_1	.	u_2	$2u_3$.

I pt. di V_4 vengono combinando linearmente quest. 3. Se chiamo z_i i coeff.ti. Viene per le 6 coord.

1) $2u_1z_1$ 3) $z_1u_3+z_3u_1$ 5) $z_2u_3+z_3u_2$
2) $u_2z_1+u_1z_2$ 4) $2u_2z_2$ 6) $2u_3z_3$

Quindi son le coord. eq. parametriche (colle u, z omogenei) della V_4. Se chiamo invece $X_{11}\, X_{12}\, X_{13}\, X_{22}\, X_{23}\, X_{33}$ ... le coordinate ho

$$X_{ik} = u_iz_k + u_kz_i$$

La forma quadrat. $\sum_{i,k=1,2,3} X_{ik}\,\xi_i\xi_k$ è il prodotto di 2 forme lineari. Quindi $|X_{ik}|=0$ e viceversa. Onde l'eq. della V_4 è

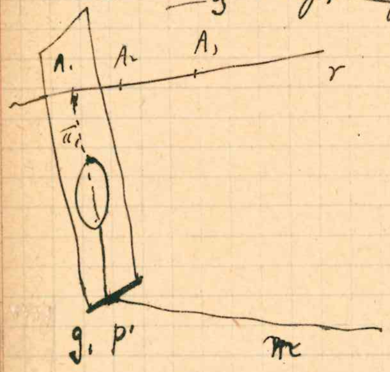
* Anche i piani della Σ sono ... 2a [illegible]

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

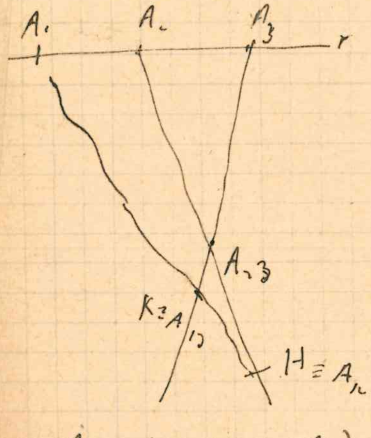
Ho dunque V_4^3.
Come per C^n di ... ho F^4 di Veronese da rappr. parametrica x_i: polinomi quadratici in u, v a determ. non nullo (polinomi linearm. indipendenti) - facendo un cambiamento di coord. tale che nella relativa trasf. lin. i coeff.ti siano quelli dei polinomi. Perciò ... risulta che in S_3 o S_4 una F rappresentata da x_i ... $P_2(u,v)$ è proiezione di sup.cie di Veronese.
Tra cui i dette particolari notevole la proiez. generica in S_3^* da r : è sup. di Steiner. Qualunque ... La r incontra V_4^3 in 3 pt. $A_1A_2A_3$ cui i piani $\pi_1\pi_2\pi_3$ di 3 coniche $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ - ognuna di queste è proiettata da r ~~si proiettano~~ secondo S_3 che dà traccia in S_3^* una retta g_1^*: dunque ogni γ_i si proietta in retta g_i^*. g_i è doppia per F'. (In rette ... punti di pt. P' di g' è traccia di S_3 pt. proiettante (per r P' cui) ... in comune con lo S_3 r γ_1 un piano e perciò ...
Tangente F'^4 punto retta di S_3^* è traccia di S_3 che la incontra 4 pt.

a γ_1 in 2 pt.; quindi tutte S_3 per [illegible] più di γ_1 ha solo più 2 intersez. con F^4. Le 3 rette $g_1 g_2 g_3$

~~tracce di [illegible]~~ ~~$r g_1, r g_2, r g_3$~~ concorrono in un punto triplo per le sup. di Steiner



Inversam. con le costruzioni di sopra si $A_{23} \equiv \gamma_2 \gamma_3$. e $\rho \equiv r.A_{23}$ (piano del foglio) Le rette $A_2 A_{23}$; in ρ e in π_2, seghi γ_2 in H, e con $A_3 A_{23}$, γ_3 in K. Dico che HK passa per A_1 (Immersa esso sta nel piano delle conica di F_2^4 per H, K, e più su V_4^3, che sega r in $A_1 A_2 A_3$. [illegible] HK [illegible]



per A_2, A_3, dunque per A_1). Anzi, HK stando nel piano di 1° spazio (così chiamando i piani delle coniche, e p. tg. di 2° spazio) per A_1, sta in π_1, e quindi le 1° per H, K [illegible]

γ_1. Dunque, con rett. analoghe alle prime $H \equiv A_{12}$; $K \equiv A_{13}$. Ciò prova che $A_1 A_2 A_3 A_{23} A_{13} A_{12}$ stanno in piano e sono i vertici di un 4-latero completo. Quindi poi su σ, g_1 traccia dell S_3. $r.\pi_1$, che [illegible] per ρ_3 ecc. passano per le tracce P_2 di ρ su σ. cioè per pt. Che non [illegible] triplo si vede c. s. (rette in ρ per [illegible] tracce di S_3 per ρ che [illegible] di ρ ha solo più 1 pt in comune con F^4).

I successivi spazi osculatori a una ~~superficie~~ V_k in un suo punto. Si giunge a certi enti collegati a ogni pt. di V_k $x(u_1 \ldots u_k)$, considerando per ogni punto gli S_2, S_3 ecc. osc. alle curve della V_k che vi passano, e i minimi spazi che li contengono. Essi si chiamano tutti insieme " pluritangenti: spazi osculatori, o pluritangenti (minimi) si chiama spazio i-tg. in x quello che contiene gli S_i osc. alle curve: lo spazio 2-tg. si chiama anche lo spazio osculatore, ogni altro. Fermiamoci particolarmente sullo spazio 2-tg. (osc.) a una sup. in x. Considerando $u(t)$, $v(t)$ in $x(u,v)$ in modo che per ogni t si abbia sopra le u, v del pt. x: la curva osc. a [illegible] Immediatamente [illegible]

x (...) $v(A)$ in x è quello di

$x, \quad \frac{dx}{dt} = x_u \frac{du}{dt} + x_v \frac{dv}{dt}, \quad x_{uu}$

$x_u \frac{d^2u}{dt^2} + x_v \frac{d^2v}{dt^2} + x_{uu}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2x_{uv}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + x_{vv}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$

(potendo ... , x, $x_u du$ ..., $x_u d^2u$ ...) ... qualche volta in seguito lasciando indeterm. il param.).

