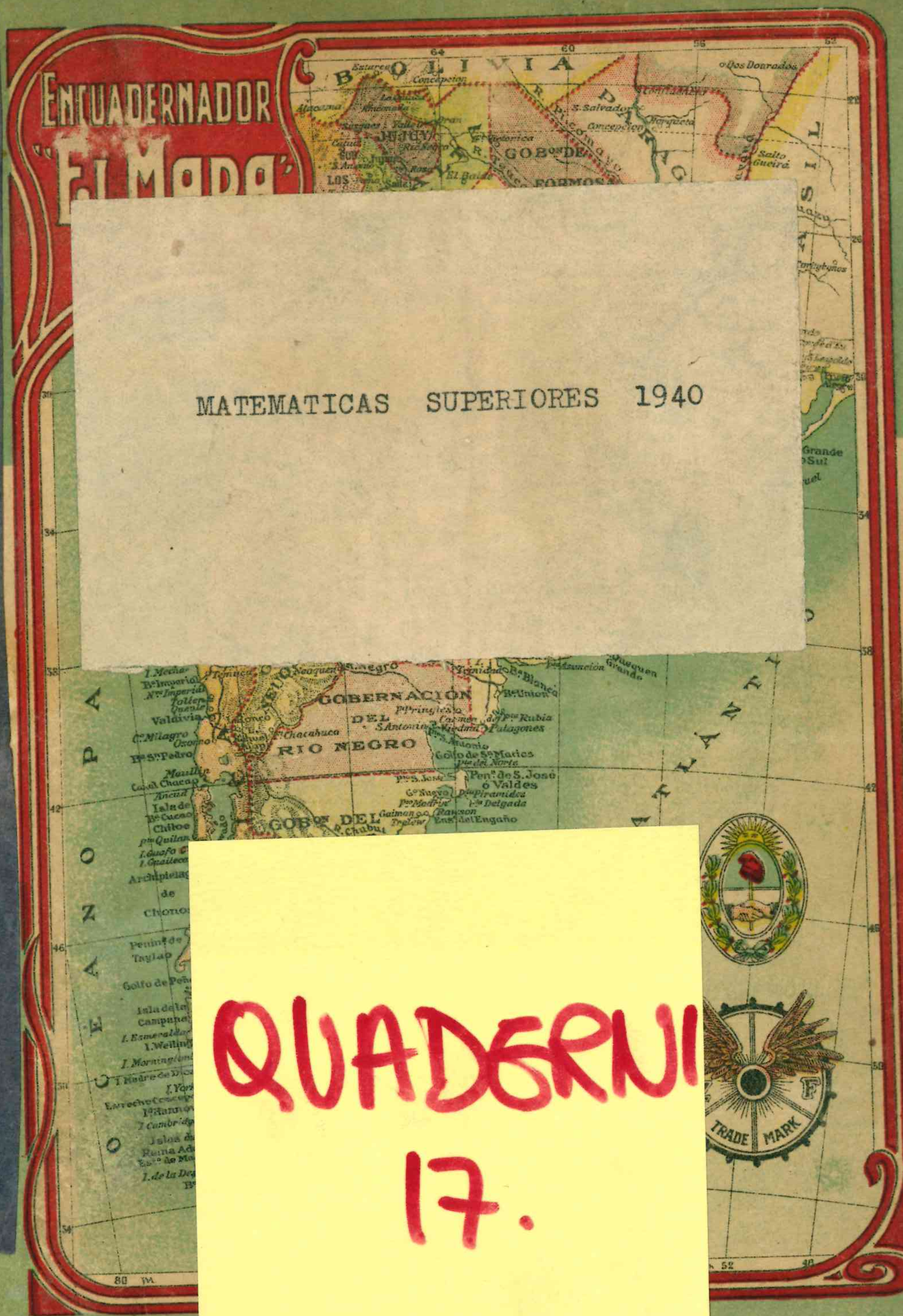
ENCUADERNADOR "El Mapa"



MATEMATICAS SUPERIORES 1940

QUADERNI
17.

Perteneciente a ....

Alum .... de .... Grado ....

Índice

~~El primer argumento del cual~~ nos ocuparemos en este curso ~~está constituido por~~ las funciones de variable compleja o funciones analíticas. La importancia de los números complejos ya está conocida por el estudio del álgebra: la teoría de las ecuaciones algebraicas logra toda su generalidad mediante la introdución de los números complejos. También en la teoría de las funciones es importante el estudio de las funciones de variable compleja.

Todos tenemos el concepto de número complejo

$$z = x + iy$$

i unidad im. ($i^2=1$)

x es la parte real y iy la parte imaginaria; y es el coeficiente del imaginario. Algunos autores escriben

$$x = R(z); \quad y = I(z)$$

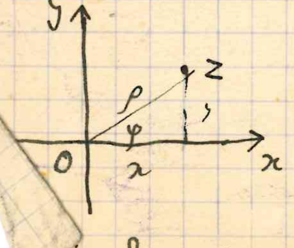
El módulo o valor absoluto de z es

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

la raíz siendo considerada consigno positivo. Como caso particular si y=o, el número complejo z es real; si x=o, z=iy se llama imaginario puro. El núemro se llama imaginario cuando no es real. Los núneors x+iy y x-iy, obtenidos uno de otro mediante el cambio de signo del coeficiente de y son complejos conjugados. (Se obsirve que los números complejos no son lo mismo que los nḿeros imaginarios, porque abarcan también los múmeros reales) (RAD)

También sabemos como los números complejos pueden representarse en los puntos de un plano (plano de Gauss: así se llama generalmente, aunque se encuentra, antes que en Gauss, en un trabajo del matemático danés Caspar Wessel, 1797), donde x , y sean coordenadas cartesianas ortogonales. Los númmros reales están representados por los puntos del eje x(eje real), los imaginarios puros por los puntos del eje y(eje imaginario); números complejos conjugados por puntos simétricos respecto al eje x. Dada la biunivocidad de la correspondencia entre los números complejos z y los puntos que les representan , a menudo se dice el punto z en cambio que el número z.

La representación geométrica sugiere también la representación trigonométrica de los números complejos. Si en el plano de Gauss introducimos coordenadas polares con O como polo, eje x como eje polar, cada punto tiene un radio vector ρ y una anomalía φ que están relacionadas con x,y por las relaciones



$$x = \rho \cos\varphi \qquad y = \rho \operatorname{sen}\varphi \qquad (1)$$

[illegible] de a menos de múltiplos de 2π.

Unas indicaciones bibliográficas:

Bianchi: Lez. sopra la teoria delle funz. analitiche

Titchmarsh: The Theory of Functions   Pisa, Spoerri ~~[illegible]~~

Vivanti: El.ti della teoria delle funzioni analitiche.
Milano Hoepli

Tricomi Funzioni analitiche. Bologna Zanichelli.

Bieberbach _ Lehrbuch der Funktionentheorie I. II Leipzig Teubner

Hurwitz Courant _ Funktionentheorie (Berlin Springer)

Osgood. Lehrbuch der Funktionentheorie   Leipzig Teubner.

y los tratados generales de análisis como Goursat, Picard

Knopp (trad. en castellano) Teoría de funciones.

y los artículos de la Enz. der Math. Wiss. (II Theil)

~~La defin~~ X Si z, z' son dos puntos del plano de Gauss $|z - z'|$ representa su distancia. En efecto si $z = x + iy$. $z' = x' + iy'$, $|z - z'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$

× Si tomamos el plano π del ecuador como plano de Gauss para la variable compleja Z

donde ρ es positivo o nulo, y φ es medido p.e. entre 0 y 2π.
Las relaciones se invierten en

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \qquad (x\ x\neq 0;\ \text{si } x=0 \left\{ \begin{matrix} \varphi = \pi/2 \\ \varphi = 3\pi/2 \end{matrix} \right.$$

La primera se logra cuadrando y sumando; la segunda dividiendo miembro a miembro(la segunda define dos valores de φ entre o y 2π , pero después puede elegirse entre los dos en base al signo de x; p.e si x,y son positivos, se obtienen dos valores de φ ,uno entre 0 y $\pi/2$,el otro entre π y $3\pi/2$,pero como x es positivo, hay que elegir la primera anomalía).Para evitar la ambiguidad que procede de la tangente,conviene completar las últimas fórmulas así

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

obtenidas de (1). p.A.

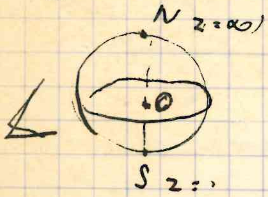
El radio vector coincide evidentemente con el módulo de z; la anomalía se llama <u>argumento</u> de z. Las (1) nos dan la repr. trigonométrica

$$z = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

Recuerdo que la suma de dos números complejos z,z´ se obtiene con la regla del paralelogramo; análogamente la diferencia.

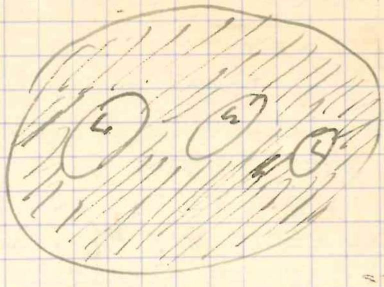
Recuerdo que el producto de dos n.os complejos $\rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, $\rho'(\cos\varphi' ...)$ tiene como ~~su~~ módulo el producto de los módulos y como argumento la suma de los argumentos: luego el punto zz' se obtiene rodando el pt. z de un ángulo φ' y modificando convenientemente el módulo. (φ' en π torno origen O)

Otra reprsentación geom. de la var. compleja z se obtiene mediante <u>la esfera de Riemann</u>.Considero esfera Σ y la proyecto estereograficamente de un punto de la esfera,p.e.de su polo Norte N p.e. sobre el plano π del ecuador.Nace corr.cia biun. entre los puntos de la esfera y los del plano considerado π. Entonces a cada punto de la esfera corresponde un valor de z y viceversa: los puntos de la esfera pueden tomarse como representantes de los valores de z.P.e. al polo sur corresponde



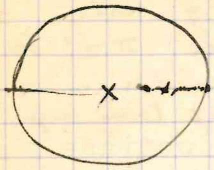
z=o. Habría una excepción ,el punto N que no tiene sobre π correspondiente.Esta excepción se elimina así.Si P tiende a N, la recta NP tiende a una tangente en N; P´tiende a un punto al infinito(en el sentido de la geom proy) del plano π .Así, con esta consideración de límite seríamos llevados a hacer corresponder a N todos los puntos impropios del plano.Pero en la teor las func de var compl. se consideran todos los puntos impropios del plano π como coincidientes,es decir se atribuye al plano π

Fig. A

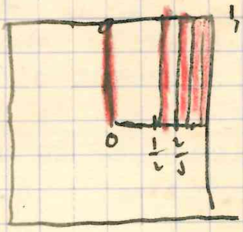


de campo abierto análogamente

La df resulta más general de los campos conexos abiertos: p. ej. si tomamos círculo de centro 0 y radio 1 y los puntos del eje x $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ ... los pts internos al círculo, excluidos los indicados, constituyen un recinto



Otro ejemplo cuadrado cortado restando los segmentos como en figura



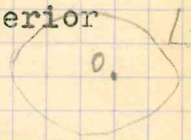
- es decir, habiendo considerado como pertenecientes al conjunto ~~tal~~ solo puntos internos - podemos también decir punto de acumulación que no pertenezca al conjunto.

un único
punto impropio y a éso hacemos convencionalmente corresponder $z=\infty$ .Luego sobre la esfera en N $z=\infty$ (A2

Volvamos al plano π. Hablaremos de campos o dominios, o recintos. El caso más sencillo es el caso donde está constituido por los puntos interiores a una línea cerrada L, simple (que no se corte por sí misma) y sea regular(es decir contínua, y que admita tangente variable con continuidad, o constituída por un número finito de arcos regulares ~~con posibles excepciones en unos puntos~~; p.e. círculo, o elipse, o rectángulo. He hablado de puntos interiores: el campo entonces se llama abierto; si se quieren considerar también los puntos del contorno, o frontera L, el campo se llama cerrado.

Otros tipos de dominios :dada L cerrada y que no se corte, y en su interior línea análoga L_1 , los puntos interiores a L y exteriores a L_2 constituyen campo abierto, que se puede cerrar con los puntos de la frontera (L y L_1).Ejemplo la corona circular

También hablamos de un dominio si L_1 se reduce a un punto: puntos interiores a L, con exclusión del punto O.En este caso la frontera está constituida por L y O.



Más generalmente si tomo L cerrada c.a. y en su interior m líneas análogas $L_1,\dots L_m$ dos a dos exteriores, los puntos interiores a L y exteriores a cada L_h etc. se dice que constituyen un dominio, cerrado o abierto, con frontera constituída por la líneas L, L_1, L_m ,que pueden también reducirse a puntos.(fig. A)

Todos estos casos, considerando los campos abiertos, se encuentran en estas dos condiciones:

1) se trata de un conjunto de puntos cada uno de los cuales es interior al conjunto(un pt se llama interior a un conjunto de puntos del plano, cuando puede trazarse un círculo con el centro en el punto,cuyos puntos todos pertenzcan al conjunto. Esto evidentemente sería imposible si consideráramos también los puntos de la frontera) (A3

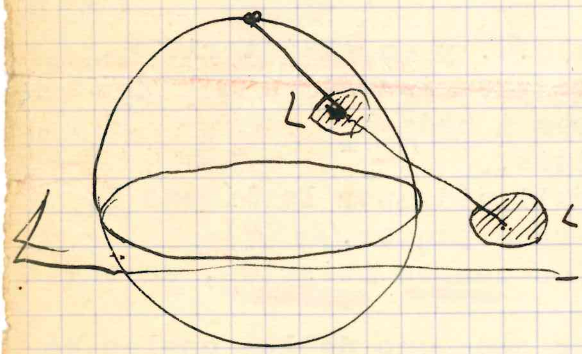
2) el conjunto es conexo, es decir puede pasarse de un punto del conjunto a cada otro mediante una quebrada cuyos puntos todos pertenecen al conjunto.

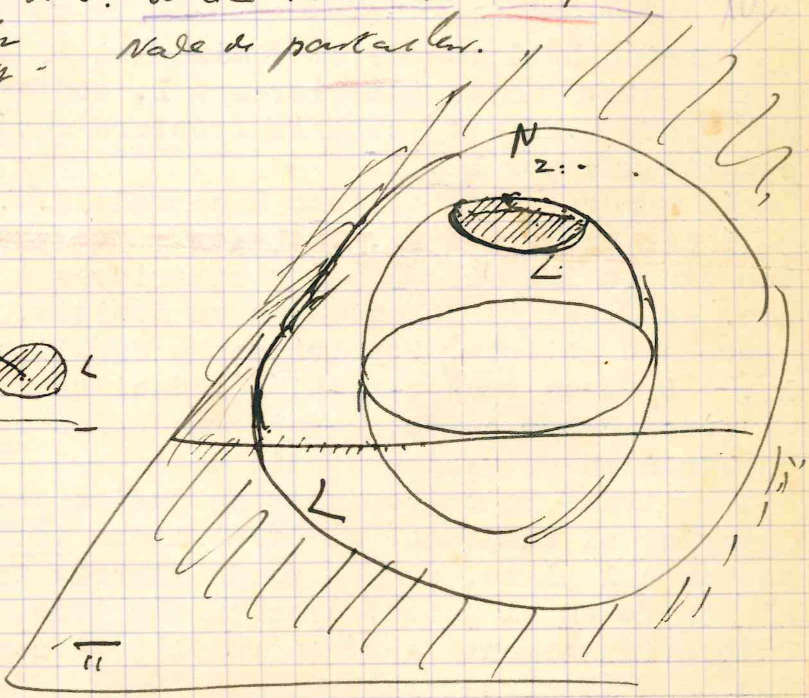
Y pueden tomarse estas dos condiciones como definicion de un dominio, o campo o recinto (abierto). Se llama entonces punto frontera del campo cada punto de acumulación que no sea interior

(se llama punto de acumulación de un conjunto plano a todo pt. tal que en cada su entorno circular pequeño como se quiere, es decir

XX El caso más importante es el caso donde el valor w por cada z es único: fn uniforme o monodrome (sino polidrome o multiforme). Únicamente nos referiremos a funciones uniformes: en caso contrario se dirá expresamente.

X un n.° complejo función de variable real (función compleja de variable real no llega a nada de nuevo: $w = u + iv$ f.n de t si u, v son funciones de t. Se tiene inmediatamente la df. de derivada $\frac{dw}{dt} = \frac{du}{dt} + i\frac{dv}{dt}$. Nada de particular.





$$|Z - z| \leq \varepsilon$$

XXX sobre la esfera L define dos regiones: considero como interior la que contiene z.

círculo que tenga el centro en el punto) haya infinitos puntos del conjunto. Así en los casos de arriba los puntos llamados de la frontera se encuentran precisamente en estas condiciones.

Y, tomando un recinto abierto según esta noción, y agregándole los puntos de su frontera, se obtiene un recinto cerrado .

Volviendo al caso más importante de los primeros ejemplos, obsérvese una diferencia entre ellos. En el primer caso cada (por continuidad) línea cerrada que no se corte, interior a L puede reducirse a un punto sin salir del recinto. Ya en el segundo caso esto no es posible. En el primer caso se dice que el campo es simplemente conexo , en los sucesivos multiplemente (doblemente, si tenemos L_1 o un punto, triplemente si tenemos L_1 L_2 eventualmente reducidas a puntos, etc.)

Vengo ahora a las funciones de variable compleja

Imagino que z pueda variar en un campo (de variabilidad) C y que por cada valor de z resulte definido, según una ley cualquiera otro número complejo w, de manera única por cada valor de z. Se dice entonces que w es una funcion de la variable compleja z, definida en aquel campo de variabilidad.

Agrego observación. Ya he aludido al concepto de entorno circular de un punto en el plano. Más generalmente puede tomarse como entorno de un punto z cualquier campo que contenga z como interior, que sea formado por los puntos interiores a línea L cerrada que no se corta, p. e. cuadrado. En el caso de entorno circular , si ε es el radio del círculo, el entorno es caracterizado por

$$|Z-z| \leq \varepsilon$$

donde se toma solo el signo menor, si se consideran solo los puntos interiores... Todo esto vale para los valores finitos de z. Alguna vez se considera también un entorno del punto al infinito. Para llegar a esta noción, dejémosnos guiar por las siguientes consideraciones. Junto con el plano de Gauss considero la esfera de Riemann: entonces un entorno de z(finito) resulta también sobre la esfera constituido por los puntos Z interiores a L cerrada que no se corta trazada alrededor de z. Aplico esta definición también al caso donde $z = \infty$ está en N. Entonces L se proyecta en línea cerrada , y su interior sobre la sup de la esfera se proyecta en la región esterior a L sobre el plano. Así semos llevados a definir como entorno del punto impropio la región esterior a una línea cerrada etc L .Entorno circular será la regioén de los puntos ~~ex~~teriores a círculo (que convie ne pensar como un círculo de radio muy grande) × (hasta aquí)

de p.7!!! El número w, función de z ,como múmero complejo,tiene parte~~s~~ real que llamo u y coef del img que llamo v.Escribiré

$$w = f(z)$$

o

$$w = u + iv = f(z)$$

El conocimiento de z equivale al de x,y.Luego u,v son funciones (en el sentido má general de x,y; u=u(x,y); v=v(x,y).El estu dio de la función f(z) de la variable compleja z equivale al estudio de las dos funciones reales de dos variables reales

$$u(x,y) \quad ; \quad v(x,y)$$

Para llegar a resultados que tengan verdadero interés conviene limitar la naturaleza de la función w.Así p.e. conviene pedir que se trate de una función continua .Esto significa que cuand z varía de poco, también f(z) varía de poco.De manera exasta que tomado η positivo arbitrario, pequeño como se quiere,siem pre exista ε tal que si Z satiface a la inegualdad

$$|Z - z| < \varepsilon \qquad (1)$$

necesariamente resulte

$$|f(Z) - f(z)| < \eta \qquad (2)$$

Entonces f(z) se llama continua en z.Pero tampoco ahora se cons gue un progreso importante:la restricción impuesta equivale a la otra que las dos funciones u,v sean continuas en el punto (x,y).En efecto si f(z) es continua,de (2) sigue ($Z = X + iY$)

$$|u(X,Y) + iv(X,Y) - u(x,y) - iv(x,y)| < \eta$$

$$|u(X,Y) - u(x,y) + i[v(X,Y) - v(x,y)]| < \eta.$$

Ahora para el nº complejo $a+ib$ tenemos $|a| \le \sqrt{a^2+b^2} = |a+ib|$, $|b| \le |a+ib|$

y luego

$$|u(X,Y) - u(x,y)| < \eta, \qquad |v(X,Y) - v(x,y)| < \eta \qquad (3)$$

Luego ~~de (1) resulta de~~ dado η arbitrario, existe ε tal que por (X,Y) que satisfagan a

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 < \varepsilon^2 \qquad (1')$$

Se siguen las (3) y esto expresa precisamente que u, v son continuas en x.y. – Viceversa, si es así, como η es arbitrario: existe ε tal que ~~de (1') resulta...~~ ~~las (3)~~ para los (X,Y) que satisfagan (1') satisfacen (3). Ahora

$$\left| u(X,Y) - u(x,y) + i\,[v(X,Y) - v(x,y)] \right| \leq \left| u(X,Y) - u(x,y) \right| + \left| v(X,Y) - v(x,y) \right|$$

(la suma de dos n.os complejos tiene módulo ≤ suma de los módulos

sigue

$$\left| u(X,Y) - u(x,y) + i\,[v(X,Y) - v(x,y)] \right| < 2\eta \equiv \left| f(Z) - f(z) \right| < 2\eta$$

~~luego~~ es decir (2) donde se escribe 2η en cambio de η substituye también

Luego tampoco con la hipótesis de la continuidad no se sale de la teoría de un par de funciones de dos variables reales.

Las cosas cambian completamente si imponemos a la función f(z) también la condición que tenga una derivada (única, para cada z)

La derivada f´(z) se define como en el caso real, como límite de la razón incremetal:

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

tan sólo

Aquí veremos que podremos afirmar la existencia de la derivada si ~~acerca de~~ sobre las funciones u(x,y) v(x,y) hacemos oportunas hipótesis no solo cualitativas, sine también cantitativas, como lo explicaré.

Supongo que u,v posean derivadas parciales de primer orden, continuas. Vamos a estudiar si esto es suficiente para que exista f´(z): veremos que no. Pongo $h = \alpha + i\beta$ y formo la razón incremetal

$$\frac{u(x+\alpha, y+\beta) + i v(x+\alpha, y+\beta) - u(x,y) - i v(x,y)}{\alpha + i\beta} =$$

$$= \frac{u(x+\alpha, y+\beta) - u(x,y) + i\,[v(x+\alpha, y+\beta) - v(x,y)]}{\alpha + i\beta}$$

P. e. si considero la función tan sencilla x= R(z), parte real de z, y busco si existe la derivada tengo que estudiar el límite

$$(h = \alpha + i\beta) \quad \lim_{\alpha + i\beta \to 0} \frac{\alpha}{\alpha + i\beta} = \lim_{\alpha + i\beta \to 0} \frac{1}{1 + i\,\beta/\alpha} \qquad \frac{1}{1+i}$$

Ahora bien si dejo tender $\alpha + i\beta$ a cero p.e. a lo largo de la recta $\beta = m\alpha$ (m const.) encuentro

$$\lim \ldots = \frac{1}{1+im}$$

p.e. a lo largo del eje x el lim es 1, a lo largo de $y = x$ el lim. es $\frac{1}{1+i}$

Luego el límite que encuentro depende de la recta a lo largo de la cual hago tender Z a z. No encuento un solo valor del límite, es decir un solo valor de la derivada. Luego la x como función de z no

× donde $\dfrac{dz}{dx} = 1.$

×× La razón procede del hecho que Cauchy llamaba **monogenas** a las que hoy día se llaman **funciones de variable compleja** (según la def. que daré más adelante).

es derivable.- En cambio z como función de la variable real x es

Vamos a buscar cuales son las condiciones de derivabilidad. Premito que para las funciones derivables subsisten como en el ca real las consecuencias relativas a la suma, producto, cociente de funciones derivables (donde den. ≠ 0), y también funciones de funciones. Antes bien este último teorema subsiste también si consideramos w como función de una variable real t a través de una variable compleja z, es decir w(z(t)), lo que encontrará inmediata aplicación.

Supongo pues f(z) derivable. Entonces considero f(z) como función de la variable real x mediante z. Luego (ultima obs.) considerando

w(z(x)):
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{df}{dz}. \qquad (1)$$

Análog. w(z(y)):
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = i\frac{df}{dz}. \qquad (2)$$

y, aplicando (1)
$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}. \text{ es decir } \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

es decir (comparando por la parte imaginaria)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} & (A) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} & (B) \end{cases}$$

Luego, si la funcion w=f(z) es derivable, necesariamente subsisten (A), (B).

Podemos ahora comprender porque p.e. R(z) no era derivable. En este caso u=x, v=o; las (A),(B) vendrían a ser 1=o, o=o y la primera no subsiste

Las considiones (A) (B), come se ve cuantitativas, como lo habíamos dicho y no slo cualitativas, tiene un papel de primer plano en la teoría de las funciones de var compl. Se llaman condiciomes de monogeneidad; o también ecuaciones de Cauchy - Riemann

P.e. Si tomo f(z) = z la derivada existe y vale 1 $\left(\lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1\right)$. y en este caso u = x, v = y; (A) 1 = 1; B: 0 = 0 y está bien.

Luego (v. arriba) son derivables también z^2, $1/z$ (en un campo al cual no pertenezca z=0), z^m donde m es un número entero, positivo o negativo. Averiguo las cond de monogeneidad p.e. para z^2.

$w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$; $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$; $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$

y está bien

Para $w = z^3 = (x+iy)^3$; $u = x^3 - 3xy^2$, $v = 3x^2y - y^3$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$; $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy$; $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$

y está bien

Para $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$; $u = \frac{x}{x^2+y^2}$; $v = \frac{-y}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

y está bien

De lo dicho sigue que también un polinomio en z es una función derivable(suma de funciones derivables) y también una función racional de z,considerada en un punto donde no se anule el denominador.

Me pregunto ahora si las condiciones de monogeneidad(A),(B) son también suficientes para la existencia de la derivada(única) dw/dz .Y pruebo que si

$$w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

donde las u, v satisfacen a las (A),(B) y además se supone que las cuatro derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

sean contínuas, existe dw/dz.

Formo en efecto la razón incremental (llamando $\alpha + i\beta$ al incremento h) ~~I~~ Ahora r =

$$r = \frac{u(x+\alpha, y+\beta) + iv(x+\alpha, y+\beta) - u(x,y) - iv(x,y)}{\alpha + i\beta} =$$

$$r = \frac{u(x+\alpha, y+\beta) - u(x,y) + i\left[v(x+\alpha, y+\beta) - v(x,y)\right]}{\alpha + i\beta}$$

Recuerdo ahora que si en un campo del plano (xy) φ es continua y admite derivadas parciales también continuas el incremento de la función es igual al diferencial total a menos de infinitésimos de orden superior, es decir

$$\varphi(x+\alpha, y+\beta) - \varphi(xy) = \alpha \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} + l\alpha + m\beta$$

donde ~~A,B~~ l, m tienden a cero cuando α, β tienden a cero. Aplico esto a u,v y logro

$$\text{razón incremental} = \frac{\alpha \frac{\partial u(xy)}{\partial x} + \beta \frac{\partial u(xy)}{\partial y} + l\alpha + m\beta + i\left[\alpha \frac{\partial v(\cdot\cdot)}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} + l'\alpha + m'\beta\right]}{\alpha + i\beta}$$

Siendo cumplidas las (A),(B) en lugar de $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ escribo $-\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, y luego

$$r = \frac{(\alpha+i\beta)\frac{\partial u}{\partial x} + (i\alpha-\beta)\frac{\partial v}{\partial x}}{\alpha+i\beta} + \frac{l\alpha + m\beta + i(l'\alpha + m'\beta)}{\alpha+i\beta}$$

$$r = \frac{\partial u(xy)}{\partial x} + i\frac{\partial v(xy)}{\partial x} + \text{———}.$$

En la última fracción tengo p. ej. el primer término $l\frac{\alpha}{\alpha+i\beta}$ producto de l que tiende a cero, por $\frac{\alpha}{\alpha+i\beta}$ con módulo $\frac{|\alpha|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \leq 1$, luego ~~acotado~~ que se puede ≤ 1: el producto tiende a cero. Así los siguientes. Luego

$$\lim_{\alpha+i\beta\to 0} r = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Así ~~no sólo encontramos~~ el límite de r existe, y es igual al 2º miembro. Luego $\frac{dw}{dz}$ existe y vale (13)

$$\boxed{\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}}\ (1^\circ) \qquad \left(= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\ (2^\circ)$$

c.d.d.

Como en la teoría de las f. de var. reales, de la derivabilidad se sigue la continuidad: en efecto siendo

$$\lim_{z\to z} \frac{f(z)-f(z)}{z-z} = f'(z)$$

es decir

$$\lim_{z\to z} f(z)-f(z) = \lim \frac{f(z)-f(z)}{z-z}(z-z) = f'(z)\cdot \lim_{z\to z}(z-z)$$

luego

$$\lim_{z\to z}\left[f(z)-f(z)\right] = 0$$

lo que expresa la continuidad porque significa que dado $\eta > 0$, existe ξ tal que para $|z-z|<\varepsilon$ es $|f(z)-f(z)| < \eta$.

En ~~varios~~ unos libros se define $f(z)$ analítica si $f'(z)$ existe sin añadir que es continua.

En realidad no es preciso suponer la continuidad de f', porque la ~~conse~~ consecuencia de que existe $f''(z)$ etc. puede demostrarse suponiendo sólo la existencia de $f'(z)$; luego si f' existe existe f'' dic. luego f' es continua (v. arriba) es decir lo son u_x, v_x, u_y, v_y.

Cuando hablaremos de función de ~~x~~ variable compleja ,entenderemos una función ~~&~~ f(z) uniforme en cierto campo y derivable con derivada continua. Se dice ~~c&~~ también función analítica (estas eran las funciones monógenas de Cauchy)

Podemos también decir que f(z) es anal. cuando f(z) cumple las condiciones de monogeneidad, y además se supone que las derivadas u_x u_y v_x v_y sean continuas

Como ~~lo~~ veremos después, de la analiticidad de f(z), ~~es decir de la existencia de la derivada primera~~, ya sigue las existencia de todas las derivadas sucesivas, y luego su continuidad, y también la posibilidad de desarrollar en serie de Taylor: resultados mucho mas sencillos que en la teoría de las funciones de variables reales.

Observemos enseguida unas consecuencias ~~de las condiciones de monogeneidad.~~ relativas a las funciones anal.

En primer lugar, existen, como lo dijimos y veremos, las derivadas sucesivas de w, y luego son contínuas(siendo a su vez derivables).En particular existe [y es continua] ~~[illegible]~~

$w''(z) = \cancel{[illegible]}$

Luego existen y son continuas las derivadas segundas de u y de v. Recuerdo el teorema de la posibilidad de conmutar el orden de las derivaciones: si $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}$ (basta que una sea continua) existen y son contínuas, son iguales entre sí (1). Ahora bien para

[illegible] de (A), (B)

(A) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y deriv. A respecto a x, y B respecto a y

(B) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Luego $\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \end{array}\right.$

(1) Por lo demás dicha igualdad ya resulta ahora de las (α)

y con los $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$ [illegible] sumando miembro a miembro lo

$$\boxed{\Delta_2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{dz}(v_y - i u_y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \\ \text{y también } \frac{d}{dz}(u_x + i v_x) = \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x} - i\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} \end{array}\right\}(\alpha)$$

es decir la parte real de una función analítica satisface a la llamada ecuación de Laplace . Las funciones que satisfacem a esta ecuación se llaman armónicas. La parte real...es una función armónica

Lo mismo vale del coeficiente del imaginario. Basta formar $(A_y)-(B_x)$ y se obtiene

$$\Delta_2 v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

(Pero las dos funciones u,v armónicas resultan además relacionadas entre sí por las condiciones de monogeneidad de Cauchy Riemann. Se llaman funciones armónicas conjugadas)

Tomando los ejemplos z, z^2, z^3, ya sabemos (p. 15)

$u = x \quad v = y$

$u = x^2 - y^2 \quad v = 2xy$

$u = x^3 - 3xy^2; \; v = 3x^2y - y^3$

$\Delta_2 u = \Delta_2 v = 0$

$\Delta_2 u = 2 - 2 = 0 \quad \Delta_2 v = 0$

$\Delta_2 u = 6x - 6x = 0; \; \Delta_2 v = 6y - 6y = 0$

y averiguamos inmediatamente en los varios casos $\Delta_2 u = \Delta_2 v = 0$

Más generalmente por n entero positivo la parte entera y el coeficiente del imaginario de z^n son polinomios homogéneos de grado n en x, y, armónicos. ~~Pues~~ Se

$$\mathcal{R}\left((x+iy)^n\right) = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \binom{n}{4} x^{n-4} y^4 - \dots$$

$$\mathcal{I}\left((x+iy)^n\right) = n x^{n-1} y - \binom{n}{3} x^{n-3} y^3 + \dots$$

Mas generalmente aún la parte real y el coeficiente del imag. de un polinomio en z a coeficientes cualesquiera $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ son polinomios armónicos (generalmente no homogéneos). Así de

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \qquad a_0 = b_0 + ic_0; \; a_1 = b_1 + ic_1; \; a_2 = b_2 + ic_2$$

(a_i constantes complejas, b_i, c_i reales)

luego $b_0 + ic_0 + (b_1 + ic_1)(x+iy) + (b_2 + ic_2)(x^2 - y^2 + 2ixy)$ los dos polinomios armónicos de 2º grado, conjugados:

$$b_0 + b_1 x - c_1 y + b_2(x^2 - y^2) - 2c_2 xy$$

$$c_0 + c_1 x + b_1 y + c_2(x^2 - y^2) + 2b_2 xy.$$

Obs.^{n} - Siendo la ec. d. Laplace lineal homogénea, combinando linealmente soluciones (con coef.^{s} constantes) se logran nuevas soluciones. (p.e. ecs. de A5-6) c.l. de 1, x, y, x^2-y^2, 2xy vemos por lo tanto que si en el campo simplemente conexo C está conocida la parte real u de la función analítica $f(z)$, esta última queda determinada a menos de ~~una~~ constante aditiva.

p. A7

Dos funciones armónicas conjugadas, parte real y coef del img. de una misma función w son, como lo dijimos ,relacionadas entre sí. Siendo una de las dos dada arbitrariamente(como función armónica) que puede decirse de la otra? Estudio solo el caso donde C es simplemente conexo.Sea dado u(x,y,) en C.Busco v tal que sea

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

C

Generalmente,siendo dadas dos funciones U(x,y) ~~y~~ V(x,y) en C, contínuas y con derivadas primeras también contínuas, tales que sea

(uniforme) $$\boxed{\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}} \qquad (°)$$

existe una función φ , determinada a menos de una constante aditiva tal que resulte

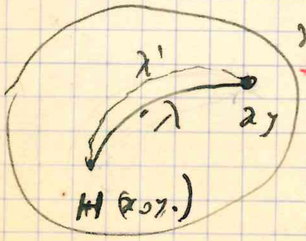
$$(°°) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = U \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = V$$

es decir $U dx + V dy = d\varphi$ es una diferencial exacta. ~~suficiente para la existencia de φ.~~

La función φ puede obtenerse como data por el valor del integral curvílineo

$$\int_{(x_0 y_0)}^{(xy)} U\,dx + V\,dy$$

calculado a lo largo de una línea arbitraria λ que va del punto H(x_o y_o) fijado arbitrariamente al punto variable (x,y); el integral resulta independiente del camino de integración porque como consecuencia de la hipótesis (º) resulta nulo a lo largo de un camino cerrado, es decir resulta lo mismo a lo largo de dos caminos que unan H con (x,y).Al variar del punto H varía la constante aditiva. La (°) es la cond. de integrabil.



De a (°°) Todo esto se aplica al caso actual, donde U y V tienen los valores $-u_y, u_x$; la (°) está satisfecha porque se reduce a

$$-u_{yy} = u_{xx}$$

que es satisfecha,como ecuación de Laplace satisfecha por la función armónica u

Por cada elección de la constante aditiva en v resulta determinada de manera única v en todo C ;luego tambiénw(z). De una de estas funciones w(z) se deducen todas las otras,que serán del tipo

$$w(z)+c$$

con c constante arbitraria: cada una es uniforme.

Las cosas cambiarían en el caso de un campo C multiplemente conexo.En este caso el valor del integral (aunque sean cumplida (°))

$$\int_{x_0 y_0}^{xy} U\,dx + V\,dy$$

algunos la llaman fórmula de Green

× Esta fórmula tiene nombres muy distintos. P.e. en Italia muchos la llaman gen^te lema, o teorema di Gauss (Tricomi II 257, Bianchi p. 82). Autores franceses p.e. Goursat II p. 151, 150 fórmula de Green (o de Riemann). Rey Pastor Curso de cálculo infinitesimal p. 329 fórmula de Stokes o de Riemann.

En el lema, o teor. de Gauss, se recorre positivamente es decir de manera que el área interior quede a la izquierda ~~[illegible]~~

en el caso actual

puede depender del camino de integración , y luego no lleva a una función $v(x,y)$ uniforme. Tampoco se logra una $f(z)$ uniforme siendo dada su parte real) He dicho que el integral puede depender del camino de integración; esto es una consecuencia del que el integral calculado a lo largo de un camino cerrado s no es ahora necesariamente nulo. Y esto se entiende cuando se piensa que el hecho que como consecuencia de $(°)$ el integral

$$(1) \qquad \int_s U\,dx + V\,dy$$

a lo largo de una curva cerrada s (que podemos suponer no se corte) es nulo ~~como consecuencia de~~ (1) se demuestra aplicando el teorema de Gauss

$$\int_s U\,dx + V\,dy = -\iint_S \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) dx\,dy$$

fig 1

donde S indica el area interior a s. Si el campo es simplemente conexo el area interior a s es interior a C, y en toda el area vale $(°)$; el segundo miembro es nulo, y luego también el primero. En cambio, si p.e. el area es doblemente conexo (fig 2) puede ocurrir que el area interior a s no sea toda contenida en C, y entonces la $(°)$ no subsiste en todo su interior, la fórmula de Gauss no se aplica, y la conclusión falta. Que en un campo no simplemente conexo la $(°)$ no sea suficiente para concluir que el integral (1) a lo largo de toda línea cerrada es nulo, podemos controlarlo p e sobre el ejemplo siguiente:

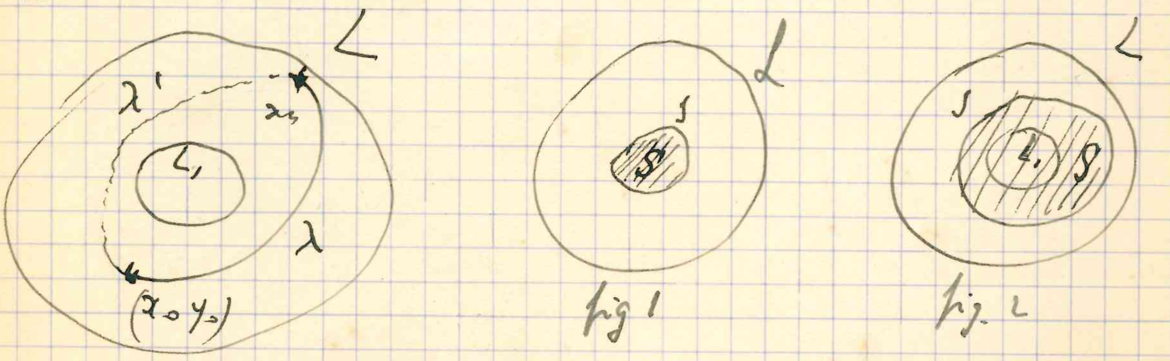
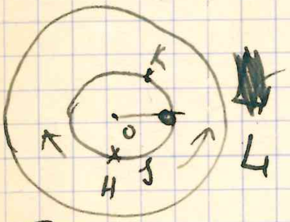


fig 1 fig 2

Tom. en el interior de un circulo L con centro O, y excluyendo O (campo doblemente conexo)

$$U = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad V = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Que sea $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$ podríamos averiguarlo directamente. Pero es inútil pues en $w = \frac{1}{z}$ (fuera de 0) $u = V$, $v = U$ y la igualdad (9) que averiguar coincide con $v_y = u_x$ que es satisfecha. Ahora bien tomando como S un círculo interior a L con centro O tenemos



$$\int U\,dx + V\,dy = \int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy .$$

Tomándola a lo largo de S coordenadas polares, $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, con r constante. La integral vale

$$\int \frac{-r^2\operatorname{sen}\theta\,(-\operatorname{sen}\theta\,d\theta)}{r^2} + \frac{r^2\cos\theta\,(\cos\theta\,d\theta)}{r^2}$$ a lo largo de S

es decir $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$. No logramos cero. La integral por de H a K a la derecha no es la misma que a la izquierda.

A 8-9

Veamos una consecuencia

~~En segundo lugar, interpretación analítica~~ geom.ca de las condiciones de momogeneidad. Imaginemos las ~~familias~~ dos familias de líneas

$$u(x,y) = \text{cont} \qquad v(x,y) = \text{const.}$$

Las (A) (B) expresan que esas familias son ortogonales, es decir que las dos líneas, una por cada familia, que salen de un punto genérico del campoC se cortan a ángulo recto. En efecto, en co-ord.~~as~~ corrientes X,Y las tangentes a las dos líneas que salen del pt.(x,y) tienen ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial u}{\partial y}(Y-y) = 0 \ ; \quad \frac{\partial v}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial v}{\partial y}(Y-y) = 0$$

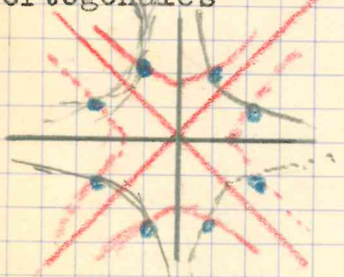
y la condición de ortogonalidad de estas dos rectas es

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

que se cumple como consecuencia de las (A)(B)(basta p e substituir $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$) Así ,tomando f(z)= z tenemosu=x,v=y, y las dos familias de rectas perpendiculares $x = \text{cont.}$ $y = \text{ct}$ Tomandow=z^2 tenemos las dos familias

$$x^2 - y^2 = a \qquad xy = b$$

La primera està constituída por hipérbolas equiláteras que tienen como asíntotos las bisectrices de los ángulos de los ejes; la segunda también por hiperbolas que tienen como asíntotos los ejes. Resulta de lo visto que las dos familias son ortogonales

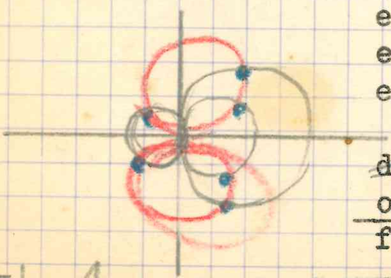


Si tomamos w=1/z, tenemos(p. 15) las dos familias

$$\frac{x}{x^2+y^2} = a, \quad \left(\frac{-y}{x^2+y^2} = \text{cont} \right) \quad \frac{y}{x^2+y^2} = b$$

es decir $a(x^2+y^2) - x = 0 \qquad b(x^2+y^2) - y = 0$

La primera familias está constitúdá por círculos que pasan por el origen y admiten como tangente en Oel eje y ; la segunda.... el eje x .También estas dos familias de cŕculos son ortogonales



De dos familias de líneas ortogonales ~~en estas condiciones~~ se dice que forman un doble sistema ortogonal, o también que cada una de las dos familias está constituída por las trayecto&-

~~p.e. ... se pasa de la ecuación de una hipérbola a la de las asíntotas cambiando el término independiente~~

× Estudiaré (1), pero los resultados podría referirse más generalmente a la serie de potencias en ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ $z - a$ a const.te, z variable

$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots \dots \sum (z-a)$

Entonces tendríamos un círculo con centro $z = \underline{a}$ (en cambio ~~[illegible]~~ en $z = 0$) y todas las mismas propiedades. Es suficiente cambiar $z - a$ en z para pasar del segundo caso al primero.

rias ortogonales de las líneas de la otra familia .