Dunque il minimo spazio di tali pt. al variare delle du, d^2u ... è Σ

Consideriamo le curve per x. quei pt. sono sempre ... lin. ind. di $x, x_{uu}, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}$. ~~Supp.~~ Dopo lo spazio osc. sta nello spazio di quei pt.

~~con tutte~~ $n \geq 5$. ~~Allora~~ Al variare della curva il 2° pt. descrive tutta la retta $x_u x_v$ quindi lo spazio contenente contiene intanto tutto il piano $x x_u x_v$ (tg. pt.): e un spazio cont. i 3 pt. ... 1°, 2°, e $x_{uu} du^2 + \dots + x_{vv} dv^2$ che sostituisce

Supposto ~~...~~ i 6 pt. lin. ind.: allora lo ... / cosicchè $n \geq 5$.

517

x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}, ~~...~~ e nel loro piano il 3° (...) pt. descrive una conica Γ non degen. (in coord. locali ... v. p. 517) ~~...~~

cont. i ... pt. contiene tutti gli S_3 che dal piano tg. proiettano i pt. della conica Γ. Il min. spazio cont. quest S_3 è lo S_5 $x \dots x_{vv}$. perchè se stanno in S_i con $i < 5$, vi sta tutta Γ col piano $x_{uu}\, x_{uv}\, x_{vv}$, e per lo ... tg. ... tutti i pt.

~~Dopo ... x ... x_{vv} ...~~ lin. ind. ho da ...

~~... S_5 x ... x_{vv}.~~ ... Fissiamo

$\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$ (e variando $\frac{d^2u}{dt^2}$, ecc.) la curva per x varia, ma con la stessa tg. (v. ...). La ... di ... il pt. ... resta lo stesso: dunque i piani osc. in x a curve che vi passano con detta tg. formano S_3: al variare ... della tg. si ha V_4^2 cono. con vertice S_2 tg.

Vediamo i casi di ... $x \dots x_{vv}$ legati lin. ... da una rel. ... ... stiano in S_4. Allora se x_{uu} ... non sono lin. ind. ... stanno in S_4 ... si hanno ∞^1 S_3 ... pt. di Γ in tale S_4. Quest S_3 stanno in tale S_4, dunque le V_4 è sostituita da S_4. ... in ... volte Γ ... lin. ind. ... 2 ... 1.

Intuitivamente ... si ha S_4 osculatore

se le ... S_4 ... con π: — ... 6 pt. son legati da 2 relaz. gli S_3 ... stanno nel loro S_3 (...): ed è ... lo spazio osculatore ... il piano tg. ... pt. e quindi x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} ... 2 relaz.). ... 2 relaz.

Tg. ... in S_4. ... x_{uu} e x_{uv} ... e poi x_{uv}.

si ha piano osc. coinc. con piano t_g. (alt. indip. rispetto al piano tangente).

contgu. un pt. di γ, ecc. [5 (3) *)] e viceversa. v. rag. analogo a p. 57 dove si trattava di determinare in S_3 le curve t_g. appoggiate a conica fissa: Quindi basta per ogni S_3 osc.^te a γ condurre S_4: il loro inviluppo è la ~~la~~ sviluppabile coll. Σ. Nota così le generatrici delle svil. Σ, le loro 2^e intersez. con R danno la (γ). Si osservi che tutte le costruzioni non esigono che, trattate analiticamente, due operazioni di derivazione. Trasportate in S_3 le costr. di Γ' data Γ diventa: per ogni g conduco la congr. lin. osculatrice $L(g)$: per essa conduco cpl. lin. $C(g)$. Ho così ∞^1 cpl.: le intersez. di 5 consecutivi è una coppia di rette di cui una è g e l'altra g' di Γ'[1]

82. ~~per $\varphi(x)=0$. $\sum_i \bar{x}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0$ in coord. corrente $\bar{x}$.~~ analog.^te a S_3. È anche in coord. n. h. X. per $f(X)=0$

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{X}_i - X_i)\frac{\partial f}{\partial X_i} = 0.$$ in coord. h. x. per $\varphi(x)=0$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \bar{x}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0.$$ { Invece p. es. in S_4, per $f(X)=0$. ~~S_3~~

*) e analog.^te per il caso che la sviluppabile sia un cono.

[1] cfr. Le congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate di C. Segre. Torino, Atti XLII. 1907.

Alla le S_3 tie per eq.

comprimo: $\begin{cases} X_1 = x_1 \\ X_2 = x_2 \\ f(X_1, X_2, X_3, X_4) = \\ x_4 = 1 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_2 & \bar{X}_3 & \bar{X}_4 & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -f_1/f_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -f_2/f_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -f_3/f_4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{cioè} \quad \begin{vmatrix} \bar{X}_1 - X_1 & \dots & \bar{X}_4 - X_4 \\ 1 & 0 \quad 0 & -f_1/f_4 \\ 0 & 1 \quad 0 & -f_2/f_4 \\ 0 & 0 \quad 1 & -f_3/f_4 \end{vmatrix} = 0$$

~~cioè~~ (svil. cioè $-\frac{f_1}{f_4}(\bar{X}_1 - X_1) - \frac{f_2}{f_4}(\bar{X}_2 - X_2) - \frac{f_3}{f_4}(\bar{X}_3 - X_3) -$
$(\bar{X}_4 - X_4) = 0$ c.d.d.