Observación. La propiedad demostrada es vinculada a la circunstancia que cada una de las dos líneas de las dos familias que salen del punto considerado admita en este punto una tangente determinada(de la ecuación de esta tangente nos hemos servido más arriba; y además para que tenga sentido el enunciado es preciso que pueda hablarse de una tangente determinada).Luego en el segundo ejemplo si tomamos el origen, las líneas de las dos familias son $x^2-y^2=0$; $xy=0$ es decir par de...y par de...; y las dos primeras rectas en efecto no son perpendiculares a las dos segundas.Pero esto, como lo dijimos era preveible. Otra observación. En enunciar la propiedad,hemos admitido implícitamente que por el punto(x,y) de C pase una y una sola línea p.e. de la primera familia, y ~~está bien~~ en efecto, es la línea perfectamente determinada

$$u(X,Y) = u(x,y)$$

Esto vale si el punto (x,y) es decir el punto z es un punto del campo C de existencia de la función f.Esto explica una contradicción que podría pensarse de ver en el último ejemplo donde todas las líneas de las dos familias pasan por el origen, es decir por pasa no una,sino infinitas líneas.El hecho se explica porque en la función w= 1/z el punto z=o no pertenece al campo de existencia.

Vuelvo a las funciones anal. Hemos visto que un polinomio en z es fn an. Una generalización extremadamente importante es esta: en cambio de un polinomio en z considero una serie de potencias en z:

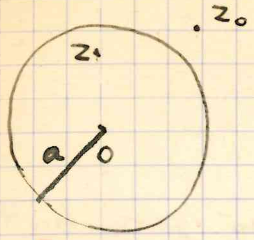
$$(1) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r = \mathfrak{P}(z)$$

donde los coef. son constantes complejas.También esta serie representa una fn. an.ca de z.Pero para poder enunciar de manera exacta el resultado, debemos comprender bien unas particularidades

Cuando se considera una serie de potencias en z como(1) a priori nada se sabe sobre su convergencia,y luego tampoco puede afirmarse que represente una función de z, ni a mayor razón analítica

En primer lugar encontraremos que existe un círculo con centro en el origen tal que en cada punto de su interior (1) converge,en cada punto exterior no converge, mientras que sobre el círculo mismo nada puede decirse.Se incluye el caso del círculo de radio nulo (la serie converge solo en el centro) o infinito(converge en cada punto propio del plano). Ante todos demuestro:

si la serie (1) converge para $z=z_0$ converge absolutamente en



cada punto z tal que sea : $|z| \le |z_0|$, además

~~Antes bien~~, demostraré ~~algo más~~: en las mismas hipótesis, si trazo un círculo cualquiera C con centro en O y radio $a < |z_0|$, la serie (1) converge en todo C absolutamente y uniformemente (es decir para $|z| \le a$)

Recuerdo que una serie convergente se llama absolutamente convergente cuando converge ~~también~~ la sere de ~~&&&~~ los módulos de sus términos: de la convergencia absoluta sigue la convergencia, pero no viceversa. ~~Si, siendo~~ En efecto, siendo

$$u_r = \alpha_r + i\beta_r$$

la serie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

~~&&&&&&&~~ es absolutamente convergente, es decir es convergente la serie

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| \dots$$

de $|\alpha_r| < |u_r|$, y $|\beta_r| < |u_r|$

~~de $|\alpha_r| < |u_r|$~~ ~~siendo~~ ~~sigue~~ se deduce que las serie de ~~con~~ téminos reales

$$\alpha_1 + \alpha_2 \dots \qquad \beta_1 + \beta_2$$

son abs.te convergentes, y luego convergentes, porque como es sabido para una serie a términos reales de la conv.cia absoluta sigue la convergencia. Luego es conv. te $\Sigma(\alpha_r + i\beta_r)$ Pero no viceversa: ya en el caso real puede una serie ser convergente sin serlo abs.te p.ej.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

En Cuanto al término de una serie unif.te convergente en un campo, se aplica al caso de una serie de funciones (de variable real o compleja), y p. e. en caso complejo significa esto Si la serie

$$f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \dots$$

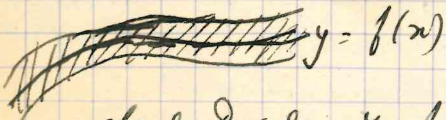
es convergente en un campo C, ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ es decir en cada z de C, esto significa que, fijado de cualquiera ~~vez~~ z en C, y tomado ε arbitrario, existe n_0 tal que

$$|R_n(z)| < \varepsilon \qquad (°)$$

por cada $n > n_0$ (donde R_n es el resto). Pero ~~n_0 depende en general de~~ puede ser que n_0 dependa de z y de ε. Cuando ~~puedo~~ puede encontrarse un n_0 que ~~no~~ dependa sólo de ε, la serie se llama unif.te convergente. Luego

(ahora se varía en un intervalo)

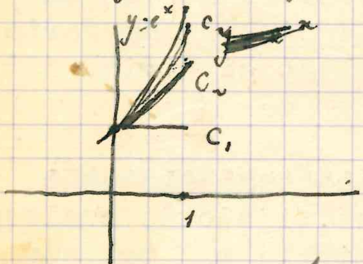
De la misma idéntica manera. En este caso, geométricamente el significado de la convergencia uniforme es esto: dado ε arbitrario si aproximamos ~~las líneas~~ el diagrama $y = f(x)$ con ~~los~~ ~~líneas~~ diagramas $y = s_n(x)$ (siendo f dado por $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$) todos los ~~líneas~~ diagramas aproximantes para n bastante grande son comprendidas en una faja de altitud $\pm\varepsilon$ (en la dirección y) alrededor de $y = f(x)$. (porque la $y = f(x)$ y la $y = s_n(x)$ difieren de $R_n(x)$, y $|R_n(x)| < \varepsilon$ para todos los x)



Tomemos p. e. $y = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ en el intervalo 0-1. Resultará simplicitamente más evidente que la serie es uniformemente convergente. Las líneas aproximantes son

$y = 1$, $y = 1 + x$, $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$
c_1, c_2, c_3

todas ~~más~~ abajo de $y = e^x$. Es intuitivo que llegan a encontrarse en una faja tan ~~sutil~~ angosta como lo queremos.



Vamos ahora a dar en cambio un ejemplo de convergencia no uniforme significa esto: que dado ε arbitrario puede determinarse n_o tal que para cada n mayor de n_0 resulte cumplida (º) para cada z del campo considerado.

Esta noción de convergencia uniforme ya se considera en las series de funciones de variable real x. Consideremos p. es. la serie de funciones

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (\gamma)$$

donde

$$\boxed{u_n(x) = \frac{1}{1+(n-1)x^2} - \frac{1}{1+nx^2}}$$

Entonces

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) + \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+2x^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{1+(n-1)x^2} - \frac{1}{1+nx^2}\right)$$

luego

$$s_n = 1 - \frac{1}{1+nx^2}$$

Luego si $x = 0$, $s_n = 0$, y $f(0) = 0$

Si $x \neq 0$ $f(x) = 1$ $r_n \to 0$

Pues bien, $R_n = R_n(x) = u_{n+1} + \ldots = \frac{1}{1+nx^2}$ (para cada x)

Fijado ε pequeño, para que resulte $R_n(x) < \varepsilon$ es decir $\frac{1}{1+nx^2} < \varepsilon$ es nec y suficiente $1 + nx^2 > \frac{1}{\varepsilon}$; $nx^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$; $nx^2 > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, es decir hay que tomar $\boxed{n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x^2}}$.

Si considero la serie en un intervalo que no contenga (ni siquiera como extremo) $x = 0$, donde sea $|x| > a$ con $a > 0$; $\frac{1}{a^2} > \frac{1}{|x|^2}$: luego basta (para todos los x) tomar

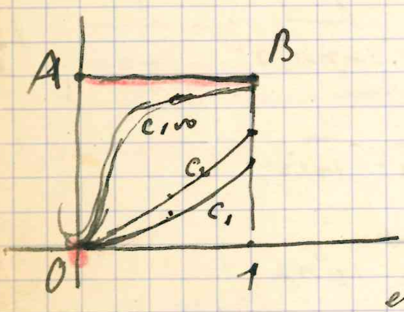
$$n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon a^2} \quad \left(\text{que es} > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon |x|^2}\right).$$

En tal intervalo la serie converge uniformemente. Si en cambio el intervalo contiene 0 (aun sólo como extremo) es imposible encontrar un n tal que resulte

Geométricamente podemos representar las cosas así

Sea p.e. $0 \le x \le 1$.

El diagrama de $y = f(x)$ está ahora constituido por el segmento AB de la figura, ($OA = 1$)



excluido el pt. A que tiene que ser substituido por el punto O.

El 1er diagrama aproximante es

$$y = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

el 2º

$$y = 1 - \frac{1}{1+2x^2} \quad \text{etc.}$$

En el 1er las ordenadas se obtienen restando de 1 una cantidad decreciente que para $x = 0, \ \frac{1}{2}, \ 1$ vale $1, \ \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}, \ \frac{1}{2}$ y queda $y = 0; \ \frac{1}{5}; \ \frac{1}{2}$.

Logro así el 1er diagrama aproximante C_1. En los siguientes $y = 1 - \frac{1}{1+nx^2}$ la cantidad que resto de 1, fijado x, va creciendo, luego el diagrama se desplaza hacia arriba: p.e. C_2 se obtiene restando ~~0~~, $\frac{1}{1+\frac{2}{4}} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ (las varias C_n siempre en 0 son tgtes al eje x pues $\frac{dy}{dx} = \frac{2nx}{(1+nx^2)^2}$ se anula para $x=0$). Para $n=100$ resto de 1:

$$1, \quad \frac{1}{1+\frac{100}{4}} = \frac{1}{26}; \quad \frac{1}{1+100} = \frac{1}{101}$$

Se ve que el diagrama va aproximándose siempre más al de $y = f(x)$ pero tiene el extremo izquierdo fijo en el punto O, así que no puede encerrarse en una faja ~~tal~~ angosta como lo dijimos en pág. 34.

XX correspondiente x_0

(fuera de $x=0$)

$n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{1}{x^2}$ en todo el intervalo, porque como el intervalo contiene x tales que $\frac{1}{x^2}$ es tan grande como queremos, n tendría que ser mayor de un número positivo arbitrario. Luego no existe n tal que $|R_n(x)| < \varepsilon$ en todo el intervalo. En un intervalo que contiene $x=0$ la función no es unif.te convergente

A propósito de series unif.te convergentes de funciones de variable real, recuerdo el teorema siguiente:

Si en un intervalo la serie (γ) es unif.te convergente, y ~~[illegible]~~ existen los $\lim u_r(x)$ cuando $x \to x_0$, $\lim_{x\to x_0}(u_1(x) + u_2(x) + \cdots) = \lim u_1(x) + \lim u_2(x) + \cdots$ En ese $f(x)=0$

Así se explica p. e. el ejemplo que precede ~~sea~~ ~~f(o)~~) para $x=0$, y $fx=1$ para los demás x. Luego

$\lim_{x=0}(u_1(x) + u_2(x) \cdots) = \lim 1 = 1$; $\lim_{x\to 0} u_1 + \lim_{x\to 0} u_2(x) = 0 + 0 \cdots = 0$.

El límite de la serie es distinto de la serie de los límites. Y eso puede ser porque en un intervalo que contenga $x=0$ la serie NO converge uniformemente.

Recuerdo también los teoremas de la derivación e integración por serie (f. de var. real) Si las funciones $u_r(x)$ son derivables, y la serie de las funciones es convergente, y la serie de las derivadas se supone unif.te convergente, entonces puede aplicarse la derivación por serie. En cambio para que se pueda integrar por serie es suficiente que la misma serie de las funciones resulte unif.te convergente.

La convergencia uniforme no es siempre facil de constatar. Hay un caso en que puede asegurarse: el caso de una serie de funciones que llamaré totalmente convergente en un campo, o intervalo. Me refiero p. e. al caso de una serie de funciones de variable compleja z

$$(1) \qquad f_1(z) + f_2(z) + \cdots$$

Llamo la serie totalmente convergente en C si la serie de los valores absolutos $|f_r(z)|$ puede mayorarse en todo C mediante una serie convergente, es decir si en todo C resulta

$$|f_r(z)| \leq M_r$$

donde

$$(2) \qquad M_1 + M_2 + \cdots$$

es convergente

× Agrego (porque nos servirá p. 61) si $\sum f_n(z)$ es ~~[illegible]~~ totalmente convergente en campo C, siendo $f_n = U_n + i V_n$, lo mismo ocurre a $\sum U_n$, $\sum V_n$. En efecto, ~~[illegible]~~ ε ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$$|U_n| \le |U_n + i V_n| = |f_n|$$

el hecho de $\sum |f_n|$ tenga una serie mayorante implica que lo mismo ocurre de $\sum |U_n|$.

Si ~~la~~ serie (1) es totalmente convergente en C, es también absolutamente y unif.te convergente en C (y analog.te en el caso real). En primer lugar la serie de los módulos

$$|f_1(z)| + |f_2(z)| + \cdots$$

es convergente para cada z de C, porque es una serie a términos positivos ordenadamente menores que los corr.s de (2). Luego (1) es ~~totalmente convergente en cada punto~~ absolutamente convergente en cada punto z de C. En segundo lugar, tomado ε arbitrario, siendo (2) convergente, ~~para todo l~~ existe n_0 tal que para cada $n > n_0$

$$M_{n+1} + M_{n+2} \cdots < \varepsilon.$$

Ahora bien para cada z $|f_{n+1}(z)| \leq M_{n+1}$ etc. y luego

$$|f_{n+1}(z) + \cdots| \leq M_{n+1} + \cdots < \varepsilon.$$

es decir para cada z y n > aquel n_0

$$|R_n(z)| < \varepsilon.$$

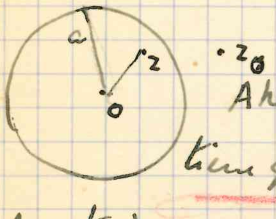
Luego la (1) es unif.te convergente en C

Vuelvo ahora al teorema enunciado ~~al prin de p.~~ 33. Por lo visto, basta demostrar que en C la serie

$$(1) \quad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

converge totalmente, es decir posee una serie mayorante. Ahora bien

$$\cancel{a_0 + a_1 z + \cdots} \qquad \cancel{|a_r z^r| = |a_r|\,|z|^r \leq |a_r|\, a^r = \left|a_r \frac{a}{z_0}\right|}$$



$$|a_r z^r| = \left|a_r \frac{z}{z_0} z_0\right|^r = |a_r z_0^r| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^r.$$

Ahora, siendo convergente en z_0, su término general tiene que tender a cero; luego los valores de $|a_r z_0^r|$ son todos menores de un cierto n.º A (porque tomando ε arbitrario sería por $r > r_0$ $|a_r z_0^r| < \varepsilon$, y si tomo A mayor de ε, y de todos los $|a_r z_0^r|$ para $r \leq r_0$, tengo $|a_r z_0^r| < A$ para todos los r). Luego $|a_r z^r| = \left|a_r z_0^r \left(\frac{z}{z_0}\right)^r\right| <$

$$< A \left|\frac{z}{z_0}\right|^r \leq A \left|\frac{a}{z_0}\right|^r \quad (\text{siendo } |z| \leq a)$$

Entonces si paragamos los términos de (1) con los de

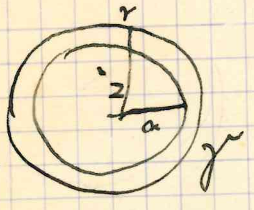
$$(2)\quad A + A\left|\frac{a}{z_0}\right| + A\left|\frac{a}{z_0}\right|^2 - \ldots$$

esta última serie tiene sus términos independientes de z, y resulta mayorante de (1) en todo el círculo C. Además es convergente siendo una serie geométrica de razón $|a/z_0| = a/|z_0| < 1$ porque $a < |z_0|$

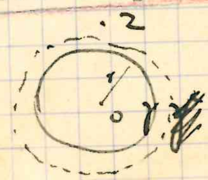
Luego (1) es totalmente convergente en C, etc.

Observación. Podría preguntarse porque en el teorema tomamos $a < |z_0|$ y no $a = |z_0|$. Efectivamente si tomaramos así no podríamos llegar a la conclusión, porque la serie (2), ~~si tomásimos~~ resultaría divergente, y nuestra conclusión dejaría de subsistir.

Podemos ahora definir el círculo de convergencia de una serie de potencias (1), como lo dijimos a p 31. Si (1) converge en todo el plano, se dice ~~che~~ que tiene un círculo de convcia con radio infinito. Si no, considero todos los círculos con centro en O, y sus radios a :más precisamente los valores de a tales que en el interior del cirulo la serie sea convergente. Este conjunto de valores de a es limitado, y tiene límite superior: sea r. Entonces el círculo γ de radio r es el cñirculo de convergencia (y r se llama el radio de convergencia de la serie: en el caso donde esta....se escribe $r = \infty$)



En efecto, si tomo z dentro de γ; como r es el límite superior de los radios de los círculos en cuyo interior (1) converge, puedo encontrar un tal radio a tan proximo a r cuanto lo quiero y en particular mayor de $|z|$. Entonces z resulta interior a un círculo en cuyo interior (1) converge, y luego en z(teor anterior) (1) converge absolutamente. Si en cambio tomo z exterior al círculo γ, la serie no puede converger en z ni siquiera simplemente. En efecto, si convergiera, siempre por el mismo teorema, convergería en cada círculo de radio menor que $|z|$, y podría tomar uno de estos círculos con radio mayor de r, mientras todos los círculos en cuyo interior (1) converge tienen radios no mayores de r c d d



Podemos agregar que en cada círculo interior al círculo de convergencia la serie converge uniformemente, como resulta del teor de p. 31 (podemos también decir totalmente). Luego converge unif^te en cada región cerrada interior al círculo de convergencia (porque ella puede encerrarse en un círculo interior)

X es para un conjunto acotado de infinitos números reales ~~[illegible]~~ (o de puntos de recta / ~~[illegible]~~ plano) el llamado <u>teorema de Bolzano – Weierstrass</u>

En casos particulares puede el radio de convergencia reducirse a cero.p.e. si tomo

$$z+2^2z^2+3^3z^3+\dots = \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$$

la serie no puede convergir para ningún valor de z distinto de o, porque si z es distinto de cero, el término general no tiende a cero:en efecto su módulo

$$|nz|^n$$

apenas $|nz|$ viene a ser mayor de uno, viene a ser la potencia n^a de un número mayor de uno(y tiende a infinito. (A10)

DETERMINACIO N DEL RADIO DE CONVERGENCIA=Teorema de Cauchy-Hadamard. Este teorema mon aprende a determinar efectivamente el radio de convergencia de la serie

(1) $a_0+a_1z+a_2z^2+\dots$

Una sucesión de números reales, y que podemos aquí suponer no negativos(los resultados se extenderían facilmente a este caso, que no nos interesa) $u_1, u_2, u_3, \dots$ puede tender o no tender a un límite,pero siempre tiene lo que se llama el máximo límite(eventualmente infinito),definido de la manera siguiente.El conjunto de los números u_i siempre tiene por lo menos un elemento de acumulación,si, como por ahora lo supongo ,es acotado (superiormente; ya lo es inferiormente).Puede tener varios.La clase de los elementos de acumulación es también acotada(porque si existierano els de ac.n grandes como se quiere,habría también, en su proximidad, elementos del conjunto grandes como se quiere)=Sea λ el límite superior de los els de acumulación.Es sabido que cada clase acotada de números reales tiene un límite superior, no siempre tiene un máximo(a)(p.e. la clase formada por los números (de la clase de los el.s de acumulación de un conjunto

$$1-1,\ 1-\frac{1}{2},\ \dots,\ 1-\frac{1}{n},\ \dots$$

tiene 1 como límite superior,pero no tiene máximo).En ~~este~~ nuestro caso, en cambio, ~~puede~~ demostraré que λ ,límite superior de los els de acumulación, pertenece a la clase y luego es el máximo de los elementos de acumulación: se llama el máximo límite del conjunto de números considerado (que hasta aquí no es preciso sea

(a) porque el límite superior no pertenece necesariamente a la clase Si pertenece a la clase,es su máximo: cfr el ejemplo.

una sucesión, sino puede ser un conjunto K infinito de números reales,acotado superiormente). En efecto,representemos los números del conjunto como puntos de una recta.

~~Si tomo un segmento δ, pequeño como quiero, que tenga su extremo derecho en λ, este segmento tiene que contener~~

El máximo límite ~~es~~ a veces se llama también "límite superior de indeterminación, o de oscilación" (Du Bois Reymond). En ~~alem~~ la Eng. dice
máximo límite = obser limes
límite superior = obere Grenze.
Cauchy parece ha encontrado por primera el concepto de "la plus grande des limites".

El término "límite" tiene muchos significados distintos: p. ej. punto límite ≡ pt. de acumulación. Y a veces también contradiciendo p. e. un conjunto finito tiene un límite superior (= máximo), pero no pts de acumulación = pts límites: en este caso el límite superior no es un pt. límite.

~~Si existiera~~ En efecto: En este caso $\lim u_n = u$. Si existiera otro pt. de acumulación v los infinitos u_n próximos a v no podrían ser próximos a u cuanto se quiera

Si tomo un segmento, pequeño como quiero, s entorno del punto λ , este segmento s necesariamente contiene algun punto de acumulación(tal vez el mismo punto λ ,tal vez otro punto a la izquierda de λ ,siendo λ el límite superior de la clase de los puntos de acumulación),sea m.Por otra parte siendo m punto de acumulación del conjunto dado K, en cada su entorno, p e en el mismo segmento s tienen que estár infinitos puntos del conjunto dado.Luego en el entorno s de pequeño como se quiera siempre tienen que estar infinitos puntos del conjunto dado. Y, por la definición de el.to de acumulación, esto significa precisamente que λ es punto de acumulación del conjunto dado.

No se debe confundir el máximo límite del conjunto K con su límite superior. P.ej. el conjunto formado por los n.os $-3, -2$, x tales que $-1 < x < 1$, 2, 3 tiene 3 como límite superior, pero no como máximo límite. En efecto los el.tos de acumulación como es claro son los n.os x tales que $-1 \leq x \leq 1$ (intervalo cerrado) y el máximo límite es $+1$

En el caso que nos interesa,de una sucesión, el hecho que λ es el máximo límite significa:

1) de cualquiera manera se tome $\ell > \lambda$ (1) todos los números de la sucesión , a partir de un cierto indice son menores de ℓ (porque si hubiese infinitos puntos a la derecha de ℓ esta clase, acotada como la sucesión dada,tendría por el teor Bolzano Weierstrass al menos un punto de acumulación, que sería tal también para la sucesión , y resultaría a la derecha de λ que,en cambio, es el punto de ac.más a la derecha)

2) de cualquiera vez se tome $l < \lambda$ (1) existen infinitos (no necesariamente todos) números de la sucesión mayores de l(porque si no no podría λ ser un element de acumulación de la sucesión dada)

(1) próximo a λ cuanto se quiere.

En el caso donde la sucesión tiende a un límite en el sentido ordenario, esto es también el máximo límite,siendo entonces el único el.to de acumulación. Hay pero,como lo dije la venta que si la sucesión es acotada,el máximo lim, siempre existe

* Más generalmente una sucesión formada por los el.s $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ de dos (o mas) sucesiones cada una de las cuales tenga límite: $a, b, \ldots$, tiene como máx lím. el máximo entre los nº a, b porque los (únicos) el.s de acumulación son precisamente a, b etc

** P.e. para la sucesión

$1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

$\overline{\lim}\, u_n = \infty$

y $\underline{\lim}\, u_n = 0$.

Así la sucesión

$$1-1,\ 2-1,\ 1-\tfrac{1}{2},\ 2-\tfrac{1}{2},\ 1-\tfrac{1}{3},\ 2-\tfrac{1}{3},\ \dots\ 1-\tfrac{1}{n},\ 2-\tfrac{1}{n},\ \dots$$

no tiende a un límite, pero admite 2 como máximo límite.

Escribiré

$$\overline{\lim}\ u_n = \lambda, \quad \text{o también} \quad \max\lim u_n = \lambda$$

Análogamente, si la sucesión es acotada inferiormente, puede definirse un mímimo limite

$$\underline{\lim}\ u_n \quad \text{o} \quad \min\lim u_n.$$

Es el elemento mínimo (nec,te existente) de la clase formada por los elemntos de acumulación.

La definición del máximo límite que dimos vale si la& sucesion es acotada superiormente. En el caso contrario, esto significa que de cualquiera manera se tome un número N, grande como se quiere, siempre existen en la sucesión números mayores de N. En este caso se dice que el máximo límite es infinito y se escribe

$$\overline{\lim}\ u_n = \infty$$

De esta manera siempre existe el $\overline{\lim}$ (máximo), sea la sucesión acotada o no. Ante el mínimo límite.

Esto siendo bien entendido, el teor. de Cauchy-Hadamard dxpresa que el radio de convergencia de la serie

$$(1) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

es el número 1/L recíproco de

$$L = \cancel{\max}\ \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = \max\lim\left(|a_1|, \sqrt{|a_2|}, \sqrt[3]{|a_3|}, \dots\right)$$

donde se entiende que si L resul[illegible] cero, como radio de convergencia se debe tomar R= ∞, es decir la serie converge en todo el plano; y si L resulta infinito, se debe tomar R=o

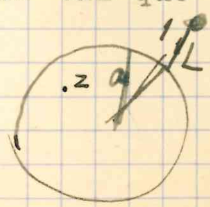
Para demostrarlo, supongo por ahora L no nula ni infinito. Debo probar:

1) si $|z| < \frac{1}{L}$, la serie en el punto z converge;

2) si $|z| > \frac{1}{L}$, la serie en el punto z ~~diverge.~~ no converge.

Empiezo por 1). Tomo un número a entre $|z|$ y 1/L, es decir tal que

$$|z| < a < \frac{1}{L}$$



Como $\frac{1}{a} > L$ la propiedad 1) p. 45 nos dice que en la sucesión

$$|a_1|,\ \sqrt{|a_2|},\ \sqrt[3]{|a_3|},\ \dots$$

solo un n.º finito de el.s son $> \frac{1}{a}$, luego a partir de un cierto sitio son todos $\leq \frac{1}{a}$; es decir existe n_0 tal que para $n > n_0$

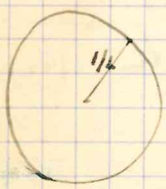
siempre (por todos los n) $\sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{a}$ [mejor siempre $<$]

y por consiguiente

$$|a_n z^n| = \left(\sqrt[n]{|a_n|}\,|z|\right)^n \le \left|\frac{z}{a}\right|^n$$

Luego la serie ~~(1) admite como~~ formada por los módulos de los el.s de (1) admite (a partir de un cierto n) ~~como mayorante~~ $\sum_{n=1} \left|\frac{z}{a}\right|^n$, serie geom. con razón <1, y luego convergente. Por lo tanto (1) es convergente (absolutamente) en z.

Paso a 2). $|z| > \frac{1}{L}$. Ahora por la propiedad 2) p. 45 aplicada a $\frac{1}{|z|} < L$, existen infinitos n (no necesariamente todos) tales que



$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|}$$

es decir

$$\sqrt[n]{|a_n|}\,|z| > 1, \quad \text{y luego} \quad |a_n z^n| > 1.$$

Luego en z (1) no converge, porque si no tendría que ser el límite de su término general (y por lo tanto también de su módulo) igual a cero, en contradicción con la última desigualdad.

La dm. se extiende fácilmente a los casos $L = 0$, $L = \infty$.

Si $L = 0$, razono más o menos como en 1). Tomo z cualquiera, ~~y a > 0 cualquiera~~ y $a > |z|$ [como antes] ~~[illegible]~~ $= 0$ ~~[illegible]~~ Siendo ahora 0 el max lim de la sucesión, aplicando 1) p. 45, a partir de n_0 tenemos para cada n $\sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{a}$ ~~[illegible]~~

y luego $|a_n z^n| = \left|\sqrt[n]{|a_n|}\, z\right|^n \le \left|\frac{z}{a}\right|^n$ y continúa como en 1). Luego

Como en el caso real, en el círculo de convergencia la serie vale

$$\frac{1}{1-z} \qquad \text{(el mismo pasaje al límite)}$$

Más general: es 1 el radio de convergencia de cualquier serie de potencias de z cuyos coeficientes sean todos iguales a 0 o 1(1)

c) Si $\lim a_n = 1$, luego $\lim |a_n| = 1$, $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ y radio 1. Así p.e.

$$\frac{1}{2} z + \frac{2}{3} z^2 \dots + \frac{n}{n+1} z^n + \dots$$ tiene radio uno

d) $\sum n^n z^n$ (p. 43) da $\sqrt[n]{|a_n|} = n$, $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ radio nulo, como sabemos

e) $\sum \frac{z^n}{n^n}$ límite nulo, radio infinito

(1) p.e. $1+z+z^4+z^6+z^{17}+\dots$

la serie converge para cada z.

Si $L = \infty$, pruebo (mas o menos como en a)) que para cada z la serie no converge. Siendo max lim $\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, esto significa que la sucesión no es acotada superiormente, esto es, de cualquier vez se tome un nº positivo p. ej. $\frac{1}{|z|}$, existen infinitos (no nec.te todos) índices n tales que

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|} \quad ; \quad \left|\sqrt[n]{|a_n|}\, z\right| > 1$$

$|a_n z^n| > 1$ etc. y la serie diverge. c. d. d.

Ejemplos a) $1 + z + z^2 + z^3 + \dots$

todas las $a_n = 1$, $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$, Ahora existe lim $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ y luego (p. 45) max lim $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$. radio de conv. $= 1$.

b) $1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots$

Sucesión $1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots$ max lim $= 1$, min lim $= 1$. radio $= 1$.

Antes de indicar otros ejemplos pruebo el

Lema Siendo $u_1, u_2 \dots$ una sucesión de números positivos, si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, existe también $\lim \sqrt[n]{u_n}$ y es también $=$ él.

El Lema no es invertible: puede existir el 2º límite y no el primero: p. ej. (1, a, ab, a^2b, a^2b^2, a^3b^2, a^3b^3). las razones $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ vale alternativamente a y b y luego si supongo $a \neq b$ (a, b nº positivos) no tiende a ningún límite.

En cambio siendo

$$u_{2r} = a^r b^r \qquad u_{2r+1} = a^{r+1} b^r \qquad \text{tenemos}$$

$$\sqrt[2r]{u_{2r}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[2r+1]{u_{2r+1}} = a^{\frac{r+1}{2r+1}}\, b^{\frac{r}{2r+1}}$$

La sucesión de (todos) los exponentes de a tiende a $\frac{1}{2}$, ídem. para b. Luego

* y la suma es $-\lg(1+z)$ como resultará de la $\int$ de la aplicación en el caso complejo que veremos más adelante, y del desarrollo en serie de Taylor. que también veremos más adelante.

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}.$$

Del lema ~~[illegible]~~ se deduce obviamente que si en la serie

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

existe $\lim_{n=\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, su recíproco es el radio de convergencia (con las mismas convenciones de antes cuanto a los casos donde el límite es nulo o infinito). Así p.e. en la serie

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \qquad \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} = 0$$

radio de convergencia infinito. Es la serie mediante la cual se define e^z en el campo complejo.

El caso $\sum z^n$ ya tratado sigue de nuevo. (En cambio la regla no serviría sin más para $1 + z^2 + z^4$)

En $z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}$. $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = 1$

Radio de convergencia 1.

En $\sum n! z^n$ $\qquad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = n = \infty$

radio de convergencia nulo.

Si tomo $1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \dots$

la sucesión $\sqrt[n]{|a_n|}$ está formada alternando la sucesión $0, 0, 0, \dots$ que tiende a cero, con la $\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$ para n par; ésta está contenida en la misma sucesión para n par y e impar que tiende a cero (caso de e^z) y luego tiende a cero. Por consiguiente ~~[illegible]~~ $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, y radio infinito. Mediante tal serie puede definirse $\cos z$ para z complejo (en todo el plano)

Análogamente –

para

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots$$

en todo el plano complejo

Tenemos todavía que demostrar el lema. Sea $u_1, u_2 \dots$ la sucesión y $u = \lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Sigue que tomado ε positivo arbitrario, a partir de un índice n será

$$u-\varepsilon \qquad u \qquad u+\varepsilon$$

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - u\right| < \varepsilon$ es decir

$$u - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < u + \varepsilon$$

A partir; luego también

$$u - \varepsilon < \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < u + \varepsilon$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u - \varepsilon < \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} < u + \varepsilon$$

Obsn.- La dem. sirve para $u \neq 0$. Si $u = 0$, ~~como~~ se parte de $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon$, etc. deduciendo $0 < u_{n+p}^{\frac{1}{n+p}} < u_n^{\frac{1}{n+p}} \varepsilon^{\frac{p}{n+p}}$. El último término tiende a ε. Sigue $0 < u_{n+p}^{\frac{1}{n+p}} < 2\varepsilon$, etc. etc.

donde p es entero positivo arbitrario. Multiplicando

$$(u-\varepsilon)^p < \frac{u_{n+p}}{u_n} < (u+\varepsilon)^p \qquad \text{(para todo los } p\text{)}$$

Sacando la raíz de índice $n+p$, después de haber multiplicado por u_n, sigue

$$u_n^{\frac{1}{n+p}} (u-\varepsilon)^{\frac{p}{n+p}} < u_{n+p}^{\frac{1}{n+p}} < u_n^{\frac{1}{n+p}} (u+\varepsilon)^{\frac{p}{n+p}}$$

Hagamos crecer p indefinidamente. En el primer término: el 1er factor, ~~raíz de~~ potencia de $u_n > 0$ con exponente que tiende a cero, tiende a 1, el segundo factor, potencia de $u-\varepsilon$ con exponente que tiende a 1, tiende a $u-\varepsilon$; luego el primer término cuando (n, ε quedando constantes) p tiende a ∞ tiende a $u-\varepsilon$. El tercer término, análogamente tiende a $u+\varepsilon$. Volviendo al 1er término, el hecho que tienda a $u-\varepsilon$ implica que para p bastante grande tenga de $u-\varepsilon$ diferencia < de

El Lema tiene interés por sí.– Cuanto al resultado que si $\lim_{n=\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ el radio de convergencia es ρ, puede verse directamente así: Si $|z| < \rho$ la serie de términos positivos $\sum |a_n||z|^n$ es tal que el lim. de un término al precedente es $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| = \frac{|z|}{\rho} < 1$.– Si $|z| > \rho$ el mismo límite es > 1. Luego en los dos casos resp.te la serie de los valores absolutos converge o diverge; ~~la serie~~. Luego si $|z| < \rho$, z es interior al círculo de convergencia. Si $|z| > \rho$ podría subsistir la duda que la serie converge simplemente: pero entonces tomando z' con $|z| > |z'| > \rho$, tendría que converger absolutamente en z' ~~[illegible]~~, mientras no converge absolutam.

una cantidad prefijada, p.ej. de ε, y luego estará entre $u-2\varepsilon$ y u, y es $> u-2\varepsilon$. Así el 3er término para todos los p bastante grandes es $< u+2\varepsilon$. Luego para todos los p bastante grandes

$$u-2\varepsilon < u_{n+p}^{\frac{1}{n+p}} < u+2\varepsilon$$

Luego puesto $m = n+p$ concluyo que dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, para todos los m bastante grandes

$$u-2\varepsilon < \sqrt[m]{u_m} < u+2\varepsilon$$

es decir

$$\left|\sqrt[m]{u_m} - u\right| < 2\varepsilon$$

lo que prueba

$$\lim \sqrt[m]{u_m} = u \qquad \text{c.q.d.}$$

~~Tomemos~~ Retomemos ahora el resultado p. 33, 41) según el cual una serie de potencias converge en el interior de su círculo de convergencia. Luego es una función de z en este campo. Veremos ahora que es una función analítica. En primer lugar, junto con

$$(1) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

considero la nueva serie obtenida derivando término a término

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 \dots$$

y pruebo que la serie (2) tiene el mismo radio de convergencia que la serie (1). En efecto para determinar el segundo radio ~~tengo que considerar~~ puedo considerar ~~(multiplicando~~ $\cancel{L' = \max \lim \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}}$ (multiplicando por z) la serie

$$a_1 z + 2a_2 z^2 + 3a_3 z^3 + \dots$$

también desde $\lim_{n=\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

Por consiguiente

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_0^{\infty} (b_n + i c_n)(U^{(n)} + i V^{(n)})$$

$$f(z) = \sum_0^{\infty} (b_n U^n - c_n V^n) + i \sum_0^{\infty} (c_n U^n + b_n V^n)$$

$$= u(xy) + i\, v(xy)$$

donde $u = \sum (b_n U^n - c_n V^n)$; $v = \sum (c_n U^n + b_n V^n)$

~~En efecto: sea u …~~

Dado ε arbitrario luego para todos los n (bastante grandes) $|1-\alpha_n| < \varepsilon$ y para infinitos n $|u-u_n| < \varepsilon$, si u es el[t] de ac.[n] de la sucesión u_i.
Luego para infinitos n $|u - \alpha_n u_n| = |u - u_n + u_n - \alpha_n u_n| \leq |u-u_n| + |1-\alpha_n||u_n| \leq \varepsilon + |1-\alpha_n| K$ ~~…~~
siendo K un n° positivo mayor de todos los $|u_n|$ considerando
Tomo ahora estos n bastante grandes para que $|1-\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{K}$
Entonces $|u - \alpha_n u_n| < 2\varepsilon$.

y determinar $L' = \max \lim \sqrt[n]{n|a_n|}$. Pruebo que no difiere de $L = \max \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ y entonces el teorema de Cauchy-Hadamard lleva sin otro a la conclusión. Observo que

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

en efecto

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{n} = 0 \quad \text{es decir} \quad \lim_{n=\infty} \log n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n=\infty} \log \sqrt[n]{n} = 0$$

Por lo tanto

$\lim \sqrt[n]{n} = \lim e^{\log \sqrt[n]{n}} =$ lim. de sucesión de potencias de e donde el exponente tiende a 0 (e^x función continua) es $e^0 = 1$. ~~Ahora es inútil~~ Luego llamando $a_1 a_2 \ldots$ la 1ª sucesión y $\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2 \ldots$ la 2ª tengo $\lim \alpha_n = 1$. Es intuitivo y puede demostrarse que las dos sucesiones tengan los mismos el.s de acumulación, y luego el mismo max lim. Luego $L' = L$. c.d.d.

Demuestro ahora: la función de z dada, en el interior del círculo de convergencia por su desarrollo en serie de potencias es derivable, y la derivada se obtiene derivando termino a termino. ~~&&&&~~ Aquella función de z, f(z) es una función analítica.

Sea

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \qquad (1)$$

y

$$\varphi(z) = a_1 + 2a_2 z \qquad (2)$$

También esta posición tiene sentido porque, como lo sabemos la serie a segundo miembro es convergente en el círculo considerado (último teorema). Pongo, separando real e imaginario

$a_n = b_n + i c_n \qquad z^n = U^{(n)}(xy) + i V^{(n)}(xy)$ XX $(n = 0, 1 \ldots$

Entonces en la segunda serie el coef. de a_n es decir la derivada de z^n, esto es $n z^{n-1}$, será(p. 17)

$$\frac{\partial U^n}{\partial x} + i \frac{\partial V^n}{\partial x} \quad \text{o también} \quad \frac{\partial V^n}{\partial y} - i \frac{\partial U^n}{\partial y} \qquad (*)$$

(Véanse pensamientp. 38)

× Además, resulta de lo visto que existen también todas las derivadas sucesivas, siempre con el mismo círculo de convergencia

d. la 1ª manera

Luego $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + i c_n)\left(\frac{\partial U^n}{\partial x} + i\frac{\partial V^n}{\partial x}\right) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(b_n \frac{\partial U^n}{\partial x} - c_n\frac{\partial V^n}{\partial x}\right) + i\sum_{0}^{\infty}\left(c_n\frac{\partial U^n}{\partial x} + b_n\frac{\partial V^n}{\partial x}\right)$$

La parte real aparece como $\frac{\partial u}{\partial x}$ (p. 58) si es permitido calcular $\frac{\partial u}{\partial x}$ derivando término a término; y lo es porque ~~como~~ la serie (2) converge, como función de z, totalmente ~~uniformemente~~ (p.41) en cada círculo interior al círculo de convergencia. Luego lo mismo ocurre de la serie formada por las partes p. e. (p.3.) reales de sus términos. Luego (p. 37)(1) podemos escribir (porque la conv. total implica la uniforme)

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_n (b_n U^n - c_n V^n) = \sum_n\left(b_n\frac{\partial U^n}{\partial x} - c_n\frac{\partial V^n}{\partial x}\right)$$

~~Sea~~ Análog^te ~~las partes~~ coef. del imag.

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum(c_n U^n + b_n V^n) = \sum\left(c_n\frac{\partial U^n}{\partial x} + b_n\frac{\partial V^n}{\partial x}\right)$$

Por consig^t. resulta

$$\varphi(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Si nos sirviéramos de (*) concluiríamos que

$$\boxed{\varphi(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}}$$

Comparando $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$.

Luego $u+iv$ es decir $f(z)$ satisface a las condiciones de Riemann y luego es derivable. Y su derivada (p. 17) sabemos $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ es decir la misma $\varphi(z)$ c.q.d.

~~Para llegar a la~~ Y está bien que f es analítica, también quería la continuidad de f' pero $f' = \varphi$, serie de potencias es derivable y luego continua. X

(1) derivación por serie

Si la constante es $-k^2$ luego.

$$\varphi = (a \operatorname{sen} kx + b \cos kx)(c\, e^{ky} + d\, e^{-ky}) \qquad (\gamma')$$

análoga a γ p. 65 excepto por el intercambio de x, y

Logramos así una clase muy vasta de funciones analíticas, todas
.as definidas por un desarrollo en serie de potencias.Como lo vere
nos, se obtienen así, substancialmente,todas la funciones analític
.Existen en la teoría de las funciones analíticas dos puntos
le vista: el de ~~Ca~~ Riemann, según el cual se parte de la hipotesis
que exista f´, si queremos continua, es decir de las condiciones
le monogeneidad. El de Weierstrass, en cambio, parte de los desarr
ollos en serie de potencias.Hemos visto ahora que de la segunda
lefinición sigue la primera.Veremos después que de la primera si
gue la segunda, así que en realidad los dos puntos de vista vienen
a identificarse. vea p. 65 fin a p. 66

Naturalmente logramos así también nuevos ejemplos de funciones
armónicas, p. es. tales serán la parte real y el coef del img de
e^z.Ahora

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

Mas e^{iy} ~~...~~ vale $\cos y + i \operatorname{sen} y$ ~~...~~ luego $e^z = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$.

Luego

$u = e^x \cos y, \qquad v = e^x \operatorname{sen} y$

son funciones armónicas conjugadas. Verifico por $\Delta_2 \varphi$
$= e^x \cos y - e^x \cos y = 0$. Va bien.

Por otro lado, como se hace a menudo, si buscamos las soluciones de

$$\Delta_2 \varphi = 0$$

de $U = U(x),\ V = V(y)$

poniendo $\varphi = UV$, tenemos

$$U''V + V''U = 0$$

es decir si $\varphi \neq 0$ (así que $U \neq 0,\ V \neq 0$)

$$\frac{U''}{U} = -\frac{V''}{V}$$

El valor común tiene que no depender de u (como el 1° miembro) ni de v (como el 1°). Es una constante. Si es p. e

 Si applica qui p. 68; non importa

Ant. $\boxed{ch\, z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}}$; $sh\, z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$

Forma $ch^2 z - sh^2 z$ obtengo $\frac{1}{4} \cdot 4 e^{z} e^{-z} = 1$

Luego $\boxed{ch^2 z - sh^2 z = 1}$ válida en el campo complejo

que explica el término funciones hiperbólicas. Ant. se verifica $\boxed{\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1}$

Las fórmulas de Euler que valen para z complejo cualquiera. También los teor.s de adición de e^{z}, sen z, cos z valen también para z cplejo. Como lo diré ~~[illegible]~~ a continuación ahora mismo.

y también

$ch\, z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!}$ = cos ip. de z

$sh\, z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}$ - sen ip. de z

(~~[illegible]~~ $sh\, z + ch\, z = e^{z}$; $\boxed{\begin{aligned} ch\, z &= \cos iz \\ sh\, z &= \frac{1}{i} \operatorname{sen} iz \end{aligned}}$

Añado unas obs.s elementales

Además los desarrollos en serie dan ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ para complejo cualquiera

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} \dots = \cos z + i \operatorname{sen} z$$

Luego por z complejo $\boxed{e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z}$ [cos z no es que la parte real]

y naturalmente como caso particular también por z real vale esta fórmula. ~~También~~ De ello se saca $e^{-iz} = \cos(-z) + i \operatorname{sen}(-z) = \cos z - i \operatorname{sen} z$; y ∴ $\boxed{\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \; ; \; \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}$

positiva $= k^2$ luego

$$U'' = k^2 U \qquad V'' = -k^2 V$$

ec. dif. lin. c. coef. constantes con la solución fundamental e^{kx}, e^{-kx} y $\operatorname{sen} ky, \cos ky$. Luego integral general

$$a e^{kx} + b e^{-kx}, \qquad c \operatorname{sen} ky + d \cos ky.$$

y la solución $\varphi = UV$ es

$$\varphi = (a e^{kx} + b e^{-kx})(c \operatorname{sen} ky + d \cos ky) \qquad (\gamma)$$

donde $k\ a\ b\ c\ d$ son constantes arbitrarias. Las que indicamos antes son casos particulares. Si $k=0$ $\varphi = (ax+b)(cy+d)$ sigue p. 69

~~Si tomamos z cos z = cos(x+iy)~~

de p. 63. ~~Así~~ Todas las f^{nes} an.^{s} resultan definidas p.ej. con lo dicho p.53 e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$. Mediante Observamos que

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

como resulta de la regla del producto de dos series absolutamente convergentes. p.68 En particular obtenemos que

$$\boxed{e^{x+iy} = e^x e^{iy}}$$

Ahora $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ p.65 (~~resulta del desarrollo en serie de potencias~~) luego $\boxed{e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)}$

Además observo que las fórmulas de adición de sen, cos valen también en el campo complejo

$$\operatorname{sen}(z_1+z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$$

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$$

P.e. la primera se verifica así

$$\operatorname{sen}(z_1+z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \frac{e^{iz_1} e^{iz_2} - e^{-iz_1} e^{-iz_2}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2i}\left[(\cos z_1 + i \operatorname{sen} z_1)(\cos z_2 + i \operatorname{sen} z_2) - (\cos z_1 - i \operatorname{sen} z_1)(\cos z_2 - i \operatorname{sen} z_2)\right] =$$

Para las funciones hiperbólicas se verifican análogamente los teoremas de adición

sh~~(x+y)~~
$$\boxed{\begin{aligned} sh(z_1+z_2) &= sh\, z_1\, ch\, z_2 + sh\, z_2\, ch\, z_1 \\ ch(z_1+z_2) &= ch\, z_1\, ch\, z_2 + sh\, z_1\, sh\, z_2 \end{aligned}}$$

(vuélvase a p.63]

Ceros de e^z, sen z, cos z, sh z, ch z.

1) e^z no tiene ceros ($z = x+iy$; $e^z = e^x e^{iy}$ tiene módulo $e^x \neq 0$)

sen z tiene los ceros reales conocidos $k\pi$. No tiene otros.
En efecto $z = x+iy$; $\text{sen}\, z = \text{sen}\, x\, ch\, y + i \cos x\, sh\, y$. Si es nulo, la parte real da $\text{sen}\, x = 0$ (porque $ch\, y = 1 + \frac{y^2}{2!} + \ldots \geq 1$ siendo y real). El imag da $\cos x\, sh\, y = 0$ es decir (siendo $\cos x \neq 0$ porque ya $\text{sen}\, x = 0$) $sh\, y = 0$ es decir $y = 0$ (porque $sh\, y = y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} = y\left(1 + \frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} \ldots\right)$ que para y real no nulo no se anula). Luego $z = x + i\cancel{y}$, y se encuentran las soluciones conocidas.

cos z Puede deducirse de sen z, pues $\cos z = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$. Luego los ceros reales $\ldots -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \ldots$ y no otros

sh z (se deducen de $sh\, z = \frac{1}{i} \text{sen}\, iz$; $\text{sen}\, iz = 0 \ldots$) $-i\pi, 0, i\pi, 2i\pi \ldots$

ch z (analog.te de $ch\, z = \cos iz$) ceros $-i\frac{\pi}{2}, \cancel{0}, i\frac{\pi}{2}$, ~~\ldots~~

$$= \frac{1}{2i}\{\cancel{\cos z_1 \cos z_2} - \cancel{\operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2} - \cancel{\cos z_1 \cos z_2} + \cancel{\operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2}$$
$$+ i[\operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2 + \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2]\}$$

$$= \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2 \qquad \text{c.q.d.}$$

sigue de p. 65. Cuanto a $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+iy)$, para obtener las partes real e imag. desarrollo según la fórmula de adición.

$$\boxed{\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cos iy + \cos x \operatorname{sen} iy = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y}$$

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} iy \quad \text{Luego}$$

$$\boxed{\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y}$$

Las ~~fu~~ funciones armónicas así logradas son todas productos $U(x)\,V(y)$. luego tienen que ser comprendidas en (γ) o (γ') p. 6?. En efecto p. ej.

$$\operatorname{sen} x \operatorname{ch} y = \operatorname{sen} x \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} \quad \text{que es caso de } (\gamma)$$

Añado unas observaciones sobre la función

log z

considerada como función de la variable compleja z, lo que es po
sible,como lo explico.Pero ahora las cosa son un poco menos senc
las que en los ejemplos que conocemos.Ahora no podemos pensar en
el mismo procedimiento,es decir partir de un desarrollo de log z
en serie do potencias de z,y además válido en todo el plano; por
por z=o,el log no toma una valor finito, y por consiguiente aque
la serie no puede existir. Defino log z así.Parto de z no nulo,
que escribo en forma trigonométriea

$$z = x+iy = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) = \rho e^{i\varphi} \qquad (1)$$

donde como lo sabemos(p 3)

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} \quad (\text{si } x \neq 0) \; y$$

de p 65 En effet

$$e^{z_1} = 1 + z_1 + \frac{z_1^2}{2!} \cdots + \frac{z_1^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{z_2} = 1 + z_2 + \frac{z_2^2}{2!} \qquad + \frac{z_2^n}{n!} \cdots$$

$$e^{z_1} e^{z_2} = 1 + (z_1 + z_2) + \frac{1}{2!}(z_1^2 + 2 z_1 z_2 + z_2^2) + \cdots +$$

$$\cancel{\frac{1}{n!}(z_1^n + \cdots z_1^{n-1} z_2 \cdots + \cdots z_2^{r} z_1^{n-r}} + \frac{}{(n-r)!\, r!} \cdots + \cancel{z_2^n} \cdots +$$

$$\cancel{= 1 + (z_1 + z_2) + \frac{1}{2!}(z_1 + z_2)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(z_1 + z_2)^n + \cdots}$$

$$\cancel{= e^{z_1 + z_2}}$$

$$+ \left(\frac{z_1^n}{n!} + \frac{z_1^{n-1} z_2}{(n-1)!\,1!} + \cdots + \frac{z_1^{n-r} z_2^r}{(n-r)!\,r!} + \cdots + \frac{z_2^n}{n!} \right) + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(z_1^n + \frac{n!}{(n-1)!\,1!} z_1^{n-1} z_2 + \cdots + \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \cdots + z_2^n \right)$$

$$= 1 + (z_1 + z_2) + \cdots = e^{z_1 + z_2}.$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

φ es determinado solo a menos de múltiplos de 2π. Defino en base a (1)

$$\boxed{\log z = \log\rho + i\varphi}$$

donde el segundo miembro tiene sentido para cada z no nulo.La función así definida satisface a las condiciones de monogeneidad.En efecto

$$u = \log\rho = \log\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2);\quad v = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

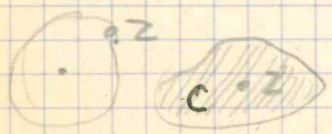
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

y las condiciones de monogeneidad son satisfechas. La derivada es

$$\boxed{\frac{d\log z}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}}$$

como en el caso real. La derivada $\frac{1}{z}$ es continua, fuera del origen.

Todo esto está bien.Pero la función log z NO es uniforme: en efecto en su definición el coeficiente del imaginario φ es solo determinado a menos de múltiplos de 2π .En cambio, podemos considerar log z como función uniforme de z si limitamos el campo de variabilidad de z de la manera siguiente.Si tomo todo el plano, y parto de una posición de z puedo



mover el punto z con continuidad hasta que vuelva a su posición inicial de manera que el valor de φ ,deducido por continuidad haya variado de 2π (si hago un giro alrededor del origen).Esto explica que $\log z$ no sea una función uniforme.Pero se dejo variar z en un campo que no permita de hacer un giro alrededor del origen, es claro que en el interior de este campo pueda tomarse una determinación única de φ .Se tratará en substancia de un campo simplemente conexo,que no contenga el origen en su interior. Así log z viene a ser una función uniforme. Que, en todo el plano no pueda w= logz ser uniforme se explica también así. Decir, según nuestra definición que

$$w = \log z = \log\rho + i\varphi \qquad (1)$$

equivale a decir que

$$e^w = z \qquad (2)$$

porque de (1) sigue $e^w = e^{\log\rho + i\varphi} = e^{\log\rho}e^{i\varphi} = \rho e^{i\varphi} = z$, e.d. (2)
y viceversa de (2) sigue (1) porque puesto $w = u+iv$ luego
$e^{u+iv} = \rho e^{i\varphi}$. Los dos miembros, números complejos iguales, tienen que tener el mismo módulo y argumento. Luego
$e^u = \rho$, $v \equiv \varphi \ (\text{mod } 2\pi)$ [módulo], es decir $u = \log\rho$, $v = \varphi$ (arg...)
e.d. $w = \log\rho + i\varphi$ e.d. (1). Ahora bien la función exponencial tiene el período $2\pi i$ $(e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\ldots) = e^z)$: luego aplicando a e^w tengo

$$\ldots = e^w = e^{w+2\pi i} = \ldots$$

Si w e z satisfacen (2), lo mismo vale de $(w+2\pi i, z)$ $(w+4\pi i, z)$ etc: luego w no puede ser función uniforme de z.

A pesar de estas complicaciones queda el hecho que, como lo dijimos

$$\log\rho = \log\sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

son funciones armónicas conjugadas (satisfacen a $\Delta\varphi = 0$)

Según p. 29 las líneas u= const., v= const. tienen que formar un sistema doble ortogonal; y así es(círculos con el cemtro en O, y rectas por O .

SERIE DE POTENCIAS CONSIDERADAS SOBRE EL CIRCULO DE CONV= En el interior la serie converge,&&& en el exterior no converge. Sobre

72

p.ch. $\sum \frac{n}{n+1} z^n$

$$\lim \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \lim \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1.$$

el mismo círculo de convergencia pueden ocurrir circunstancias distintas.

La serie

$$1+z+z^2+\cdots$$

tiene 1 como radio de convergencia(p 51).En este caso, de cualquiera manera yo tome un punto z sobre el círculo de convergencia, nunca la serie converge.En efecto, para cada uno de tales puntos z siempre $|z|=1$.Luego no puede ser

$$\lim_{n=\infty} z^n = 0$$

porque tendría que ser también

$$\lim_{n=\infty} |z|^n = 0$$

mientras $|z|=1$, y luego el último límite considerado es 1,y no cero.

Est ejemplo puede generalizarse así.Si tomo

$$a_0+a_1z+a_2z^2 \qquad \text{que no sea } \lim a_n = 0$$

donde supongo todos los ~~[illegible]~~ y además sea:

$$\lim_{n=\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$$

sigue (p.53) que el radio de convergencia es 1.También ahora no puede la serie converger para ningún punto z tal que sea

$$|z| = 1$$

porque tendría que ser

$$\lim_{n=\infty} |a_n z^n| = 0 \quad \text{es decir} \quad \lim_{n=\infty} |a_n| = 0.$$

~~mientras este límite~~ contra las hipótesis.

En cambio, tomo ahora

$$z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3} \qquad . \qquad r=1 \ (p. 53)$$

y pruebo que converge en todos los pts $|z|=1$, excluido $z=1$.
Que no converge por $z=1$ es claro (serie armónica). Estudio un otro caso algo más general: (podríamos suponer sólo (a partir de cierto n)

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots \text{ con coeficientes } a_n \text{ reales, } >0, \text{ decrecientes}$$

y además ~~[illegible]~~ los coef

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0 \qquad \cancel{\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{}}$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1. \qquad \text{(abarca el ejemplo de antes)}$$

(el radio es 1, claro)

y punto: la serie converge en cada punto del círculo de convergencia exceptuado evidentemente $z=1$.

Supongamos $|z|=1$, $z \neq 1$ es decir $z = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$ donde φ no es múltiplo de 2π. En z la serie vale.

$a_0 + a_1(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) + a_2(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi) + \dots\dots$

Consideremos la parte real es decir (dejando a_0)

$S)$ $\quad a_1\cos\varphi + a_2\cos 2\varphi + \dots\dots$

Tengamos la suma de los primeros n términos S_n:

$$S_n = a_1\cos\varphi + \dots \qquad + a_n \operatorname{sen} n\varphi$$

Multiplicamos por $2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}$ y recordemos ~~$2\operatorname{sen}\alpha$~~.

$$2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \cancel{\operatorname{sen}}$$
$$= \operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\beta-\alpha)$$

luego.

$$2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\, S_n = a_1\left[\operatorname{sen}\frac{3\varphi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right] + a_2\left[\operatorname{sen}\frac{5\varphi}{2} - \operatorname{sen}\frac{3\varphi}{2}\right] + \dots + a_n\left[\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}\varphi - \operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\varphi\right]$$

$$= -a_1\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} + (a_1-a_2)\operatorname{sen}\frac{3\varphi}{2} + (a_2-a_3)\operatorname{sen}\frac{5\varphi}{2} + \dots + (a_{n-1}-a_n)\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\varphi + a_n \operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}\varphi$$

Ahora la serie

(S') $\quad -a_1 + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_n) + \dots$

con términos positivos (a partir del segundo ~~primer punto~~) tiene la suma S'_n de los primeros n términos $= -a_n$, y luego $\lim S'_n = \lim a_n = 0$. Por consiguiente (S') converge

Por consiguiente la serie

$$\Sigma) \cdot -a_1 \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} + (a_1 - a_2)\operatorname{sen}\frac{3\varphi}{2} \cdots + (a_{n-1} - a_n)\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\varphi + \cdots$$

también converge porque (dejando el primer término), siendo cada $|\operatorname{sen}| \leq 1$ tiene los términos, en valor absoluto menores de los correspondientes de S'); luego converge absolutamente, y por consiguiente converge. es decir, llamando Σ_n a la suma de los primeros n términos existe

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_n \quad \text{que llamo } \Sigma.$$

Ahora por lo visto:

$$2 \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} S_n = \Sigma_n + a_n \operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}\varphi.$$

Por $n \to \infty$ en el 2° miembro Σ_n tiende a Σ, el segundo término (producto de a_n que tiende a cero por sen... que queda en valor absoluto < 1) tiende a cero: luego existe, y vale Σ el límite del 2° miembro. Por lo tanto existe y vale Σ también el límite del 1r miembro.

$$2 \lim_{n=\infty} \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} S_n = \Sigma$$

y sigue si $\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} \neq 0$

$$\lim S_n = \frac{\Sigma}{2 \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}.$$

Esto significa que la serie S converge. Análogamente podríamos concluir para $a_1 \operatorname{sen}\varphi + a_2 \operatorname{sen} 2\varphi + \cdots$

El resultado está ligado a la hipótesis $\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} \neq 0$: es decir $\frac{\varphi}{2} \neq 0$, $\frac{\varphi}{2} \neq \pi$, c.d. $\varphi \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Cuanto al punto $z=1$, en el ejemplo de p ~~68~~ 73 la serie resultaba divergente. Es facil formar otros ejemplos en los cuales la serie converge también en este punto. P.e.

$$z+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{3^2}+\cdots$$

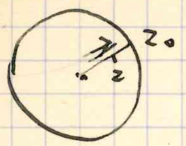
las hip. de p.73, fin, son satisfechas, y la serie converge también en el punto $z=1$, donde se reduce a la serie

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\cdots$$

que es convergente(Cuando se estudian las serie $\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}$ con α n.° positivo, es sabido que hay convergencia por $\alpha>1$ y divergencia por $\alpha\leq 1$) Así logramos también ejemplos donde la serie converge en cada punto de círculo; o en cada punto con una sola excepción.

Relativamente a las series de potencias consideradas sobre el círculo de convergencia, enuncio(sin demonstrarlo) el teorema de Abel: si en el punto z_o del círculo de convergencia una serie de potencias es convergente, llamando $f(z)$ a la suma de la serie(en el interior, y en los puntos del círculo donde la serie converge), tenemos

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0) \qquad (1)$$



donde el pasaje al límite se hace a lo largo del radio del círculo que va al punto z_o. En este sentido la función $f(z)$ sigue siendo continua en los puntos del círculo donde existe. La continuidad en cada z interior es consecuencia de la derivabilidad (p.18). Pero esta demostración no sirve cuando z_o está sobre el círculo, porque tendríamos que considerar

$$\lim_{z_1\to z_0}\frac{f(z_1)-f(z_0)}{z_1-z_0}$$

(Más generalmente resulta continua en cada triángulo con un vértice en z_0, y los demás interiores al círculo de conv.)

y si hacemos tender z_1 a z_0 de manera arbitraria, puede z_1 estar fuera del círculo, y no existir $f(z)$. ~~Podría pensarse, en la dem en limitar la variabilidad de z_1 en el pasaje al límite: pero el~~ [illegible] Es necesario otra demostración que no damos. - El teorema no es invertible: expresa la igualdad

~~En cambio indico una aplicación a la teoría de las series~~ ~~[illegible] producto de dos series~~

[illegible]

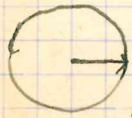
de dos cantidades, que tienen significados distintos:

$$\lim_{z\to z_0} (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) \; ; \; \lim_{n=\infty} (a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + a_n z_0^n)$$

Además hay que observar que el teorema nos asegura que si existe el 2º límite, existe el 1º y es igual al segundo. Pero puede ser que el 1º existe, sin que exista el segundo. p. es tomo

$$1 - z + z^2$$ que por $|z|<1$ vale $\frac{1}{1+z}$

luego dejando tender z a $+1$ (p.ej. de la manera considerada)



$$\lim_{z\to 1} (1 - z + z^2 - z^3 \dots) = \frac{1}{2}$$ (límite en el 1º modo)

En cambio si estudiamos el límite en el 2º modo es $\lim_{n=\infty} (1 - 1 + 1 - 1 \dots)$ que no existe.

FUNCIONES ANALITICAS Y REPRESENTACION CONFORME. Siendo dada una correspondencia(o representación) entre los puntos de dos planos π y π' (o entre campos de dos planos) distintos o eventualmente coincidentes, ella se llama conforme cuando, tomadas dos líneas del primer plano que salen de un punto P, y su ángulo, las dos líneas correspondientes de π', que salen de P', se cortan en P' según el mismo ángulo(ángulo de dos líneas= ángulo de sus tangentes). Ejemplos: similitud, o trasnformación por radios vectores recíprocos(inversión, v. curso 1939-40)

Considero una función analítica

$$w = f(z)$$

Imagino de interpretar como puntos de un primer plano π de Gauss los z, y como puntos de otro plano (eventualmente sobrepuesto) π' las w= u+iv. Nace así una correspondencia entre π y π'. Ahora bien, en cada punto z donde no resulte nula la derivada f' la representación es conforme, como ahora lo veremos.

Que donde sea $f'(z)=o$ el teorema venga a no subsistir podemos controlarlo sobre un ejemplo. Si tomo p.e.

$$w = z^2$$

al punto z=o corresponde w=o, y por z=o es f'= o. Ahora si en los dos ~~primer~~ planos introduzco coordenadas polares (ρ, φ) y (ρ', φ')

luego $$\rho' e^{i\varphi'} = \rho^2 e^{2i\varphi}$$

es decir $$\rho' = \rho^2 \qquad \varphi' = 2\varphi$$

Al desplazarse P sobre una semirecta por O(φ = const.), lo mismo ocurre de P´en el segundo plano: en particular al semieje real positivo, corresponde también en π' el semieje análogo: pero la segunda fórmula enseña que el ángulo que otra semirecta por O forma con aquel semieje no solo no se conserva, sino se dobla pasando al segundo plano.

El teorema puede enunciarse también de la siguiente manera, equivalente, ~~ma~~ pero donde se habla solo de elementos reales. Considero sobre π y π' respectivamente dos pares de ejes cart. ort. x,y;x´,y´ ; y una correspondencia definida por las fórmulas

$$x' = u(xy) \qquad y' = v(xy)$$

siendo las funciones u,v derivables con derivadas contínuas que satisfacen a las condiciones

$$(A)\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad (B)\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

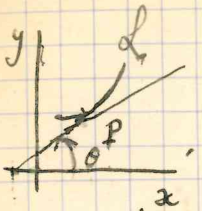
En cada punto donde no se anulen las cuatro derivadas $\frac{\partial u}{\partial x}$, etc. la representación es conforme. (Decir, en el primer enunciado f´(z)≠0 equivale a decir (p17) $u_x + i v_x = 0$ y también $v_y - i u_y = 0$ es decir $u_x = 0$, etc)

Para entender bien el alcance del teorema, ~~premito~~ digo precisamente esto. Si considero la correspondencia más general entre dos planos, definida anal.te como ahora, sin las (A),(B), vamos a ver que si tomo en el primer plano un punto P donde no se anule el jacobiano

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

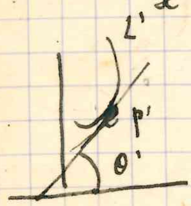
no solo, como es intuitivo, a líneas tangentes entre sí que salen de P corresponden líneas tangentes entre sí que salen de P´, así que nace una correspondencia entre las rectas del haz P y las del haz P´(en cuanto tangentes de líneas correspondientes); sino que esta correspondencia entre haces es una proyectividad .Cada correspondencia entre dos planos, de naturaleza cualquiera, con tal que rigan las hipótesis muy amplias que hicimos, siempre da lugar a una proyectividad entre haces correspondientes. Si, además, subsisten las(A),(B) esta proyectividad entre haces viene a ser una igualdad.

Empiezo por el caso general. Sea P(x,y): y sea L una línea que sale de P: imaginando sobre esta línea, en proximidad de P, de expresar y como y(x), la tangente en P tiene como coef angular $\frac{dy}{dx}$ calculado en P: es sabido que este coef. vale tg θ ,don



θ es el ángulo que el eje x forma con la tang
A la línea L corresponde una línea L'que pasa po
P'(x,' y'). Su &&&&&&&&&& representación analíti
ca puede imaginarse dada por las ecuaciones para
métricas .

$$x' = u(x,y) \qquad y' = v(x,y)$$



donde y se substituizca según la y=y(x). El coef
angular de L'en P' && es $\frac{dy'}{dx'}$, es decir

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{dy'}{dx} : \frac{dx'}{dx} = \frac{v_x + \operatorname{tg}\theta \cdot v_y}{u_x + \operatorname{tg}\theta\, u_y} \qquad (°)$$

llamando θ' el ángulo que el eje x'forma con la tangente en P'. En esa fórmula se lee lo que queremos: en primer lugar de cualquiera vez se tome la ecuación de una línea L que pase por P, el valor de $\operatorname{tg}\theta'$ depende solo del valor de θ (porque las cantitades v_x, etc no dependen de L); es decir líneas tangentes se transforman en líneas tangentes. En el haz P, además, puede tomarse $\operatorname{tg}\theta$ como coord.da proy.va de una recta del haz(una recta del haz es $Y-y = \operatorname{tg}\theta(X-x)$; ~~Mejor~~ ~~del~~ como $\operatorname{tg}\theta$ lo es en $Y = \operatorname{tg}\theta X$) y an.te en el haz P': ahora (°) es una trasnf lineal fraccionaria e&ntre& las dos ccordenadas, y luego representa una proyectividad(no degenerada porque el determinante de la substit. evid, te coincide con el jacobiano, que supusimos no nulo en P).

Agrego ahora la hipótesis que rigan (A) (B). Observo que && && el jacobiano ahora vale

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & +u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2$$

y luego se anula solo si anulan u_x, u_y y por cons. también v_x, v_y es decir las cuatro u_x etc. En la fórmula (°) divido num y den por v_y (1) (que es lo mismo que u_x) y logro

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\frac{v_x}{v_y} + \operatorname{tg}\theta}{1 + \frac{u_y}{u_x}\operatorname{tg}\theta}$$

que -siendo $v_x = -u_y$ puedo escribir poniendo $\frac{v_x}{v_y} = m$ (y luego $\frac{u_y}{u_x} = -m$)

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{m + \operatorname{tg}\theta}{1 - m\operatorname{tg}\theta}$$

---

(1) Si $v_y \neq 0$. Si no, dividiría por v_x y se ~~procedería~~ llegaría di[illegible] a una conclusión análoga ~~manera substancialmente análoga~~. (Siendo $v_y = 0$, es $v_x \neq 0$: si no serían nulas las 4 derivadas)

También puedo introducir un ángulo α $(0 \leq \alpha < \pi)$ definido por $\alpha = \operatorname{arctg} m$ (observando que α, así como m depende sólo de la corr.$^{\text{cie}}$ y del pt. P, no de la línea l, es decir no de $\operatorname{tg}\theta$, es decir es constante respecto a θ) y entonces

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\theta} = \operatorname{tg}(\alpha + \theta).$$

y luego

$$\boxed{\theta' = \theta + \alpha}$$

Luego cambiando otra curva l_1, l'_1, θ_1, θ'_1 $\qquad \theta'_1 - \theta' = \theta_1 - \theta$: tenemos transf. conforme. c.d.d.

Aun conclusión análoga llegaríamos también en otro caso es decir si en cambio de las (A) (B) suponemos que subsistan las (A') (B') $\quad u_x = -v_y \quad ; u_y = v_x$

En este ~~ahora~~ (divido por $v_y = -u_x$)

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\frac{v_x}{v_y} + \operatorname{tg}\theta}{-1 + \operatorname{tg}\theta \frac{u_y}{v_y}} \quad \text{pues} \quad \frac{v_x}{v_y} = m = \operatorname{tg}\alpha ; \quad \operatorname{tg}\theta' = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\theta}{-1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\alpha}$$

$$\cancel{\operatorname{tg}\theta' = \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\theta}} \quad \text{es decir} \quad \operatorname{tg}\theta' = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\theta}.$$

$$\boxed{\theta' = \alpha - \theta}$$

y como antes $\theta'_1 - \theta' = -(\theta_1 - \theta)$. El ángulo de dos curvas es todavía conservado, pero con cambiamento de signo. También la nueva transformación es conforme.

La locución "cambiamento de signo" de un ángulo tiene que ser claramente. En un mismo plano tiene un sentido claro decir $ab = cd$ o $ab = -cd$. Acá pues tenemos dos planos distintos, y no hay a priori una manera de ~~pasar~~ comparar los sentidos de rotaciones en los dos planos. Pero si en cada uno es fijado un ángulo recto, p.e. aquí los ángulos xy, x'y' queda implícitamente fijado un sentido de rotación en cada plano, y puede distinguirse entre las igualdades ab=cd y ab=-cd según que los ángulos ab, cd resultan recorridos en el mismo sentido (es decir en el sentido xy y x'y', o ambos en los sentidos contrarios). Luego podemos hablar de igualdades directas o inversas de dos haces de planos distintos, si en cada uno es fijado un par de ejes, como acà. Entonces tiene sentido hablar de transformaciones conformes directas o inversas, según que.... En los dos casos tratados, teníamos respectivamente una trasnformación conforme, directa o inversa.

La función w=f(z), de la manera precisada más arriba, pone una correspondencias conforme directa entre los dos planos z y w

El segundo resultado puede enunciarse : la función analítica $w=f(\bar{z})$, donde $\bar{z}$ es el n" cpl conj de z, pone una transformación conforme inversa entre los dos planos z y w, en los puntos donde $f' \neq 0$ = En efecto ~~entonces~~ puesto $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ donde $z = x + iy$, será $\bar{z} = x - iy$; $w = f(\bar{z}) = u(x,-y) + i\,v(x,-y)$. Luego llamando por claridad $U(xy)$ $V(xy)$ la parte real y el coef. del imag de w

$U(xy) = u(x,-y)$; $V(x,y) = v(x,-y)$. La transf. entre los planos z y w es dada por

$$x' = U(xy), \quad y' = V(xy)$$

$U_x = u_x \quad V_y = -v_y \quad$ Luego $u_x = v_y$ da $U_x = -V_y$ (A')

$U_y = -u_y \quad V_x = v_x \quad$ Luego $u_y = -v_x$ da $U_y = V_x$ (A').

Es importante observar que de esta manera se logran todas las trasnfs conformes entre dos planos, de manera que el estudio de las funciones anal.s equivale en substancia al estudio de las transfs conformes. Si en efecto partimos de la más general transform. entre dos planos, en el sentido de p. 83, sigue la (º) de p.85

$$(°) \qquad \operatorname{tg}\theta' = \frac{v_x + v_y \operatorname{tg}\theta}{u_x + u_y \operatorname{tg}\theta}.$$

Agrego ahora la hipótesis de la conformidad, directa o inversa. En el primer caso, o en el segundo, comparando ángulos con vértices en P,P′: $\theta'_1 - \theta' = \pm(\theta_1 - \theta)$

Es decir

o resp.te. Luego, para P P′: $\theta'_1 - \theta_1 = \theta' - \theta$ o $\theta'_1 + \theta_1 = \theta' + \theta$

~~Llamando a esta constante tenemos resp.te~~ Estas igualdades expresan que $\theta' - \theta$ o $\theta' + \theta$ tienen un mismo valor para todos los pares de direcciones correspondientes que salen de P, P′. Llamo α esta constante y escribo

$$\theta' - \theta = \alpha \quad ; \quad \theta' + \theta = \alpha$$

es decir

$$\boxed{\theta' = \alpha + \theta} \quad ; \quad \theta' = \alpha - \theta$$

es decir

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\theta} \quad ; \quad \operatorname{tg}\theta' = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\theta} \quad (°°)$$

Como $\operatorname{tg}\theta'$ ya está expresado en función de $\operatorname{tg}\theta$ mediante (°) esta fórmula de subst. lineal tiene que equivaler a (°°). Luego en el 1er caso. (divido (°) por u_x de manera que el término ind. del denominador resulte $= 1$)

1er caso) $\dfrac{v_x}{u_x} = \operatorname{tg}\alpha$; $\dfrac{v_y}{u_x} = 1$ $\dfrac{u_y}{u_x} = -\operatorname{tg}\alpha$

De aquí se deduce $u_x = v_y$; y la comparación de la 1ª y 3ª $u_y = -v_x$. (A)(A′)

2º caso) $\dfrac{v_x}{u_x} = \operatorname{tg}\alpha$ $\dfrac{v_y}{u_x} = -1$ $\dfrac{u_y}{u_x} = \operatorname{tg}\alpha$

De aquí se deduce $u_x = -v_y$; y el paragón 1ª 3ª da $v_x = u_y$ (A′)(A″)

c.q.d.

Al hablar de trasns conformes, se dice a menudo que "actuan como similitudes en regiones infinitésimas". Con esto se quieren expresar dos cosas. En una similitud, si tomo tres puntos P, Q, R, y sus correspondientes, el ángulo(PQ,PR) = (P′Q′, P′R′). Esto, tan generalmente, no puede decirse de una transfn conforme cualquiera, porque p.e, el lado PQ, recta, no tiene como línea corr.te una recta. Pero, si considero dos líneas por P, y sobre ellas ptos Q,R que tienden a P, o como se dice inf.te próximos a P, las rectas PQ,PR tienden a las tgtes..., y puede decirse brevemente que si Q,R son infin.te próximos a P, entonces ángulo (PQ,PR) = (P′Q′, P′R′). La segunda cosa que se quiere expresar es la siguiente. En una similitud siempre $PQ/P'Q' = PR/P'R'$. En una trasnf.n conforme esta igualdad continúa subsistien con tal que Q y R sean inf,te próximos a P, en el sentido que sigu

Imagino dos líneas L, L_1 que salen de P(y sus correspondientes) y sobre ellas Q, R que tienden a P. e sobre L la diferncial del arco s y la corda PQ difieren por ~~&&&&&&&&~~ infinitésimos de orden superior. Llamo S el arco sobre L_1; s', S' los arcos sobre L', L_1'. Entonces pruebo que (en valor absoluto)

$$\boxed{\frac{ds'}{ds} = \frac{dS'}{dS}} \qquad (\&)$$

donde p e en el primer miembro tengo una derivada(s' sobre L' es función de s); si la considero como razón de diferenciales la igualdad ahora esrita expresa la igualdad $PQ : P'Q' = PR : P'R'$ a menos de inf.s de orden superior. Para demostrar (&) pruebo que para L y L' (y an.te para todos los pares de línea corresp que salen de P) en v.a.

$$\boxed{\frac{ds'}{ds} = \left|\frac{dw}{dz}\right|}$$

(la repr. conforme siendo p.e. directa dada por $w = w(z)$). Ahora

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 = (u_x\,dx + u_y\,dy)^2 + (v_x\,dx + v_y\,dy)^2 \quad \left(\text{siendo } \begin{array}{l} x' = u(x,y) \\ y' = v(x,y) \end{array}\right)$$

$$= (u_x^2 + v_x^2)\,dx^2 + 2(u_x u_y + v_x v_y)\,dx\,dy + (u_y^2 + v_y^2)\,dy^2$$

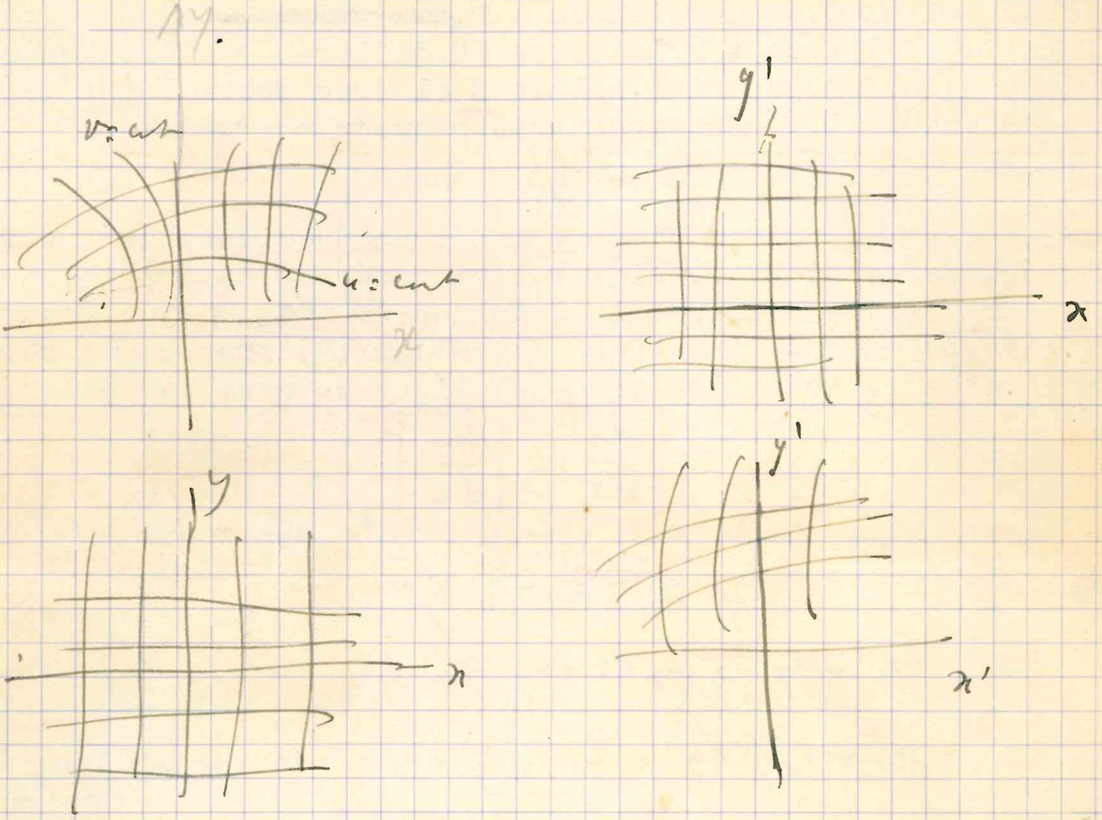
Por las ecuaciones de monogeneidad coef. $dx\,dy = 0$, y $u_y^2 + v_y^2 = v_x^2 + u_x^2$ luego

$$ds'^2 = (u_x^2 + v_x^2)(dx^2 + dy^2);$$

$$\frac{ds'}{ds} = \sqrt{u_x^2 + v_x^2} = (p.\ 11) \left|\frac{dw}{dz}\right| \qquad \text{c.d.d.}$$

El significado intuitivo de la fórmula es el siguiente. Fijado el punto P, y sobre L por P otro punto Q que tiende al punto P, el segmento PQ tiene una deformación(al pasar al segmento correspondiente), medida por $\frac{ds'}{ds}$ (módulo de deformación)

Generalmente esta deformación varía con la línea L (más exactamente con la dirección de la línea en el punto P) porque de las


y
v = cst
u = cst
x
y'
x'
y
x
y'
x'

fórmulas escritas sigue

$$\left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 = \frac{(u_x^2+v_x^2)\,dx^2 + 2(u_x u_y + v_x v_y)\,dx\,dy + (u_y^2+v_y^2)\,dy^2}{dx^2+dy^2}$$

el cuadrado del mód. de

de manera que la deformación puede escribirse

$$\left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 = \frac{(u_x^2+v_x^2) + 2(u_x u_y + v_x v_y)\frac{dy}{dx} + (u_y^2+v_y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

y depende solo de la derivada dy/ dx.) En cambio en el caso de una trasnformación conforme la deformacion, en un dado punto es la misma en todas las direcciones.

OBSERVACION. El hecho que en el plano z las líneas $u(x,y)=$ const, $v(x,y)=$ const, constituyan un doble sistema ortogonal se explica ~~otra~~ de nuevo porque corresponden a las $x'=$ const. ,y' = const. del plano w. Naturalmente, por la misma razón, las líneas del ~~EJEMPLO~~ plano w que corresponden a las $x=$ const, $y=$ const. del plano xy tienenque formar un doble sistema ortogonal. P.e. si tomo

$$w = z^2$$

logramos así(p.29) en el plano z dos sist. ortles de hiperbolas, de la primera manera. Cuanto a la segunda parto de:

$$x' = u = x^2 - y^2 \qquad y' = v = 2xy$$

y tomo en el primer plano las $x=a$; $y=b$. En los dos casos encontro como líneas correspondientes las

$$x' = a^2 - y^2, \quad y' = 2ay \qquad ; \qquad x' = x^2 - b^2, \quad y' = 2bx$$

Obtengo ~~las~~ cada línea del primer sistema ~~eliminando~~ ~~x, etc.~~ de las dos primeras ecuaciones, por a const. y variable y (parámetro); cada línea del 2° por b= const y variando x (parámetro). La ecuación de una línea del 1er (2°) sist. se obtiene eliminando y (respt. x) y resulta

$$x' = a^2 - \frac{y'^2}{4a^2} \quad (1) \qquad ; \qquad x' = \frac{y'^2}{4b^2} - b^2 \quad (2)$$

(1) es ~~...~~ $\qquad y'^2 = -4a^2(x' - a^2)$

(2) es $\qquad y'^2 = 4b^2(x' + b^2)$

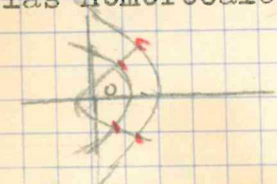
de tipo ~~$y^2=2pX$~~ $-9t-$ $y^2=-2pX$

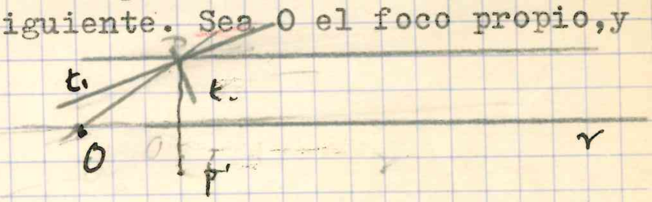
(1) es parábola ~~con parámetro~~ $p=2a^2$, vértice $(a^2, 0)$ eje $y'=0$

(2) " " $y^2=2pX$ $p=2b^2$ vértice $(-b^2, 0)$ eje $y'=0$

(1) puesto $X'=x'-a^2$ es $y'^2=-4a^2X'$ con foco ($X'=-a^2$ luego $x'=0$. Las (1) tienen el foco en O, y están abiertas hacia la izquierda. Las (2) tienen también foco O (de la misma manera) y están abiertas hacia la derecha. Son dos sistemas de parábolas homofocales (tiene como tienen el mismo eje, tienen también el mismo punto impropio que al pasar de una C^2 a centro a una parábola substituye uno de los focos en varias formas, p.e. bisectrices ángulo radios focales etc)

Concluimos así que los dos sistemas de parábolas homofocales sonsiderados se cortan a ángulo recto . Esta propiedad se confirma inmediatamente geom.te para cada par de sistemas de parábolas homofocales de la manera siguiente. Sea O el foco propio,y





la recta r,pasante por O, el eje común.Si busco una parábola en estas condiciones que pase por P genérico,su tangente en P tiene que coincidir con una bisectriz del ángulo.....1Fijada la bisec-triz ,tengo de la parabola dos puntos con la relativa tangente (P y el pt imprópio del eje) un tercer punto el sim.co de P respecto al eje) así que la par. está individualizada.Luego dos parábolas; y efectivamente en P se cortan a ángulo recto.

EJEMPLOS DE REPRESENTACIONES CONFORMES. Consídero unos ejemplos sencillos,eligiendo f(z) particulares

I) $w=f(z)= z+b$

siendo b una cosnt. compleja $b=b_1+ib_2$.Entonces $w=x+iy+b_1+ib_2$
$u=x+b_1$, $v=y+b_2$. Imaginando (y también a continuación los dos planos w y z sobrepuestos...), tengo traslación (~~también~~ direct.te)
Claro que tiene que ser conforme.

II) $w = az$

a const. Si escribo $a = re^{i\theta}$, es rotación de θ alrededor de O, junto con multiplicación de los módulos por r, es decir de las distancias de O por r: producto de rotación alrededor de O y homotecia de centro O. Similitud con O unido.

III) $w = az + b$

Se obtiene combinando las dos que preceden, ambas similitudes, y luego similitud.

(aquí entre planos superpuestos) S

El resultado es invertible, porque cada similitud directa ~~entre~~ puede representarse así. En efecto una similitud directa S es individualizada, cuando de ella se conocen dos pares de puntos corre.s ("p.e. porque con los pares de pts cíclicos corr.s nos dan 4 pares). Si son los puntos repres.s por los números complejos m,m'; n,n' puedo determinar las constantes a,b de III de manera que

$m' = am + b$

$n' = an + b$ (con tal que $\frac{m'}{n'} \neq 0$, $m \neq n$ y está bien)

y logro así una transf III), es decir simd, que hace corresponder aquellos dos pares, y a raiz de la unicidad....coincide con S.

(IV) $$w = \frac{az+b}{cz+d}$$ (a b c d const. complejas)

subst. lin. con det. $ad-bc$ que se considera ~~y ... ...~~ $\neq 0$, (sino sería $\frac{dw}{dz} = 0$ en cada pt. (w = const.) y no habría donde estudiar la conformidad de la transf.^{n}

De aquella subst. lin ya se conoce el sign.do de proyd sobre la recta, y, también(en hip. particulares, fórmula de Cayley, curso 1939-40 ~~&&&&&&~~ $d=\bar{a}$, $c=-\bar{b}$) de rotaciones de la esfera de Riemann sobre sí misma). Ahora pruebo que, en el plano de Gauss representa una trans que lleva círculos(inc. rectas) en círculos, es decir una llamada afinidad circular de Möbius . Observo ,ante todo, que la ecuación de un círculo real (A B C D reales)

$$A(x^2+y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0$$

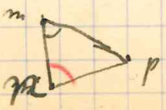
$\begin{cases} 2x = z + \bar{z} \\ 2iy = z - \bar{z} \end{cases}$

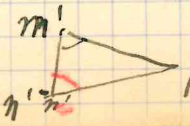
introduciendo la variable compleja z y su conj. $\bar{z}$ puede escribirse

$$A z\bar{z} + B(z+\bar{z}) - Ci(z-\bar{z}) + D = 0$$ es decir

$$A z\bar{z} + (B - Ci)z + (B + Ci)\bar{z} + D = 0$$ ec. del tipo

III o más el.^{te} dados. m, m', n n' para lograr p' dado p construyo





ángulos iguales... en el mismo sentido de

$$\boxed{\alpha z\bar{z} + \beta z + \gamma \bar{z} + \delta = 0}$$

donde α, δ son reales y $\gamma = \bar{\beta}$. Y viceversa, recuerdo el paso g. inverso. Ahora cuando w describe un círculo (α, δ reales)

$$\boxed{\alpha w\bar{w} + \beta w + \bar{\beta}\bar{w} + \delta = 0.}$$ el pt. z se mueve sobre la línea donde:

$$\alpha \frac{az+b}{cz+d}\,\frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}} + \beta \frac{az+b}{cz+d} + \bar{\beta}\,\frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}} + \delta = 0$$ es decir

$$\alpha(az+b)(\bar{a}\bar{z}+\bar{b}) + \beta(az+b)(\bar{c}\bar{z}+\bar{d}) + \bar{\beta}(\bar{a}\bar{z}+\bar{b})(cz+d) + \delta(cz+d)(\bar{c}\bar{z}+\bar{d}) = 0$$

es decir
$$\begin{aligned} & z\bar{z}\,(\alpha a\bar{a} + \beta a\bar{c} + \bar{\beta}\bar{a}c + \delta c\bar{c}) + \\ & z\,(\alpha a\bar{b} + \beta a\bar{d} + \bar{\beta}\bar{b}c + \delta c\bar{d}) + \\ & \bar{z}\,(\alpha b\bar{a} + \beta b\bar{c} + \bar{\beta}\bar{a}d + \delta d\bar{c}) + \\ & (\alpha b\bar{b} + \beta b\bar{d} + \bar{\beta}\bar{b}d + \delta d\bar{d}) = 0 \end{aligned}$$

donde se ve sin dificultad (fácil) que el coef. de $z\bar{z}$, y el term. ind. son reales; los de $z, \bar{z}$ complejos conj. Luego a un círculo del 1er plano corresponde un círculo del primero (Y viceversa, p. es simétrico (V) respecto a z).