Per le coord. omogen. invece che le non $x_1 \dots x_{n+1}$ per la altra
far $x_{n+1} = 1$. e allora $X_i = x_i$ invertiam. $\varphi(x)$ sarà $=$
$f(X)$ e $X_1 \frac{\partial f}{\partial X_1} \varphi_1 \dots + X_n \varphi_n + \varphi_{n+1} = \rho\varphi = 0$
dove ρ è il grado di omogeneità. e le f_{n+1} φ è
$\Sigma \bar{X}_i f_i = \Sigma X_i f_i = \Sigma X_i \varphi_i = -\varphi_{n+1}$ per cui
$\Sigma \bar{x}_i \varphi_i = 0$ c.d.d.

82 - Si può anche parlare di costr. di V_K (su V_K
nel V_{n-1}) : p.es. ~~ip.~~ e S_{n-1} allora ~~f~~ le ~~m~~
risultano legate da relaz. e si ha V_{K-1} eq. i per più
(da F_2 curva)

p. 83. Perciò le eq. delle sup. con S_3 sono lineari di
S_4 circoscritti da S_0 in le pt. cui C^4 (p. 31): tale C^4 è
tangenziale (per le corrisp. biunivoca fra i suoi pt. e gli di
π). dove (p. 31) superficie normale.

190. Ideo che in ogni caso $\Sigma \equiv (x\, x_{n}\, x_{r}\, x_{nn}\, x_{nr}\, x_{rr})$
Invero Σ è contenuto in ciò: viceversa stanno in Σ i tre pt.
pt. per $x_{nn}\, du^2$ e $2x_{nr}\, du\, dv$ e $x_{rr}\, dv^2$. per $du = 0$, dove
stanno in x_{nr}, x_{rr}; poiché vista il pt. $x_{nn}\, du^2$
$x_{rr}\, dv^2$ cioè x_{rr}. c.d.d. Onde $\Sigma \equiv S_5, S_4, S_3, S_2$
secondo che i 6 pt. sono lin. ind. o legati da 1, 2, 3
relaz. lineari ind. (non più, a meno che manchi
il piano tangente). Studiam nel caso generale (S_5) come
si distribuiscono gli S_2 osculatori.

cont. d. p. 90.

Ora per $\frac{du}{dt}$ $\frac{dv}{dt}$ fissati (cioè (v. 2° pt.) per retta tg. fissata) gl. d. osc. dipende da $\frac{d^2u}{dt^2}, \frac{d^2v}{dt^2}$, e il variar di questi il piano 1° 2° 3°. (vecchio) varia nello spazio di x, $x_u du + x_v dv$, x_u, x_v, x_{uu} ecc..., cioè di x, x_u, x_v, e il pt. di Γ. Così ciascun S_3 proiettante da un punto di Γ. Si ha così come luogo degli S_3 la V_4 cono con vertice la tg. che da cui proietta la Γ.

Alcune delle cose dette si estendono facilmente agli spazi h-tangenti e V_k: e punto che tale spazio è lo spazio di x e di sue derivate fino a quelle di ordine h incluso. (p. es. per F e d'altri si vede che entro lo S. 2-tangente e ogni $x_{uuu} du^2$ ... $3x_{uuv} du\,dv + x_{uvv} dv^2$, e per x_{uuu}, x_{vvv} $(du = 0 \ldots)$, così $3x_{uuv}\,du + 3x_{uvv}\,dv$ ecc.).

A Si può poi tradurre per dualità, osservando: V_k cont. ∞^k di iperpiani: se ognuno di essi ha S_{n-1-k} 1° caratteristico (comune ai vari F ... S_{n-2}

1° caratteristico per le ∞^1 delle ∞^k, cui comune all'iperpiano e a tutti gli inf. vicini del 1° ordine); poi uno spazio 2° caratteristico (duale dello spazio 2-tg) ecc. ecc.

Tornando alla V_K, non sempre i pt. che visti vidimo lo spazio h-tangente sono lin. ind. Appunto per h abbastanza grande (e n fissato) non può la dimensione non può superare quella dello spazio ambiente. Ora il fatto che questi pt. non siano lin. ind. vuol dire che esistono fra essi legami lineari: cioè del tipo $C_1 \cdot (x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i}, \ldots) = ;$ cioè eq. lin. alle deriv. alle d. p. rappresentata dalla V_K. Sappiamo che una V_k non ne può rappresentare del 1° ordine: risulta ora invece chiaro che rappresenta certo di ordine abbastanza elevato.

Vogliamo approfondire il caso delle eq. di 2° ordine rappresentate da superficie (equazioni di Laplace): a ciò dedichiamo il seguente Cap. V.

Ricordando gli es. in S_3 qui il principio ... S_4 ... ciascuna in S_3 rappresenta 2 eq. di Lapl. distinte (almeno: varie poi non più)

L'equazione di Laplace.

Sulla l'eq. in x.

1) La $A z_{uu} + 2B z_{uv} + C z_{vv} + P z_u + Q z_v + R z = 0$

Esse si chiama risp. iperbolica o parabolica (nel campo complesso) secondo $AC - B^2 \neq 0$ $AC - B^2 = 0$.

v. dispense di Catania pp. 150-155. Scelto ϑ''' per $\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_1}$

Ora a p. 153 non ho parlato dell'eq. delle caratteristiche ma dopo le (61) bisogna osservare che $\neq 0$ ossia

$\cancel{\alpha \rho_u + \beta \rho_v = 0}$ $\frac{\rho_u}{\rho_v} = \varphi$ con $\varphi \neq \psi$.