Análogamente, si tomara $w = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$

se verificaría que tenemos también una afinidad circular de Möbius.

Podría demostrarse que cada afinidad circular de Möbius puede obtenerse de una de estas dos maneras.-Como ejemplo, recuerdo el caso de la inversion(1939-40) donde, siendo 1 el radio del círculo de inversión resultaba

$$\boxed{w = 1/\bar{z}}$$ (o $w = R^2/\bar{z}$, si R es el radio)

las afinidades circulares ~~directas~~ resultan siempre confor (directas o inversas).

Estudio más de cerca un ejemplo de 4)

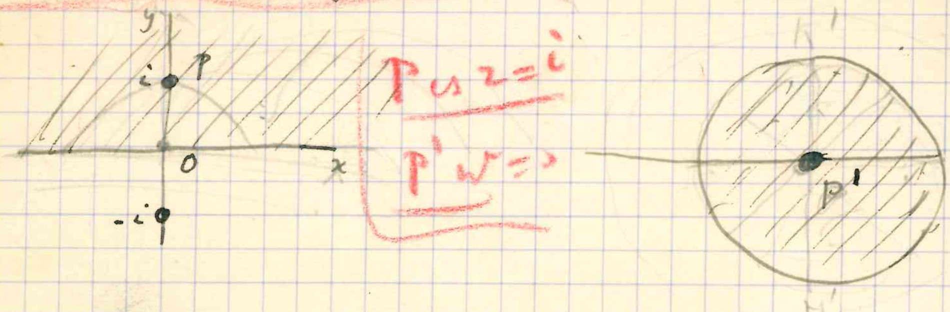
$$\boxed{w = \frac{z-i}{z+i}}$$

Si en el plano z, z es real $= x$, entonces $w = \frac{x-i}{x+i}$ es la razón de dos n.os cpl. conjugados y luego $\left(\frac{\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{-i\varphi}}\right)$ $|w|=1$. Luego cuando z recorre el eje real, w se mueve sobre el círculo de centro el origen 0 y radio 1. El eje real divide el plano en dos ~~planos~~ semiplanos, y por cont. de estos corresponden las dos regiones interior y exterior al círculo. Para establecer cuál a cuál, observo que al pt del semiplano $y > 0$ $z=i$ corresponde $w=0$. Luego al semiplano $y > 0$ corresponde el interior de círculo. Tenemos así una representación conforme entre el interior de un círculo y un semiplano. Existen excepciones a la conformidad?. En general, para IV)

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

y luego ~~ahora~~

Por consiguiente, la derivada no se anula nunca; pero, en general falta (es infinita, así como también w) en el punto donde $cz+d=0$. Ahora en el punto $z=-i$. Pero este punto no pertenece al semiplano considerado. Luego la representación es conforme sin excepciones entre el semiplano superior y el círculo



Para hacernos una idea mas exacta de la correspondencia, empiezo a buscar $u(x,y)$, $v(x,y)$. Ahora

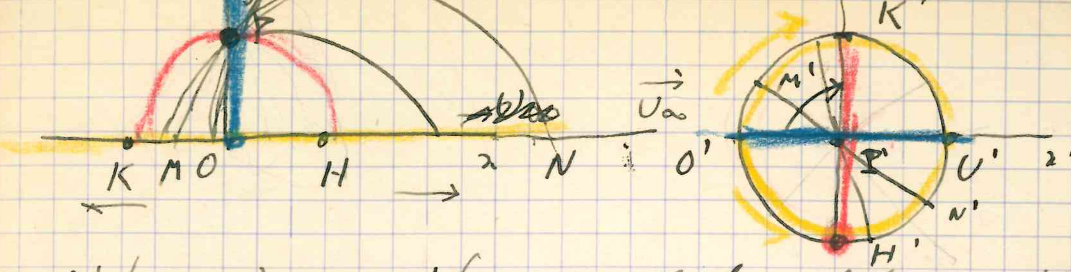
$$w = \frac{x+iy-i}{x+iy+i} = \frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)} = \frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-1+i(\cancel{xy}-x-\cancel{xy}-x)}{x^2+(y+1)^2}; \quad x' = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}, \quad y' = \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$$

Entre tanto, ~~veamos~~ que se corresponden los contornos. Los puntos O y V_∞ tienen como correspondientes (fórmulas (V)) ($z=0$, $z=\infty$), $w=-1$, $w=1$)

x Geom.te : corresponden arcos de círculos normales al eje x y pasantes por P. Analít.te :

X



$O'(w=-1)$ y $U'(w=1)$. El pt. x del eje x tiene corr.te (°) $x' = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $y' = \dfrac{-2x}{x^2+1}$. P. ej $H(x=+1)$ y $K(x=-1)$ tienen corr.tes

$$H'\left(0,\ -\frac{2}{2} = -1\right) \quad ; K'\left(0,\ \frac{2}{2} = 1\right)$$

Luego a la semirecta OHU_∞ corr.de el semicírculo $O'H'U'$ a la semirecta OKU_∞ el semicírculo $O'K'U'$

Veamos todavía que líneas en el 1er plano corresponden a las rectas por el centro P' ~~del~~ el segundo, o para mejor decir ~~&&&&&&&&&&&&&&~~ cuáles arcos del semiplano corresponden a los segmentos limitados por el círculo de ~~las~~ dichas rectas. Si tomo una recta ~~&&&&&&&&&&&~~ $y'=mx'$, le corresponde, según las (º)

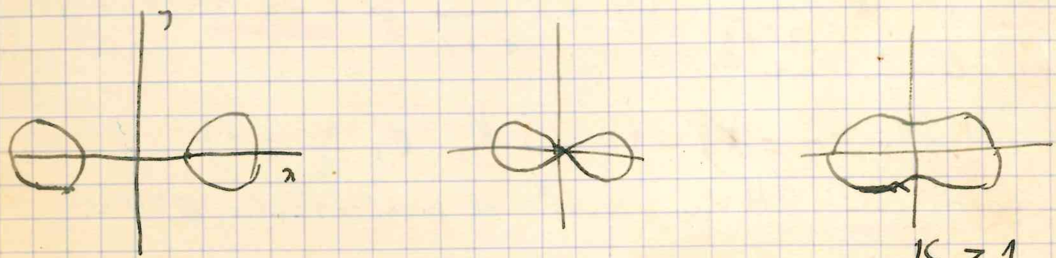
$$-2x = m(x^2+y^2-1)$$

Para cada valor de m esta ecuación representa un círculo, variable en un haz con ptos bases $x=0$ $y^2+y^2-1=$ (P) semi es decir $(0,1)$ $(0,-1)$. De estos puntos uno solo está en el plano considerado. Podía preverse geometricamente que a rectas corresponden círculos, a rectas por P' círculos por P. De cada círculo hay que considerar solo la mitad contenida en el semplano considerado : a los dos extremos del segmentos, M' y N' corresponden los dos extremos M y N del semicírculo, sobre el eje x.

Cuando el segmento ~~&&&&~~ coincide con ~~&&~~ O'U' ($y'=0$), el ~~semi~~ círculo, según las (º) es $x=0$, ~~semirecta. Cuando el segmento viene a ser H'K', le corresponde la semirecta~~ es decir semirecta OPU_∞

Cuando el segmento viene a coincidir con $H'P'K'$ ~~le corresponde~~ ($x'=0$) le corresponde un semicírculo $x^2+y^2-1=0$, es decir KPH. Cuando el segmento M'N' pasa de la primera posición a la segunda, ~~al ...~~ ~~pasando girando~~ según la flecha, el semicírculo se deforma pasando de

× (centro sobre la semirrecta $x \geq 0$)



~~$K > 1$~~ $K < 1$ $K = 1$ $K > 1$

× cuya ecuación resulta (p. ej. ...)

$$\boxed{(x^2+y^2)^2 - 2\,(x^2-y^2) = 0.}$$

la posición límite semirecta OPU_∞ al semicírculo KPH llenando &&&m&&&&, en el semiplano en el interior del cículo colorado & la mitad izquierda, y en el exterior la mitad derecha, como enseña la figura. Si en el plano w tomamos los demás segmentos ~~MM~~ M´N´ los semicírculos correspondientes...., es decir serán los simétricos de los anteriores.

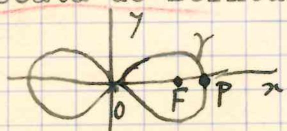
VI) $W = \cancel{z^2} (z-1)(z+1)$

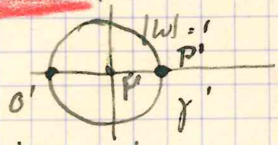
Observo que $|z-1|$ es la distancia entre el punto z y el punto 1, y anlog.te....; luego $|(z-1)(z+1)|$ es el producto de las distancias del punto z a& los puntos F(1,0) F´(-1,0) Luego el círculo γ' ~~MM~~ de centro en el origen y radio 1 del plano w, es decir $|w| = 1$ corresponde en el plano z la línea lugar del punto ~~&M~~ M tal que

$$|FM|\,|F'M| = 1 \qquad (1)$$

Generalmente el lugar del punto M tal que $|FM|\,|F'M| = k$ es una cassinoide, que puede tener varias formas (v. p. e. Fano-Terracini p.131, donde sea c=1 (suponemos aquí $|OM| = 1$) Si $k < 1$ está constituida por un par de ovales, simétricos uno de otro respecto al eje y; si k=1 los dos ovales se unen y se obtiene una lemniscata de Bermoulli; si $k > 1$, vienen a soltar&se en el origen la mitad superior y la inferior, y se tiene una cassi noide constituida por un óvalo único

Acá en (1) tenemos k=1, es decir al círculo γ' corresponde una lemniscata de Bernoulli γ con focos (así se llaman F, F´) en F F´.





Hay una diferencia esencial entre este caso y el anterior: entonces la V), (o más gen.te IV)) enseña que la correspondencia entre el interior del círculo y es semiplano era biunívoca(y así la IV) entre los dos planos). Ahora en cambio la VI) enseña que cada z lleva a UN w, pero viceversa cada w procede de dos z (porque tenemos, dada w, una ecuación de segundo grado en z). Cuando & z recorre su plano &&&&&&&&&, W llena su plano dos veces. Esto puede precisarse así. Si cambio z en -z, el product $(z-1)(z+1)$ viene a ser $(-z-1)(-z+1) = (z+1)(z-1)$ es decir lo mismo: luego puntos z simétricos respecto al origen tienenun mismo correspondiente. Por consiguiente ya tememos todo los w considerando p.e. el solo semiplano $x > 0$. Luego de la lemniscata considero solo la mitad de derecha (punto con $x > 0$, $y \geq 0$) podrá

Ella constituye una línea cerrada: su interior, o por ~~...~~ corresponde al interior o exterior del círculo γ'. Pero caso VI) lleva valor finitos de z en id id de w, la región exterior será llevada en la exterior, y la interior en la interior. Luego mediante VI), tenemos una representación conforme(biun.ca) del campo interno al ramo derecho de la lemniscata en el interior de un círculo (y combinando esta transfn con la anterior podríamos también representar el interior de aquel ramo en un semiplano)

Hay excepción a la conformidad donde

$$\frac{dw}{dz} = 2z = 0$$

lo que nos da P'

es decir en el punto O. Su correspondiente es $w=-1$. El punto más a derecha de la lemniscata, P tiene coord=(p.106, con $y=0$) $x=\sqrt{2}$, $y=0$, luego $z=\sqrt{2}$, lo que nos da su correspondiente $w=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$. El foco F(1,0) tiene $x=1, y=0$, luego $z=1$, $w=0$, es decir la representación conforme considerada lleva el foco de la lemniscata en el centro del círculo transformado.

La falta de conformidad en O puede confirmarse de otras maneras. En primer lugar, aunque considerada ahora de un punto de vista distinto, la transfn actual no difiere subst.te de la $w=z^2$ de p 81, que no resultaba conforme en el origen: en efecto la actual es $w=z^2-1$ es decir $w+1=z^2$ es decir se reduce a la anterior mediante una translación en plano w. En segundo lugar las tangentes en O a la lemniscata son las rectas $x^2-y^2=0$ inclinadas de 45º con el eje x, y todas las otras líneas que salen de O hacia el interior forman con el eje x un ángulo menor. En el plano w, en cambio ,pueden trazarse hacia el interior del círculo, a partir del punto O′, lineas que formano ángulos proximos cuanto queremos a un recto con el eje x′(que es el correspondiente del eje x; pues por y=o logramos $w=x^2-1$ real). Luego la repres. no puede ser conforme en O.

VII). Como último ej. considero

$$w=\cos z, \quad x'=\cos x \operatorname{ch} y \quad y'=-\operatorname{sen} x \operatorname{sh} y$$

~~es decir~~(p. 62). Busco ~~ante todo~~ las líneas del plano w que corresponden a las rectas paralelas a los dos ejes(y= const. x= const.) del plano z. Las primeras se obtienen elim.do x entre las dos ecuaciones, consideradas como paramétricas

$$\frac{x'^2}{\operatorname{ch}^2 y}+\frac{y'^2}{\operatorname{sh}^2 y}=1 \quad ; \text{ y las 2as } \quad \frac{x'^2}{\cos^2 x}-\frac{y'^2}{\operatorname{sen}^2 x}=1$$

Logramos así elipses y hipérbolas. Las primeras tienen los focos $(\pm c, 0)$ donde $c^2=\operatorname{ch}^2 y-\operatorname{sh}^2 y=1$, $c=1$; y las hip.

~~en~~ $c^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, lo mismo. Así tenemos elipses y hipérbolas confocales (focos $(\pm 1, 0)$) .Esta doble sistema es por lo tanto ortogonal(p.95) Y como este sistema de el e ip.s homo focales puede considerarse como el más general(eligiendo convenientemente los ejes coordenados y la unidad de medida) vemos por este camino, lo que puede verse también geom.te(cfr. para las parábolas p.97) que elipses e hièrbolas homofocales constituyen un doble sistema ortogonal.

Me limito a enunciar un teorema de Riemann, según el cual, siendo dado un dominio simplemente conexo limitado por una línea L siempre es posible representarlo biunívocamente y conformemente en el dominio limitado por un círculo L'. La representación depende de tres costantes arbitrarias que pueden elegirse de manera que un punto interior prefijado O sea llevado en el centro del círculo, y además un punto del contorno sea llevado en un punto del contorno L'. O también puede disponerse de las constantes de manera que O sea llevado en O' y una dada dirección por O en una dada dirección por O'.

Una de las razones de la importancia de la repr. conforme es esta, que puede contribuir a la solución del llamado problema de Dirichlet, de encontrar una función armónica en el interior de L, que tome al contorno valores prefijados. Es una cuestión que se encuentra en varios problemas, y constituye el ej más importante de los llamados problemas al contorno. Puede considerarse como la extensión al caso de 2 variables del problema de trazar la recta que une dos ptos, en el sentido que la ec análoga al $\Delta u = 0$ en una sola variable es $f''=0$. Acá el análogo deuna region plana es un intervalo del eje x, limitado por dos pts a,b, y como condiciones al contorno puede imponerse $f(a)=A$, $f(b)=B$.... Pero el problema en dos variables es mucho más dificil. La rep.n conforme del dominio...(L) enun dominio circular (L') permite la resolución, porque ,como lo veremos, en el caso de un círculo de centro O y radio R el problema se resuelve explicitmente mediante la fórmula integral de Poisson

$$\boxed{u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(R\cos\theta, R\sin\theta)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta}$$

que expresa el valor de la función buscada en el punto de coord.s polares r,φ, el integral siendo extendido al contorno del círculo y indicándose con $u(R\cos\theta, ..)$ los valores prefijadossobre el contorno (en función de la anomalía θ).

Por otra parte la ecuación de Laplace es invariante respecto a las transfs conformes. Es decir si tenga repr. conforme entre los plano (xy) y(x'y') realizada por

$$(1) \qquad x' = u(xy) \; ; \; y' = v(xy) \qquad (\text{donde } u_x = v_y,\ u_y = -v_x) \quad \text{y } u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ etc}$$

una función $F(x'y') = F(u,v)$ armónica respecto a las variables x'y' es también armónica respecto a las variables x,y, de las cuales depende al escribirle

$$F\big(u(xy), v(xy)\big)$$

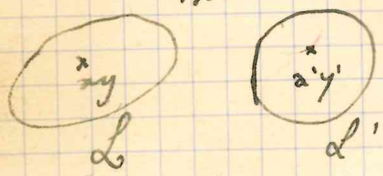
En efecto $F_x = F_u u_x + F_v v_x \; ; \; F_y = F_u u_y + F_v v_y$

$$F_{xx} + F_{yy} = F_u u_{xx} + F_v v_{xx} + (F_{uu} u_x + F_{uv} v_x) u_x + (F_{uv} u_x + F_{vv} v_x) v_x +$$

$$+ F_u u_{yy} + F_v v_{yy} + (F_{uu} u_y + F_{uv} v_y) u_y + (F_{uv} u_y + F_{vv} v_y) v_y$$

$$= (F_{uu} + F_{vv})(u_x^2 + v_x^2)$$

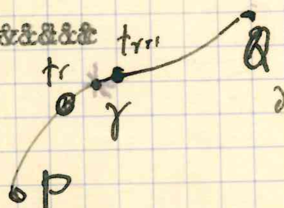
Luego $F_{xx} + F_{yy}$, $F_{uu} + F_{vv}$ se anulan en el mismo tiempo.(1) Por consiguiente si busco F armónica en (L) que tome valores dados sobre L, y conozco una trasnf conforme de (L) en (L'), mediante las fórmulas de transformacion (1) puedo calcular los valores de la función buscada sobre L', resolver el problema en el círculo, y lograr así $F(x', y')$, y después mediante las (1) la F como función de las x, y.



INTEGRALES DE FUNCIONES ANALITICAS. Recuerdo el significado del integral curvilíneo

$$I = \int_\gamma A(xy)\,dx + B(xy)\,dy$$

donde A,B son funciones continuas, en un campo que contiene en su interior el camino de integración PQ; y γ es un arco definido parametricamente con $x = x(t)$, $y = y(t)$ con x'y' continuas. El integral puede considerarse de dos maneras equivalemtes: 1) extendiendo la ordenaria definición de integral, es decir dividir el arco PQ, cuyos extremos correspondan a t_0, T mediante $t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = T$ ~~tales que~~ donde t_0, T corresponden a P, Q y formar la suma



$$\sum^{n-1} A(x_r^* y_r^*)(x_{r+1} - x_r) + B(x_r^* y_r^*)(y_{r+1} - y_r)$$

donde $x_r = x(t_r)$ etc., y $(x_r^* y_r^*)$ es un punto del arco parcial entre t_r y t_{r+1}. Cuando el máximo δ de los intervalos parciales $t_r - t_{r+1}$ tiende a cero, Σ tiende a un límite que es I. 2) haciendo en I la substitución dada por

(1) $u_x^2 + v_x^2 \neq 0$ si como ocurre en el teor. de Riemann no existen excepciones a la conformidad.

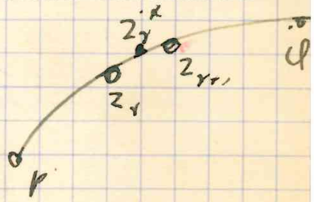
$x = x(t)$; $y = y(t)$, y entonces

$$I = \int_{t_0}^{T} \left[A(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}\, dt + B(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}\, dt \right]$$

De esta manera se logra un intr ordenar

La línea γ podrá también componerse de un número finito de arcos como el considerado.

Supongo ahora de tener una función de la variable compleja z w= u + iv y línea PQ, γ interior a su campo de esistencia. Entonces puede definirse



$$I = \int_\gamma f(z)\, dz$$

de manera análoga a 1), es decir como

$$\lim \sum_0^{n-1} f(z_r^*)(z_{r+1}-z_r)$$

cuando δ tiende, como arriba a cero. El límite buscado vale

$$\lim \sum (u_r^* + i v_r^*)\left[x_{r+1}-x_r + i(y_{r+1}-y_r)\right] =$$

$$= \lim \sum \left[u_r^*(x_{r+1}-x_r) - v_r^*(y_{r+1}-y_r)\right] +$$

$$i \lim \sum \left[u_r^*(y_{r+1}-y_r) + v_r^*(x_{r+1}-x_r)\right]$$

y así ~~encontramos~~ aplicando p. 110 1) encontramos

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma u\,dy + v\,dx$$

así como obtendríamos materialmente desarrollando

$$\int f(z)\,dz = \int (u+iv)(dx+i\,dy) = \int u\,dx - v\,dy + i \int v\,dx + u\,dy \quad (*)$$

Puede observarse que hasta ahora es suficiente suponer que f(z) sea una función continua cualquiera de z, sin suponerla analítica.

Es claro que intercambiando P y Q el integral I viene a ser - I

La integración puede también efectuarse a lo largo de una línea cerrada, volviendo al punto de partida.

Si en (*) se substituyen $x = x(t)$ $y = y(t)$, el calculo se reduce al cálculo de dos integrales ordenarias

~~Si~~ Observo que a lo largo del camino de integración la variab

* (no importa que no simpl.te conexo)

** Luego, si $f(z)$ ~~es [illegible]~~ tiene ~~en~~ derivada nula es constante (también en el caso complejo) porque $f(b) - f(a) = 0$.

z puede considerarse como función de la variable real t mediante

$$z(t) = z = x + iy = x(t) + iy(t)$$

y que entonces subsiste la regla de integración por substitució[n]

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{t_0}^{T} f(z(t))\,\frac{dz}{dt}\,dt$$

En efecto el segundo miembro vale

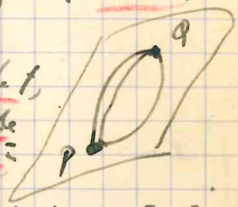
$$\int_{t_0}^{T} \left[u(x(t), y(t)) + iv(\ldots)\right]\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right) dt$$

que tiene el mismo significado del 2° miembro de (*).

P.e. sea $f(z)$ analítica: entonces $\int_P^Q f'(z)\,dz$ (a lo largo de γ) vale

$$\int_P^Q f'(z)\,\frac{dz}{dt}\,dt = \int_P^Q \frac{df}{dt}\,dt = f(b) - f(a)$$

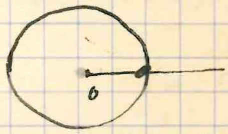
(p. 13) el incremento de f a lo largo de γ,



llamando a, b los valores de z en P, Q. Luego el integral de la derivada de una función analítica unifor me en un cierto campo a lo largo de dos caminos PQ es lo mismo. Integral que depende solo de los extremos. Y resulta igual al incremento de la primitiva. Es lo mismo como decir que a lo largo de un camino cerrado el integral de f'(z) en las condiciones dichas es nulo. Veremos entre poco un resultado general de este tipo. Es esencial la uniformidad porque para llegar a la conclusi[ón] que el integral que resulta igual a f(b) - f(a) tiene siempre el mismo valor, necesitamos saber que f(a) es único y así f(b).

Calculo p.e.

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}$$



en el verso antiorario a lo largo de un círculo de centro O y radio R. Si en una region que comprende este círculo pudiera 1/z considerarse como derivada de una función uniforme, el integral tendría que ser nulo: mas esto no se aplica, siendo 1/z la derivada de log z que no es uniforme (p.) El integral vale

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx + i\,dy}{x + iy} = \int \frac{(x - iy)(dx + i\,dy)}{x^2 + y^2} = \int \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + i\int \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

× Mas gen.te si γ es círculo con centro $\underline{a}$ y radio R

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

de la misma manera

$(z = x+iy \;,\; a = \alpha + i\beta$. Resulta $= \displaystyle\int \frac{dx+idy}{x-\alpha+i(y-\beta)} =$

$$\int \frac{[(x-\alpha) - i(y-\beta)](dx+idy)}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = \int \frac{(x-\alpha)dx + (y-\beta)dy}{\cdots} + i\int \frac{-(y-\beta)dx + (x-\alpha)dy}{\cdots}$$

Pongo $x-\alpha = R\cos\theta$ $\quad y-\beta = R \operatorname{sen}\theta$ y continúa como antes.

×× Si en cambio tomo $\displaystyle\int \frac{dz}{(z-a)^2}, \int \frac{dz}{(z-a)^3}$ etc. son todos nulos: en efecto el integrando $\dfrac{1}{(z-a)^n}$ $(n \geq 2)$ $=$ $(z-a)^{-n}$ es la derivada de $\dfrac{(z-a)^{1-n}}{1-n}$, uniforme en el plano excluido $z=a$, y se aplica p. 117. (Para $n=1$ resultaría la derivada de $\log(z-a)$ que no es uniforme p. 69. Por esto no se aplica p. 117)

Pongo $x = R\cos\theta$, $y = R\operatorname{sen}\theta$ ~~(...)~~ y luego

$$\int_0^{2\pi}\frac{R^2\cos\theta\left(-\operatorname{sen}\theta\, d\theta\right)+R^2\operatorname{sen}\theta\left(\cos\theta\, d\theta\right)}{R^2}+i\int_0^{2\pi}\frac{-R^2\operatorname{sen}\theta\left(-\operatorname{sen}\theta\, d\theta\right)+R^2\cos\theta\left(\cos\theta\, d\theta\right)}{R^2}$$

$= i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$. El resultado no es cero. Observo que no depende del radio del círculo.

Observemos dos inegualdades relativas a integrales: una ya.

$$\boxed{\left|\int_P^Q f(z)\,dz\right| \le \int_0^L |f(z)|\,ds \qquad (1)}$$

si L es la longitud del camino de integración: en el segundo miembro $|f(z)|$ es un número real que consideramos como función del arco. Se averigua pensando en las sumas Σ que aproximan el integral.

$$\left|\sum_0^{n-1}(z_{r+1}-z_r)\,f(z_r^*)\right| \le \sum_0^{n-1}|f(z_r^*)|\,|z_{r+1}-z_r|$$

llamando $G_r\,G_{r+1}$ los puntos de la curva que corresponden a t_r, t_{r+1}, $|z_{r+1}-z_r|$ es su distancia, es decir la longitud de la cuerda G_rG_{r+1} y como esa cuerda es $<$ del arco $s_{r+1}-s_r$ (s_r: arco PG_r)

$$|\Sigma| \le \sum_0^{n-1}|f(z_r^*)|\,(s_{r+1}-s_r). \qquad (a)$$

Si luego tienden ~~...~~ los intervalos a cero, el segundo miembro tiende a $\int_0^L |f(z)|\,ds$. y al límite de la inegualdad (a) sigue (1).

Otra inegualdad relativa a integrales. Si en el camino de integración $|f| \le M$ sigue

$$\boxed{\left|\int_P^Q f(z)\,dz\right| \le ML} \qquad (2)$$

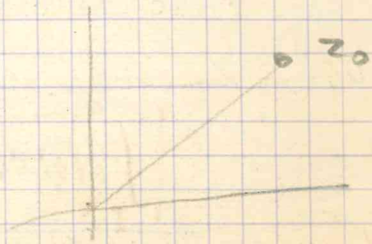
siendo como antes L el arco PQ. La (2) vale en el campo real $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le M(b-a)$. Y ahora aplicando (1) y después [illegible]

P.e. ej. $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ ...

$|2\pi i| \le \frac{1}{R} \cdot 2\pi R = 2\pi$

(max. en ...)

Otro ej. $I = \int_0^{z_0} z^n dz$ (rectilíneo)



n entero ≥ 0:

$$I = \frac{z_0^{n+1}}{n+1} \le |z_0|^n \cdot |z_0| = |z_0|^{n+1}$$

... pase $n=0$

Para las funciones analíticas subsisten(y se demuestran como en el caso real) varias propiedades bien conocidas de la integración;p.e. la relativa a la integral de una suma de funciones; integración por partes: si f,g son analíticas uniformes, y se integra a lo largo de un camino γ desde z=a al punto z=b,

$$\int_\gamma f'g\,dz = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_\gamma f g'\,dz$$

$$\left|\int_p^q f(z)\,dz\right| \le \int_0^L |f(z)|\,ds \le ML. \qquad (2)$$

Subsiste también en el caso complejo un teorema de integración por serie, relativo a una serie de funciones (continuas)

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

uniformemente convergente en un dado dominio.[1] Se demuestra como en el caso real, y precisamente así. Siendo la serie unif. conv , si tomo ε positivo arbitrario puedo determinar un n_o tal que para cada $n > n_o$ y para z cualquiera en el campo considerado resulte

$$|R_n(z)| < \varepsilon \qquad (\cdot\cdot)$$

donde llamo $R_n(z)$ al resto de la serie después del nº término. Ahora siendo identicamente

$$f(z) = f_1(z) \dots + f_n(z) + R_n(z)$$

sigue integrando(el integral de la suma de un nº finito de términos es la suma de los integrales)

$$\int f(z)\,dz = \int f_1(z)\,dz \dots + \int f_n(z)\,dz + \int R_n(z)\,dz$$

es decir

$$\int f(z)\,dz - \int f_1(z)\,dz - \dots - \int f_n(z)\,dz = \int R_n(z)\,dz$$

Tomando los valores absolutos y aplicando al segundo miembro la fórmula (2) logro siendo M un n.º cualquiera mayor de $|R_n(z)|$ por cada z

$$\left|\int f(z)\,dz - \int f_1(z)\,dz \dots - \int f_n(z)\,dz\right| \le ML$$

es decir,por la $(\cdot\cdot)$

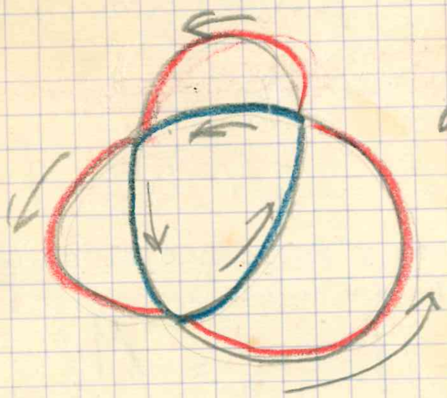
$$\left|\int f(z)\,dz - \int f_1\,dz \dots - \int f_n(z)\,dz\right| \le \varepsilon L$$

Así se concluye que siendo dado ε positivo arbitrario, existe n_o tal que para cada $n > n_o$ la diferencia entre el integral de f(z) y la suma de los primeros n términos de la serie

$$\int f_1(z)\,dz + \dots + \int f_n(z)\,dz + \int f_{n+1}(z)\,dz + \dots$$

(1) Se entiende que los integrales se refieren a un mismo camino de integración

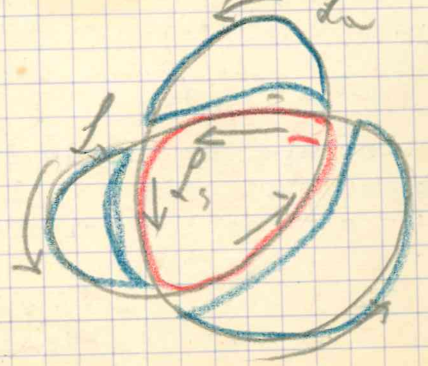
$$\times \int_s U\,dx + V\,dy = \iint_S \left(-\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) dx\,dy.$$



découp. en 2 carrés

Otre mais compliquée en 4

$$\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_3 + 2\mathcal{L}_4$$



es decir $< \varepsilon$ si en cambio de ε de antes tomo $\frac{\varepsilon}{L}$

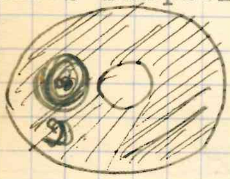
puede hacerse, en valor absoluto, menor que εL). Esto significa precisamente que la serie es convergente y tiene como suma $\int f(z)\,dz$

Observo que en este teorema, hasta ahora, como en casi todo que dijimos sobre la integración, no se habla de analiticidad: no se supone que las $f_i(z)$ sean analíticas, ni tampoco se dice que la suma de las funciones unif.te convergente sea analítica.

Ahora vamos a ocuparnos del caso efectivamente interesante de la integración de una función analítica, y encontramos el fundamental

Teorema de Cauchy = Sea una función analítica (uniforme), considerada en un dominio simplemente conexo: su integral a lo largo de una cualquier línea cerrada γ interior al dominio es nulo.

N.B. Si el campo de existencia es simplemente conexo, el teorema subsiste para cualquiera línea cerrada interior a él; sino, subsiste, como lo expresa el teorema, para líneas interiores a dominios simplemente conexos interiores al campo de existencia: v. p. e el dominio D de la figura.



En la demostración puede suponerse que el camino de integración no se corte: en caso contrario puede decomponerse en caminos cerrados parciales, cada uno de los cuales no se corta: el teorema subsiste para cada uno de ellos, y por consiguiente para el camino total.

&&&

Ahora bien, considero en las últimas hipótesis

$$\int_\gamma w\,dz = \int_\gamma (u+iv)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int v\,dx + u\,dy$$

y aplico el lema de Gauss (p. 25) que escribo así ~~Luego~~

$$\int_s U\,dx + V\,dy = \iint_S \left(-\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) dx\,dy$$

Entonces tomo $s = \gamma$, y el área interna S

$$\int w\,dz = \iint\left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy + \iint\left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\,dy$$

Los dos integrandos en el 2º miembro son los primeros miembros de las condiciones de ~~mono~~genereidad, y luego son nulos: las dos integrales son también nulos y sigue

$$\int_\gamma w\,dz = 0$$

El teor. de Cauchy **no** se aplica a los demás integrales

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^2}, \quad \int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^3}, \ \dots$$

de p 118: pero a pesar de esto, resultan nulos como lo vimos

× ~~Le~~ llamo $F(z)$

~~Aplic~~ Si tomo $\int_\gamma \frac{e^z}{z^2-1}\,dz$ con γ como en figura 1 no se aplica; en fig. 2 sí

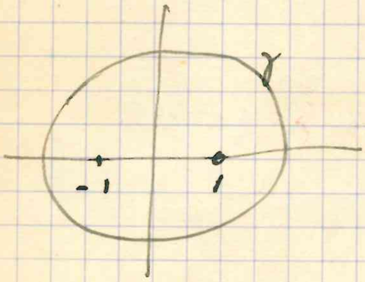


fig. 1

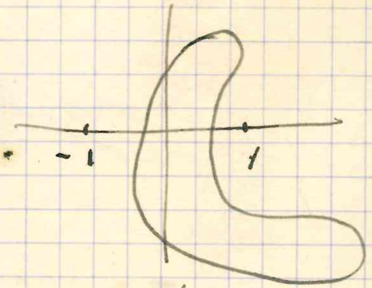
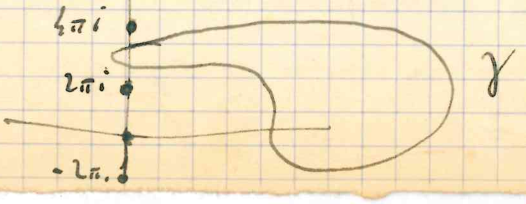


fig. 2 γ

y se aplica a $\int_\gamma \frac{dz}{e^z-1}$ en fig. 3

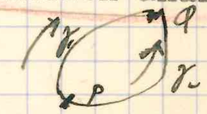


Obs. En el integral $\int \frac{dz}{z}$ de p. 117, que no resultaba nulo, las actuales hipótesis no subsistían, porque en el interior del círculo había un punto ($z=0$) donde la función no es definida.

El teorema de Cauchy equivale al siguiente

Siendo γ_1, γ_2 dos caminos PQ interiores a un dominio simplemente conexo que pertenece al campo de existencia de una función analítica (uniforme) $w(z)$, tenemos

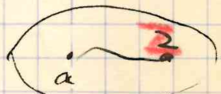
$$\boxed{\int_{\gamma_1} w\,dz = \int_{\gamma_2} w\,dz}$$



es decir, el integral depende sólo de los límites del camino de integración (Es suficiente aplicar el teor de Cauchy a la línea cerrada formada por γ_1 y γ_2).

El integral como función del límite superior (analog.te al caso real). En campo simplemente conexo C considero

$$\int_a^z f(z)\,dz$$



siendo f analítica. Si tengo fijo el punto a y dejo variar el punto $\boxed{Z}$ el integral resulta una función de Z, y además tiene un único valor en cada Z, como resulta de lo visto. Luego es una función uniforme de Z. Digo que es analítica y tiene como derivada f(z). Recuerdo que cuando se considera (en campo..

$$I = \int_{(x_0 y_0)}^{(X,Y)} A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

donde $A\,dx + B\,dy$ es un diferencial exacto, de (x_0, y_0) fijo a (X, Y) variable, en las cuales condiciones (p. 23) I es función uniforme de X, Y (indip. del camino de integración) tenemos:

$$\frac{\partial I}{\partial X} = A(X,Y) \qquad \frac{\partial I}{\partial Y} = B(X,Y)$$

Entonces. Si llamo U, V la parte real y el coef del img en F(Z), ~~tengo~~ pongo $z = x + iy$, $f = u + iv$, $a = x_0 + iy_0$

$$U = \int_{x_0 y_0}^{XY} u\,dx - v\,dy \; ; \quad V = \int_{x_0 y_0}^{XY} v\,dx + u\,dy$$

Aplicando la propiedad recordada

$$\frac{\partial U}{\partial X} = u(X,Y); \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = -v, \quad \frac{\partial V}{\partial X} = v, \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = u$$ sobre las cuales

leo

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial Y}, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial V}{\partial X}$$ es decir F satisface a las condiciones de monogeneidad; existe $\frac{dF}{dZ}$ y vale (p. 117)

$$\frac{dF}{dZ} = \frac{\partial U}{\partial X} + i\frac{\partial V}{\partial X} = u(X,Y) + i\,v(X,Y) = f(Z).$$

Queda así demostrada la existencia de funciones primitivas de una función analítica

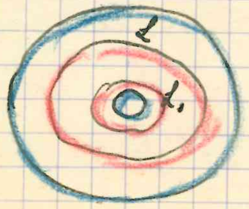
Resulta también que si F primitiva de f:

$$\int_a^b f(z)\,dz = F(b) - F(a)$$

pues $f = F'$, y es la fórmula de p. 118.

Existe un teorema inverso del teor. de Cauchy, el teorema de Morera, que me limito a enunciar: si una función que supongo sólo continua $w(z)$ tiene la propiedad que ~~[illegible]~~ $\int w(z)\,dz$ a lo largo de cada línea cerrada ~~es~~ siempre nula, el teorema afirma que $w(z)$ es necesariamente analítica

Luego en particular si en el interior del campo de existencia ~~considerado~~ supuesto doblemente conexo tomo líneas cerradas... que giren una vez entorno al contorno interior.



$$\int_L f\,dz = \int_{L_1} f\,dz \qquad y \quad \int L = \int L_0, \quad \int L_1 = \int L_0 \Rightarrow \int L = \int L_1$$

(Si L y L_1 se cortasen, tomaría L_0 que no corte ninguna de las dos

Y finalmente $f(z)$ es continua, y por consiguiente F analítica.

La F es una primitiva de f, también $F+K$ con k const. Ni hay otras, porque de

$$\frac{dF}{dz} = \frac{dG}{dz}$$

sigue

$$\frac{d(F-G)}{dz} = 0$$

y una función con derivada nula es constante (p.116)

OBS. Hemos definido las funciones analíticas como derivables con derivadas continuas, y para ellas demonstramos el teor fund de Cauchy. Podría verse que la hipótesis de la continuidad de la derivada puede evitarse, y demostrar el teorema de Cauchy y desarrollar toda la teoría sin suponerla.

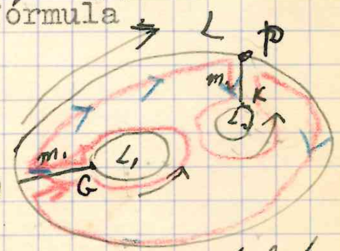
El teor fund.1 de Cauchy puede extenderse a dominios no simplemente conexos. Si en el interior de campo de existencia de $f(z)$, siempre anal uniforme, considero un dominio D k veces conexo, limitado exteriormente por linea L, y interiormente L_1, L_{k-1} (p 7), continua subsistiendo el teor de Cauchy p.123

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

donde se tome como camino γ el conjunto de las líneas $L, L_1, .L_{k-1}$ con tal que sean recorridas la exterior en un sentido, y las interiores en un mismo sentido, opuesto al anterior(1), lo que es lo mismo, si recorrimos todas las lïneas que constituyen el contorno en un mismo sentido

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz \quad + \int_{L_{k-1}} f(z)\,dz \,\}.$$

Es clara la equivalencia entre la primera fórmula que tomando los integrales todos en un mismo sentido puede escribir



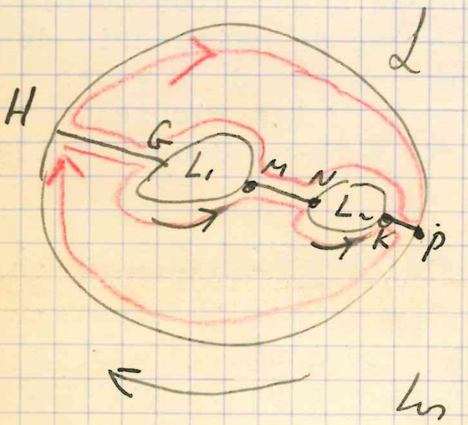
$$-\int_L + \int_{L_1} + \dots + \int_{L_{k-1}} = 0.$$

Para demostrarlo, me refiero al caso $k=3$ de la figura: uno un pt. de L, a

(1) es decir de manera que el interior de D siempre quede a la derecha o a la izquierda de quien recorre el contorno.

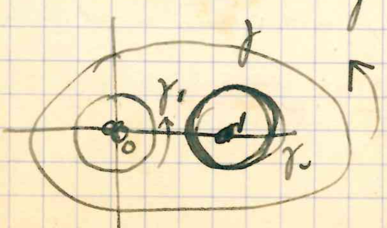
En la dem. anterior a la derecha podríamos tomar "anterior a la izquierda"

× Otra dem. substl.te equivalente es esta: uno pt. H de $\mathcal{L}$ con G de L_1, M de L_1 con N de L_2, K de L_2 con P de $\mathcal{L}$ ~~[illegible]~~



El interior de $\mathcal{L}$ queda partido en 2 regiones simplemente conexas. Aplico a cada una el teor. de Cauchy. ~~Las~~ $\int_H^G$ y sumo. Las $\int_H^G, \int_G^H$ se destruyen, etc.

×× El teor. de Cauchy generalizado resulta útil para calcular el $\int$ de una función racional descompuesta en sus el.es simples. Por ej: $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{3}{z-1} + \frac{4}{(z-1)^2}$ el integral extendido al contorno γ de la fig. se descompone en la suma de dos



extendidos a los círculos γ_1, γ_2: el primero vale $2\pi i$, y el segundo $6\pi i$ (v. p.124): luego $\int = 8\pi i$. Algo semejante más general veremos en la teoría de los residuos.

un pt de L mediante un arco m_1 , analog.te m_2 :m_1 va de G a H, m_2 de K a P. Si agrego al contorno incial L L_1 L_2 los dos arcos m_1, m_2 cada uno de los cuales sea recorrido dos veces en sentido opuesto, vengo a formar un contorno único,que puedo recorrer de manera continua,p.e. partir de G recorrer L etc. Este contorno único encierra un dominio simplemente conexo, al cual puede aplicarse el teor. de Cauchy: luego

$$\int_{L_1} + \cancel{\int_G^H} + \int_H^P + \cancel{\int_P^K} + \int_{L_2} + \cancel{\int_K^P} + \int_P^H + \cancel{\int_H^G} = 0$$

donde los inegrales a lo largo de las líneas L,L_1 L_2 son tomados en el sentido de las flechas. Y como los dos integrales a lo largo de m_1 se destruyen ,etc. sigue el resultado.