$\cancel{\gamma \rho_u + \delta \rho_v = 0}$ $\frac{\rho_u}{\rho_v} = \psi$

e quindi sono :: $\frac{\rho_u}{\rho_v}$ e $\frac{\sigma_u}{\sigma_v}$ (ordinando con σ for the 2a eq.)

il jacobiano diverso da zero. Altrettanto a p. 155 [illegible] la 2a parte diventa con $-(2M/m)$. Scelto φ per $\frac{\partial \tau_1}{\partial u} : \frac{\partial \tau_1}{\partial v}$ ecc. cioè per $n = 0$.

$$L\varphi^2 + 2M\varphi + N = 0$$
$$L\psi^2 + 2M\psi + N = 0$$
$$L\varphi\psi + M(\varphi + \psi) + N = 0.$$

Da (1a + 2a − 2·3a) $L(\varphi - \psi)^2 = 0$ cioè $\varphi = \psi$ cioè $LN - M^2 = 0$ e se deve $L = 0$, ed anzi $N = 0$. e allora $M = 0$ (se no si devono annullare entrambe a e b che risultano eguali).

Invarianti v. ivi pp. 155-159 (anzi $\vartheta = \lambda y$) ($x = \lambda y$)

Trasf. di Laplace pp. 150-156. cioè 1)

$x^{(1)} = x_v + a x_{uv}$. (chiamata trasf. nel senso delle v).

e p. 156 invece in $E^{(n)}$ si sostituisce con quadrature

$h_{n-1} x^{n-1} = x_u^{(n)} + b_{n-1} x^{(n)}$

$h_{n-1} x^{n} = x_u^{n-1} + b_{n-1} x^{n-1}$ ecc.

per la trasf. di E' in E nel senso delle u bisogna $(x')^{(-1)} = x'_u + bx'$ $= hx$.

Detto dell'equivalenza dei problemi relativi di ciascuna equazione della successione con tutte le altre (per lo stesso motivo proprio già sopra accennato).

Quindi si scrive l'eq. in x'

$x'_{uv} + (a - (\log h)_v) x'_u + b x'_v + (b_v - a_u + c - b(\log h)_v) x' = 0$

calcolati

$h' = a_u - (\log h)_{uv} + ab - (b(\log h))_v - b_v + a_u - c + b(\log h)_v$

$= 2h - k - (\log h)_{uv}$

1) facendo la trasf. $x = \lambda y$ si vede che per λ soluz. sparisce il termine in x

$k^{(1)} = \cancel{b_v} + ab - b(\cancel{\log h})_v - \cancel{b_v} + a_u - c + b(\log h)_v$

$= h.$ e analogamente $h^{-1} = k$

$k^{-1} = 2k - h - (\log k)_{uv}$.

Ai due punti $P(xyz)$, diversi non possono corrispondere x_i proporzionali; giacché le x_i (o i loro rapporti) individuano le x, come segue dalle formule che si scriveranno subito dopo.

Per. le coniche di un piano (cfr. coord. di x_1^2, x_2^2 ecc...) si rappresentano nei punti di S_5.

a p. 3. Non è da credere che tutte le rappresentazioni di una totalità di enti geometrici in cui si ricorre a uno S_n siano così semplici: p. es. la rappresentaz. delle rette sui punti di S_5 accennata a p. 2 è già un po' diversa in quanto non interessa tutto lo S_5, ma solo i punti di una quadrica.

Aggiungiamo ancora a quelli dati un esempio un po' diverso, in cui si presenta una circostanza analoga. Vi è un sist. di coord. nello spazio ordinario che si adopera molto utilmente in certe questioni: sono le coord.^{te} pentasferiche.

Prendo 5 sfere (coord. cart. ort.^{li}) Σ_i

$\Sigma_i)$. $a_i(x^2+y^2+z^2)+b_i x+c_i y+d_i z+e_i=0$

lin. ind. (vuol dire ... cioè det. $|a_i\, b_i\, c_i\, d_i\, e_i| = \Delta \neq 0$).

Pongo per ogni $P(xyz)$

(1) $\rho x_i = a_i(x^2+y^2+z^2) \cdots\cdots + e_i$ pentasferiche

A ogni pt. dello spazio corrispondono le 5 coord. omog. (e viceversa - in tutto nelle ipotesi $\Delta \neq 0$)). I rapporti fra le x_i non si possono scegliere ad arbitrio. Infatti le (1) dette le x_i si possono considerare eq. in $(x^2+y^2+z^2)$, x, y, z, 1, da cui indicando con A_i ... ecc. ho

$$x^2+y^2+z^2 = \rho\frac{\sum A_i x_i}{\Delta},\quad x = \rho\frac{\sum B_i x_i}{\Delta},\quad \ldots,\quad 1 = \rho\frac{\sum E_i x_i}{\Delta}$$

Date le x_i l'ultima fa conoscere ρ, dopo di che sostituiamo tale valore di ρ le tre precedenti $x\,y\,z$, poi:

caratterizzano se la Q^2 è $\sum x_i^2 = 0$

~~Ora che si potrebbe collegare (non fatto) colle rappresentazione delle sfere di S_3 sui pt. di S_4 (basta considerare accanto a una sfera $\sum \lambda_i (a_i(x^2+y^2+z^2) \ldots) = 0$ l'iperpiano immagine $\sum \lambda_i x_i = 0$ e poi p. es. dualizzare nel punto (λ_i) o po~~

sostituisco nella 1ª e ho

$$\frac{\Delta^2}{(\Sigma E_i x_i)^2}\left(\frac{(\Sigma B_i x_i)^2}{\Delta^2} - \dots\right) = \frac{\Delta}{\Sigma E_i x_i}\,\frac{\Sigma A_i x_i}{\Delta}$$

cioè

$$(\Sigma B_i x_i)^2 - \dots = \Sigma A_i x_i \cdot \Sigma E_i x_i \qquad (*)$$

relazione quadratica fra le x_i cui devono soddisfare le coord. pentasferiche. – Interpretando in S_4 si ha che qui ai punti dello S_3 corrispondono punti di – come diremo più avanti – una quadrica. – La geom. di una tal quadrica di S_4 trova dunque applicazione allo spazio ordinario in tutte quelle questioni dove intervengono coord. pentasferiche. Si generalizzi sull'argomento, che ~~tutte~~ la (*) si semplifica scegliendo opportunamente ~~una particolare~~ ~~scelta~~ ~~le coord.~~ le 5 sfere Σ_i: per. presa ~~pentasferiche ortogonali che si hanno quando le 5 sfere sono a 2 a 2 ortogonali~~: per. si prenda