Resulta ahora claro p.e. porque a p.117, calculando

$$\int \frac{dz}{z}$$

a lo largo de un círculo de centro O y radio R encontramos un resultado ($2\pi i$) que no dependía de R.En la corona circular entre dos círculos de cemtro O la función 1/z es analítica y puede aplicarse el último teorema. ~~luego~~ (caso particular de p.126)

$$\int_{L_1} \frac{dz}{z} = \int_L \frac{dz}{z}$$

Antes bien,si en cambio de un círculo tomara una línea γ cerrada ~~&&&~~ después de un giro alrededor de O ~~(que no se corte~~) el último razonamiento nos prueba que también

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

(basta tomar un círculo p e todo interior...)

Paso ahora a la fórmula de Cauchy,que tiene importancia fundamental.En el interior del campo de existencia de la fn an (siempre uniforme) f(z) considero una línea cerrada γ que no se corte .Entonces los valores que f(z) toma sobre el contorno γ determinan los valores que la función toma en cada punto interior a,según la fórmula de Cauchy:

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a}} \qquad (1)$$

(donde el contorno es recorrido en sentido antiorario= area interna a la izquierda, como a p.117,cuyo resultado ahora aplicaremos). La fórmula tiene su importancia en el hecho que destacamos que los valores al contorno determinan los valores de f(z) en el interior.

Obsérvese que el integral al segundo miembro no resulta nulo. No puede aplicarse en efecto el teor. de Cauchy a la función integrada, en cuyo denominador aparece $z-a$; el integrando no es una función anallítica en todo el interior de γ

Para demostrar (1) trazo un círculo g con centro a, todo interior a γ, con radio R. Entonces, los contornos siendo recorridos en el mismo sentido, antiorario:

$$\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int_g \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

En efecto el teorma de p 126 puede aplicarse a los dos contornos considerados, pensando p.e. de considerar la función integranda entre dos líneas cerradas L_1 interior a g y L exterior a γ: entre L y L_1 el integrando es funciñon analítica. Ahora biem, siendo $f(z)$ analítica y luego continúa c.e. ene, dado ε positivo arbitrario, puede tomarse R bastante pequeño porque en el interior del círculo g (de radio R) resulte

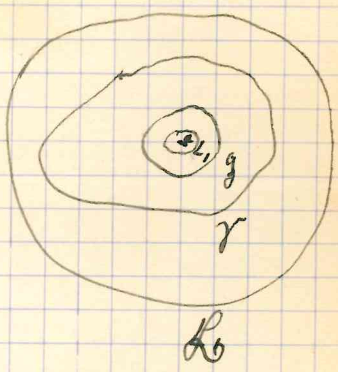
$$|f(z)-f(a)| < \varepsilon$$

es decir

$$|\lambda(z)| < \varepsilon$$

si pongo

$$f(z)-f(a) = \lambda(z).$$



Entonces $f(z) = f(a) + \lambda(z)$

$$\int_g \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int_g \frac{f(a)\,dz}{z-a} + \int_g \frac{\lambda(z)\,dz}{z-a}$$

En el 2° miembro, 1er integral: $f(a)$ es costante, y $\int_g \frac{dz}{z-a}$ vale $2\pi i$ (v. p. 118) ~~(lo mismo como para $\int \frac{dz}{z}$, solo que ahora el centro del círculo es el pt. a en cambio que el pt. 0~~; luego vale $2\pi i f(a)$.

Cuanto al 2°, sobre g tengo $z-a = Re^{it}$, siendo t la anomalía respecto al polo a. Luego (integr. por substit.n con z. f de var. real p. 117) vale $\int_0^{2\pi} \frac{\lambda\, i Re^{it}\, dt}{Re^{it}} = i\int_0^{2\pi} \lambda\, dt$ siendo λ siempre calculado en los pts. de g. Ahora como $|\lambda| < \varepsilon$, sigue

$$\left|\int_g \frac{\lambda(z)\,dz}{z-a}\right| = \left|\int_0^{2\pi} \lambda\, dt\right| \leq \int_0^{2\pi} |\lambda|\, dt \leq 2\pi\varepsilon.$$

Luego, dado ε positivo arbitrario resulta

$$\left|\int_g \frac{f(z)\,dz}{z-a} - 2\pi i f(a)\right| \leq 2\pi\varepsilon.$$

es decir

$$\int \frac{f(z)\,dz}{z-a} = 2\pi i\, f(a) \qquad \text{c.d.d.}$$

El teor demonstrado es muy notable: p.e. porque la variable a de la cual depende la función f en el ~~segundo~~ segundo miembro aparece en forma extremadamente sencilla.De esto seguirán consequencias inportantes

Una primera es esta: una función analítica posee no sólo la primera derivada,sino todas las derivadas sucesivas(resultado que no tiene análogos en la teoría de las funciones de variable real.~~P&&&~~ Digo esto, y además digo que todas se obtienen derivando bajo el signo integral. Ante todo pruebo

$$(2)\qquad f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}$$

como se obtiene materialmente derivando bajo el signo (pero a priori no estamos seguros que esto pueda hacerse, y luego hay que probarlo). ~~Quiero probar~~

Para esto considero f´(a) como límite de la razón incremental Formo esta razón aplicando la fórmula de Cauchy (a un contorno que incluya en su interior el punto a...)

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i h}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a-h} - \frac{1}{2\pi i h}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i \cancel{h}}\int_\gamma \frac{\cancel{h}\, f(z)\,dz}{(z-a)(z-a-h)}$$

que escribo ~~que escribo~~

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\frac{f(z)}{(z-a)(z-a-h)} - \frac{f(z)}{(z-a)^2}\right] dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\cdot h}{(z-a)^2(z-a-h)}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}$$

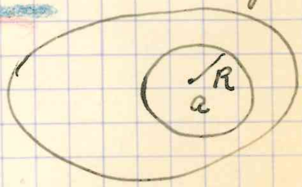
× Tanto que con este razonamiento si tomo $\varphi(z)$ continua sobre γ (y definida sólo sobre γ) – recordando que definimos las integrales de f.s continuas, resultaría que la función de a, fuera de γ, $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(z)}{z-a}\,dz$ tiene derivada (lo que no se sabría a priori) y esta vale

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(z)}{(z-a)^2}\,dz$$

(Pero la $f(a)$ analítica así definida no se reduce generalmente sobre γ a $\varphi(z)$.)

×× Omito estas demostraciones, porque el resultado (1°) resultará de otra manera más adelante ~~(p. 15?)~~ (v. p. 152-3) raz. incr. $-\ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} = \frac{h}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2(z-a-h)}$ (°)

Ahora hago tender h a cero. Tomo los valores absolutos de los dos miembros. Para mayorar el valor absoluto del integral a 2° miembro, llamo M un n° $>$ de todos los $|f(z)|$ sobre γ y R el radio de un círculo de centro a todo interior ya a γ: luego para todos los z sobre γ



$|f(z)| < M$, $|z-a| > R$

y $|z-a-h| \geq |z-a| - |h| \geq R-|h|$ (si h ya bastaría pequeño para que $|h| < R$)

luego $\left|\frac{f(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}\right| \leq \frac{M}{R^2(R-|h|)}$

y (p. 119.(2)) llamando L la longitud de γ

valor abs. 2° miembro (°) $\leq \frac{|h|.L}{2\pi}\frac{M}{R^2(R-|h|)}$

Cuando $h \to 0$, tiende a cero. Luego lo mismo ocurre del 1er miembro, lo que prueba el asunto.

Obsérvese que, aún si hubiésemos ignorado a priori la existencia de $f'(a)$, el razonamiento hecho habría también servido para probar esta existencia. X Y de ~~la misma~~ manera análoga se probaría: $f''(a)$ existe y es dado por

$$f''(a) = \frac{2!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^3}$$

Y así continuando se prueba que existe $f^{(n)}(a)$ y es dado por

$$\boxed{f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}} \quad . \qquad (°°) \quad XX$$

El resultado es muy notable porque enseña que es suficiente la existencia y continuidad de la derivada primera para que existan también todas las sucesivas. Y encontraremos(p151) resultado que dice aún más.

Pero, antes de pasar a este resultado, nos paramos a observar varias consecuencias de los obtenidos.

La fórmula de Cauchy expresa f(z) en el interior de un contorno mediante los valores al contorno. Luego se entiende como todo el comportamiento de f en el interior sea dominado por su comportamiento al contorno. P.e., conociéndose un número M mayor de todos los $|f(z)|$ al contorno, podemos preveer que podrá encontrarse una limitación para los valores de $|f(z)|$ en el interior. Efectivamente la fórmula de Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

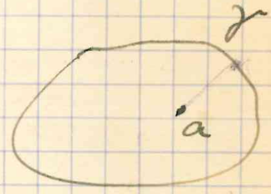
nos permite de asignar una cantidad mayor de $|f(a)|$, mediante la inegualdad

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| < ML \quad \text{si } |f| < M \text{ sobre } \gamma \text{ y long } \gamma = L$$

(2) de p. 119. Ahora, si llamamos δ la mínima distancia (o un n° ≤ de esta) entre un punto del contorno y el punto a tenemos para los z al contorno

$$|f(z)| < M \quad ; \quad |z-a| \geq \delta \quad \frac{1}{|z-a|} \leq \frac{1}{\delta}$$

y entonces



$$\boxed{\left|\frac{f(z)}{z-a}\right| \leq \frac{M}{\delta}}$$ (que hace ahora el papel de M en (2) ~~de M~~)

y luego

$$\boxed{|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{M}{\delta}\,L = \frac{ML}{2\pi\delta}}$$

Luego $|f(a)|$ está limitado mediante esta fórmula mediante M (que limita $|f|$ al contorno), L (longitud del contorno), y δ (mínima distancia entre a y el contorno, o n° menor). Además, en función de estos mismos dados pueden también mayorarse las derivadas (todas) en el interior, aplicando (9ª) que nos da

$$\boxed{|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\,ML}{2\pi\delta^{n+1}}}$$

En el caso particular donde como línea L se tome un círculo de radio R, con el centro en a, ~~basta~~ tenemos $L = 2\pi R$ y

P.e. e^z ya por z real muy grande positivo toma valores grandes como queremos. ¿Y sen z? Si z es real $|\text{sen}\, z| \leq 1$: quiere decir que $|\text{sen}\, z|$ viene a ser muy grande si tomamos convenientemente valores imaginarios de z.

$\delta = R$, luego las dos limitaciones encontradas vienen a ser

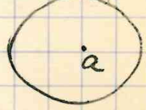
$$|f(a)| \le M \quad \text{(I)} \qquad\qquad |f^{(n)}(a)| \le \frac{n!\,M}{R^n} \quad \text{(II)}$$

La última frómula,para n=1, nos lleva a un teorema de Liouville.Supongo que f sea analítica en todo el plano propio, y además acotada en todo el plano propio.Es decir exista M tal que en todos los puntos z del plano propio sea
(ºº)

$$|f(z)| < M$$

El teorema de Liouville expresa que en estas condiciones la f se reduce necesariamente a una constante.En efecto como la (ºº) vale en particular sobre cada círculo de centro a(punto cualquiera) con radio R arbitrario grande como queremos la(II) para n=1 nos da

$$|f'(a)| < \frac{M}{R}$$



Como R puede ser grande como queremos, sigue que $|f'(a)|$ es menor se cualquiera cantidad positiva.Luego vale cero=La f tiene derivada nula en todo el plano: es una constante. c.d.d

En otros términos, podemos decir que una función analítica en todo el plano propio, que no se reduzca a una constante toma necesariamente valores grandes cuanto queremos en valor absoluto. Es decir,dado M arbitrario existe algun punto z donde

$$|f(z)| \ge M \qquad \text{(III)}$$

Del teorema de Liouville sigue de manera muy sencilla el teor fundl del algebra. Damos menor esta precisación del último resultado(III) relativo al caso donde f es un polinomio en z (de grado $m \ge 1$), luego seguramente función anal en todo el plano propio. Lema.- Sea

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m \qquad (a_0 \ne 0)$$

Digo que dado M positivo arbitrario puede determinarse un entorno circular del punto impropio(p.7)=región exterior a un círculo, tal que en todossus puntos valga (III)

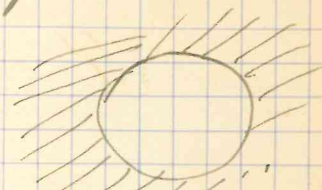
En efecto escribo (fuera de z=0)

$$f(z) = z^m\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_m}{z^m}\right)$$

Luego en valor absoluto, si pongo $|z| = \rho$, $|f(z)| = \rho^m \left| a_0 + \frac{a_1}{z} \cdots + \frac{a_m}{z^m} \right|$

La expresión
$$\left| a_0 + \frac{a_1}{z} \cdots + \frac{a_m}{z^m} \right|$$
tiende a $|a_0|$ cuando $z \to \infty$, es decir para todos los ρ bastante grandes difiere de $|a_0|$ tan poco como queremos, p. ex menos de $\frac{1}{2}|a_0|$. Entonces para todos los ρ bastante grandes aquella expresión (valor absoluto) vale más que $\frac{1}{2}|a_0|$. Luego para todos los ρ bastante grandes, es decir para todos los z exteriores a un conveniente círculo $|f(z)| > \frac{1}{2}|a_0|\rho^m$. Si además tomo ρ bastante grande para que $\frac{1}{2}|a_0|\rho^m$ resulte $> M$ (lo que cierto es posible) sigue:

$$|f(z)| > M$$



He aquí la aludida dmn del teor.fundl del álgebra .Seaf(z) un polimomio (efectivo).Su pongo, si posible,que no tenga ceros. Para cada z

$$f(z) \neq 0$$

y luego (p.1)) puede considerarse $1/f$,que es también función analítica ,en todo el plano propio. Llamo g(z) a esta nueva función analítica en todo el plano propio.Aplico el ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ Lema a f(z), tomando 1 como valor de M, y así obtengo un círculo γ en cuyo exterior es ,en cada punto

$|f(z)| > 1$ y por consiguiente $|g(z)| < 1$

Por otra parte, aplicando el teor de Liouville a g(z) resulta que esta función debe tomar valores grandes cuanto queremos.Donde? al exterior de γ no(porque $|g| < 1$), en el interior tampoco, por=

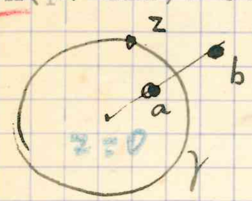
× función real continua de las dos variables reales x, y es acotada

×× Supongo por simplicidad que su centro sea $z = 0$ si fuese $z = \cancel{k}$ tomaría como nueva variable compleja $Z = z - \cancel{k}$ y me reduciría a ese caso.

 resulte $\leq$ del lim sup $|g(z)|$

en
que el interior $|g(z)|$ ~~[illegible] los valores tomados al contorno según (1) [illegible]~~. Luego absurdo. (a cc pp. 153 bis, ter, quater)

De la fórmula de Cauchy, vamos a deducir la fórmula de Poisson(p. 111). Considero, en el int del campo de existencia de f(z) un círculo γ, y llamando a a un punto cualquiera de su interior, expreso f(a) mediante la fórmula de Cauchy



$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

Si b es exterior al círculo, el integral análogo vale cero, es decir

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-b}$$

porque el integrando $f/(z-b)$ ahora queda una función analítica en todo el interior de γ. Restando deduzco

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) f(z)\,dz \qquad (\gamma)$$

Supongo ahora que b sea el correspondiente de a en la inversión respecto al círculo. Si R es el radio del círculo, tenemos (p.101)

$$b = \frac{R^2}{\bar a}$$

Pongo $a = x+iy$ (cuidado: no $z = x+iy$, sino a).
$\bar a = x - iy$; o también coord. polares de a: r y φ
($x = r\cos\varphi$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$)
Entonces

$$b = \frac{R^2}{x-iy} = \frac{R^2(x+iy)}{r^2} = \frac{R^2}{r}(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

mientras $a = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$

Calculo ahora $\frac{1}{z-a}$, $\frac{1}{z-b}$ expresando no sólo a, b sino también z en forma trigonométrica. Como $|z| = R$ (sobre γ) será

$$z = R(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

si llamo θ a la ~~anomalía~~ de z, variable s. γ.
anomalía

* 145

<u>Digresión sobre el teor fund del algebra.</u> La dmn que preced[e] es muy sencilla, pero intervienen en la misma conceptos de natu raleza más elevada. El teor. fund expresa que una ecuación alg de grado n tiene n raices complejas: lo esencial consiste en denostrar que tiene almenos una , porque si (fo polinomio de grado n) si f(x) =0 tiene la raiz $x-x_1$ al dividir el poli nomio por $x-x_1$ logro polinomio g(x) de grado n-1; entonces sea x_2 una raiz de g(x) =0 etc etc. Por lo tanto puede consi derarse como teor fund del algebra el que expresa que una ecua ción algebraica tiene al menos una raiz(teorema de existencia de las raices). Se llama teor de D'Alembert, siendo debida al mismo una demonstración (incompleta): la primera dem. com pleta se debe a Gauss. Después se encontraron muchas demonstra ciones: pero siempre se trata de dems no imediatas.

Hay casos particulares en los cuales la existencia es clara P.e. si n es impar, y la ecuación tiene coef. reales. Entonces el primer miembro

$$f(x) \equiv a_0 x^n + \cdots + a_n$$

donde supongo p,. el primer coef a_0 positivo toma para x muy grande negativo valores negativos, para x muy grande positivos valores positivos, y por lo tanto siendo una función continua de x tiene que anularse al menos una vez entre $-\infty$ y $+\infty$. Analog.te si, siendo los coef reales y n par los coeficientes a_0 y a_n llevan signos opuestos: porque entonces para x =0 y $x=\infty$ el polinomio viene a tener signos opuestos. Pero de estas constataciones todavía no sigue una dem general(n par ó impar, los coeficientes numeros complejos cualesquiera).

Entre las demonstraciones elementales recuerdo la siguiente. Al variar x en el plano de Gauss, considero

$$|f(x)|$$

número variable positivo o nulo. Y se trata de demostrar que existe al menos un valor de x en correspondencia al cual re- sulta nulo. Con este objeto considero el conjunto de los valo- res tomados por $|f(x)|$, y su límite inferior k, número a priori positivo o nulo.

En primer lugar hay que demostrar que k es no solo límite inferior, sino mínimo, es decir que resulta alcanzado: existe x tal que

$$|f(x)| = k$$

Esta conclusión puede lograrse al observar que puedo dividir los puntos del plano en dos regiones: una exterior a un círculog donde $|f(x)|$ es grande como lo queremos(así resulta de la obs.n previa al finde p. 139: la dm tiene carácter elemental) y la otra (interior e periferia de g). Entonces me limíto a esta segunda región: el lim inf considerado es también lim inf relativamente a la misma región. Así tenemos la ventaja de considerar $|f(x)|$ función continua de x en una ragión cerrada, y de esto resulta(teoremas sobre las funciones continuas)que el límite inferior es alcanzado.

Por lo tanto existe un punto x_o tal que

$$f(x_o) = k$$

Queda ahora por demostrar que este mínimo k vale cero. de Sernet

Y esto resulta si demuestro el teor. siguiente: si, siendo f un polinomio, considero un valor de x, sea $x=x_o$ donde f no se anule, existe un número complejo h tal que

$$|f(x_o+h)| < |f(x_o)|$$

En efecto, después de demostrado este teorema, si no fuese k=o la función

$$|f(x)|$$

que por $x=x_o$ vale k no resultaría minima por $x= x_o$.

Cuanto a la demn del último teorema, puedo supóner $x_o=0$ (si imagino de hacer un cambiamento de variable

$$x' = x - x_o \text{)}$$

Se trata de demostrar si f(0) no es nulo, existe h tal que

$$|f(h)| < |f(0)|$$

o , al escribir x en cambio de h:
si f(o) no es nulo existe x tal que

$$|f(x)| < |f(0)|$$

Escribo $f(x) = \boxed{A_0 + A_m x^m + A_{m+1} x^{m+1} \cdots + A_n x^n}$

donde,como es claro,

$$f(0) = A_0 \neq 0$$

y supongo que el coef. A_m sea el primer coef sucesivo distinto de cero. Entonces

$$\frac{f(x)}{f(0)} = 1 + \frac{A_m}{A_0} x^m + \cdots + \frac{A_n}{A_0} x^n$$

Pongo

$$x = \rho e^{i\theta} \qquad \frac{A_l}{A_0} = \gamma_l e^{i\psi_l} \quad (l = m, \ldots n)$$

Luego
$$\frac{f(x)}{f(0)} = 1 + \gamma_m \rho^m e^{i(m\theta+\varphi_m)} + \dots + \gamma_n \rho^n e^{i(n\theta+\varphi_n)}$$

El segundo término (donde $\gamma_m \neq 0$) vale
$$\gamma_m \rho^m \left[\cos(m\theta+\varphi_m) + i \operatorname{sen}(m\theta+\varphi_m)\right].$$

Siendo hasta ahora $x = \rho e^{i\theta}$ arbitrario, lo tomo de manera que
$$m\theta + \varphi_m = \pi$$

así que $\cos(\dots) = -1$, $\operatorname{sen}(\dots) = 0$ y el segundo término vale
$$-\gamma_m \rho^m$$

Entonces
$$\frac{f(x)}{f(0)} = (1-\gamma_m\rho^m) + \cancel{\gamma_{m+1}\rho^{m+1}} + \dots + \gamma_n \rho^n e^{i(n\theta+\varphi_n)}$$

Hasta ahora ρ era arbitrario: lo elijo bastante pequeño para que $1-\gamma_m\rho^m > 0$ es decir
$$\rho < \sqrt[m]{\frac{1}{\gamma_m}} \qquad (1)$$

Entonces (valor abs de la suma es menor o igual a la suma de los valores absolutos):
$$\left|\frac{f(x)}{f(0)}\right| \leq (1-\gamma_m\rho^m) + \gamma_{m+1}\rho^{m+1} + \dots + \gamma_n\rho^n$$
$$\leq 1 - \gamma_m\rho^m\left[1 - \frac{\gamma_{m+1}}{\gamma_m}\rho - \dots - \frac{\gamma_n}{\gamma_m}\rho^{n-m}\right]$$

Cuando $\rho \to 0$, los corchetes tienden a 1. Es decir existe un s positivo tal que si
$$\rho < s \qquad (2)$$

los corchetes son positivos. Por consiguientes si elijo ρ de acuerdo con (1) y (2), y θ como lo dije,
$$\left|\frac{f(x)}{f(0)}\right| \leq 1 - \text{n° positivo}$$

es decir,
$$\left|\frac{f(x)}{f(0)}\right| < 1 \quad \text{esto es} \quad |f(x)| < f(0)$$

c. q. d.

(vuélvase a p. 143)

* viene de 143   145.

Ahora

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{R(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)-r(\cos\varphi+i\,\text{sen}\,\varphi)}=\frac{1}{(R\cos\theta-r\cos\varphi)+i(R\,\text{sen}\,\theta-r\,\text{sen}\,\varphi)}$$

$$=\frac{(R\cos\theta-r\cos\varphi)-i(R\,\text{sen}\,\theta-r\,\text{sen}\,\varphi)}{(R\cos\theta-r\cos\varphi)^2+(R\,\text{sen}\,\theta-r\,\text{sen}\,\varphi)^2}$$

El denominador vale

$$R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2. \quad \text{Luego}$$

$$\frac{1}{z-a}=\frac{(R\cos\theta-r\cos\varphi)-i(R\,\text{sen}\,\theta-r\,\text{sen}\,\varphi)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}.$$

Para calcular $\frac{1}{z-b}$ observemos que según las expresiones de a, b a p. 143 pasamos de a a b dejando invariable φ y substituyendo r con $\frac{R^2}{r}$. Luego

$$\frac{1}{z-b}=\frac{\left(R\cos\theta-\frac{R^2}{r}\cos\varphi\right)-i\left(R\,\text{sen}\,\theta-\frac{R^2}{r}\,\text{sen}\,\varphi\right)}{R^2-2\frac{R^3}{r}\cos(\theta-\varphi)+\frac{R^4}{r^2}}=$$

(divido num. y den por R, y multiplico por r^2; sacando después r a factor común en el num. y R en el den.)

$$=\frac{r}{R}\,\frac{r\cos\theta-R\cos\varphi-i(r\,\text{sen}\,\theta-R\,\text{sen}\,\varphi)}{r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+R^2}.$$

Por consiguiente si substituyo en (γ), los términos amarillos se eliden y luego

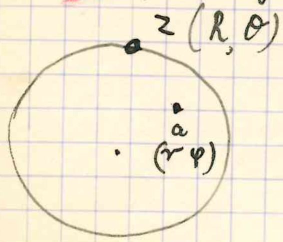
$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\left(R-\frac{r^2}{R}\right)\cos\theta-\left(R-\frac{r^2}{R}\right)i\,\text{sen}\,\theta}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,f(z)\,dz \quad =$$

es decir

$$f(a) = \frac{R^2-r^2}{2\pi i R}\int_\gamma \frac{\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, f(z)\,dz$$

(r es constante respecto a z : es el módulo de a.

A lo largo de γ $\qquad z = R(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$



Luego ~~en [illegible]~~ en cambio de considerar el integral como integral de una función de var cplj z (de la qual depende también θ cantidad variable ~~también~~ bajo el signo de integral) puedo considerarlo como $\int$ función de la var. real θ mediante int.n por subst.p 117

Por consiguiente siendo

$$dz = R(-\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta)\,d\theta = Ri(i\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$$

tenemos

$$f(a) = \frac{(R^2-r^2)Ri}{2\pi i R}\int_0^{2\pi} \frac{(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\, f[R(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]\,d\theta}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}$$

es decir

~~Luego, llamando u y v las partes reales de la función f~~

$$f(a) = \frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f[R(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]\,d\theta}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}$$

Luego llamando u y v las partes reales y el coef. del imag. en f. ~~como funciones~~ que tomo como funciones de las coords polares

$$u(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi) + i\,v(\ldots) = \frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(R\cos\theta, R\operatorname{sen}\theta) + i\,v(\ldots)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta$$

y luego considerando las solas partes reales

$$u(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi) = \frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(R\cos\theta, R\operatorname{sen}\theta)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta$$

Es esta la fórmula de Poisson, que expresa el valor de la función armónica u en cada punto interior al círculo en función de los valores de la misma función sobre la cironferencia.

OBSERVACIONES. I) Porque nos hemos servido de la fórmula (γ) p. 143, restando de la fórmula de Cauchy la identidad 0=.. p.143 en cambio de servirnos sin otro de la fórmula de Cauchy? La razón es esta, que en la penúltima fórmula p.147 la parte real y la parte imaginaria en el segundo miembro contienen resp. sólo u y v (al contorno) ,y luego la u en el interior queda expresada mediante la sola u al contorno (en otras palabras la cantidad que multiplica la f bajo el signo integral es real. En cambio si no ~~servísimos~~ sirviéramos de

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

tendríamos ~~p.145~~ mediante p. 145

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(R\cos\theta - r\cos\varphi) - i\,(R\sin\theta - r\sin\varphi)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2}\, f(z)\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\left[(R\cos\theta - r\cos\varphi) - i\,(R\sin\theta - r\sin\varphi)\right](u+iv)\,.\,Ri\,(\cos\theta + i\sin\theta)}{(R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2)}\, d\theta$$

y tomando la parte real.

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \ldots \int_0^{2\pi} \frac{(\ldots)\,u + (\ldots)\,v}{\ldots}\, d\theta$$

Luego u en el interior resultará expresada mediante los valores al contorno de u y de v.

II) Así como la hemos obtenida, la fórmula de Poisson nos da el valor de u en cada punto interior, excluido el centro, porque como junto con el punto a hemos considerado su correspondiente b en la inversión, si a cae en el centro, b sería el punto impropio, no tendría sentido hablar de R^2 / r ,como lo hicimos, siendo ahora r=o, etc. Pero, la fórmula sigue subsistiendo también en el centro, es decir para r=o, y nos da el valor u_o en el centro expresado así:

$$u_o = \frac{R^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(R\cos\theta, R\sin\theta)\,d\theta}{R^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R\cos\theta, \ldots)\,d\theta$$

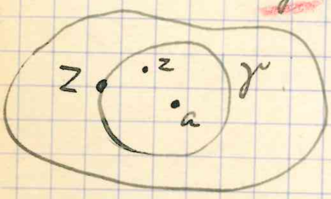
Esto podría verse pasando al límite para $r \to 0$ en la fórmula de Poisson.

Mediante este teorema acaban de unificarse los puntos de vist de Cauchy y de Weierstrass :una función anal. en el sentido de Cauchy -Riemann resulta ahora desarrollable en serie de pot, es decir anal.ca en el sentido de Wierstrass. Ya hemos encontrado con anterioridad la proposición inversa.

III) la fórmula de Poisson, así como la hemos deducida, tiene validez un poco disminuída(porque en nuestro razonamiento u es la parte real de una función analítica en un campo de existencia respecto al cual el contorno del círculo sea interior). A pesar de esto, la fórmula subsiste en hipótesis más generales: p. dada u ~~continua en el contorno~~ que se mantenga finita y continua al contorno

Desarrollo en serie de Taylor. Ya sabemos que de la analiticidad sigue la existencia de todas las derivadas sucesivas. Vamos ahora a ver más: sigue no solo esto sino la posibilidad de desarrollar la función en serie de Taylor. El resultado exacto es esto.

Considero f(z) analítica (unif) en campo C. Sea a un punto interior, y sea γ un círculo todo interior a C, con centro en a. Entonces f(z) es desarrolable en serie de potencias de z-a, que seguramente converge en todo el interior de γ. También este resultado no tiene análogo para f real.



En efecto sea z interior a γ :llamo ahora para no confundir Z (en cambio de z) un punto variable sobre γ, y aplico a z la fórmula de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(Z)\,dZ}{Z-z}.$$

que transformo así:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(Z)\,dZ}{Z-a-(z-a)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(Z)}{Z-a}\,\frac{dZ}{1-\frac{z-a}{Z-a}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(Z)}{Z-a}\left(1+\frac{z-a}{Z-a}+\left(\frac{z-a}{Z-a}\right)^2+\dots\right)dZ$$

(el desarrollo puede hacerse siendo $|z-a|<|Z-a|$.)

(siendo fijos a, z)

El integrando es una serie de funciones analíticas de Z que converge totalmente (y luego uniformte p 39) sobre γ : en efecto si sobre γ $|f(Z)|<M$, tengo $|Z-a|=R$ siendo R el radio de γ, y

$\cancel{\left|\frac{f(Z)(z-a)^n}{(Z-a)^{n+1}}\right| < \frac{M|z-a|^n}{R^{n+1}}}$ ~~: la serie~~

× Si supongo de no estar enterado que existe $f^{(r)}(a)$ y vale (p. 135) $f^{(r)}(a) = \frac{r!}{2\pi i}\int \frac{f(z)dz}{(z-a)^{r+1}}$ $(r \geq 1)$

puede deducirlo así. Vale el desarrollo (1) donde

$$c_r = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)^{r+1}}$$

Siendo $f(z)$ serie de potencias es indefinidamente derivable (es decir existen todas las derivadas sucesivas), término a término (p.). Luego ~~p.~~

$$f^{(r)}(z) = r!\, c_r + (r+1)\ldots 2 \cdot c_{r+1}(z-a) + \cdots$$

En particular al hacer $z = a$.

$$f^{(r)}(a) = r!\, c_r \quad \text{es decir}$$

$$f^{(r)}(a) = \frac{r!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)^{r+1}} \quad \text{c. q. d.}$$

si pongo $|z-a| = \rho$ (const.^{te} respecto a Z) el término general es

$$\frac{f(Z)\,(z-a)^n}{(Z-a)^{n+1}} \text{ con módulo } < \frac{M}{R}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \qquad (\rho < R)$$

La serie admite como mayorante la serie geométrica .... Luego podemos integrar término a término (p. 121)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_\gamma \frac{f(Z)dZ}{Z-a} + (z-a)\int_\gamma \frac{f(Z)dZ}{(Z-a)^2} + (z-a)^2\int_\gamma \frac{f(Z)dZ}{(Z-a)^3} + \dots\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\int_\gamma \frac{f(Z)dZ}{(Z-a)^{n+1}}$$

Fijado el círculo γ cada integral no depende de z, es decir respecto a z es una constante; lo mismo ocurre de $\frac{1}{2\pi i}\int$. Llamando $c_0, c_1, c_2 \dots$ etc. estas constantes, logramos para todos los puntos interiores a γ

(1) $f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$

es decir encontramos un desarrollo de $f(z)$ en serie de potencias de $z-a$ válido en todo el interior de γ. Es precisamente el desarrollo de Taylor, porque

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(Z)dZ}{Z-a} = f(a) \qquad (\text{f.}^{la} \text{ de Cauchy}).$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(Z)dZ}{(Z-a)^2} = f'(a) \qquad \text{p. } 135$$

$$c_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(Z)dZ}{(Z-a)^3} = \frac{1}{2!}f''(a) \qquad \text{p. } ''$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(Z)dZ}{(Z-a)^{n+1}} = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a) \qquad \text{p. } ''$$

× P.e. dada una serie de potencias
$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$
con $c_0 \neq 0$, y radio de convergencia no nulo, $\varphi(z) = \frac{1}{f}$ es función analítica (posee derivada $-\frac{f'}{f^2}$, continua, etc.) en un entorno de a, y luego puede desarrollarse en serie de potencias de $z-a$. ~~Luego~~ Puede encontrarse el desarrollo (además que aplicando la fórmula de Taylor) con el método de los coef. ind.os es decir: pongo $\varphi = h_0 + h_1(z-a) + h_2(z-a)^2 + \dots$. Como $f\varphi = 1$, $(c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots)(h_0 + h_1(z-a) + h_2(z-a)^2 + \dots) = 1$

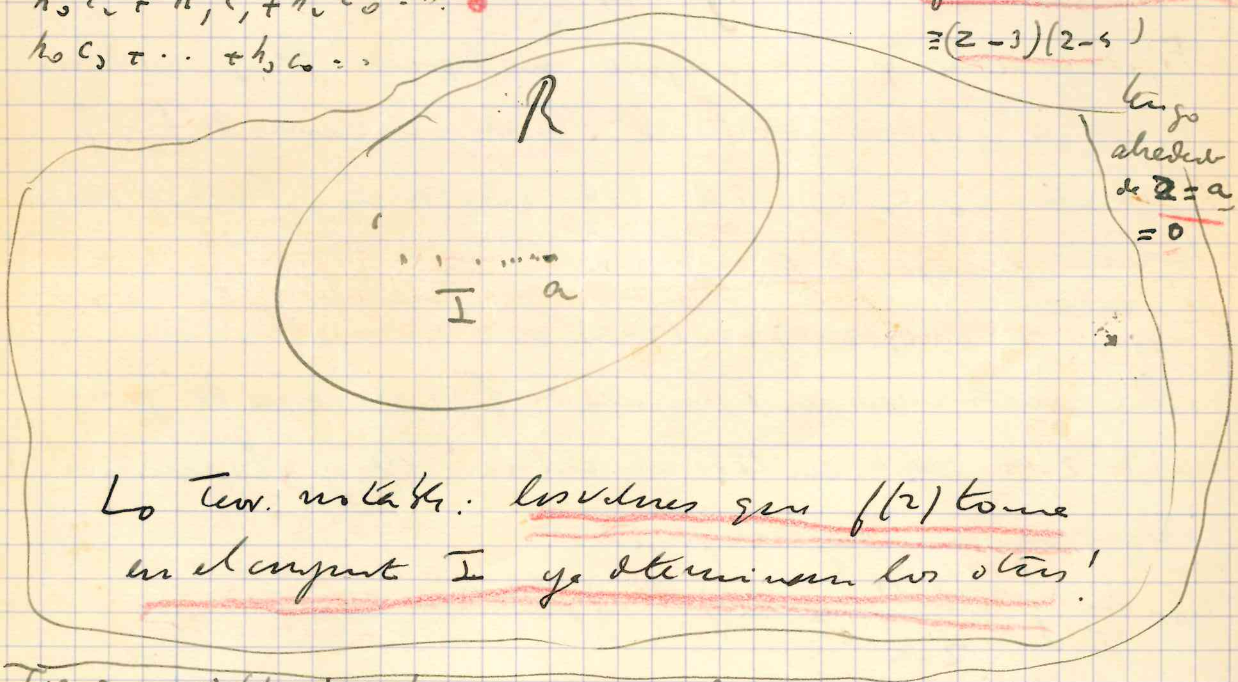
$h_0 c_0 = 1$ — la primera da $h_0 = \frac{1}{c_0}$, la 2ª h_1, etc.

$h_0 c_1 + h_1 c_0 = 0$

$h_0 c_2 + h_1 c_1 + h_2 c_0 = 0$

$h_0 c_3 + \dots + h_3 c_0 = 0$

P.e. si lo aplico a $f = 12 - 7z + z^2 = (z-3)(z-4)$



largo alrededor de $z = a = 0$

Lo Teor. notable: los valores que $f(z)$ toma en el conjunto I ya determinan los otros!

$(12 - 7z + z^2)(h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots) = 1$ $h_0 = \frac{1}{12}$, $12h_1 - 7h_0 = 0$

$12h_2 - 7h_1 + h_0 = 0$ etc. $h_1 = \frac{7}{12}h_0 = \frac{7}{144}$; $h_2 = \frac{1}{12}(7h_1 - h_0) = \frac{1}{12}\left(\frac{49}{144} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{12}\,\frac{49-12}{144} = \frac{37}{12^3}$ etc. luego

$$\frac{1}{12 - 7z + z^2} = \frac{1}{12} + \frac{7}{144}z + \frac{37}{12^3}z^2 + \dots$$
El radio de convergencia es 3. En efecto $\frac{1}{f}$ es anal. excepto que por $z=3$, $z=4$, es decir el campo C de p. 151 es todo el plano quitando estos dos ptos: como circ. γ de p. 151 con centro en 0 puedo tomar un círculo de radio ≤ 3, etc.

Luego (1) es

$$(1)\quad f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + f''(a)\frac{(z-a)^2}{2!} + \cdots$$

Repito que este desarrollo puede aplicarse en el interior de cada círculo interior al campo de existencia.

Podemos añadir que no existen otras serie de potencias, distintas, para f(z) alrededor del punto a: si tenemos también

$$f(z) = b_0 + b_1(z-a) + \cdots + b_n(z-a)^n + \cdots$$

podemos derivar respecto a z n veces los dos miembros (es lícita la derivación término a termino de una serie de potencias, como la sabemos) y después hago z=a. Logro

$$n!\, b_n = f^{(n)}(a) = n!\, b_n \; ; \; b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

es decir cada coeficiente b_n coincide con el correspondiente coeficiente

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

c d d

Antes de pasar á una importante generalización del resultado relativo a la serie de Taylor, me paro a observar unas consequencias notables.

Considero un conjunto I de puntos interiores a una región R conexa y dos funciones analíticas f(z), g(z) en R, y supongo que I tenga al menos un punto de acumulación interior a R. Digo que si f y g coinciden en cada punto de I, coinciden en cada punto de R. Lo

Algo ~~de~~ semejante, pero mucho menos nos dice la fórmula de Cauchy(si f y g coinciden sobre γ, coinciden también en su interior.

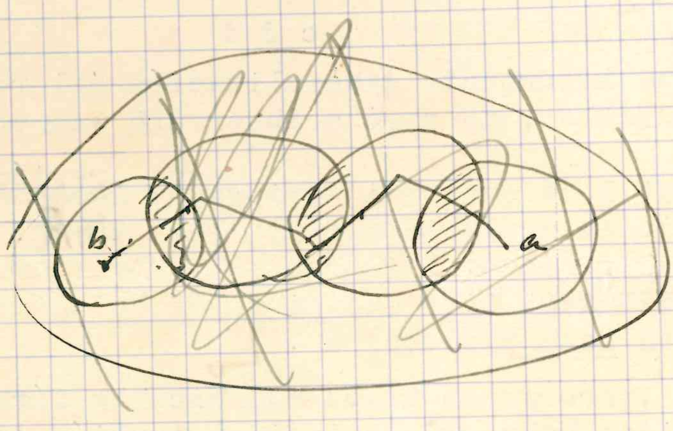
Antes de demostrarlo, observo caso particular importante: si en los puntos de I c.a. f(z)=o, la f es nula en todo R. Basta aplicar el teor. general a las funciones f(z) y O. Este caso particular nos da unos informes respecto a la distribución de los ceros de una función anlítica. El conjunto de los ceros es tal que en un conveniente entorno de cada uno no existen otros ceros(si no tendríamos un cero punto de acumulación de otros ceros, y la función resultaría idénticamente nula) Eso se puede expresar diciendo que los ceros de una función analítica están aislados. 155 bis

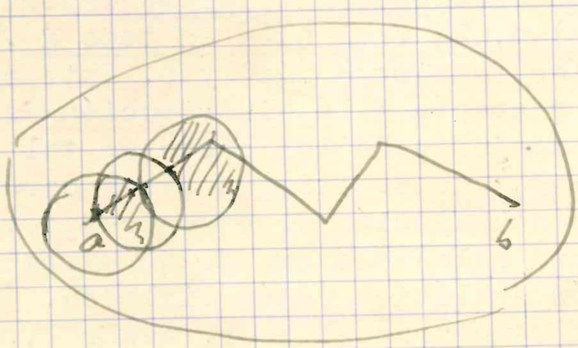
Observo también que para demostrar el teor. general, es suficiente demostrar el caso particular: pongo f(z)-g(z)= h(z)

Hipótesis	f=g (en I)	$\equiv$	h=o (en I)
Tesis	f=g (en R)	$\equiv$	h=o (en R)

como es claro.

Entonces razono así. Ante todo, siendo h(z) analítica es contínua, y como es nula en todos los puntos de I, será también nula,


b
a


a
b

El teor sobre los ceros aislados no tiene análogo en el campo real. Es decir una función $f(x)$ derivable en el intervalo $a^{-}b$ no tiene necesariamente los ceros aislados. Tomo p. e. en el intervalo -1 a 1 la función

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \text{para } x \text{ no nulo} \; ; \; f(0)=0$$

que para $x=0$ no sólo es continua, sino también derivable porque

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen}\frac{1}{h} = 0$$

En los demás puntos es también derivable, como es claro. La función es nula además que para $x=0$ para

$$x = \frac{1}{k}\frac{1}{\pi} \quad k \text{ entero} \neq 0$$

Y este conjunto tiene $x=0$ como punto de acumulación. Por lo tanto la función tiene $x=0$ como cero no aislado.

(Non basta prendere $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$. perchè non è derivabile per $x=0$ ($\lim \operatorname{sen} \frac{1}{h}$ non esiste). Bisogna prendere $x^n \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ con $n \geq 2$. (e così si trovano anche classe derivate successive).

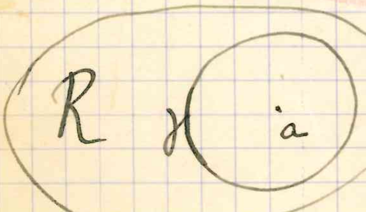
al límite en el punto de acumulación a:h(a)=o. Por consiguiente, si desarrollo la función anal. h en serie de potencias de z-a en un círculo γ interior a R, logro:

$$(1)\quad h(z) = \cancel{h(a)} + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 \dots = (z-a)\left[c_1 + c_2(z-a) \dots\right]$$

La serie

$$c_1 + c_2(z-a) + \dots$$

(siendo $h(z)=0$, $z-a \neq 0$) es nula en cada punto de I int.r a γ distinto de a: siendo función contínua resulta nula también para $z=a$: luego $c_1=0$; y así se continua,siguiendo, $c_2=0$, etc. Por consiguiente en el punto a es nula la función h, junta con todas sus derivadas sucesivas, y el mismo desarrollo (1) nos enseña que h resulta nula en todo el interior de γ. De esto debemos ahora concluir que es nulo en todo R es decir en cada otro punto b. Para llegar a esta conclusión ,uno a con b mediante una quebrada interior a R, e imagino varios círculos con el centro sobre la quebrada de la manera siguiente.En primer lugar como radio común de todos estos círculos tomo un d tal que los círculos resulten todos interiores a R(para esto es suficiente tomar d menor del límite inferior de las distancias entre los puntos de la quebrada y la frontera de R):además los centros de los círculos se suceden sobre la quebrada de a hacia b a distancias bastante pequeñas para que cada centro esté en el círculo anterior o sobre el contorno ~~dos círculos sucesivos tengan una parte de area común~~(basta tomar la distancia de dos centros consecutivos p.e. igual a d, ~~en cada caso menor que 2d~~).Entonces en el primer círculo h=0, por lo visto; aplicando el teorema al segundo círculo, aprovechando la circunstancia que h=o en el area común(que puede tomarse como nuevo conjunto I) resulta h=o también en el segundo, etc.Por consiguiente h=o también en b, es decir en cada punto interior a R. c d d

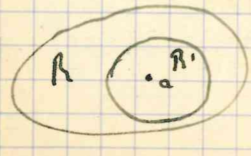


El resultado relativo al hecho que los ceros de una función analítica ~~&&&~~ están aislados se generaliza inmediatamente así. Dada f(z) considero los puntos donde toma un mismo valor k, es decir las raices de la ecuación $f(z)=k$ El ~~grupo~~ conjunto de punto así obtenido ~~se llama un grupo puede llamarse~~ puede decirse ~~formado por puntos~~ un grupo de nivel de f(z). Cada grupo de nivel está formado por puntos aislados . En efecto no es otra cosa que el conjunto de los ceros de la función anal.ca $f(z)-k$.

× × supong $|f(a)| = M$. Si $|f|$ no es constante $= M$ sobre Γ, existe un pt de Γ donde $|f| = m < M$, y entonces

el caso donde R es circulo y quiero demostrar: $|f|$ no puede ~~ser~~ ~~no~~ alcanzar su máximo M en el centro (si $f \neq$ const)

× El teor. ~~citado~~ anterior nos permite de limitarnos al caso donde la región R es circular ~~con centro en~~ y demostrar que $|f|$ no es máximo en el centro. En efecto quiero probar que un punto interior a la región dada no puede ser de máximo para $|f|$ sin que f sea constante en R. Si lo pruebo para ~~cada~~ cada región circular R' relativamente al centro ~~punto después~~ razono así: Si $|f|$ alcanza su máximo M en un punto a interior a R, cuando R' circular interior a R con centro en a: a ~~es~~ da máximo de $|f|$ también relativamente a R', luego es cont. en R'. Entonces f y este constante coinciden en R'



y por consiguiente en R (teor. p. 155); es decir f tiene aquel mismo valor const. en todo R. — Estudio por consiguiente

Observación.-Podría parecer que se presente una dificultad. Me refiero p e al caso de los ceros de una función anal. Si tomo una función que tenga infinitos ceros, estos forman un conjunto infinito, y por lo tanto existe un punto de acumulación, al menos ,(propio o impropio) Q ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~. Y entonces, según el teor. la función tendría que resultar idénticamente nula, mientras supongo que no lo sea. La explicación es esta: que el punto de acumulación no resultarà INTERIOR ~~&&&&&&&&&&&&~~ a la región R(si no sobre su frontera). Como ejemplo podría tomar sen z ,que tiene infinitos ceros $(-\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots)$, pero en este caso este conjunto no tiene ningún punto de acumulación propio, sino el punto impropio(en el cual hasta ahora no estudiamos las funciones analíticas). Entonces tomo

$$f(z) = \text{sen } 1/z$$

La función se anula para

$$1/z = k\pi \qquad (k \text{ entero } \gtrless 0)$$

es decir para

$$z = \frac{1}{k\pi}\,; \quad z = \pm\frac{1}{\pi}, \ \pm\frac{1}{2\pi}, \ \ldots \pm\frac{1}{n\pi}, \ \ldots$$

Este conjunto tiene $z=0$ como punto de acumulación (porque contiene númemros tan pequeños como los queremos): luego punto de acumulación propio. Pero hay que observar que la función es definida y resulta anal. sólo en los puntos donde z es distinto de cero. Luego no hay contradicción.

Como aplicación del teor. ahora demostrado, probaré ahora el teor siguiente: si f(z) es analítica, tomando una región R interior ,con su contorno ,al campo de existencia de f(z), cada punto de máximo de $|f|$ está sobre el contorno(excluído el solo caso donde f es constante). Lo mismo por el mínimo, si f nunca se anula en R .El caso del mínimo es consecuencia del caso del máximo, considerando la fn anal. ~~1/f(z)~~. × ~~&&&&&~~ ~~Tomo en R un punto a, y un círculo~~ γ

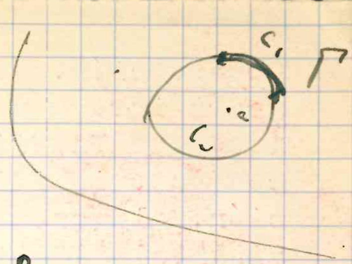
Sea Γ el contorno de R: si M es el máximo de $|f|$ sobre Γ, la (I) p. 139 nos da en el centro a de Γ

en lugar ~~de γ~~

$$|f(a)| \leq M \qquad (1)$$

Pruebo que no puede subsistir el signo de igualdad, a menos que sea $|f| = M$ sobre Γ. En efecto ~~si en un punto de~~ Γ resulta $|f| = n < M$, puedo construir(por la continuidad de f sobre la circunf un arco de Γ alrededor del punto donde sea $|f|$ ~~...~~ $< M' <$

"y no otros (p. 66). Lo que por lo demás aquí no interesa.

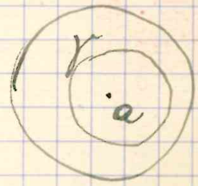


Esto siendo establecido, sea ahora

N el máximo de $|f|$ dentro (R) y sobre Γ.

Quiero probar que, si $|f|$ no es constante en R

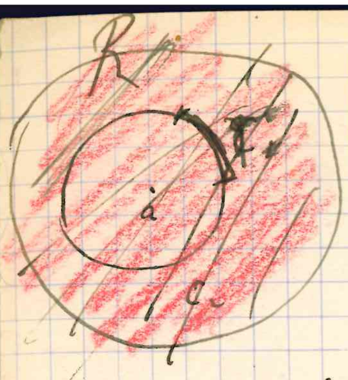
no puede ser $|f(a)| = N$.



Supongo en efecto $|f(a)| = N$, y

Entre los varios círculos γ de centro a no exteriores a Γ: sea M_γ el máx $|f|$ sobre γ. Es claro ((I) p. 139) que $|f(a)| = N \le M_\gamma$. Por otro lado siendo N el max $|f|$ en R, $M_\gamma \le N$. Comparando $M_\gamma = N$. Luego ~~por~~ $|f(a)|$ en el centro de γ es igual al máximo de $|f|$ sobre γ, puedo aplicar el resultado ~~ahora~~ obtenido arriba y concluir $|f| = \cancel{const}\ N$. sobre γ. Y esta const. es la misma sobre todos los γ, es decir en R porque siempre vale N.

Por lo tanto así resulta ya que $|f|$ es constante en R.



Llamo c_1 este arco, y c_2 el arco residuo. La fórmula de Cauchy nos da

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z)\, i r e^{i\varphi}}{r e^{i\varphi}}\, d\varphi \qquad (z-a = re^{i\varphi} \text{ sobre } \gamma)$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\,d\varphi.$$

Precisamente de esta fórmula sigue el resultado tomando los valores absolutos y mayorándolos. ~~Pues el mayor resultado más obvio~~: parto γ en c_1 y c_2; en c_1 mayoro $|f|$ con $M' < M$ y en c_2 con M. Entonces llamando $R\sigma$ la medida del 1er arco

$$|f(a)| \le \frac{1}{2\pi}\left(M'\sigma + M(2\pi-\sigma)\right) = M - \frac{\sigma}{2\pi}(M-M')$$

nº positivo

Luego es: $|f(a)| < M$

y si supongo $|f(a)| = M$, hay contradicción. ~~Por consiguiente: si $|f|$ alcanza, en la región circular R, el máximo M en el centro, sigue que sobre cada círculo concéntrico interior o coincidente con la circunf de R: es decir $|f(z)| = M$ dentro todo R.~~ Digo que sigue que también f es constante en R: en efecto poniendo $f = u+iv$ tenemos

$u^2+v^2 = M^2$ y derivando (en R) $\quad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

y (Cauchy-Riemann) también [..] $\quad u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad -u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Las 1ª, 4ª como ecuaciones en u_x, v_x muestran:
En un dado pt. de R
o es $u_x = v_x = 0$ o det^e $\begin{vmatrix} u & v \\ v & -u \end{vmatrix} = 0$ es decir $u^2+v^2=0$ es decir $u=v=0$.

Así 2ª 3ª o es $u_y = v_y = 0$ o $\begin{vmatrix} u & v \\ -v & u \end{vmatrix} = 0$ es decir $u=v=0$.

A priori el resultado puede variar de un pt. a otro. Pero, si en 1 pt. es $u=v=0$, en el mismo $f=0$, $M=0$, y como $|f|$

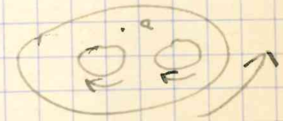
es cont. luego $f = 0$ en cada pt. Si nunca $u = v = 0$,

siempre $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ luego $u =$ cost $v =$ cost

$f =$ cost. c.d.d.

Estudiaremos ahora una generalización del desarrollo en serie de Taylor, constituído por el desarrollo en serie de Laurent, que puede aplicarse en casos donde el primero falta. Pero ante observo que la fórmula de Cauchy se extiende al caso donde, en el interior del campo de existencia de f se considera una región multiplemente conexa con contorno exterior γ y contornos interiores $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}$ Siempre, siendo a un punto interno de la región sigue subsistiendo la fórmula de Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$



donde ~~&&&&&&&&&&&&~~ el contorno Γ es el conjunto de los contornos $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 ..$ recorridos de manera que el area interior sea a la izquierda, es decir, recorriéndolos todos en sentido antiorario

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-a} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(z)\,dz}{z-a} \dots - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{n-1}}$$

La demostración es la misma como a p.129.

Considero ahora una corona circular $\gamma\,\gamma_1$ concentrica a en el interior del campo de existencia de f, y digo que en la corona circular la f puede desarrollarse de la manera siguiente

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \dots$$

donde las c_i, b_i son constantes (serie de Laurent). ~~Inútil la dem~~ ~~de~~ Para explicar que el resultado tiene un alcance mayor que la serie de Taylor, tomo p.e.

$$f(z) = \operatorname{sen} z + \operatorname{sen}\frac{1}{z}$$

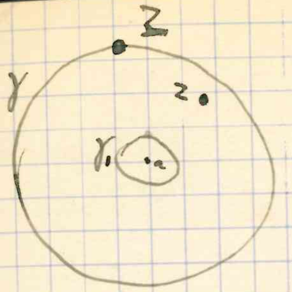
analítica en todo el plano propio fuera de $z = 0$. Alrededor de $z = 0$ no puedo aplicar el des. de Taylor, sino

$$f(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \dots + \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \dots$$

que es del tipo de Laurent (aquí como γ_1 puedo tomar un círculo pequeño de centro $z=0$, y como γ otro concéntrico,

$$\boxed{c_r = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{r+1}}}$$

165 desarr. de Laurent



Para demostrarlo tomo z en la corona de centro a, y le aplico la fórmula de Cauchy extendída (llamando Z un pt del contorno como a p.151)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(Z)\,dZ}{Z-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(Z)\,dZ}{Z-z}$$

(contornos antihorarios). Imito ahora, con unas variantes la dmn de p.151. Cuanto al primer integral, como en l.c.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(Z)\,dZ}{Z-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(Z)\,dZ}{Z-a-(z-a)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(Z)}{Z-a}\,\frac{dZ}{1-\frac{z-a}{Z-a}}$$

y como en el interior de γ $\quad \frac{|z-a|}{|Z-a|} < 1$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(Z)}{Z-a}\left(1+\frac{z-a}{Z-a}+\frac{(z-a)^2}{(Z-a)^2}+\dots\right) dZ \qquad \text{unif. conv.}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(Z)\,dZ}{Z-a} + \frac{(z-a)}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(Z)\,dZ}{(Z-a)^2} + \dots + \frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int \frac{f(Z)\,dZ}{(Z-a)^{n+1}} + \dots$$

El primer integral puede desarrollarse así en el interior de γ y luego, en particular en la corona. Indicando las constantes (respecto a z) así

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(Z)\,dZ}{Z-a} = c_0; \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(Z)\,dZ}{(Z-a)^2} = c_1 \quad \text{etc.}$$

tengo así

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(Z)\,dZ}{Z-z} = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots \quad (1)$$ dentro γ y luego en la corona

Paso ahora al segundo integral. Ahora ~~como~~ tenemos que modificar un poco (pues ahora tomando Z sobre γ_1 resulta varias $\left|\frac{z-a}{Z-a}\right| > 1$ y no puede desarrollar $\frac{1}{Z-z}$ como antes)

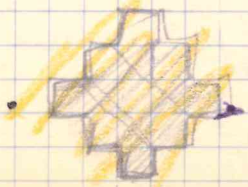
Luego escribo

× (sur γ_1 $\dfrac{|Z-a|}{|\zeta-a|} = \dfrac{R}{\rho}$ $\dfrac{(\text{rayon } \gamma_1)}{\text{dist}(z-a)}$; la série ~~majorante, variable Z, par~~ Σ

$$\frac{f(z)}{z-a} + \dots + \frac{f(z)\,(Z-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$$

tous les modules de ces termes majorés par

$$\frac{M}{\rho} + \dots + \frac{M}{\rho}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-1} + \dots \quad \text{convergente})$$

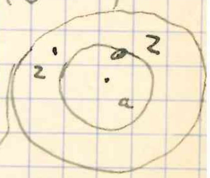


(6).

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(z)\,dz}{\zeta-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(z)\,dz}{\zeta-a-(z-a)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(z)}{\zeta-a}\,\frac{dz}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}} =$$

al exterior ~~fuera~~ de γ_1 y en particular en la curva circular $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|<1$



$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(z)}{\zeta-a}\left(1+\frac{z-a}{\zeta-a}+\frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^2}+\dots\right)$$

La serie es tot.te, unif.te converg.te: integro término a término

$$= \frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f(z)\,dz + \frac{1}{(\zeta-a)^2}\int_{\gamma_1}f(z)(z-a)\,dz$$

$$\dots + \frac{1}{(\zeta-a)^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f(z)(z-a)^{n-1}\,dz$$

Las integrales / $2\pi i$ son constantes respecto a ζ. Pongo.

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f(z)\,dz \quad \dots \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f(z)(z-a)^{n-1}\,dz$$

y luego.

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} = \frac{b_1}{\zeta-a}+\frac{b_2}{(\zeta-a)^2}+\dots \quad (2)$$

al exterior ~~fuera~~ de γ_1 y en particular dentro la corona.

Dentro la corona valen (1) (2). Sumando

$$f(\zeta) = c_0 + c_1(\zeta-a) + \dots + \frac{b_1}{\zeta-a} + \dots$$

c. q. d.

El desarrollo en serie de Laurent en una dada corona de f(z) es único (es decir los coeficientes son perfectamente determinados Así como para el desarrollo de Taylor(p.155) pero ahora debemos razonar de manera un poco distinta. Sea en la corona $\gamma\,\gamma_1$

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + \dots \qquad + \frac{B_1}{z-a} + \dots \quad = P(z-a) + Q\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

con notaciones evidentes.Naturalmente,para que tenga sentido el segundo miembro, deben converger tanto P cuanto Q.

Ahora $P(z-a)$ es una serie de potencias en z-a, que tiene un círculo de convergencia&&&&&&&&&&&&&& & Γ: luego el interior de γ es interior a Γ.

Por otra parte una serie como

$$Q = \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \dots$$

si ponemos

$$\frac{1}{z-a} = z'$$

viene a ser una serie de potencias en z´:esta &&&&&&&& tiene un círculo de convergencia en cuyo interior converge,es decir generalmente converge para

$$|z'| < k.$$

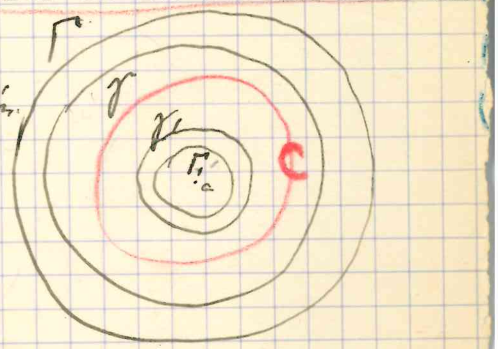
que puede llamarse círculo de convergencia

Por consiguiente Q converge para

$$\left|\frac{1}{z-a}\right| < k \quad \text{es decir} \quad |z-a| > k.$$

sin olvidar que ahora la serie converge en su exterior;

es decir al exterior de un círculo Γ_1 de centro a.Como en la corona converge,esto significa que el interior de la corona está al exterior de Γ_1 (fig.)



Y,como lacserie en z´ converge unifte en ~~una región~~ & una región interior al círculo de convergencia&&&&(p. 51) la Q converge unif en una región exterior al círculo Γ_1 &&.

&&&&&&&&& El círculo Γ es exterior o coincidente con γ; el círculo Γ_1 es interior o coincidente con γ_1 ~~ocurriese lugar coincidencia substituyendo los círculos convenidos de manera que el contorno de la corona circular sea todo interior ... exterior a ... .Entonces en la corona las dos series convergen unif.te y puede integrarse término a término~~ Tomo un círculo c concéntrico entre γ_1 y γ. Sobre c las P y Q convergen unif.te, por lo visto, y luego puede integrarse

...término a término; lo que hago después de haber dividido por $(z-a)^{r+1}$ (r ent. ≥ 0)

$$\int_c \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{r+1}} = \int_c \frac{P\,dz}{(z-a)^{r+1}} + \int_c \frac{Q\,dz}{(z-a)^{r+1}}$$

En la primera serie, dividiendo cada término por $(z-a)^{r+1}$, si obtengo una potencia de $(z-a)$ con exp^{te} entero ≥ 0, el $\int$ es nulo (teor. Cauchy); si exp^{te} neg.^{vo} ≤ -2 también nulo p. 118. Queda sólo el término en $\frac{1}{z-a}$, que proviene de $C_r(z-a)^r$. En la segunda serie todos los términos nulos (p. 118). Luego, (intercambiando 1er y 2^{o} miembro)

$$C_r \cdot 2\pi i = \int_c \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{r+1}} \quad \text{e.d.} \quad C_r = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{r+1}}$$

Comparado con p. 165

$$c_r = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{r+1}} \qquad (r = 0, 1, \ldots)$$

Y concluyo $C_r = c_r$ (porque es verdad que ahora el integral es tomado a lo largo de c y allá de γ, mas, el integrando $\frac{f}{(z-a)^{r+1}}$ siendo f^n anal. en la corona entre γ e c, puede aplicarse el teor. de Cauchy y los integrales son iguales) (p. 124).

Análog^{te} se prueba que $B_r = b_r$ ($B_1 = b_1$ integrando directamente; $B_2 = b_2$ si multiplico por $z-a$ antes de integrar, etc.) c.q.d.

El des. de Laurent puede servir, en particular para f(z) anl en una región simpl: conexa, exceptuado un pt a interior donde f no es definida. Trazo γ con centro a interior a la región, y otro γ_1 de radio menor: en la corona $\gamma\gamma_1$ tenemos desarrollo

$$(1) \quad f = P(z-a) + Q\left(\frac{1}{z-a}\right) = c_0 + c_1(z-a) + \cdots \frac{b_1}{z-a} + \cdots$$

Si hago variar γ_1, disminuyendo su radio (tengo fijo γ) y haciendolo tender a cero, siempre encontramos un des. de Laurent, y antes bien siempre el mismo, porque tienen que coincidir en la corona $\gamma\gamma_1$, y se aplica el teorema que precede. Luego el desarrollo subsiste en todo γ exceptuado el punto a.

× que puede suponer contenido en L (substituyéndolo si es preciso con otro más chico) [es preciso para aplicar en K el desarrollo (II)

Esto va a servirnos en el estudio de los puntos singulares (aisla dos) de una función analítica.

Supongo que una función $f(z)$ sea anal. uniforme alrededor de un punto a, sin ser definida en el punto a. Se presentan dos posibilidades:

1) la función es acotada alrededor del punto a, es decir en un cierto entorno de a(excluído a donde no está definida) sus valores absolutos quedan menores de una cantidad fija, En este caso vamos a ver que puede atribuirse a la función en a(donde como lo dije supongo que no sea definida) un valor tal que la función resulte analítica también en a .En este caso no enontramos nada de nuevo

2) la función no es acotada alrededor de a. En este caso llamaremos a un punto singular aislado(que podrá presentar distintas posibilidades)

Por el momento tenemos que demostrar 1).

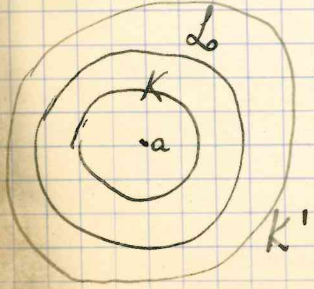
En los dos casos, siendo f anal. alrededor de a podremos servirnos del desarrollo (1). En el primer caso, ya es intuitivo que faltará Q (porque los términos de Q vienen a ser tan grandes como loqueremos en proximidad de a: pero esta no es dems., porque vale de cada término, y tenemos que concluirlo para el conjunto de los términos). Entonces en un entorno de a

$$f(z) = P(z-a) = c_0 + c_1(z-a) + \cdots$$

El segundo miembro es una serie de potencias que converge alrededor de a. Si tomamos

$$f(a) = c_0$$

(f(a) no era definido hasta ahora) la serie de potencias nos da también f(a), y f resulta analítica también en a. Vamos pues a demostrar de manera exacta que del hecho que f es acotada en proximidad de a, sigue que en (1) falta Q. El desarrollo (1) subsiste p.e. en el interior del círculo L(excepto en a). Luego en el interior de L converge P y converge Q: y como sabemos que Q tiene un " círculo de convergencia"en cuyo exterior converge, vemos entre tanto que este círculo tiene un radio menor de cada nº positivo, y luego se reduce al punto a. Así, recordemos que Q converge en todo el plano(exceptuado el punto a) (I)



Por otro lado, siendo f limitada entorno a a, esto significa que en el interior de un círculo K, de centro a:

$$|f| < M$$ en K excluído a

siendo M una cant.

es decir
$$\left|P(z-a)+Q\left(\frac{1}{z-a}\right)\right| < M \quad \text{en } K\ldots$$

P converge en un círculo de centro a ~~que puedo suponer mayor~~ ~~.......~~ más grande de K (~~.......~~) ~~.......~~ luego es acotado en K" en m

$$|P| < N \quad (\text{donde } N \text{ es cont.}^{te}) \quad \text{en } K$$

Luego. $|Q| \le |P+Q-P| \le |P+Q| + |P| < M+N$ en K excluído c.

Luego $\left|Q\left(\frac{1}{z-a}\right)\right| <$ cont.^{te} h en K excluíd a (II)

Así tenemos las dos conclusiones (I), y (II). Si pongo $\frac{1}{z-a}=z'$ Q(z') converge en todo el plano propio (porque se obtienen valores finitos de z' en correspondencia de $z \neq a$):

el exterior del círculo K $|z-a| < r$ radio r del circ. K.

viene a ser $|z'| > \frac{1}{r}$ es decir ~~el~~ exterior de círculo K' ~~.......~~ y radio $\frac{1}{r}$ y en este exterior la (II) nos da

$$|Q(z')| < h.$$

Luego Q(z') es una serie de potencias en z' que ~~&&&&&~~ tiene radio de convergencia infinito y que,como lo expresa esta ine gualdad fuera de K'es acotada, y nat.te(I)es también acotada dentro y sobre K'.Luego es acotada en todo el plano:Puedo aplicar el teor de Liouville(p.139) y concluír que es una cons
Y como $Q(z') = b_1 z' + b_2 z'^2 + \ldots$
y por z'=0 la Q se anula,esa constante esc cero.Luego Q falta efectivamente

c. d. d.

Si en cambio f no es acotada alrededor de a, no es posible atribuir a f(a) un valor tal que f resulte anal.en a, porque sino sería continua, y alrededor de a tomaría valores próximos a f(a) y luego sería acotada,contra la hipótesis

(II) (las dos veces) tenemos una f.n anal. en un recinto cerrado.

$|f|$ ~~.......~~ se es acotada ~~.......~~.

x A menudo estos puntos se agregan al campo de existencia de la función analítica. Pero es preciso recordarse que se trata de puntos en los cuales, en realidad, la función no es definida. Los puntos donde f(z) es definida, entonces, se llaman puntos regulares, y la función se dire regular en ellos. Por consiguiente, en todos los teoremas vistos hasta ahora, debe entenderse - cuando se aplique la nueva terminología- que siempre se trataba de puntos donde la función es analítica regular

xx A veces se dice que en un polo a : $f(a)=\infty$: esto significa sólo, de manera ~~no~~ exacta, la relación de límite considerada.

xxx P.e. $\frac{1}{z}$ tiene en $z=0$ un polo $\left(\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}=\infty\right)$.

En cambio $\boxed{e^{1/z}}$ tiene en $z=0$ un pt. sing. esencial porque si tiende a él a lo largo del eje real $\lim e^{1/z}=\infty$; pero p.e. a lo largo del eje imag. existen pts próximos como lo queremos a $z=0$ donde $e^{1/z}=1$: basta tomar $z=\frac{1}{2n i\pi}$ con n entero positivo.

En este caso se dice que a es un punto singular (aislado) de la unción. Luego punto singular aislado significa punto donde no es efinido el valor de f, el cual en cambio está definido alrededor de a, pero no es acotado.

El hecho que f no es acotado alred. de a significa: de cualquiera manera se tome M positivo, existen dentro de entornos arbitrarios de a, puntos z en los cuales

$$|f(z)| > M$$

Esto no significa que era

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty \quad (1)$$

Decir que vale (1) es decir algo más: que de cualquiera manera se tome M positivo, TODOS los puntos z (distintos de a) de convenientes entornos de a son tales que

$$|f(z)| > M$$

Cuando rige esta particularidad el punto singular se llama un polo. Por consiguiente polo es punto singular a tal que $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$

Se llama punto singular esencial un punto singular aislado que no sea un polo.

Alrededr del punto singular a podemos desarrollar en serie de Laurent

$$f = P(z-a) + Q\left(\frac{1}{z-a}\right) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + \frac{b_1}{z-a} + \dots$$

Si el punto es singular aparecen efectivamente unos términos de Q(si no el punto a no sería singular). Veremos que en el caso del polo aparecen solo términos en número finito; en el caso del punto sin ular esencial infinitos.

Volviendo al caso del polo, la función

$$\varphi(z) = 1/f(z)$$

puede definirse alrededor de a (fuera de a), porque puede fijarse un entorno de a donde $f \neq 0$ (basta pensar que $\lim f = \infty$)
La función φ no es hasta ahora definida en a; pero de (1) sigue

$$\lim_{z \to a} \varphi(z) = 0$$

Luego φ es acotada en proximidad de a (tiende a cero!), y como lo vimos para f a pp.173-75 puede entonces definirse $\varphi(a)$ de manera que φ sigua siendo analítica también en a. Acà(por continuidad) tenemos que definir $\varphi(a) = 0$ Luego podemos decir que en un polo a la función f no tiene valor finito; pero la recíproca $\frac{1}{f}$ sí, y vale cero.

Viceversa si parto de φ anal. regular en a y alrededor de a que se anule en a, la función recíproca tiene un polo en a. En efecto en un entorno de a la función φ

f una función con polo en a;

entonces $\varphi = \dfrac{1}{f}$ tiene, como

acabamos de decir un cero en a.

Sea:

no tiene otros cero (siendo los ceros de una fn ana. aislados p. 155), y luego

$$f = \frac{1}{\varphi(z)}$$

es anal. regular: además a es polo de f porque (p.195)

$$\lim_{z\to a} f = \lim_{z\to a}\frac{1}{\varphi} = \infty.$$

→ es decir supongo que a sea un cero de orden r de φ.

De esto sigue consecuencia notable. Sea

$$\varphi = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

el desarrollo de φ (regular) en serie de Taylor alrededor de a. Tengo $c_0=0$, porque $\varphi(a)=0$, y quizás nulos unos coef. sucesivos. Sea c_r el primer que no es nulo. Entonces, alredr. de a en cierto círculo K ~~que tomo bastante~~

$$\varphi = (z-a)^r\{c_r + c_{r+1}(z-a)+\dots\} \quad \text{en } K \qquad [r\geq 1] \quad (c_r\neq 0)$$

Luego

$$f = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{(z-a)^r[c_r+c_{r+1}(z-a)+\dots]}$$ en K fuera de a

Ahora (p.155) entorno a a

$$\frac{1}{c_r+c_{r+1}(z-a)+\dots} = m_0+m_1(z-a)+\dots \qquad \left(m_0=\frac{1}{c_r}\neq 0\right).$$

Luego

$$f = \frac{m_0}{(z-a)^r}+\frac{m_1}{(z-a)^{r-1}}+\dots+\frac{m_{r-1}}{z-a}+m_r+m_{r+1}(z-a)+\dots$$

Que, con notaciones distintas escribo

$$\boxed{f(z) = \frac{l_r}{(z-a)^r}+\frac{l_{r-1}}{(z-a)^{r-1}}\dots+\frac{l_1}{z-a}+P(z-a)} \qquad (°)$$

Este (recuerdo que r es entero ≥ 1) es el desarrollo de f alrededor de un polo. Y viceversa f así definida tiene en a un polo porque $\lim_{z=a} f(z)=\infty$ (En efecto $\lim f = \lim \Sigma + \lim P$ donde llamo Σ la suma de las fracciones; $\lim P$ es una cantidad finita (el término independiente de P) y $\lim \Sigma = \cancel{\lim \frac{l_r+l_{r-1}(z-a)\dots}{(z-a)^r}} = \lim \frac{l_r+l_{r-1}(z-a)\dots+l_1(z-a)^{r-1}}{(z-a)^r}=\infty$ (coc. pol. donde grad num < grad den.)

× También el punto impropio es regular o polo, como resulta de las páginas sucesivas tal modo $t=0$ para $\dfrac{F(1/t)}{G(1/t)} = f^{n}$ racional de t ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

El segundo miembro de (º) no puede diferir del desarrollo de Laurent, que como lo sabemos(p 169) es único. Así queda establecido que ,como lo dijimos(p.177) en el caso del polo este desarrollo contiene sólo un número finito de términos con exponentes negativos.

En cambio, en el caso de un punto singular esencial, deben existir infinitos términos de este tipo, porque de otra manera resultaría un polo, según lo dicho.

Un polo alrededor delcual la f se desarrolle como en (º) se llama un polo de orden r : es decir el orden es el valor absoluto del máximo exponente negativo en el desarrollo de Laurent.

P.e. las funciones

$$\frac{1}{z}\ ,\quad \frac{1}{z^2}\ ,\quad \operatorname{sen}\frac{1}{z}$$

tienen en z=o respectivamente

a) un polo del primer orden, o polo simple

b) un polo de sgundo orden

c) un punto singular esencial, porque en este último caso aplicando la serie de Taylor tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} \ \cdots$$

con infinitos términos de exponente negativo

Una función racional de z ~~es&&&&&&&&&&&&&&~~ cociente de dos polinomios F(z) G(z) que podemos suponer primos entre sí

$$f(z) = \frac{F(z)}{G(z)}$$

es analítica regular en cada punto propio que no sea un cero del denominador, como es claro. Además podemos añadir que cada cero del denominador es un polo de f, y más precisamente cada cero r^{ple} es un polo de orden r. En efecto puedo escribir, si a es el cero en cuestión:

$$f = \frac{1}{(z-a)^r}\,\frac{F(z)}{H(z)}$$

donde ~~el segundo factor~~ H(z) es un polinomio que no se anula por z=a. ~~Et fe~~ La fracción $\frac{F}{H}$ ~~pue~~ es anal. regular en a y no nula $(F(a) \neq 0)$: puede desarrollarse en serie de Taylor $m_0 + m_1(z-a) - \quad m_0 \neq 0$ etc, c.d.d.

Así vemos que una función racional, en los puntos(propios, hasta ahora) que no son regulares tiene polos(y nunca pts sing esenciales). Entre poco invertiremos el resultado; pero previamente es preciso que estudiemos un momento el comportamento de una función en el punto impropio.

× Más generalmente, lo mismo ocurre para

$a_0 + a_1 2 \cdots + a_n 2^n + Q\left(\frac{1}{2}\right)$

Para estudiar la función $f(z)$ en $z=\infty$, basta poner $z=\frac{1}{t}$ y considerar $f\left(\frac{1}{t}\right)$ como función $g(t)$ para $t=0$ (o $z=\frac{1}{t-a}$ y estudiar esta función $g(t)=f\left(\frac{1}{t-a}\right)$ por $t=a$). Según que el pt 0 es regular, o polo o pt. singular esencial de g, el pt $z=\infty$ se llama regular, o polo o pt. sing. esencial para $f(z)$. P. e. 1) si tomo un polinomio en z

$$f(z)=a_0+a_1 z \dots + a_n z^n$$

pongo $z=\frac{1}{t}$; $g(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)=a_0+\frac{a_1}{t} \dots + \frac{a_n}{t^n}$. Por $t=0$ g tiene un polo de orden n. Luego un polinomio de grado n tiene en el pt. impropio un polo de orden n.

2) Si tomo $f(z)=P(z)$ con radio de convergencia infinito, esta es una función entera(llamándose así una serie de potencias con radio de convergencia infinito) que supongo no se reduzca a un polinomio:

$$f(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\dots$$

Entonces $g(t)=a_0+\frac{a_1}{t}+\frac{a_2}{t^2}+\dots$ tiene en $t=0$ un pt. sing. esencial p. 181), luego $z=\infty$ es un pt. sing. esencial para una función entera que no sea un polinomio.

Una función entera se llama una transcendente entera, o racional entera, según que no es o es un polinomio. Y efectivamente los dos términos se ecluyen, porque una transcte entera no puede coincidir con una función racional(no con un polimomio en z, claro, ni tampoco con una función racional no polinomio, porque los ceros del denominador, necesariamente existientes no pueden ser puntos de regularidad de la función)

Así diremos que una transcedente entera tiene en $z=\infty$ una singularidad esencial (ejemplo e^z, $\operatorname{sen} z$, etc).

3). Si $z=\infty$ tiene que ser regular para f, será $t=0$ regular para g: luego $g(t)=a_0+a_1 t+a_2 t^2+\dots$ alred. de $t=0$.

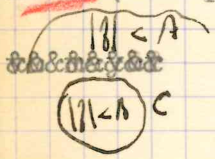
y en ~~...~~ $t=\frac{1}{3}$, $g(t)=f(3)$

si pues $f(z) = a_0 + a_1 \frac{1}{z} + \cdots$

Este es el tipo de función regular al ∞.

Indico unas consecuencias.

1) Nueva forma del teor. de Liouville(p.139) según el cual f an. regular acotada en el plano propio se reduce const,te. La nueva forma es: una función f an.ca (uniforme) regular en todo el plano (incluso el pt impropio) es constante. Basta enseñar que en el plano propio f es acotada. Ahora bien, sea a el valor de f en el punto impropio; en este punto f es regular y luego continua. Por consiguiente puedo tomar un entorno, p.e. circular del punto impropio, donde $|f|$ difiere poco de $|a|$, y luego queda menor de un nº A (un poco mayor de $|a|$). Supongo pues que esto ocurra fuera



de un círculo C. Por otra parte sea B un número positivo mayor de todos los $|f|$ dentro y sobre C. En todo el plano $|f|$ resulta menor de un número fijo(el mayor entre A,B), luego acotada, luego acotada en el plano propio

c d d

2) Luego una función no constante no puede ser an.ca regular en todo el plano.

2) Como lo dijimos a p.181 fin, una función anal(siempre unif.) regular en todo el plano excepto en unos polos es necesariamente racional

En primer lugar los polos tienen que ser en número finito. En efecto, si así no es, ~~entonces~~, su conjunto tendría un punto de acumulación a(al menos), propio o impropio. En cada entorno de a están polos, y en proximidad de un polo f toma valores grandes como lo queremos: luego en cada entorno de a f tomaría valores grandes como lo queremos, y por consiguiente a no puede ser un punto regular. Tampoco puede ser a un punto sing esencial(porque por hipótesis f no admite tales singularidades). Ni siquiera podría a ser

un polo, porque entorno a un polo la función es regular mientras en cada entorno de a tenemos polos. Luego a no puede existir; los polos son en número finito. Sean $a_1 \ldots\ldots a_n$, y además, eventualmente, $z = \infty$. Sea

$$f(z) = A^{r}\left(\frac{1}{z-a_r}\right) + P_r(z-a_r) \qquad (r = 1 \ldots n)$$

(donde $A^{(r)}$ es polinomio y P_r serie de potencias) el desarrollo de f alrededor de a_r y si $z = \infty$ es polo

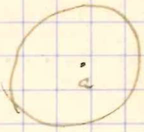
$$f = A(z) + P\left(\frac{1}{z}\right)$$

el desarrollo alrededor a $z = \infty$. La nueva función:

× (o teor. de Weierstrass)

×× en C $\exists$ nº positivo K. Es decir

$|f(z) - m| > K$ en C (fuera de a).



$$F(z) = f(z) - \sum_{r} A^{(r)}\left(\frac{1}{z-a_r}\right) \quad - A(z) \qquad (1)$$

(último término eventual) es analítica regular:

1) en cada z que no sea polo de f, tales siendo todos los sumandos

2) también en cada polo de f. En efecto p.e. en proximidad de a_1

$$F(z) = P_p(z-a_1) - \sum_{r=2}^{n} A^r\left(\frac{1}{z-a_r}\right) - A(z)$$

donde todo es regular. Lo mismo para $z=\infty$, si esto ocurre. Luego F es an. regular en todo el plano, y por consiguiente (nueva forma del teor. de Liouville) $= k$ con k const.^{te}: Entonces de (1) despejo:

$$f(z) = \sum_{r=1}^{n} A^r\left(\frac{1}{z-a_r}\right) + A(z) + k$$

Suma de funciones racionales y por consiguiente racional c.q.d.

Añado una observación relativo a la manera distinta en que se comporta una función f alrededor resp.te de un polo o de un punto singular aislado a. Ya sabemos que en cada uno de los dos casos en cada entorno de a,la f toma valores grandes como queremos (nat.te en valor absoluto):en efecto (p.173) alrededor de a la f NO es acotada. Pero, si a es un polo,(p.177) en convenientes entornos de a $|f|$ es grande como queremos EN CADA PUNTO.En contrario,si a es pt sing aislado, fijado un entorno cualquiera de a existerán unos puntos en ello donde $|f|$ es grande como queremos,pero existen también puntos dondef toma valores proximos cuanto queremos (no a ∞ sino) a cada número m arbitrario prefijado.

Esta observación constituye el teorema de Casorati. Para demostrarlo,supongo que en un entorno C no sea verdadero:entonces en C $|f(z)-m|$ no puede ser chico como lo queremos, y luego queda en particular es distinto de zero. Puedo entonces considerar en C

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-m}$$

que será an.^{ca} regular en C exceptuado en $z = a$ (siendo $f(z)-m$ an.^{ca} regular y no nula)

Despj: $f(z) = m + \frac{1}{\varphi(z)}$ en C exceptuando $z = a$:

(Observo que siendo φ en los puntos considerados definida como $\frac{1}{f(z)-m}$ no puede ser $\varphi = 0$). Por otra parte

en C fuera de $z=a$ tengo $|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z)-m|} < \frac{1}{K}$; es decir

φ queda limitada, y luego (p. 173) puede desarrollarse en una $\mathfrak{P}(z-a)$

Por consiguiente $\frac{1}{\varphi}$ ~~es regular~~ tiene alrededor de $z=a$ un desarrollo $\mathfrak{P}_1(z-a)$ si $\varphi(a) \neq 0$, y si $\varphi(a) = 0$ un desarrollo $\frac{\mathfrak{P}_1(z-a)}{(z-a)^n}$ con n entero positivo. Luego alrededor de a

$$f(z) = m + \mathfrak{P}(z-a) \qquad \text{o} \qquad f(z) = m + \frac{\mathfrak{P}_1(z-a)}{(z-a)^n}$$

Estos desarrollos corresponden a un punto regular, o polo mientras suponemos $z=a$ sing. esencial. Hay contradicción, que necesariamente procede del hecho que admitimos $|f(z)-m|$ quedase mayor de K. c.d.d.

En la demostración supuse que el punto a fuese propio, pero el resultado vale también para z= ∞, como se vería con las transformaciones ya empleadas(z=1/t).

El resultado tiene interés porque nos dice que en proximidad de un punto singular esencial aislado hay podría decir el máximo desorden el los valores tomados por f(z),; porque f(z) toma valores próximos a todos los números posibles.

Controlo sobre ejemplo: tomo e^z alrededor de $z=\infty$ que es punto sing. esencial (p. 183). Tomado m $(\neq 0)$ arbitrario [fijado] y un valor de $\log m$, sea μ, tengo

$$e^{\mu} = m \qquad \text{para } z = \mu. \quad \text{Siendo } e^z \text{ periódica}$$

con el período $2\pi i$ $(e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z)$, también:

$$e^{\mu+2\pi i} = e^{\mu+4\pi i} = \dots = e^{\mu+2n\pi i} = \dots = m \quad (n \text{ ent. } \gtrless \cdot)$$

Entre los puntos $\mu + 2n\pi i$ hay tan próximos cuanto queremos a $z = \infty$ (es decir hay que son externos a cada círculo prefijado); luego en cada entorno de $z = \infty$ encontramos puntos donde $e^z = m$.

En este ejemplo vemos que en cada entorno del punto sing esencial considerado ocurre algo más de lo que afirma el teorema de Casorati-Weierstrass: no solo f(z) se acerca a m, sino es igual a m. Ahora bien, existe un teorema de Picard que me limito a enunciar: en cada entorno de un punto sing.esencial la f TOMA cada valor m prefijado arbitrariamente, con exclusión al máximo de dos valores (p. e. el valor m=o no es tomado por e^z)

RESIDUOS. Se llama residuo de f en un punto a singular aislad el valor

$$\boxed{R = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz} \rightarrow \text{izquierda}$$

donde γ es el contorno de un entorno de a, en el cual &&&&&&&& entorno f sea regular(con excepción de a). El contorno γ se entiende recorrido en sentido tal que el interior del entrono quede a la ~~izquierda~~. Luego se recorre γ positivamente o negativamente, según que a es propio o impropio.

El residuo resulta independiente de la elección de la línea γ (p.126)

La misma definición podría adoptarse también si a es regular: per en este caso, si a es propio el residuo resulta cero (teorema de Cauchy, p.123). En cambio si a es regular impropio el residuo, generalmente no resulta cero, como lo veremos.

Si a es propio el residuo resulta igual al coeficiente de 1/(z-a) en el desarrollo de f alrededor de a. En efecto en

$$f = P(z-a) + \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \dots$$

puedo integrar por serie. Entonces

$$\int_\gamma P(z-a)\,dz = 0 \quad (P \text{ es regular en } z). \quad \int \frac{b_n}{(z-a)^n}\,dz = 0 \quad (n = 2, 3, \dots$$

y resulta

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma \frac{b_1\,dz}{z-a} = b_1 \cdot 2\pi i \quad \text{es decir.} \qquad \text{p.118}$$

(En el caso particular donde f es racional v. p. 128)

Puede considerarse extensión del teor. de Cauchy]

← los mismos polos de 1er orden. El residuo de $\cot g\, z$

es $\left[1 : \frac{d\, tg z}{dz}\right]_{z=n\pi} = \left[\frac{1}{1+tg^2 z}\right]_{z=n\pi} = +1.$

f ~~admite~~ - donde no es regular - admite puntos singulares aislados

Si no existiera, en el interior de f ~~o~~ sobre f un punto de acumulación ~~que~~: este punto no podría ser regular ni singular aislado (porque en cada entorno existiría otros puntos singulares).

Para calcular el residuo de f en un polo (propio) de 1er orden puede servir esta regla: el residuo es el número recíproco de la derivada de $\frac{1}{f(z)}$. En efecto, si el punto es a, y ($b_1 \neq 0$):

$$f = \frac{b_1}{z-a} + P(z-a) \quad \text{luego} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{b_1}{z-a} + P(z-a)} = \frac{z-a}{b_1 + (z-a)P(z-a)}$$

$$= \frac{z-a}{b_1\{1 + a_0(z-a) + \dots\}} = \frac{z-a}{b_1}\left(1 - a_0(z-a) \dots\right) = \frac{z-a}{b_1} + (z-a)^2 P_1(z-a)$$

$\left[\frac{d\frac{1}{f}}{dz}\right]_{z=a} = \frac{1}{b_1}$ c.q.d. P.e. si tomo $f = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$ (que tiene en $z=0$ un polo de primer orden, porque $\operatorname{sen} z$ tiene un cero de 1er orden) tiene residuo $\left[\frac{1}{\cos z}\right]_{z=0} = 1$.