$x_1 = 2rx,\ x_2 = 2ry,\ x_3 = 2rz,\ x_4 = x^2+y^2+z^2-r^2,$

$x_5 = i(x^2+y^2+z^2+r^2)$; si ha subito che la (*) diventa $\Sigma x_k^2 = 0$

è facile verificare che nell'esempio scelto le coord. pentasferiche sono ortogonali – ~~con~~ [illegible]: si hanno 3 piani a 2 a 2 ortogonali e anche che le Σ_i lo sono a 2 a 2: infatti

ciascuno ortogonale alla sfera 4ª e 5ª (essendo piani diametrali): poi anche ~~tra~~ queste due sfere – come si verifica subito soddisfano alla cond. analitica di ortogonalità (cfr. per cerchi condizione la $\dot{a}d' + \dot{a}'d = 0$ di p. 5)

1ª p. 8. Le proprietà ~~geometriche~~ del sistema ∞^3 di π di rami o del sist. lin.re ∞^3 di cerchi di 1 un piano si possono dunque ottenere anche come traduzioni dello S_3: non solo la pena di stabilirle direttamente. Anzi si può addirittura parlare dello S_3 delle π, o del cerchi di un piano – considerando convenzionalmente come punti dello S_3 risp. quelle π o il cerchio. Analogo per lo S_4 di sfere di cui si dirà adesso.

p. 8. Se invece vi fossero $a^{(1)} \dots a^{(q)}$ con $q > p$ anzi $a^{(i)} = \sum_{r=1}^{p} \lambda_{ir} b^{(r)}$ ~~dove~~ $(i = 1 \dots q)$ da cui $\Sigma m_i a^{(i)} = 0$ oppure si $\sum_{i=1}^{q} m_i \lambda_{ir} = 0$ $(r = 1, \dots, p)$ da cui si possono certo ottenere le m non tutte nulle poichè si hanno meno eq.ni che incognite (meglio fare a dir le m esempio). – In altre ~~del~~ parole p pt. lin. ind. stanno in S_{p-1} ma non in spazio meno ampio: è lo stesso dire che stanno in S_{p-1} e non meno, o dire che sono lin. ind.[1]

p. 10. Due spazi S_p, S_q si dicono lin. ind. se non hanno pt. comuni: allora, pel teor.a precedente, il loro spazio congiungente è S_{p+q+1}.

[1] Gli S_p ... è già nota in S_n dove si cita a p. 6 in nota: l'ho ridimostrato per conferma trattandosi di spazi subordinati. Non ho detto nulla sull'invarianza della dipendenza lineare

p. 12. Chiarisco meglio la dualità. Ho.

punti	S_{n-1}	in particolare S_{n-1}	pt.
S_h come luogo di pt.	S_{n-h-1} come luogo di iperpiani	pt. e iperpiani...	iperp. e pt. ...
P e S_h appartenenti	per S_{n-1} e S_{n-h-1} ecc.		

(usando le parole appartenenza...) ecc. ecc.

35.- Premettere. Si chiama eq. aggiunta di Lagrange quella nell'incognita $y(t)$ la $\Sigma(-1)^k (a_k y)^{(n+1-k)} = 0$ cioè $y^{(n+1)} - (a_1 y)^{(n)} + (a_2 y)^{(n-1)} \dots + (-1)^n (a_n y)^{(1)} + (-1)^{n+1}(a_{n+1} y) = 0$.
Tra le due proprietà vi è questa: con un risultato che, se ~~$y(t)$ è un suo~~ si conosce un suo integrale particolare $y(t)$ la data si abbassa all'ordine n; in quanto moltiplicandone il primo membro per $y(t)$ essa si riduce alla forma $\frac{d}{dt}(b_0 x^{(n)} \dots + b_n x) = 0$ con le b funzioni note: cioè $b_0 x^{(n)} \dots + b_n x = \text{cost}^e$ un integrale primo della data.

52 È da osservare che gli S_{n-1} di Γ non passano per pt. fisso di γ non stanno in spazio di dim $< n$; e viceversa (data) sicché si riesamina così che per γ di S_n gli S_{n-1} osc. non passano per pt. fisso. Se invece così fosse, e questo fosse p. sarà

$$p = k_0(t) x^{(n-1)} + k_1(t) x^{(n-2)} - \dots + k_{n-1} x$$

darà $\frac{d}{dt}(k_0 x^{(n)} - \dots + k_{n-1} x) = 0$, cioè le x_i sarebbero

sol. eq. di ordine n. Contro quanto si è visto a p. 28.

p. 41. Saltato. Aggiungo invece: vediamo come si comporta l'aggiunta quando l'eq. data si modifica assumendo una nuova funz. incognita dedotta dalla primitiva mediante moltiplicazione per una funz. data $\varphi(t)$. ~~Data~~ Osservo subito preliminar. che anche senza supporre $a_0 = 1$ definendo (precisamente dal 1° membro cui di $F(x)$ come $\Sigma(-1)^k (a_k y)^{(n+1-k)}$) l'aggiunta come qui, nel calcolo a p. 36, i coeff.ti delle derivate d'ordine massimo coincidono. Ciò posto se in $F(x) = 0$ faccio la sostituz. $x = \varphi X$, col che l'eq. si trasforma identicamente in eq. analoga in X

$$a_0(\varphi X)^{(n+1)} + a_1(\varphi X)^{(n)} + \dots = 0$$

che chiamo $\bar F(X) = 0$, cosicché $\bar F(X) = F(\varphi X)$ se y è sol. dell'aggiunta $G(y) = 0$ di F ho $y F(x) = \frac{d}{dt}(b_0 x^{(n)} \dots + b_n x)$ e poi

$$y \bar F(X) = \frac{d}{dt}(b_0 (\varphi X)^{(n)} \dots + b_n \varphi X)$$

onde per la proprietà dell'aggiunta y è anche sol. dell'aggiunta di $\bar F$. Questa dunque ha gli stessi sol. di G e però coincide con G salvo un fattore, che per la uguaglianza dei coeff.ti di derivata massima con $\bar F$ è φ: dunque trasformando $F(x)=0$ in $\bar F(X)=0$ con sostituz. $x=\varphi X$, ho espr aggiunte $\bar F \equiv \varphi\, g$.

A proposito della sostituz. $x=\varphi X$. essa ha importanza nella teoria delle eq. diff. lineari, perchè essa trasform l'eq. ma lascia inalterate le curve g: analog.te per i cambiamenti di variabile: esporre qui l'oss. di p. 35

Q. 45. La differenza si può anche enunciare così: nel 1° caso il 1° membro di F e di g - che differiscono solo per un fattore - coincidono addirittura (per la necessaria uguaglianza fra i coeff.ti massimi), cioè è già autoaggiunta l'espressione del 1° membro.

~~59. Le questioni questa: come devono essere le $p_{ik}(t)$ per essere coordinate di rette tg. a linee di S_3, g (ossia rami di cicl. lin.) ma qualunque x_i ... $x_i(t)$ con $x_4=1$. Come devono essere le p perchè costanti (le più $g(t)$ tali che~~

~~$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ x_1' & x_2' & x_3' & 0 \end{matrix} \right\| = \rho\, p_{ik}$~~

~~[illegible]~~

cioè

$\rho x_1' = \rho p_{14}$, $\rho x_2' = \rho p_{24}$, $\rho x_3' = -\rho p_{34}$ (1)

$\rho(x_1 x_2' - x_2 x_1') = \rho p_{12}$, ecc. (2)

vale a dire

$$\begin{cases} x_1 p_{24} - x_2 p_{14} = -p_{12} \\ x_1 p_{34} - x_3 p_{14} = -p_{13} \\ x_2 p_{34} - x_3 p_{24} = -p_{23} \end{cases} \quad (2)$$

> N.B. Il teor.a in corso di dim. si giustifica intuitivamente: 2 pt. infinit. vicini in S_3 devono essere rimasti di rette incidenti: cioè stare in fascio

Fra le (2) basta tener conto di due, perchè $\times\, p_{34}, p_{24}, p_{14}$ e sommando il 1° membro è zero, e il 2° anche visto che le p sono coord. di retta. Ciò significa che delle tre (2) (come es. nella x) una è cb. lin. delle altre due: p.es. se $p_{14} \neq 0$ la 3a segue dalla 1a, 2a. Supponiamo senza restrizione es: "seguirà che così sia". Allora

$$x_2 = \frac{p_{12}}{p_{14}} + x_1 \frac{p_{24}}{p_{14}}\,; \quad x_3 = \frac{p_{13}}{p_{14}} + x_1 \frac{p_{34}}{p_{14}} \quad (3)$$

che si possono sostituire alle (2). Dalle (3) per derivazione: è evidente dalla due espressione

Il ragionam. cade solo se $p_{14} = p_{24} = p_{34} = 0$ (cioè se le rette di S_3 si appoggiano a A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 cioè stanno nel piano $A_1A_2A_3$): ma le formule cui arriveremo sussiste anche in tal caso, come ne segue

$$\left.\begin{aligned} \cancel{x_2'} - \cancel{\rho p_{24}} &= \left(\frac{p_{12}}{p_{14}}\right)' - \cancel{\rho p_{14}\frac{p_{24}}{p_{14}}} + x_1\left(\frac{p_{24}}{p_{14}}\right)' \\ -\cancel{\rho p_{34}} &= \left(\frac{p_{13}}{p_{14}}\right)' - \cancel{\rho p_{14}\frac{p_{34}}{p_{14}}} + x_1\left(\frac{p_{34}}{p_{14}}\right)' . \end{aligned}\right\} (4)$$

Paragonando le (4) che devono fornire una stessa espressione per x_1 ho

$$\begin{vmatrix} p_{12}'p_{14} - p_{12}p_{14}' & p_{24}'p_{14} - p_{24}p_{14}' \\ p_{13}'p_{14} - p_{13}p_{14}' & p_{34}'p_{14} - p_{34}p_{14}' \end{vmatrix} = 0$$

cioè $p_{14}^2(p_{12}'p_{34}' + p_{13}'p_{42}') - p_{14}p_{14}'(p_{12}'p_{34} + p_{13}'p_{42} + p_{12}p_{34}' + p_{13}p_{42}') + p_{14}'^2(p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42}) = 0$

cioè, indicando con $R(p,q)$ la $p_{12}q_{34} + \dots$ (cosicchè ~~è 1°~~ $p_{12}p_{34} = \frac{1}{2}R(p,p)$, $R(p) = R(p,p') = 0$)

$p_{14}^2(p_{12}'p_{34}' + p_{13}'p_{42}') + p_{14}p_{14}'(p_{14}'p_{23} + p_{14}p_{23}')$

$- p_{14}'^2 p_{14}p_{23} = 0$ cioè $p_{14}^2 R(p') = 0$ o $R(p') = 0$.