Más gen. son polos de 1er orden $z = n\pi$ (n entero $\gtrless 0$): el residuo es $\frac{1}{\cos n\pi} = (-1)^n$. Si tomo $f(z) = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$ tiene

$$\boxed{\text{Residuo} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\,dz = b_1}$$ c. d. d

Así vemos que puede el residuo resultar nulo aunque el punto a sea singular: esto ocurre si $b_1=0$.

Todo esto se modifica si a es impropio: entonces el residuo es dado por el coef.te de $1/z$ en el desarrollo local, cambiado de signo . Si en efecto

$$f = a_0 + a_1 z + \dots + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

integrando positivamente a lo largo de γ tengo

$$\int_\gamma f\,dz = (\text{como antes})\ b_1 \int \frac{dz}{z} = 2\pi i\, b_1,$$

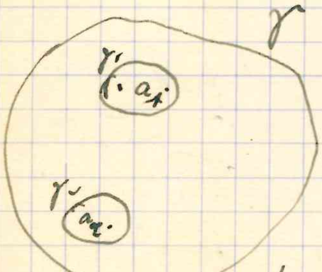
es decir

$$\text{Residuo} = -\frac{2\pi i\, b_1}{2\pi i}\ ; \quad \boxed{\text{Residuo} = -b_1}$$

Y observo que ~~también~~ aun si el punto impropio es regular será generalmente b_1 distinto de cero (ahora son los términos en z, z^2 etc los que caracterizan el punto singular, p.183). Luego aúnque el punto impropio sea regular, el corres pondiente residuo puede ser distinto de cero.

TEOREMA DE LOS RESIDUOS= Si en el interior del campo de existencia de f considero línea cerrada γ que no se corte (cuyos puntos sean regulares para f) en cuyo interior f admita ~~puntos regulares y singulares~~ (necesariamente en número finito) $a_1\ a_2 \quad a_n$ con residuos $R_1\ R_2 \quad R_n$ entonces

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{m=1}^{n} R_m}$$



En efecto si trazo alrededor de cada a_m un contorno bastante chico γ_m, en el campo $m+1$ veces conexo interior a γ y exterior a los γ_m, puedo aplicar el teor de Cauchy extendido p.129. Luego

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum \int_{\gamma_m} f\,dz = \sum R_m$$

(La fórmula se reduce al teor.ª de Cauchy si faltan los pts sing.)

Indico una consecuencia. Sea f analítica en todo el plano(incluso el punto impropio) excepto que en un número finito de puntos singulares. Entonces la suma de los residuos(incluso él en el punto impropio) resulta nula. En efecto tomando un contorno γ que incluya en su interior todos los puntos propios singulares

Otro ej^{no} $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + z$

polos $z=0$ residuo 1 } claro

$z=1$ " 1

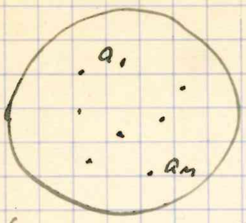
$z=\infty$ residuo -2 (pues el desarrollo de Laurent alrededor de $z=\infty$ es

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} + z = \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2} \dots\right) + z$$

$= z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}$ etc. Suma $1+1-2=0$

como lo dije a p. 179

El nº de los ceros es finito ~~(los~~ de ~~los ceros aislados~~; si no existiría pt de acumulación y sería $f \equiv 0$ (p.)



$a_1 \dots a_n$ el teor. anterior 195 nos da:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\,dz = R_1 + \dots + R_n$$

γ Además el residuo en el punto impropio R vale

(p. 191)

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\,dz = R$$

Si también aquí recorro el contorno positivamente, luego siendo

$$\boxed{R_1 + \dots + R_n + R = 0}$$ c. d. d.

Como control, si tomo una serie entera (p. ej. e^z)

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

tenemos como único pt. singular (esencial) $z = \infty$ (p. 183). el único residuo tiene que ser nulo. Y en efecto es el coef. de $\frac{1}{z}$, que falta. ×

Sigue p. 195 bis etc

Del teor de los residuo sigue el teor del indicador logarítmico. En el interior del campo de existencia de f considero línea γ cerrada..tal que sobre la línea la f sea regular en cada punto, y en el interior sea regular en cada punto,con exclusión de un número finito de POLOS.Además supongo que sobre γ la f nunca se anule. En cambio puede anularse en el interior. Considero entonces en el interior los ceros y los polos de f, cada cual con su orden (si se trata de un polo,cfr.p: 181; si se trata de un cero es el exponente mínimo de z-a que aparece efectivamente en el desarrollo alrededor del cero a que se considera). Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = N_0 - N_\infty \qquad (1)$$

donde N_0 y N_∞ indica resp.te el número de los ceros y él de los polos,tomados cada cual tantas veces cuanto vale su orden.(la fórmula se llama del ind.r log.porque al primer miembro aparece la derivada log.ca de f)

Para demostrarlo, aplico a f'/f el teorema de los residuos.Ahora en el interior de γ f'/f es regular exceptuando:

1) los polos de f;
2) los ceros de f.

$$* = \frac{m a_m + \cdots}{(z-a)\{a_m + \cdots\}} = \frac{1}{z-a}\,\frac{m a_m + \cdots}{a_m + \cdots} = \frac{1}{z-a}(m + \cdots)$$

un cero^{m} $\quad f = (z-a)^m \cdot P \quad [P \neq 0]_{z=a}$

$\frac{f'}{f} = \frac{m}{z-a} + \frac{P'}{P}$; polo, de residuo m. — Un polo$_n$

$f = (z-a)^{-n} P$; $\frac{f'}{f} = \frac{-n}{z-a} + \frac{P'}{P}$ polo, residuo $-n$;

** A veces se incluyen los polinomios entre las funciones olomorfas; y las f^s racionales entre las meromorfas de p. 195   195 bis.

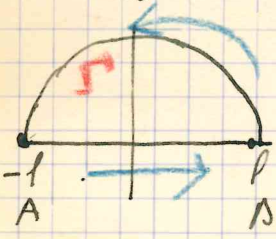
El teorema de los residuos puede servir para calcular integrales definidas. P. e. sea el integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx.$$

siendo P y Q polinomios con coef.tes reales, y Q sin ceros reales. Además sea $\operatorname{grad} Q \geq \operatorname{grad} P + 2$ (*)
(y así el integral tiene sentido). Digo que

$$I = 2\pi i \sum R \qquad (1)$$

la suma de los residuos siendo extendida a los polos de la función racional $\frac{P(z)}{Q(z)}$ que están en el semiplano $y > 0$. En efecto sea l un número positivo considero el integral extendido al contorno cerrado de la



figura, y aplico el teorema de los residuos.
Entonces

$$\int_{-l}^{l} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx + \int_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 2\pi i \sum R$$

siendo aquí la $\sum R$ extendida a los polos interiores al semicírculo. Γ es la semicircunferencia BA. Para calcular el 2° integral pongo $z = l e^{i\theta}$, (siendo l const.te); entonces $dz = i l e^{i\theta} d\theta$ (**). Por consiguiente el 2° integral, cuando tomo θ como variable de integración tiene como integrando una fracción cuyos num. y den. contienen l en grados tales que el del den. resulte mayor de una unidad al menos respecto al del num.r (cfr. (*), (**)): luego cuando $l \to \infty$, el integrando tiende a cero, y también el integral. Luego pasando al límite resulta (1)

P.e. si tomo

$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ la función $\frac{1}{z^2+1}$ tiene los polos $z = \pm i$ de los cuales el primero en el semiplano $y > 0$ con residuo que calculo (p. 192) formando $z^2+1;\ 2z;\ 2i;\ \boxed{\frac{1}{2i}}$.

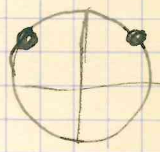
Luego

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

En este caso el cálculo directo era inmediato $(\operatorname{arctg} x)_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ de acuerdo con el resultado de polo. Pero el interés consiste en aplicar el método a casos donde el método elemental es más largo.

P.e. $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$. La función $\frac{1}{z^4+1}$ tiene polos para las 4 raíces cuartas de $-1 = e^{\pi i}$; y luego para

$$z = e^{\frac{\pi i}{4}},\quad e^{\frac{\pi i}{4}+\frac{\pi i}{2}},\quad e^{\frac{\pi i}{4}+\pi i}\quad e^{\frac{\pi i}{4}+\frac{3}{2}\pi i}$$



De estos polos nos interesan los dos primeros, que están en el semiplano $y > 0$. Para calcular los residuos formo (p. 192).

$$z^4+1\ ;\ 4z^3 \quad \begin{cases} 4\, e^{\frac{3}{4}\pi i} \\ 4\, e^{\frac{3}{4}\pi i + \frac{3}{2}\pi i} = 4 e^{\frac{9}{4}\pi i} = 4 e^{\frac{1}{4}\pi i} \end{cases}$$

Por consiguiente residuos (recíprocos de los últimos)

$$\frac{1}{4} e^{-\frac{3}{4}\pi i} \quad y \quad \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}\pi i}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4}\left\{\cos\frac{3}{4}\pi - i \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi + \cos\frac{1}{4}\pi - i \operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi\right\}$$

(la suma de los cosenos se anula: los senos valen $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{4}\left(-i\sqrt{2}\right) = \boxed{\frac{\pi\sqrt{2}}{2}}$$

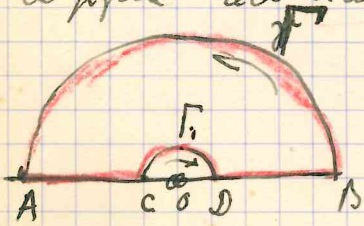
El teor. de los residuos puede servir para calcular integrales que por el método elemental podría no sólo ser engorroso, sino fallar. Calcularé

$$\boxed{I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\boxed{2I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx}$$

Considero la función an.ca $\boxed{\dfrac{e^{iz}}{z}}$, y el contorno de la figura recorrido positivamente: en el interior no tiene polos luego no hay que considerar residuos (en otras palabras se aplica el teor. de Cauchy, como caso particular del de los residuos).



$\int_{AC} + \int_{\Gamma_1} + \int_{DB} + \int_{\Gamma} = 0$. Después se pasará al límite cuando $r = OD \to$ cero, y $\rho = OB \to \infty$. Cuanto a $\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz$, $(z = \rho e^{i\theta})$ vale

$$\int_0^\pi e^{i\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} \frac{1}{\rho e^{i\theta}}\, \rho \cdot i e^{i\theta}\, d\theta =$$

$$= i\int_0^\pi e^{-\rho\sin\theta} e^{i\rho\cos\theta}\, d\theta$$ y cuando $\rho \to \infty$, siendo

$\sin\theta > 0$ en el intervalo de integración $\left(\frac{1}{e^{\sin\theta}} < 1\right)$, $e^{-\rho\sin\theta} \to 0$ (el segundo factor tiene módulo 1) y el integrando, y con eso (como podría controlarse) la integral tiende a cero. Cuanto a $\int_{\Gamma_1}$ $(z = re^{i\theta})$ análog.

$$\int_{\Gamma_1} = i\int_\pi^0 e^{-r\sin\theta} e^{ir\cos\theta}\, d\theta$$ (recordar el sentido en que se recorre Γ_1)

El integrando ~~cuando~~ cuando r vale cero es 1, y luego $\lim \int_{\Gamma_1} = i(-\pi) = -\pi i$

Fundar

$$\left(\int_{AC}+\int_{DA}\right)\frac{e^{ix}}{x}\,dx = \left(\int_{AC}+\int_{DA}\right)\frac{\cos x + i \operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

Las partes reales se destruyen pues ($x = -x'$)

$$\int_{-b}^{-d}\frac{\cos x}{x}\,dx = \int_{b}^{d}\frac{\cos x'}{x'}\,dx' = -\int_{d}^{b}\frac{\cos x}{x}\,dx$$

(siendo d, b las abscisas de D, A y luego $-b$, $-d$ las de A, C) y ~~las~~ imaginarias son iguales (análog.). Luego

$$\left(\int_{AC}+\int_{DA}\right)\frac{e^{ix}}{x}\,dx = 2i\int_{d}^{b}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

Luego pasando al límite cuando $d \to 0$, $b \to \infty$ (es decir $r \to 0$, $\rho \to \infty$)

$$2i\,I + (-\pi i) = 0. \qquad I = \frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente

$$\boxed{\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.}$$

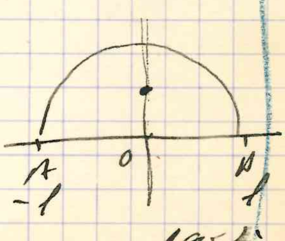
Otro ejemplo que lleva al cálculo de

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x \operatorname{sen} mx}{x^2+a^2}\,dx = \pi e^{-ma} \quad (1)}$$

siendo a, m constantes positivas

Consideremos

$$\int \frac{z\, e^{mzi}\,dz}{z^2+a^2}$$



a lo largo del perímetro de semicírculo como a p. 195 bis

~~Ahora~~ y aplicar el teorema de los residuos. Polos $z = \pm ia$

De los cuales sólo $z = ia$ está en el semiplano $y > 0$ y por consiguiente en el interior del semicírculo cuando l es bastante grande. Para calcular el residuo

$(z^2+a^2)z^{-1}e^{-mzi}$; $2\cancel{z}z^{-1}e^{-mzi}+(z^2+a^2)\left(-\frac{1}{z^2}e^{-mzi}-\frac{mi}{z}e^{-mzi}\right)$

que en $z=ia$ vale. $\frac{2ia}{\cancel{e^{ma}}}$ $2e^{-mi^2a}=2e^{ma}$

Luego residuo $\boxed{\frac{1}{2}e^{-ma}}$.

El integral a lo largo del semicírculo tiende a cero cuando $l\to\infty$ ~~pues~~ porque vale $(z=le^{i\varphi})$

$$\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\frac{le^{i\varphi}e^{mil(\cos\varphi+i\,\text{sen}\,\varphi)}\cdot li\,e^{i\varphi}d\varphi}{l^2e^{2i\varphi}+a^2}=$$

$$i\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\frac{l^2e^{2i\varphi}e^{-ml\,\text{sen}\,\varphi}e^{mil\cos\varphi}d\varphi}{l^2e^{2i\varphi}+a^2}=$$

$$i\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\frac{e^{2i\varphi}e^{-ml\,\text{sen}\,\varphi}e^{mil\cos\varphi}}{e^{2i\varphi}+\frac{a^2}{l^2}}d\varphi$$

donde en el num.r los factores tienen módulo uno, excepto el 2º que es $\left(\frac{1}{e^{m\,\text{sen}\,\varphi}}\right)^l$ y tiende a cero; en el den.r hay un sumando constante y otro que tiende a cero. El integrando tiende a cero. Luego queda solo el $\int^l$ que tiende a $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{mix}dx}{x^2+a^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\cos mx+i\,\text{sen}\,mx)}{x^2+a^2}dx$. Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\cos mx + i \operatorname{sen} mx)}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} e^{-ma} = \pi i e^{-ma}$$

Siendo el 2º miembro imaginario puro, tal es también el 1er (por lo demás

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x \cos mx\,dx}{x^2+a^2} = \int_{\infty}^{0} \frac{x \cos mx\,dx}{x^2+a^2} = -\int_{0}^{\infty} \cdots \Big)$$

luego sigue (*).

Observo que la dem. vale si $a \neq 0$: si $a=0$, falla (el polo se encontraría sobre el perímetro del área considerada). Pero, después de lograr (1) puede pasar al límite por $a \to 0$ y logra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} mx}{x^2}\,dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} mx}{x}\,dx = \pi$$

de acuerdo con el resultado ya logrado antes ($x \mid \operatorname{sen} x$): ya estudiar que el paso al límite puede hacerse.

Para aplicar a f'/f el teor de los residuos, tengo que considerar su residuo en los puntos de las clases 1),2). Empiezo por los 1).
Sea

$$f = a_m(z-a)^m + \dots \qquad a_m \neq 0$$

el desarrollo de f alrededor de un cero a de orden m. Entonces

$$f' = m\, a_m (z-a)^{m-1} + \dots$$

$$\frac{f'}{f} = \left(\text{divid num. y den. por } (z-a)^{m-1}\right) = \frac{m a_m + \dots}{a_m(z-a) + \dots} = \frac{m}{z-a} + P(z-a)$$

Y aquí vemos que el residuo de f'/f en a (p.191) es dado por el número entero positivo m

Sea en cambio a un polo de orden n. Entonces alrededor de a

$$f = \frac{b_n}{(z-a)^n} \dots + \frac{b_1}{z-a} + P(z-a); \qquad f' = -\frac{n b_n}{(z-a)^{n+1}} + \dots$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{-\frac{n b_n}{(z-a)^{n+1}} + \dots}{\frac{b_n}{(z-a)^n}} = \left(\text{mult. den. y num. por } (z-a)^{n+1}\right) = \frac{-n b_n + \dots}{b_n(z-a) + \dots} = \frac{-n}{z-a} + \dots$$

El residuo vale -n. Aplicando a todos los ceros y polos, logro (teor res.)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = \sum m - \sum n = N_0 - N_\infty \qquad \text{c.d.d.}$$

FUNCIONES MEROMORFAS U OLOMORFAS= ~~Si queremos~~ Una función anal. en todo el plano, regular con excepcion de unos pts sing aislados, y si la función no se reduce a una función racional, debe existir al menos un punto sing esencial (p.185). El caso más sencillo de una función (no racional sino) transcendente en estas condiciones es el caso donde el punto sing esencial es único, y más precisamente impropio (caso al cual siempre podemos reducirnos con transfn z'= 1/(z-a), si el pt fuera z=a). Una función en estas condiciones se llama olomorfa si no tiene demás puntos singulares, o meromorfa si, además, tiene sólo polos (el caso de las funciones ol. puede considerarse como incluído en el de las meromorfas).

Una función olomorfa puede desarrollarse en P(z) convergente en todo el plano (propio), es decir no difiere de una función entera.(1) Desde este punto de vista puede considerarse como una generalización de los polinomios.

(1) p. 183

En cambio una función meromorfa puede considerarse como una extensión de las funciones racionales: estas sólo poseen polos, una función meromorfa posse, además, el único punto sing esencial al infinito.

Vamos a ver que a las funciones olomorfas y meromorfas pueden extenderse unas propiedades muy importantes resp.te de los polinomios y de las funciones racionales.

El teor fundl del algebra no vale para las funciones olomorfas: existen funciones enteras que nunca se anulan. Tal es p.e

$$f(z) = e^z \quad (= e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y))$$

que nunca se anula, como es claro, aún para z imaginario.

Mas gen.te siendo $g(z)$ una serie entera(ev.te polinomio) la función

$$f(z) = e^{g(z)} \qquad (1)$$

resulta regular en todo el plano propio, como es claro, y además nunca se anula

El resultado puede invertirse: si $f(z)$ es función entera que no admite ceros, necesariamente puede escribirse bajo la forma (1). En efecto la función

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

resulta regular en todo el plano(propio), tales siendo f y f′ y siendo f no nula: es decir es una función olomorfa(ev.te polinomio). Luego (p.125, campo simpl.te conexo, y el plano propio es tal)

$$\boxed{\omega(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi(z)\, dz}$$

es una función uniforme en todo el plano (propio). Además, si la considero como función del límite superior de integración (p.125)

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{f'}{f}$$

Ahora la manera más sencilla para concluir parecería ser esta: también log f(z) tiene como derivada f'/f: luego

$$\omega = \log f + c \qquad (c \text{ cont.}^{te})$$

y por lo tanto de $f = e^{\log f}$ sigue

$$f = e^{\omega + c}$$

de manera que ,llamando g(z) al exponente(función uniforme),resulta que f(z) puede escribirse bajo la forma (1). Hay pero un inconveniente,que la función log f(z) de la cual hablamos no es uniforme,lo que ~~podría dejar lugar a~~ podría dejar lugar a duda. Luego razono así. Si formo la función

$$e^{\omega(z)}$$

(uniforme, como ω), tengo

$$\frac{de^{\omega}}{dz} = e^{\omega}\frac{d\omega}{dz} = e^{\omega}\frac{f'}{f}$$

y por consiguiente

$$\cancel{f\frac{de^{\omega}}{dz} - e^{\omega}\frac{df}{dz} = 0} \qquad \frac{df}{dz}\cdot e^{\omega} - f\,\frac{de^{\omega}}{dz} = 0$$

y luego

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{f}{e^{\omega}}\right) = 0 \quad \cancel{\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{\omega}}{f}\right) = 0} \quad , \quad \cancel{\frac{e^{\omega}}{f} = k.}$$

y

$$\boxed{f = k\,e^{\omega}} \qquad (k = \text{cost.})$$

Si pongo $c = \log k$ (una determinación cualquiera) se tiene

$$f = e^{\omega + c}$$

y se concluye la (1). c.d.d.

Lo dicho lleva consigo una consecuencia. Cuando se construye un polinomio a partir de sus ceros, el polinomio queda individualizado a menos de un factor constante. En cambio, si pasamos de los polinomios a las funciones olomorfas, si parto de la función ol.fa f(z), la nueva función

$$F(z) = e^{g(z)} f(z)$$

donde g(z) es ol.fa (o ev,te polinomio) arbitraria tiene los mismos ceros , con los mismos órdenes, y antes bien es la más general función olomorfa que se encuentra en esta condiciones. Para comprenderlo bien, observo que decir que z=a es un cero de orden m p.e. de f(z) significa (p.179-195) que ~~alrededor de a~~

$$f(z) = (z-a)^m f_1(z) \qquad \text{con } f_1 \text{ anal. y } f_1(a) \neq 0 \quad (\text{claro})$$

Luego, ~~alred. de a~~

$$F(z) = \left[e^{g(z)} f_1(z)\right](z-a)^m$$

donde los términos entre corchetes constituyen función an.ca no nula en z=a. Cuanto al recíproco, la función

$$\varphi = \frac{F(z)}{f(z)}$$

es regular en cada punto que no sea cero de f, y también en cada cero de f, porque entonces

$$(*) \qquad \varphi = \frac{(z-a)^m F_1(z)}{(z-a)^m f_1(z)} = \frac{F_1(z)}{f_1(z)} \qquad F_1(a) \neq 0. \; f_1(a) = 0.$$

y φ ~~resulta regular en z=a. Por consiguiente~~ es an.ca regular en todo el plano y nunca nula (podría serlo sólo en un cero a de F_1 pero entonces (*) asegura $\varphi(a) \neq 0$). ∴ $\varphi = e^g$ y

$$F(z) = f(z)\, e^{g(z)} \qquad \text{c.d.d.}$$

Queda por ver si, dados a priori los ceros de f, con los respectivos órdenes puede construirse una función &&&&& olomorfa cuyos ceros coincidan con los dados. & Naturalmente basta construir una solución, para conocerlas a todas según lo visto.

Si damos sólo un número finito de ceros:

$$a_1, \quad \ldots \quad a_n$$

con los órdenes

$$\lambda_1, \quad \ldots, \quad \lambda_n$$

el polinomio

$$f(z) = (z-a_1)^{\lambda_1} \cdots (z-a_n)^{\lambda_n} \qquad (1)$$

satisface a las condiciones impuestas, y

$$e^{g(z)} (z-a_1)^{\lambda_1} \cdots (z-a_n)^{\lambda_n}$$

es la solución más general.

Las cosas se complican si los ceros son en número infinito. En este caso observo en primer término que puedo aplicar p.155: si el conjunto de los ceros tiene un punto de acumulación propio la función sería idénticamente nula. Por lo tanto en una región finita sólo podemos tener un número finito de ceros. Los ceros formarán entonces un conjunto numerable: en efecto imagino p.e. las cinrunferencias con centro en el origen y radio 1, 2, etc. En la primera(p:e:incluído el contorno) puede haber sólo un número finito(tal vez ninguno); los dispongo p.e. según los valores crecentes del módulo(y en caso de igualdad de los módulos según el valor crecènte del arg.to) y así continúo, y llego a $a_1, a_2, a_3, \ldots$ con $|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \ldots$ y $\lim |a_n| = \infty$

× La condición $U \neq 0$ de la definición tiene como objeto que no pueda anularse el producto sin que se anule un factor (que en este caso será uno de los $u_1 \ldots u_m$)

Sean

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

las respectivas multiplicidades prefijadas. Entonces la primera idea que se presenta es la de construir como f(z) no ya el producto (1) de un número finito de términos, sino el producto infinito

$$f(z) = (z-a_1)^{\lambda_1}(z-a_2)^{\lambda_2}\cdots$$

Pero enseguida se presenta una dificultad. Para que un producto infinito sea convergente es ~~preciso~~ necesario(no suficiente) que su término general tienda a 1, como lo explicaré. En cambio (fijado z) la diferencia $z-a_n$,al crecer de n, crece indefinidamente(en val abs.). Esta dificultad desaparece enseguida si, en cambio, tomo el producto infinito

$$f(z) = \left(1-\frac{z}{a_1}\right)^{\lambda_1}\left(1-\frac{z}{a_2}\right)^{\lambda_2}\cdots \qquad (2)$$

cuyo término general tiende a uno, y que ofrece la misma circunstancia de anularse en todos los puntos a_r (con el mismo orden). Quedan dos dificultades, una sin importancia, y otra fundamental:

1) lo dicho no puede hacerse si entre los ceros hay z=0(con mult.d λ_0). Pero en este caso yo tomaría

$$f(z) = z^{\lambda_0}\left(1-\frac{z}{a_1}\right)^{\lambda_1}\left(1-\frac{z}{a_2}\right)^{\lambda}\cdots \qquad (2')$$

~~[illegible]~~ o (2')

2) En el producto infinito (2) el término general tiende a ~~UNO~~,pero ya dije que esto es necesario, pero no suficiente para la convergencia. Luego no hay ninguna razón para que ese producto resulte efectivamente convergente.

Hé aquí una verdadera dificultad.

Antes de continuar, recuerdo que un producto infinito conv.te

$$\prod u_i = u_1 u_2 \ldots$$

se define así: el prod.to es conv.te si existe un índice m tal que para $z > m$ resulte $u_z \neq 0$ y además exista y no sea nulo el límite

$$\lim_{n=\infty}(u_{m+1} \cdots u_n)$$

Entonces el valor del producto infinito es por definición (llamando U al último límite)

$$\prod u_i = u_1 \ldots u_m U$$

Podría parecer mas simple decir esto (como efectivamente dicen unos) que el prod.inf.to es converg.te y vale U si existe y vale U

$$\lim_{n=\infty}(u_1 \ldots u_n)$$

~~Pero en este caso~~

* La (5) puede escribirse más simplemente

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_r}\right) e^{P_r(z)} \qquad (5')$$

(con exponentes $\lambda_r = 1$) entendiéndose que si a_r es cero r^{ple}, el factor se repite <u>λ_r veces</u>

(como se hace en la teoría de las series). Pero habría ~~una~~ &&&&&&&& &&&&&&&&& inconvenientes: ~~una~~. queriendo mantener no nulo ~~el~~ U ~~prod. infinito~~ cómo antes, tendríase que renunciar al caso donde hay factores nulos. La necesidad que sea

$$\lim_{n=\infty} u_n = 1$$

resulta de:

$$\lim u_n = \lim \frac{u_{m+1} \cdots u_{n-1} u_n}{u_{m+1} \cdots u_{n-1}} = \frac{\lim \text{num.}^r}{\lim \text{den.}^r} = \frac{U}{U} = 1.$$

Volviendo a la dificultad señalada, Weierstrass ha&&&&&&&& vencido esa dificultad, siguiendo esta idea. (Me refiero a (2): el caso donde también z=0 es cero ~~siempre~~ se obtendría agregando un factor z^{λ_0}.) Weierstrass ha construído un producto (2) donde el factor general en cambio de

$$\cancel{(z-a_r)^{\lambda_r}} \quad \left(1-\frac{z}{a_r}\right)^{\lambda_r} \qquad (3)$$

es

$$\cancel{(z-a_r)^{\lambda_r}} \left[\left(1-\frac{z}{a_r}\right) e^{P_r(z)}\right]^{\lambda_r} \qquad (4)$$

siendo $P_r(z)$ un polinomio en z, cuyo grado R variarà generalmente con r. Este factor sólo se anula(de orden λ_r) para $z=a_r$ así como (3), y, lo que es esencial, Weierstrass ha demostrado que los exponentes $P_r(z)$ pueden elegirse de manera que el producto infinito

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left[\left(1-\frac{z}{a_r}\right) e^{P_r(z)}\right]^{\lambda_r} \qquad (5)$$

resulte efectivamente convergente en todo el plano z. ~~Los factores~~ Entonces (5) representa una función analítica en todo el plano; llamándola $f(z)$ cumple &&& las condiciones impuestas. Todas las otras soluciones se obtienen como a p.203(multiplicando por $e^{g(z)}$ ..). Es esto el teor. de Weierstrass

Los factores &&& (4) se llaman los factores primarios (Weierstrass) de f(z).

Además, el polinomio exponente $P_r(z)$ siempre puede escribirse en la forma:

$$\boxed{P_r(z) = \frac{z}{a_r} + \frac{z^2}{2a_r^2} + \cdots \frac{z^R}{R a_r^R}.}$$

Finalmente, cuanto al valor que toma R (a priori y en general variable con r) hay un caso donde puede indicar se de manera general. Esto ocurre cuando los órdenes $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ quedan inferiores a un número fijo, y además existe un número n tal que la serie

$$\sum \frac{1}{|a_r|^n} \qquad (º)$$

resulte convergente. Entonces puede tomarse (para cada r) $\boxed{R=n-1}$ La función entera se llama entonces una trascendente entera de género n-1. Naturalmente, dado el significado de R, número entero ≥ 0 ~~positivo~~, también n es un número entero positivo, y antes bien al menos igual a uno(porque para n=o la serie(º) evidentemente diverge). Luego se habla de funciones enteras de géneros O, 1,2,etc. Para una función entera de género p(=n-1, p $\geq$ 0) la (5) toma la forma

$p = R$

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{a_r}\right) e^{\frac{z}{a_r}+\frac{z^2}{2a_r^2}+\dots+\frac{z^p}{p\,a_r^p}} \qquad (6)$$

P.e. ~~si~~ considero $\boxed{\text{sen}\,\pi z}$, que es función entera, tiene los ceros

$$z=0, \quad z=\pm 1, \quad z=\pm 2, \dots$$

todos de primer orden. ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~
Los considero en el orden:

$$0, \; +1, \; -1, \; +2, \; -2, \; \dots$$

La serie (dejando $z=0$)

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\dots$$

es convergente: luego, con las notaciones anteriores n=2; p=1. Tenendo en cuenta la presencia del cero z=0 (p. 205) es cierto posible el desarrollo en producto infinito

$$\text{sen}\,\pi z = e^{g(z)}\, z \left(1-\frac{z}{1}\right) e^{\frac{z}{1}} \left(1+\frac{z}{1}\right) e^{-\frac{z}{1}} \left(1-\frac{z}{2}\right) e^{\frac{z}{2}} \left(1+\frac{z}{2}\right) e^{-\frac{z}{2}} \dots$$

siendo $g(z)$ una función entera que por ahora no conocemos. Considerando juntos los pares de factores primarios consecutivos,

$$\left(1-\frac{z}{r}\right) e^{\frac{z}{r}} \left(1+\frac{z}{r}\right) e^{-\frac{z}{r}} = 1-\frac{z^2}{r^2}$$

(género 1)

encontramos

el desarrollo

$$\boxed{\operatorname{sen} \pi z = e^{g(z)} z \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)}$$

Más precisamente podría ver que $e^{g(z)}$ se reduce a la constante π, y tenemos así el desarrollo (Euler):

$$\boxed{\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)}$$

La función sen resulta de esta manera descompuesta en factores que ponen en evidencia sus ceros, lo mismo que si fuede un polinomio.

Observo, como consecuencia la fórmula de Wallis, que da $\frac{\pi}{2}$ expresado como producto infinito:

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots}$$

La obtengo, ponendo $z = 1/2$:entonces

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 = \frac{\pi}{2} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4r^2}\right) = \frac{\pi}{2} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2r}\right)\left(1 + \frac{1}{2r}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \prod_{r=1}^{\infty} \frac{2r-1}{2r} \cdot \frac{2r+1}{2r} \quad \text{es decir} \quad \frac{\pi}{2} = \prod_{r=1}^{\infty} \frac{2r}{2r-1} \cdot \frac{2r}{2r+1}$$

c.q.d.

Del desarrollo de sen πz podemos deducir el de $\cos \pi z$. Lo aplico a $2z$

$$\operatorname{sen} 2\pi z = 2\pi z \left(1 - \frac{4z^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{4^2}\right) \cdots$$

mientras

$$2 \operatorname{sen} \pi z = 2\pi z \left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right) \cdots =$$

(mult. den y num por 4)

$$= 2\pi z \left(1 - \frac{4z^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{4^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{6^2}\right) \cdots$$

Y como $\operatorname{sen} 2\pi z = 2 \operatorname{sen} \pi z \cos \pi z$ despejo

$$\cos \pi z = \frac{\operatorname{sen} 2\pi z}{2 \operatorname{sen} \pi z} = \left(1 - \frac{4z^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{3^2}\right) \cdots$$

es decir

$$\boxed{\cos \pi z = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2r-1)^2}\right).}$$

o

$$\boxed{\cos \pi z = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\left(r - \frac{1}{2}\right)^2}\right)}$$

donde en el 2° miembro resultan evidentes los ceros de la función cos

Otro ejemplo. Para una función entera f(z) prefijo como ceros simples los números enteros negativos o nulo:

$$0, -1, -2, -3, \ldots\ldots$$

Siempre dejando el primer, la serie

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

es convergente: la función buscada tiene género UNO. Su forma más general es

$$f(z) = e^{g(z)} . z \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r}\right) e^{-\frac{z}{r}} \qquad \text{(género 1)}$$

siendo g(z) una función entera cualquiera. La función f(z) así lograda es particularmente ~~&notable~~ si elegimos

$$g(z) = cz$$

siendo c una cosntante, y además particularmente escogida. Precisamente determino c ~~&&&&&&&&~~ como una cosztante real tal que resulte

$$f(1) = 1.$$

Esto significa que

$$f(z) = e^{cz} . z \prod \left(1 + \frac{z}{r}\right) e^{-\frac{z}{r}}$$

Sobre la determinación efectiva de c diré después.

Más que $f(z)$ se considera $\frac{1}{f(z)}$, que es regular en todo el plano propio excepto en los puntos

$0, -1, -2, \ldots$ (y el pt. impropio es sing. esencial)

que son polos. Este $\frac{1}{f(z)}$ se llama la función Γ de Euler. Luego

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{cz} z \prod_1^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \qquad (\gamma)$$

siendo c la constante aludida. En cuanto a c, tiene que ser real y cumplir

$$e^{c} \cdot \prod_1^{\infty} \left(1+\frac{1}{r}\right) e^{-\frac{1}{r}} = 1$$

es decir

$$e^{c} = \prod_1^{\infty} \frac{e^{1/r}}{1+\frac{1}{r}} = \prod_1^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{r}}}{\frac{r+1}{r}} = \prod_1^{\infty} \frac{r}{r+1} e^{\frac{1}{r}}$$

$$= \lim_{n=\infty} \prod_1^{n} \frac{r}{r+1} e^{\frac{1}{r}}.$$ Pasando a los logaritmos

$$(\alpha) \quad c = \lim_{n=\infty} \sum_1^{n} \left(\frac{1}{r} + \log r - \log(r+1)\right)$$ es decir

$$c = \lim_{n=\infty} \left(1+\frac{1}{2} \ldots + \frac{1}{n} + \log 1 - \cancel{\log 2} + \cancel{\log 2} - \cancel{\log 3} \ldots + \cancel{\log n} - \log(n+1)\right)$$

$$c = \lim_{n=\infty} \left(1+\frac{1}{2} \ldots + \frac{1}{n} - \log(n+1)\right) =$$ (pues como $\log \frac{n+1}{n}$ tiende a cero es decir $\log(n+1) - \log n$ tiende a cero)

$$(1) \quad \boxed{c = \lim_{n=\infty} \left(1+\frac{1}{2} \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right)}$$

Por consiguiente como valor de c tenemos que tomar un valor que satisfaga a esta última condición(Dijimos valor real,y para esto es suficiente tomar para log n la determinación real). Queda por ver si el límite indicado en (1) existe efectivamente.La contestación es afirmativa y el resultado que es interesante en sí porque viene a decir que.aúnque la serie armónica sea divergente,la suma de los primeros n términos de la cual se reste log n tiende a un límite(es decir la suma de los primeros n términos viene a ser infinita" como" log n, en el sentido exacto referido).La existencia del límite se ve a partir de (α), donde se habla de

$$\lim_{n=\infty} \sum_{1}^{n} \left(\frac{1}{r} - \lg\left(1+\frac{1}{r}\right)\right)$$

es decir de la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} - \lg\left(1+\frac{1}{r}\right)\right)$$

se trata de domostrar la convergencia de esta serie.Ahora bien

demuestra, lo que es suficiente, la convergencia de la serie con términos de signos alternos

$$1 - \lg\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \lg\frac{3}{2} \quad \dots \quad + \frac{1}{r} - \lg\frac{r+1}{r} + \frac{1}{r+1}$$

El término general tiende a cero (sea $\frac{1}{r}$, sea $\lg(1+\frac{1}{r})$): luego basta probar que los términos van decreciendo en valor absoluto, es decir

$$\boxed{\frac{1}{r} > \lg\frac{r+1}{r} > \frac{1}{r+1}}.$$

Esto puede verse p. e. considerando: $\log(r+1) - \log r$: por el teor. del valor medio vale $\frac{1}{r+\theta_r}$ ($0<\theta_r<1$) y luego está bien

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{r+\theta_r} > \frac{1}{r+1}.$$

Por consiguiente existe el límite (1): c se llama la constante de Mascheroni o constante de Euler. Luego

$1 > c$ $\quad 1-0,693\ldots < c$ $\quad , 1,5-0,693\ldots > c$ etc.

Efectivamente resulta $\quad c = 0,577\,215\,664\,901\ldots$

La función $\Gamma(z)$ puede escribirse en una forma debida a Gauss como sigue. Tenemos (p. 215)

$$\Gamma(z) = e^{-Cz}\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{z}{n}}}{1+\frac{z}{n}} = \frac{e^{-\lim_{n=\infty} z\left(1+\dots+\frac{1}{n}-\lg n\right)}}{z}\lim_{n=\infty}\prod_{1}^{n}\frac{e^{z/k}}{1+\frac{z}{k}}$$

$$= \lim_{n=\infty}\left\{\frac{e^{-z\left(1+\dots+\frac{1}{n}-\lg n\right)}}{z}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{z/k}}{1+\frac{z}{k}}\right\} =$$

$$= \lim_{n=\infty}\frac{e^{z\log n}}{z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}$$ es decir (escribiendo $e^{z\lg n} = n^z$, donde se entiende que precisamente $n^z = e^{z\lg n}$)

$$\boxed{\Gamma(z) = \lim_{n=\infty}\frac{n^z}{z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}}$$

que es la fórmula de Gauss.

De esta fórmula sigue

1) $$\boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)}$$

En efecto formo $\Gamma(z+1)$ de manera análoga y divido

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \lim_{n=\infty} n\frac{z}{z+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{z}{k}}{1+\frac{z+1}{k}} = \lim_{n=\infty} n\frac{z}{z+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{k+z}{k+z+1} =$$

$$= \lim_{n=\infty} n\frac{z}{z+1}\frac{z+1}{z+2}\frac{z+2}{z+3}\cdots\frac{z+n}{z+n+1} = \lim_{n=\infty}\frac{zn}{z+n+1} = z$$

c. d. d.

2) que para los valores enteros positivos de z la función Γ se reduce a un factorial y precisamente

$$\Gamma(m) = (m-1)!$$

En efecto

$\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!$; $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3!$ etc.

Por consiguiente la función Γ sirve para extender la noción de factorial a todos los números, reales o imaginarios(exceptuados los enteros negativos)

3) una relación notable entre la función Γ y el seno, y precisamente

$$\boxed{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}}$$

En efecto ~~(β) p. 215 escrito por 1+z y por 1-z~~ da

$$\cancel{\frac{1}{\Gamma(1+z)}=e^{c(1+z)}(1+z)\prod_1^\infty\left(1+\frac{1+z}{n}\right)e^{-\frac{1-z}{n}}}$$

$$\cancel{\frac{1}{\Gamma(1-z)}=e^{c(1-z)}(1-z)\prod_1^\infty\left(1+\frac{1-z}{n}\right)e^{\frac{-1+z}{n}}}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)}=\frac{1}{z\Gamma(z)}$$ y luego ((γ) p. 215)

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)}=e^{cz}\prod_1^\infty\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$ Si cambio z en $-z$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)}=e^{-cz}\prod_1^\infty\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}$$

y multiplicando

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)\,\Gamma(1-z)}=\prod_1^\infty\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

es decir

$$\frac{1}{z\Gamma(z)\Gamma(1-z)}=\prod_1^\infty\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\quad;\quad\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}=z\prod_1^\infty\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi}$$ c.d.d.

Paso ahora a considerar funciones meromorfas(punto sing esencial al infinito, y además polos propios; generalizan las funciones racionales.

Los polos o son en número finito, o forman conjunto numerable con único punto de acumulación el punto impropio: si en efecto hubiera un punto de acumulacipn propio, este no podría ser ni regular, ni singular aislado(en cada entorno suyo habría polos). Luego en cada recinto propio sólo un número finito de polos y se concluye como a p. 203. También ahora podemos indicar los polos, si son infinitos con $a_1, a_2 \ldots$ suponiendo p.e.

$$|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \ldots \qquad \lim |a_n| = \infty$$

Como una función racional es cociente de dos polinomios, así digo que cada función meromorfa puede escribirse como cociente de dos funciones holomorfas. En efecto sea f(z) meromorfa, con los polos considerados, y sean

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

los respectivos órdenes. Según el teor, de Wierstrass podemos construir una funcion olomorfa g(z) que tenga esos mismos puntos como ceros , con los mismo ordenes. El producto

$$h(z) = f(z)\, g(z)$$

es regular en cada z regular para f, y además en cada polo de f. En efecto alrededor de a_1

$$h(z) = \left(\frac{c}{(z-a_1)^{\lambda_1}} + \cdots\right) e^{\gamma(z)} \left(\frac{z-a_1}{a_1}\right)^{\lambda_1} \prod_2^\infty \left[\left(1-\frac{z}{a_r}\right) e^{P_r(z)}\right]^{\lambda_r}$$

y resulta de inmediato que el producto es rrgular para $z=a_1$. En consecuencia h es regular en todo el plano, es decir olómorfa y tenemos

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

es decir f es cociente de dos funciones olomorfas c.d.d.

En el caso particular de una función racional, esta puede & descomponerse en elementos simples(análisis). Vamos a encontrar un resultado parecido, pero con alcance mucho mayor. En este resultado consiste el llamado teorema de Mittag-Leffler.

Las consideraciones que voy a desarrollar resultan un poco parecidas a las que expuse en cuanto al teor de Weiwestrass.

Esto depende de la circunstancia que efectivamente los dos ~~argu-mentos~~ temas son estrictamente vinculados entre sí.

Supongo de conocer los plos a_r de una función meromorfa, y también para cada uno de ellos, a_r los "términos de infinito" es decir el polinomio en $1/z-a_r$, sea

$$(1) \qquad g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)$$

que constituye la parte de la relativa serie de Laurent alrededor del polo donde $(z-a)$ lleva ~~para~~ exponentes negativos. Los polos a_r son ~~ddd~~ dados arbitrariamente (con tal que no tengan punto de acumulación propio) y también las relativas expresiones (1). Puede entonces asignarse la forma de la función meromorfa f(z) buscada ? Si los polos son en número finito la diferencia

$$(2) \qquad f(z) - \sum g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)$$

resulta regular en todo el plano propio(también en los polos de f, como es claro), y luego tiene como puntos singulares el solo punto impropio, que efectivamente si f es una función meromorfa propiamente dicha será esencial. La diferencia considerada es por lo tanto una función olomorfa, y resulta la función buscada en la forma

$$(3) \qquad \boxed{f(z) = \sum g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right) + G(z)}$$

siendo G una función olomorfa arbitraria. En el caso general, podríamos aplicar este mismo razonamiento , si la serie

$$\sum g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)$$

resultase convergente. Pero en general esto no puede afirmarse. Pero se encuentra que puede determinarse, para cada valor de r un polinomio en z , $h_r(z)$ tal que la nueva serie

$$(4) \qquad \sum\left[g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right) + h_r(z)\right]$$

resulte convergente en cada punto del plano propio distinto de los a_r (y antes bien absolutamente y uniformemente convergente en cada recinto finito que no contenga ni en su enterior ni sobre su forntera ningún punto a_r.):su suma resulta una funci anal regular en cada punto própio distinto de los a_r). En un punto a_r la función dada por (4) tiene un polo, con los términos de infinito g_r: porqué la serie lograda al abandonar el término de indice r es regular en el punto, y el término

$$g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)+h_r(z)$$

representa una función racional para la cual el punto a_r es polo con los términos de infinito g_r. Entonces la diferencia esntre la función f(z) buscada y la (4) resulta anl. reg. en todo el plano própio, y es por lo tanto ~~&&~~ una función olomorfa G(z). Por lo tanto se logra la función meromorfa f(z) en la forma

$$(5)\qquad f(z)=G(z)+\sum_{r=1}^{\infty}\left[g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)+h_r(z)\right]$$

siendo G olomorfa arbitraria

En esto consiste el teor de Mittag- Leffler (que no demuestro)

La (5) pone en evidencia los polos y los relativos términos de infinito de la función buscada, así como ocurre para una función racional al descomponerla en elementos simples.