Viceversa, allora le (4) sono compatibili, e mi forniscono x_1, le (3) danno x_2 e x_3; [e questi valori soddisfano le (1) perchè derivando tenendo conto delle (4) le (3) viene $x_2' = x_1'\frac{p_{24}}{p_{14}}$; $x_3' = x_1'\frac{p_{34}}{p_{14}}$ e basta

prendere $\rho = -\frac{x_1'}{p_{14}}$ perchè anche le rendano (1) ... soddisfatte (poichè $x_2' = -\rho p_{14}\frac{p_{24}}{p_{14}} = -\rho p_{24}$)].

Così ottenuta la dimostr. perchè essendo in S_3 la tg. a $p = p(t)$ in p individuata da p, p', ed essendo le cond. per la sua esistenza su R le tre $R(p) = R(p\,p') = R(p') = 0$, le 2 prime sono certo soddisfatte e rimane la 3ª c.d.d.

v. p. 43 Anche in tal caso la rigata è sviluppabile: si hanno dunque due tipi di sviluppabili ... (unico)

1) Oss. - Supposto $R(p') = 0$ vi c'è però un caso di eccezione, in quanto possono le ∞^1 rette in S_3 passare per un punto (cioè essere gen. di un cono) invece che di svil. a linea spigolo. Che in tal caso $R(p') = 0$ è evidente geom. perchè su R si hanno ∞^1 pt. di piano di R). Invero il ragionamento a ritroso cade se x_1 x_2 x_3 risultano cost. a, b, c. Allora le (3) danno per le ∞^1 rette

$$\begin{cases} p_{12} + a\,p_{24} - b\,p_{14} = 0 \\ p_{13} + a\,p_{34} - c\,p_{14} = 0 \end{cases}$$

cioè le rette stanno nei cpl. lin. speciali delle rette $d_{12} = 0$, $d_{34} = 1$, $d_{13} = -a$, $d_{42} = 0$, $d_{23} = -b$, $d_{14} = 0$; e $d_{12}' = a$, $d_{34}' = 0$, $d_{13}' = 0$, $d_{42}' = 1$, $d_{14}' = 0$, $d_{23}' = -c$; le quali sono due rette incidenti (perchè $R(a\,c\ldots) = 0$). Quindi ~~uscenti da A~~

p. 59. eserc. Se sulle curve $x(t)$ e costruiscono ... tali che $\sum a_{ik}(x_i x'_k - x_k x'_i) = 0$ e quindi $\sum a_{ik}(x_i x''_k - x_k x''_i) = 0$. il pt. x e x', e così x e x'' sono coniug. rispetto alle pol.^{e} nulle: sicchè x è autoconiug.^{to} viene che il piano pol. di x è $xx'x''$.

p. 57. Infatti da $z = (xx')$ segue $z' = (xx'x'')$; e ... da $z = (xx'x'')$, $z' = (xx'x''')$ derivando la 1.^{a}, si costruisce x'' ... viene $(xx'x''x''') = 0$, assurdo se (x) è curva sghemba; quindi x'' mancava in z. (e resta identità).

506 [Mettere prima: esprimendo le direttr. ove si ha $p = (x, x')$ la seconda $p = (x z)$, $p' = (x z')$ c.d.] $p' = (x x'')$ e le p' sono coord. di rette: Viceversa se p e p' son coordinate di rette incidenti, ho, detto x il pt. di incidenza, supposto variabile, $p = (xy)$. $p' = (x z)$; $xy' + x'y = xz$; $x'y = x(z - y')$, onde x', y, x son allineati cioè retta xy è retta xx' c.d.d.

Ma le cosìrette o stanno nel loro piano - ma allora non si ha eccezione perchè inviluppano curve. o passano per un punto c.d.d.

~~La dimostr. del testo è corretta perchè dà le (4) che ... a p. 61~~ ~~Invece il testo esposto~~ Quindi $\Lambda(p') = 0$ è nec. e

suff. perchè $p(t)$ sia inviluppo di sviluppabile (cioè: sulle sue linee, o dicono.) [$\Lambda(p') = 0$ insieme con la relaz. $\Lambda(p) = \Lambda(pp') = 0$ pure che le cond. nec. e suff. è che le curve di S_2 abbia le tangenti tracciate su Q. A scuola ho esposto queste dimostr. (ad cui si riferisce l'osserv.-inciso di p. 507) - e pp. 506-508 per arrivare alla (4) concernente rigata stazionaria a p. 61.

Altra nella nota a p. 507 dove: se uno fra le p_{14}, p_{24}, p_{34} è $\neq 0$ pongo come x_1, o x_2, o x_3 tre funz. delle coord. (1): nel caso opposto le (1) danno luogo a un assurdo. ciò avviene perchè poichè tutte le p risultano nulle. se c'è un $x_4 \neq 0$ e allora non potevo assumere $x_4 = 1$: conveniva le cui inviluppo nel piano $x_4 = 0$. e basterebbe p.es. cambiare il sist. di coordinate (non detto tutto questo a scuola).

68. - Dice che dim. ciò viene che, con altre apposite v. note a p. 68 - opportun. in x del valore di du/dv, la relaz. fra 2 eq. corrisp. è

$$L\,du\,\delta u + M(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N\,dv\,\delta v = 0$$

indicando con ~~...~~ dv/du : $\delta v/\delta u$ i diff. | i valori di dv/du da compatire ... (volte)

Spiegare i sist. doppi coniugati. Quando il sist. (u, v) è tale, ~~[illegible]~~ che le x sono soluz. di $\partial_{uv}x + a\partial_u + b\partial_v + c\partial = 0$:
quando è sol. di $\begin{cases} \partial_{uu} \sim 0 \\ \partial_{vv} \sim 0. \end{cases}$

71. ~~Analogamente~~ Nel caso generale, chiamo (x) e (y) le falde focali: allora le rette della congr. sono loro tg. comuni: se (x) vi sviluppano una sist.^{c} di linee, e ~~[illegible]~~ (y) un sist.^{c} di linee: esse non si corrispondono (~~perchè le tg.~~^{ti} ~~comuni~~ nelle corrisp. punto da congr. fra (x) e (y): se su tutte le tg. a una linea sist.^{ca} su (x) le scelte anche sulle altre linee corrisp., quelle avrebbero le stesse tg. il che è impossibile (prendo per tg. ai pt. di linea con [illegible] d-[illegible])

Assunte come linee u e v ho per. $y = (x, x_v)$;
$x = (y\ y_u)$ cioè $y = Ax + Bx_v$; $x = Cy + Dy_u$.
Deriv. rispetto y, ho $y_u = (Ax)_u + (Bx_v)_u$ e
$x = C(Ax + Bx_v) + D[(Ax)_u + (Bx_v)_u]$ cioè è il sist.
(u, v) è coniugato su (x) e anche su (y): dunque i sist.^{i} sviluppati su (x) e (y) sono coniugati

Emerge inoltre che le rette della congr. si ripartiscono in 2 modi in ∞^1 sviluppabili: ciò vale evidentemente anche se una o entrambe le falde degenerano. Si vede inoltre che non esistono altre analoghe ripartizioni.

Basta che si corrisp.^{a} un sistema di rivoluz. perp. ~~[illegible]~~ risp.^{to} (x) e (y) al sist. coniug.^{to} u, v, si ha per l'eq. delle sviluppabili
$L\,du^2 + M\,dv^2 = 0$. $\quad \bar{L}\,du^2 + \bar{M}\,dv^2 = 0$ come
$$\frac{dv}{du} = \pm\sqrt{-L/M} \qquad \frac{dv}{du} = \pm\sqrt{-\frac{\bar{L}}{\bar{M}}}$$ se si corrisp. per
i due 1.^{i} sist.: se $L/M = \frac{\bar{L}}{\bar{M}}$, e si corrispondono anche i 2.^{i}
Ne segue che la cond. nec. e suff. perchè Γ e Γ' ~~sghembe~~ svolte non ~~[illegible]~~ trasf.-ant. l'una dell'altra è che vi sia una corrisp. fra g e g' tale che le ~~[illegible]~~ cgr. lin. speciali delle tg. a Γ in g e delle tg. a Γ' lungo g' ~~stiano~~ siano $K(g)$ e $K(g')$ abbiano in comune schiere, cioè stiano in cgr. lin. (cioè se sono falde di cgr. W a g corrispondente g' vi sono ∞^1 tg. comuni ai pt. di contatto risp. su g e g', cioè ∞^1 rette comuni alle cgr. lin. speciali nominate, $K(g)$ e $K(g')$ - in S_5 si ha due S_3 con ∞ pt. comuni di K: ~~dunque in S_5 (l'interp. è scelta~~, ~~[illegible]~~ - ~~non [illegible]~~ non contenenti rette, se no le due K avrebbero comune un fascio - e siccome ~~quante~~ p. es. K consta di fasci col centro su g, questa sarebbe un fascio col centro su gg'. per pt. generico di g non passerebbe raggio variabile - Quindi questi S_3 hanno in comune S_1.
Viceversa, se così è, ~~[illegible]~~ schiera comune a $K(g)$ e $K(g')$

515

la per congiunge per le con. dir. tti g e g', per ogni pt di g passa una retta che congiunga per a $K(g')$. ... t_g. e Γ e Γ'. - Vediamo subito che queste considerazioni permettono di ottenere facilmente tutte le cgr. W a falde focali rigate *): riconosco in S_5 ho le rig. g e g' di Γ e Γ' su R con rif. tali però che t_g corrisp. (han S_3 polare per S_2 con.) stano in S_4. Siano $x(t)$ e $y(t)$ le $x\,x'\,y\,y'$ legati per ~~loro~~ ciò. La rigata xy è osculatrice (circ. ..., o corrisp. avente che non si avranno più ... S_3). ~~Vien da legame tra due $ax+bx'+cy$...~~ (Il risultato è generale indip. dal fatto che siano su R e in S_5 ...). Trovo ora su xy pt $x+\lambda y$ che descrive ~~...~~ e tocchi di xy ossia $x'+\lambda y'+\lambda' y = \rho x + q y$ ossia $x'+\lambda y' = \rho x + (q-\lambda')y$ ovunque da $x'+ay' = bx+cy$ segue che per $\lambda = a$ ... $\rho = b$, $q = c+\lambda'$, ... Se il pt $x+\lambda y$ non descrive curva, ma è fisso, vuol dire che ho cono (o piccolo). Quindi data g ho tutte le g' possibili cercando osc. per g e segando le sue quadriche ulteriormente con R. Vale a dire tutte ... da gli S_4 delle osculatrici ~~...~~ contenenti gli S_3 osculatori a g (pensando al caso generale in cui gli S_3 di g sono osc.^ti a una curva Σ, ... le tg. di Σ

○ intersez. vuol dire che $g\,g$, $g'g'$ sono sempre quattro rette (appoggiate a una schiera cioè) di una schiera ○○ (oss. per m. le cond. non è del tutto sufficiente. (~~...~~) dovendosi scartare il caso in cui le rigate hanno in comune un'assintotica.)

*) sottintendo che alle rette corrispondano rette. La cond. sarebbe superflua, in base a un teor. di C. Segre ... che se F, F' sono falde rigate di cgr. W, e alle rette di F corrispondono ... di F', ... F è quadrica. ecc. ecc. (Sulle congr. ell. W di cui una od anche le falde focali sono rigate. Torino Atti XLIX. 19. ?) - Inoltre mi occupo solo di rigate generiche escludendo quelle di congruenze lineari, per cui si dovrebbe modificare

e Viceversa

§. Notare esplicitamente il significato geom: dire che xy è oscul. = che le tg. a (x) (y) in x y stanno sempre in S_3.