La (5) pued e complementarse con los result dos que siguen Si los polos son todos simples, y el residuo en elpolo a_r es c_r, de manera que el término de infinito correspondiente es

$$g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)=\frac{c_r}{z-a_r}$$

y si además existe un entero n tal que la serie

$$(°)\qquad \boxed{\sum\frac{|c_r|}{|a_r|^n}}$$

(en la cual naturalmente hay que descuidar $a_1=0$ si esto es un polo)

sea convergente , los polinomios h_r pueden tomarse en la forma

$$h_r(z)=c_r\left(\frac{1}{a_r}+\frac{z}{a_r^2}+\cdots\frac{z^{N-1}}{a_r^N}\right)$$

siendo N=n-1 (Si no se hace la hipótesis relativa a la serie(°) subsiste un resultado análogo, donde empero no puede precisarse ~~&&&~~ el valor de N).

Si entre los polos de primer orden se encunetra cero(que naturalmente, al haber colocado los polos según los módulos crecientes será a_1) ,no ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ se puede escribir $h_1(z)$ en la forma considerada(donde aparecería 0 al denominador): en este caso pero puede adoptarse $h_1=0$, lo que no altera la convergencia de la serie (4).

Estudio p.e. la función $\boxed{f(z)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}}$

... o menos lo mismo sería estudiar 1/ senz).Polos :

$$z = 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2, \dots$$

que considero en este orden. El residuo en z =n se calcula formando

$$\cancel{\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi}},\ \cancel{\cos n\pi}\quad \frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi},\ \cos\pi z,\quad \cos n\pi = (-1)^n;\ \frac{1}{\cos n\pi} = (-1)^n$$

Dejando z=0, la serie $(|c_r| = 1)$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \dots$$

es convergente, y luego n=2,N=1 .En el polo z=n (entero positivo o negativo) el término de infinito es

$$\frac{(-1)^n}{z-n}$$

y el polinomio h viene a ser de grado N-1=0, esto es se reduce a una constante y precisamente a $c_n/a_r = (-1)^n/n$.Por lo tanto teniendo en cuenta el término en 1/z

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z} = G(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{z-n} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{z+n} - \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

siendo G(z) olomorfa. Efectivamente podría verse que G se reduce a zero, y queda por lo tanto

$$\boxed{\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right)}$$

Indico rápidamente cómo del teor.de Mittag Leffler puede deducirse rl teor de Weierstrass sobre el desarrollo de una función olomorfa f(z) en produc to infinito.Me refiero a f con ceros a_1 a_2 etc con multiplicidades λ_1 λ_2 etc. limitadas, en el caso en que la serie

$$(1)\qquad \frac{1}{|a_1|^n} + \frac{1}{|a_2|^n} + \dots$$

(v.p.209) es conv.

(Para fijar las ideas supongo que la f no se anule en z=0)
Considero la nueva función

$\mathcal{G}(z) = f'(z) / f(z)$

evid.te meromorfa Vimos a p.197 que en un cero de orden n de f la $\mathcal{G}$ tiene un polo simple con resíduo n. Aplicando a los varios ceros, veo que

$\mathcal{G}$ tiene polos simples en los puntos a_i con residuos λ_i

Para aplicar a G el teor de Mittag Leffler tenemos que sondide-rar la serie (º) de p 227, que ahora se reduce a

$$\sum \frac{\lambda_r}{|a_r|^n}$$

Siendo las λ_i limitadas, esta serie converge porque converge (1). Por lo tanto el teor. de Mittag Leffler da ([illegible])

$$\frac{f'}{f} = G(z) + \sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_r}{z-a_r} + \lambda_r\left(\frac{1}{a_r} + \dots + \frac{z^{N-1}}{a_r^{N}}\right)\right] \quad (N = n-1)$$

Ahora vamos a integrar los dos miembros. Integraremos a lo largo de un camino que una $z=0$ con un punto z arbitrario distinto de los puntos a_i, y además tomaremos el camino de manera que no pase por ningún punto a_i. Entonces la serie a segundo mimbre resulta (p.225) unif convergente, y puede integrarse término a término. Acerca de esta integración observo que

$$\int_0^z \frac{dz}{z-a_r} = \lg \frac{z-a_r}{-a_r} = \lg\left(1-\frac{z}{a_r}\right)$$

donde, al escribir logaritmos resulta una indeterminación, que empero desaparecerá después, al pasar de los logaritmos a los números. Logramos así

$$\lg f(z) - \lg f(0) = \int_0^z G(z)\,dz + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r \left[\lg\left(1-\frac{z}{a_r}\right) + \frac{z}{a_r} + \frac{z^2}{2a_r^2} \dots + \frac{z^N}{N a_r^N}\right]$$

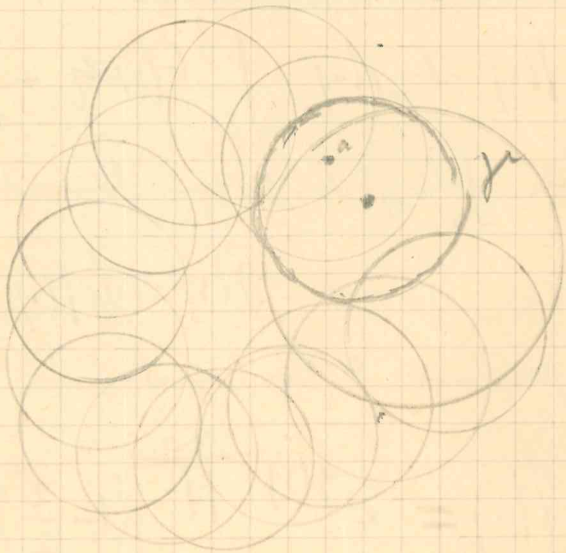
Ahora $\int_0^z G(z)\,dz$ es una función entera. Luego

$$g(z) = \lg f(0) + \int_0^z G(z)\,dz$$

Y pasando de los logaritmos a los nos luego.

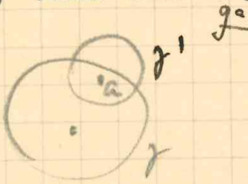
$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{r=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{a_r}\right) e^{\frac{z}{a_r} + \frac{z^2}{2a_r^2} \dots + \frac{z^N}{N a_r^N}}\right]^{\lambda_r}$$

teor. de Weierstrass.


a
γ

Como lo hemos observado en varios puntos de este curso, los dos puntos de vista más importantes en la teor . de la fs anal son él de Cauchy Riemann dónde se parte de la noción general de fn&, condiciones de monogeneidad,etc, y él de Weierstrass,donde se parte de una serie de potencias con cierto círculo de convergencia.Las dos teorías son variamente vinculadas entre sí.

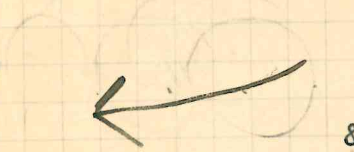
Cuando se parte de la serie de potencia, convergente en círculo, toma una importancia particular la continuación anal. o prolon.



gen. Si el círculo es γ ,tomado en su interior un punto a,puedo desarrollar la fn f(z) alrededor de a en una P(z-a),y esta serie tiene un círculo de convergencia que puede salir

fuera de γ .Entonces se puede considerar la función f(z) también fuera de γ ,calculando sus valores mediante P(z-a).Y así continuando.Se dice entonces que se ha prolongado analiticamente la f fuera del círculo . Lo mismo puede hacerse si inicialmente se considera la f(z) en el interior de una línea γ aún no circular. Entonces la serie inicial de potencias así como cada una de las logradas despues ,P(z-a) etc. se llama un elemento de la funciín f(z), o "elemento analítico": la noción completa de función anal. según Weierstrass es el conjunto de todos estos elementos.

Puede ocurrir una circunstancia notable. Se parte de un elemento definido en el interior del círculo γ, y de un punto a , y seconsideran prolunga mentos anal. sucesivos, de manera que en cierto momento se logre un el.to con círculo de convergencia que comprenda de nuevo en su interior el punto a.



Entonces el valor de la función calculado en el punto a o mediante el desarrollo inicial o mediante la nueva serie de potencias puede resultar distinto.En otras palabras al &&&&& &&&&&&&&a partir del punto a y volver al mismo después de haber prolungado anal. la función, pued e que se logren valores distintos de la función.Esta será entonces una función polidroma, no uniforme.

~~P. e. si tomo log z, y lo considero inicialmente como fn uniforme en el interior del círculo y después prolungo anal. "a lo largo de la línea C&&", el valor que logro al volver al punto a, por razones de continuidad será el valor inicial variado de . Analog. si considerara p.e.~~ Con centro

P.e. si tomo log z alrededor del punto ~~z=a~~ z=m (distinto de cero) como función anal. localmente uniforme en un círculo que excluya el punto z=0, y después tomo un círculo C con centro en z=0 que pase por el punto m, puedo prolungar analíticamente la función " a lo largo del círculo C " es decir tomando el punto z=a en un punto del círculo C y así continuando. Es claro que volviendo al punto z=a, por razones de continuidad se vuelve no con la determinación inicial, si no con la misma a la cual se sume $2\pi i$

También si tomara la función $f(z)=\sqrt{z}$ al proceder de manera análoga a lo largo de C se volvería al punto inicial con la determinación $-\sqrt{z}$,porque si

$$z=\rho e^{i\varphi}$$

y tomo inicialmente

$$\sqrt{z}=\sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

por continuidad al variar φ de 2π logro el valor

$$\sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}}=-\sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}=-\sqrt{z}$$

(de p. 1). Si $a+bi$, ~~&&b&&&~~ $a'+b'i$ son números complejos, recuerdo que

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i$$

$$(a+bi)-(a'+b'i)=a-a'+(b-b')i$$

$$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$$

$$(a+bi)(a-bi)=|a+bi|^2$$

(porque el 1er miembro vale $a^2-(bi)^2=a^2+b^2$;

y el 2° miembro vale $\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=a^2+b^2$).

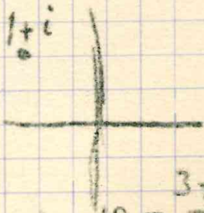
$$\frac{a+bi}{a'+b'i}=\frac{(a+bi)(a'-b'i)}{(a'+b'i)(a'-b'i)}=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2}i$$

(si el denominador no es nulo)

P. e.

$$\frac{2+3i}{4+5i}=\frac{(2+3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{8+15}{41}+\frac{12-10}{41}i$$

$$=\frac{23}{41}+\frac{2}{41}i$$



(de p. 7) p. e para $z=-1+i$

tenemos $\rho=\sqrt{2}$, $\operatorname{sen}\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi=\frac{-1}{\sqrt{2}}$; $\varphi=\frac{3\pi}{4}$

Para $z=-1-i$ tenemos $\rho=\sqrt{2}$

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{-1}{\sqrt{2}}\quad\cos\varphi=\frac{-1}{\sqrt{2}}\ ;\quad\varphi=\frac{5\pi}{4}$$

(p. 5)

A. 2

Si R es el radio de la esfera de Riemann y tomamos coord. cart. ortogonales XYZ con origen en el centro O, eje Z dirigido al polo Norte, y ejes X Y en el plano de Gauss, el valor de las coordenadas XYZ en el punto P de la esfera de Riemann correspondiente al punto $P' = z = x+iy$ del plano de Gauss puede encontrarse de la manera siguiente. La recta que une el polo Norte $(0\ 0\ R)$ con el punto $(x\ y\ 0)$ tiene ecuaciones $\dfrac{X}{x} = \dfrac{Y}{y} = \dfrac{Z-R}{-R}$ y luego corta la esfera de Riemann $X^2+Y^2+Z^2=R^2$ en el punto cuyo Z $(\neq R)$ cumple con

$$\frac{x^2}{R^2}(Z-R)^2 + \frac{y^2}{R^2}(Z-R)^2 + Z^2 = R^2$$

Esta ecuación de 2° grado en Z, además de la raíz $Z=R$ admite la de la ecuación lineal lograda al dividirla por $Z-R$ esto es

$$x^2(Z-R)+y^2(Z-R)+R^2(Z+R)=0.$$ Luego

$$Z=\frac{R(x^2+y^2-R^2)}{x^2+y^2+R^2}\ ;\ X=\frac{2xR^2}{x^2+y^2+R^2}\ ;\ Y=\frac{2yR^2}{x^2+y^2+R^2}$$

(de p. 5). La definición de una línea simple como línea (plana) que no se corta a sí misma brinda un ejemplo de la circunstancia que cuando se define una noción matemática usando una palabra del idioma común, hay que poner cuidado en emplear la definición en el sentido preciso usado al darla, sin dejarse arrastrar por el significado que la misma palabra tiene en el idioma corriente. P. e. de acuedo con la definición es simbe la línea de la figura 1, y también la de la figura 2, pero no la de la figura 3, aunque en el sentido corriente de la palabra la línea 3 parezca más simple que la de la línea 2

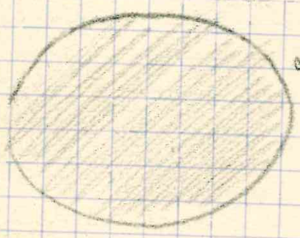


fig. 1

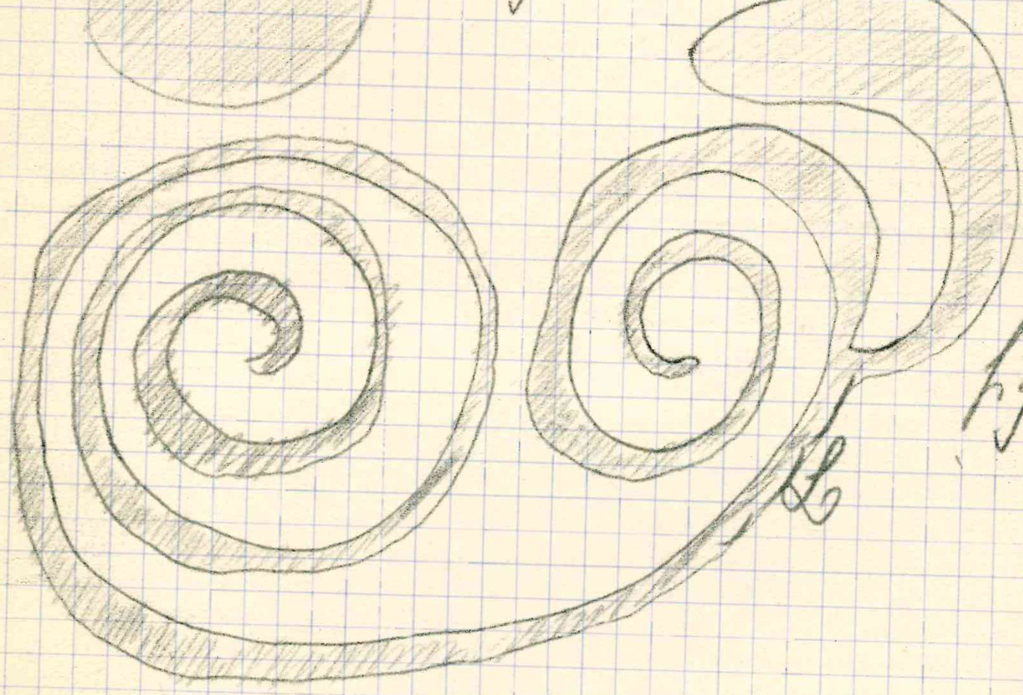


fig. 2

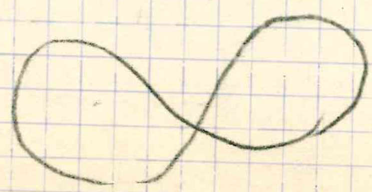


fig. 3

(de p. 5). No siempre un conjunto de puntos en el plano admite puntos interiores. P. e. no los admite si está integrado tán sólo por un número finito de puntos. Tampoco, evidentemente, ~~&&~~ admite puntos interiores el conjunto de los puntos de coordenadas ambas racionales: porque, si P es un punto de coordenadas racionales, en cualquier círculo de centro P están contenidos puntos cuyas coordenadas no son ambas racionales. Este último conjunto es, como se dice, denso en todo el plano, lo que significa que en el interior de ~~&&&&~~ un círculo, de radio pequeño como se quiera, que tenga por centro un punto cualquiera P del plano~~&&&~~ siempre están contenidos puntos del conjunto distintos de P.(1) Pero, a pesar de ésto, P no es punto interior.

(1) es decir, cada punto del plano es punto de acumulación del conjunto.

(de p. 21). Es lo mismo que ocurre para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales homogéneas. Si

(1) $$p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = 0$$

es una ecuación diferencial ordinaria en la función incógnita y(x) – ecuación evidentemente lineal y homogénea – y si $y_1(x), y_2(x)$ son dos soluciones de la misma, también es solución

$$k_1y_1(x) + k_2y_2(x)$$

porque reemplazando esta función en el primer miembro de (1) resulta

$$p_0\frac{d^n(k_1y_1+k_2y_2)}{dx^n}+\cdots+p_n(k_1y_1+k_2y_2) =$$

$$k_1\left[p_0\frac{d^ny_1}{dx^n}+\cdots+p_ny_1\right]+k_2\left[p_0\frac{d^ny_2}{dx^n}+\cdots+p_ny_2\right]=0$$

y la (1) se cumple

La propiedad se extiende de inmediato al caso en que se combinan linealmente no dos, sino más soluciones.

La misma propiedad se extiende a las ecuaciones en derivadas parciales lineales homogéneas (es decir, lineales y homogéneas con respecto a la función desconocida con respecto a la ~~función~~ incógnita y a sus derivadas) Si p. e. consideramos la ecuación de segundo orden en la función incógnita u(x,y) de las dos variables independientes x,y ~~e indicamos con $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ dos soluciones, también es solución~~

(2) $$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y)u=0$$

~~siendo k_1, k_2 constantes arbitrarias(y análogamente, si se consideran no dos sino más soluciones). En efecto reemplazando en el primer miembro de (2) resulta~~

e indicamos con $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ dos soluciones de la misma, también es solución $k_1u_1(x,y)+k_2u_2(x,y)$, reemdo K_1, K_2 constantes arbitrarias (y análogamente si se consideran no dos, sino más soluciones). En efecto, reemplazando en el primer miembro de (2) resulta

$$A\left(K_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) + B\left(K_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + K_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y}\right) +$$

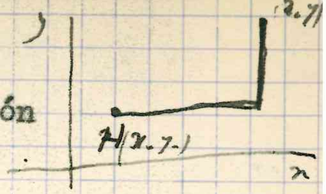
$$\cdots + F(K_1 u_1 + K_2 u_2) =$$

$$K_1\left[A \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \cdots + F u_1\right] +$$

$$+ K_2\left[A \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \cdots + F u_2\right] = 0$$

y la ecuación (2) resulta satisfecha.

La ecuación de Laplace es justamente un caso particular de (2).



(de p. 22) P. e. si parto de la función

$$u(x,y) = e^{x}\cos y$$

la cual evidentemente es armónica (en todo el plano) porque

$$u_x = e^{x}\cos y \,;\; u_y = -\,e^{x}\operatorname{sen} y$$

$$u_{xx} + u_{yy} = e^{x}\cos y - e^{x}\cos y = 0$$

y quiero encontrar la función f(z) de la cual la u es la parte real, el coeficiente v(x,y) del imaginario, es decir la función armónica conjugada v(x,y) se encuentra de la manera siguiente. Elijo un camino λ que parte de un punto $H(x_o,y_o)$ prefijado arbitrariamente en el plano y vaya al punto (x,y), p.e. la quebrada que tiene el primer lado paralelo al eje x y el segundo paralelo al eje y . Entonces (a meno de una constante aditiva)

$$v(x,y) = \int_{\lambda} v_x\,dx + v_y\,dy$$

Pues bien $v_x = e^{x}\operatorname{sen} y$, $v_y = e^{x}\cos y$. Luego v está dada por la integral curvilinea

$$v(x,y) = \int_{\lambda} e^{x}\operatorname{sen} y\,dx + e^{x}\cos y\,dy$$

La integral curvilinea se descompone en la suma de las dos integrales ordinarias

$$v(x,y) = \int_{x_0}^{x} e^{x}\operatorname{sen} y_0\,dx + \int_{y_0}^{y} e^{x}\cos y\,dy$$

$$= (e^{x} - e^{x_0})\operatorname{sen} y_0 + e^{x}(\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y_0) =$$

$$e^{x}\operatorname{sen} y - e^{x_0}\operatorname{sen} y_0$$

Luego tenemos $v(x,y) = e^{x}\operatorname{sen} y + \underline{\text{Const.}}$

$$f(z) = e^{x}\cos y + i\,e^{x}\operatorname{sen} y + i\,k$$ (siendo k una constante real)

(de p. 27)

&&&&&&& OBSERVACION. - Como se dijo a p. 22, una función analítica $f(z)$ resulta determinada, a menos de una constante aditiva, en un campo simplemente conexo C cuando en el mismo se conoce la& parte real $u(x,y)$. Sin embargo es claro que esta parte real no puede darse arbitrariamente, & porque tiene que ser una función armónica, es decir cumplir con la ecuación de Laplace

$$\Delta_2 u = 0$$

Cabe por lo tanto preguntarse ¿qué puede darse arbitrariamente para individualizar la función $u(x,y)$ &&armónica en C ? Si &&&&&&&& el campo C tiene como contorno una línea simple regular L , y a lo largo de L se prefijan arbitrariamente (de manera continua) los valores de la función u, existe una y una única función armónica en C que toma sobre el contorno &&&&&&&&&&& los valores prefijados, como resultaría de desarrollos ulteriores, que veremos, por lo menos en casos particulares, más adelante en este curso. El problema de encontrar la función $u(x,y)$ en las condiciones que acabamos de indicar es el llamado <u>problema de Dirichlet</u> , y puede plantearse más generalmente para una función de n variables.

En el caso n=1 la ecuación de Laplace se reduce a

$\frac{d^2u}{dx^2} = 0$, de forma que $u=Ax+B$, con A,B constantes arbitra& &&&&
Por otra parte en el mismo caso el campo viene a ser un intervalo ,cuyos extremos a ,b desempeñan el papel de contorno. Luego el "problema de Dirichlet" & se reduce entonces a determinar las constantes A,B de manera que $Aa+B=u_1$, $Ab+B=u_2$,donde hemos llamado u_1, u_2 los valores prefijados de la función u respectivamente para x=a, x=b. El problema se resuelve de inmediato(y , geométricamente, interpretando x,u como coordenadas cartesianas en un plano, no difiere del problema de trazar la recta que une dos puntos dados)

En cambio, el problema para n mayor de 1 es mucho menos fácil. Una vez se creía resolver el problema mediante el llamado principio de mínimo o principio de Dirichlet. Si en el campo C , para una función $f(x,y)$ dotada de derivadas segundas, la que sobre el contorno tome los valores prefijados, se forma la integral

$$I\{f\} = \iint_C \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

(la cual integral evidentemente tiene valor positivo o nulo) se demuestra fácilmente que la función u para la cual dicha integral adquiere el valor mínimo(con respecto a las demás funciones f) es armónica y resuelve por lo tanto el problema de Dirichlet.El principio de Dirichlet consiste precisamente en resolver de tal manera el problema de Dirichlet. Sin embargo, el principio ha sido objetado por Weierstrass, el cual observó que no está dicho que entre las funciones f consideradas exista una que haga adquirir a $I\{f\}$ el valor mínimo: el conjunto de los valores de $I\{f\}$ admite sí un límite inferi pero no puede afirmarse a priori que se trated de un mínimo (un conjunto de números limitado inferiormente siempre admite un límite inferior ,per no siempre un mínimo.Véasè por ejemplo el conjunto de los números comprendidos entre 0 y 1 excluyendo los extremos). A pesar de la objeción de Weierstrass a raízde la cual se había abandonado el principio , el mismo ha sido más tarde establecido con nuevos razonamientos más complicados sobre nuevas bases.

(de p. 43)

El teorema de Cauchy Hadamard, del cual hablamos a continuación da a conocer el radio de convergencia de cualquier serie de potencias. Sin embargo, en ciertos casos particulares (p. e. véase el último ejemplo) es posible deducir directament el valor del radio de convergencia.

Otros ejemplos:

1)

$$z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots\frac{z^n}{n}+\cdots$$

La serie converge para z = -1, y luego el radio de convergencia es ≥ 1. Pero la serie diverge para z=1, de manera que el radio de convergencia es ≤ 1. Se concluye por lo tanto que el radio de convergencia es uno.

2)

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

Si z es real y =x, cualquier sea x, la serie es convergente. Por lo tanto la serie tiene radio de convergencia infinito.

de p. 81

Consideremos p.e. la función $w = \frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$. Tenemos que considerar entre dos planos (p.e. superpuestos y con los mismos ejes) la correspondencia

$$x' = \frac{x}{x^2+y^2} \quad ; \quad y' = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad (1)$$

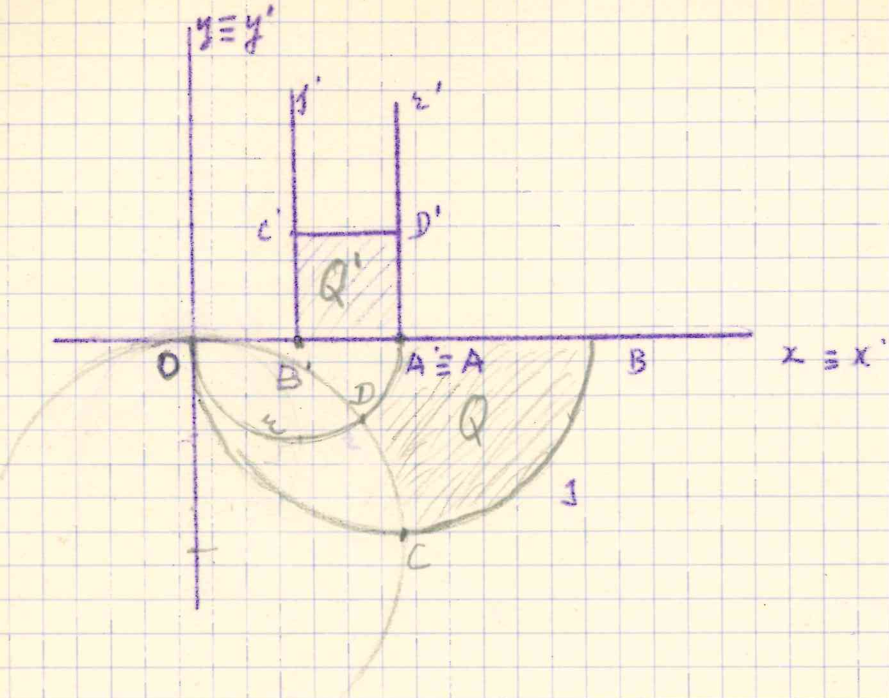
Si actuamos con coordenadas polares, poniendo $z = \rho e^{i\varphi}$; $w = \rho' e^{i\varphi'}$ las fórmulas de la correspondencia son

$$\rho' = \rho \quad ; \quad \varphi' = -\varphi \, , \qquad (2)$$

de la segunda de las cuales se desprende p.e. que a un punto del semiplano $y>0$ le corresponde uno del ~~xxx~~ opuesto, y viceversa. Busquemos la figura Q del plano z correspondiente al cuadrado $Q' \equiv A'B'C'D'$ del plano w, de vértices $A'(w=1)$ $B'(w=\frac{1}{2})$ $C'(w=\frac{1}{2}+\frac{i}{2})$, $D'(w=1+\frac{i}{2})$

Evidentemente $A \equiv A'$, y B es el punto $z=2$. A la recta $A'D'$ de ecuación $x'=1$ le corresponde – en base a las (1) – el círculo $\frac{x}{x^2+y^2}=1$ es decir $x^2+y^2-x=1$, pasante por el origen y de centro $x=\frac{1}{2}$ $y=0$: más precisamente a la semirecta $r' \equiv A'D'$ de origen A' dirigida hacia arriba le corresponde un arco (semicircunferencia) de dicho círculo que tiene extremos en A y en O (correspondiente al punto impropio), y situado en el semiplano $y \leq 0$. Análogamente, a la semirecta $s' \equiv B'C'$ de origen B' dirigida hacia arriba le corresponde la semicircunferencia s de diametro OB situada en el semiplano inferior . A la recta $C'D'$ $(y'=\frac{1}{2})$ le corresponde – todavia en base a las (1) – el círculo $x^2+y^2+2y=0$, con centro $x=0$, $y=-1$ y pasante por el origen: el círculo corta r, s respectivamente en D,C. La region A B C D resulta referida al cuadrado $A'B'C'D'$, en una transformación conforme: lo que significa p.e. que los 4 ángulos en A,B,C,D son rectos; pero significa más generalmente que a dos direcciones que parten de un punto cualquiera interior al cuadrado Q' le corresponden en Q dos direcciones que forman el mismo ángulo

Sigue A 12


y ≡ y'
ξ'
C'
D'
Q'
O
B'
A' ≡ A
B
x ≡ x'
D
ξ
Q
J
C

No 4. N 1

p.1. l'indicazione relativa a Caspar Wessel. cfr. Enz. I A 4 (Study) p. 155. nota [10]. p. 15. v. retro

p. 17. Tricomi II p. 123. se $\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue. × (v. retro)

$f(x+\alpha,\ y+\beta) - f(xy) = f_x(xy)\,\alpha + \beta f_y(xy) + \rho$ dove ρ è inf. d'ord. sup. rispetto a $\sqrt[2]{\alpha^2+\beta^2}$. – Genocchi p. 139.

$f(x+\alpha, y+\beta) - f(xy) = \alpha f_x(xy) + \beta f_y(xy) + A\alpha + B\beta$

dove A, B tendono a zero con α e β. Enz. II A 2 (Voss)

p. 21. {p. 19. Esistenza delle derivate e loro continuità. Come w' continua ≡ ∃ e continuità di u_x, u_y, v_x, v_y con ore posto $w' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$.

p. 19. Invertibilità derivazione. Tricomi II p. 115.

$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right.$, p. 115 etc.) (se $\varphi_x\ \varphi_y\ \varphi_{xy}$ esistono e φ_{xy} è cont. segue $\varphi_{yx} = \varphi_{xy}$)

p. 23. Integrali curvilinei. per. Tricomi II p. 235 e segg.

$\int f(xy)\,dx$ spezzando il cammino in archi $y = y(x)$ e riducendo alle somme di $\int f(x), y(x)\,dx$. Con le regole di integr. per sostit. ne segue che per la rapp.ne parametrica $x = \varphi(t)$ $y = \psi(t)$ si riduce a

$$\int f(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

In Bianchi p. 79 sostanzialmente lo stesso (salvo che prende come t l'arco) e fa qui vedere che equivale a def. diretta; così.

~~Divido l'arco mn~~ Prende $\int_m^n f\,dF$ con f, F, F_x, F_y finite e continue. Divide mn in intervalli δ_i e forma $\sum f_i \Delta F_i$ dove f_i è calcolata in δ_i e ΔF_i è l'incremento di F in δ_i: facendo impicciolire i δ_i con legge arbitraria la Σ tende all'integrale già considerato.

Ag. Cauchy 1789 - 1857

Bern. Riemann 1826 - 1866

× p. 15. Se in 1 pt esistono le $\frac{\partial u}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial y}$ $\frac{\partial v}{\partial x}$ $\frac{\partial v}{\partial y}$ senza essere continue, pur soddisfacendo le eq. di monogeneità può non esistere $f'(z)$. Es (Titchmarsh . p. 67).

$$f(z) = \sqrt{|xy|} \qquad \text{per } x : \ldots \ y \ldots$$

ho $f(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ecc. in tutte nulle quindi si compiono le eq. di monogeneità. Però il rapporto incr.

$$\frac{0 - \sqrt{|xy|}}{-(x+iy)} \quad \text{tende lungo } y = mx \ldots = $$

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| \sqrt{|m|}}{x(1+im)} = \pm \frac{\sqrt{|m|}}{1+im} \quad \text{che dipende da } m.$$

× (p. 17) per $f(x,y)$ a differenza di ciò che avviene per $f(x)$ perchè si abbia la <u>differenziabilità</u> ~~occorre~~ è proprio da supporre la cont.tà delle der.te prime. v. p.e. (con esempi) <u>Courant</u> Diff and int. Calculus II pp. 65 - 66

p. 24. Che questa $\varphi = \int_{x_0 y_0}^{xy} U\,dx + V\,dy$ sodisfi e sia l'unica: v. p. e. Tricomi II p. 255 e 332 (occorre la continuità delle derivate parziali occorre nel Lemma di Gauss, che si applica

p. 25. Teorema di Gauss, o lemma di Gauss. Tricomi II p. 232

p. 24. nell'Enc. (Voss. II A 2 p. 113. di Green). All'art. dell'Enc. allude Levi Civita nell'art. per le Riv. di Tricomi, citando p. 115 di Voss. e ivi l'eq. che non trovo

E i seguenti cenni in Enc. cit., Rey Pastor cit., Garnier cit. p. 150, ecc. Nel lemma di Gauss si intende che nell'integrale curvilineo si lasci l'area interna a sinistra

p. 25 Il teor. di Gauss vale supponendo U, V derivabili con derivate continue

---

Princ. Dirichlet = Principio Dirichlet

$$\min \iint \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right) dx\,dy$$

tra le φ che prendono i valori al contorno.

La cond. del. è $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}(p^2+q^2) + \dots = 0$

cioè $\frac{\partial}{\partial x} p + \frac{\partial}{\partial y} q = 0$.

(per $\iint F(x, y, z, p, q)\,dx\,dy$ la eq. di Eulero che ne risulta è $\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}F_p - \frac{d}{dy}F_q = 0$

Per $\int F(x, y, y')\,dx$ ha $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$.

retro N 2

(dove x_0 ~~sia~~ può essere estremo dell'int.v.)

La dim. prova 1) che $\Sigma \lim$ è convergente e che

2) $\Sigma \lim = \lim \Sigma$.

N. 0

p. 33. Nel campo reale di $\Sigma|u_i|$ ... Σu_i posto detta S_n la somma dei primi n termini di Σu_i, P_n e $-Q_n$ le somme dei positivi e neg. tra u_i ho lim $P_n + Q_n$ esiste. Quindi P_n è limitata, Q_n è limitata. P_n è crescente, Q_n è crescente (o meglio dirò non decrescente). Quindi esistono lim P_n e lim Q_n lim $P_n - Q_n$, e quindi Σu_i. Si tratterà poi di una serie "incondizionatamente convergente" cioè indip. dell'ordine dei termini pp. 35-36 imitato da Tricomi II pp. 55-56 (che fa altro esempio)

p. 35 Esempio di convergenza non uniforme dato per Genocchi-Peano p. 106.[1] Ivi quando si fa lim $(u_1 + u_2 \dots) \neq$ lim u_1, e ciò è dimostrato da $u_r(a)$ è continua, e $\lim_{x \to 0} u_r(x) = u_r(0) = 0$

p. 37. ~~Derivaz. per serie~~ lim Σ = Σ lim. Genocchi p. 107

(Naturalmente non occorre che le $u_i(x)$ siano continue). Se le u_i sono continue, il teor. dice che una serie equiconv. di f.ni continue è f.ne continua ibid. p. 108.

p. 37. der.ne per serie Genocchi p. 108; Tricomi II p. 60

p. 37 $\int$ per serie. Tricomi II p. 58 (si intende qui che la converga deve essere unif. nell'intervallo di integrazione)

p. 39 teor. di Weierstrass em. dimostrato p. e. da Tricomi II p. 56.

p. 39 Dim. come in Tricomi f.ni an.

p. 45, 4° misero punto λ,, Se fossimo sicuri di ciò, il teor.ma sarebbe già dimostrato

p. 47 (e prima) punto o elem.ti di accumulazione, ~~detti~~ spesso chiamati anche punti o elem.ti limite. cfr. Enz. II C 9 a. Borel-Rosenthal p. 861.

[1] nel quale n si può supporre il primo n successivo a n_0, per il quale valga $|R_n| < \varepsilon$.

retro N 3

Viceversa se $\overline{\lim}\, u_n = \underline{\lim}\, u_n$ ~~allora converge a~~ λ è ~~[illegible]~~ esiste $\lim u_n$ ed è uguale al loro comune valore λ. Infatti ~~fissato~~ preso un qualsiasi segmento intorno a λ questo contiene tutti gli u_n per n abbastanza grande, poiché se no fuori di quel segmento avrei infiniti u_n, e quindi qualche pt. di accumulazione, contro l'ipotesi

p. 42 Teor. di Bolzano Weierstrass. p. 4. Knopp. Teoria p. 21. Enc. II C9a p. 862 (~~...~~ nello spazio S_n a n dimensioni per un insieme limitato)

p. 45. ~~Dm.~~ ~~analoga a quella~~ Con Dm. analoga a quella (detta per λ'' ~~...~~ anche da) Ogni el.to di accumulazione in quanto esistente della classe ~~derivata~~ K' derivata di K (cioè formata dai ~~suoi~~ pt. di acc. di K) (~~Derivato~~ Enc. cit. p 861) è ~~...~~ appartiene a K'; e siccome si chiama chiuso ogni ~~K che~~ insieme che contenga il suo derivato, vuol dire che K' è chiuso, cioè l'insieme derivato d'un insieme è chiuso. (Enc. p 865). Qui per insieme numerico estensibile semplicemente a S_n.

p. 45. Se $u_1, u_2 \dots \to u$, l'unico el.to di accumulazione è u (se vi fosse $v \neq u$, gli el.ti infiniti prossimi a v si manterrebbero lontani da u, e u non sarebbe il limite) e quindi lim. sup. = lim. inf. = u

p. 47. Dm. Cauchy - Hadamard, ~~...~~ per $L \neq 0$, come in Tricomi F.a p. 45. Per $L = 0$ come in ... $L = \infty$ manca in Tricomi. Nel caso $L = 0$, essendo la successione fatta da n.i ≥ 0, vuol dire che L è il limite nel senso ordinario di $\sqrt[n]{|a_n|}$

p. 45 2a metà. Le due prop.tà 1) 2) sono anche suff.ti perché sia λ il max lim. Infatti preso un segmento lL intorno a λ esso contiene infiniti pt. della successione ($> l$, ma $< L$): quindi λ è el.to di accumulazione. E per 1) nessuno ne sono di maggiori (pur non essendo gen.te per un insieme il lim. sup. un pt. di accumulaz.)

p. 50 Più generale se $p < |a_n| < q$ (vedi N.5)

dove p e q sono finiti e non nulli, si ha

$\lim_{n=\infty} p^{\frac{1}{n}} = 1$, $\lim q^{\frac{1}{n}} = 1$, e quindi $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, e

il raggio di convergenza è $\underline{1}$

p. 58. Dimostrazione più generale in De La Vallée Poussin

Cours d'An. inf.le p. 428. (dove non occorre il

fatto della conv.ze solo semplice)

Se Σu_i, Σv_i e anche la serie formale prodotto convergono

questa è il prodotto delle due. (Abel, Enz. I A 3 p. 96)

Severi p. 251 come conseguenza del teor. di Abel

sulle serie di potenze considerate sul cerchio di conv.ze.

p. ... ... Volume ... v. 2. p. 389 N 5

p. 59. $\lim_{n=\infty} \frac{\lg n}{n} = 0$ p. es. da reg. di de l'Hospital $\left(\frac{\frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{n} \to 0\right)$

p. 59. Dim. Succ.^{ni} u_n; $\alpha_n u_n$ $\lim \alpha_n = 1$.

p. 59. Se max $\lim u_n = L$, e $\lim \alpha_n = 1$. $\supset$. max $\lim \alpha_n u_n = L$

Infatti provo che se λ è un el^{to} di accumulazione della succ. u_n, lo è anche per la nuova succ. Infatti

$|\lambda - \alpha_n u_n| = |\lambda - u_n + u_n - \alpha_n u_n| \leq |\lambda - u_n| + |\alpha_n - 1|\,|u_n|$

Ora esistendo L, la succ. u_n è limitata sup. cioè per ogni u_n: $|u_n| < K$. Preso ε arbitrario è

per ∞^{ti} n $|\lambda - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

per tutti gli n grandi: $|\alpha_n - 1| < \frac{1}{K}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{|u_n|}\frac{\varepsilon}{2}$ cioè $|\alpha_n - 1|\,|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

Quindi per ∞^{ti} n

$$|\lambda - \alpha_n u_n| < \varepsilon \qquad \text{c. d. d.}$$

Se poi ~~L~~ l'el^{to} di accumulazione in esame è ∞, ~~la~~ ~~per ogni~~ preso c positivo < 1 allora:

per tutti gli n grandi $\alpha_n > c$

" " " " " $|\alpha_n u_n| > c\,|u_n|$.

Se ∞^{ti} n ~~...~~ $|u_n| > \frac{K}{c}$ con K grande arbitrario

e quindi per ∞^{ti} n $|\alpha_n u_n| > K$ " " " "

il che prova che ∞ è anche el.^{to} di accumulazione di $\alpha_n u_n$.

p. 65. Teor. di Cauchy. valido anche nel caso generale: se Σu_i, Σv_i convergono assolutamente, vale la regola del prodotto (p. es. Rey. Pastor Algebra. p. 489. Anzi basterebbe che una delle due converga assolutamente e l'altra sempl.^{te} ibid. e p. 415 (teor.^{ma} di Mertens) ×

p. 65. Nelle (γ) si dovrebbe comparire solo 4 costanti addizionali perchè posso moltiplicare a e b per una stessa quantità: dividendo per una le c, d. ; p. 66 form. add. sh, ch. cfr. Genocchi 218

p. 79 (Vedi Knopp. p. 102 (applicando il teor. di Heine Borel al circolo detto e a quelli dei relativi alle serie dedotte coi centri nei pt. del circolo di convergenza) ~~[illegible]~~ Si pensa che nel cerchio di convergenza vi è almeno un pt. singolare. Ma non vi è contraddizione (Per la possibilità di convergenza sul contorno v. anche Enz. II C 1 Pringsheim p. 9) Può darsi che la serie converga in ogni pt. del circolo ma non sia svil.te intorno a esso in serie di Taylor.

p. 79. $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha>1)$ (p. es. ~~[illegible]~~ raggruppando con $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\dots$ $+\frac{4}{8^\alpha}+\dots = 1+\frac{2}{2^\alpha}+\frac{4}{4^\alpha}+\frac{8}{8^\alpha}+\dots = 1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{4^{\alpha-1}}+\frac{1}{8^{\alpha-1}}$, serie geom. di ragione $\frac{1}{2^{\alpha-1}}<1$. ~~[illegible]~~

p. 79 Teor. Abel in Genocchi p. 208. Cesàro p. 95

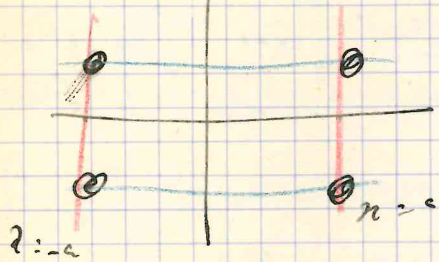
p. 79 fine. Potrebbe pensarsi a sviluppare la derivata parziale: ma può darsi che la serie che dà f' non converga in z_0: p. es. prodotto $z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}\dots$ e poi $1+z+z^2+\dots$ che non converge in z_0. ; p. 79 complto al teor. di Abel, dovuto a Stolz (Enz. Bieberbach II C 4. p. 451).

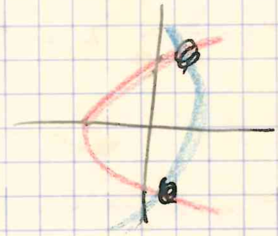
p. 81 1a nota de Cesàro p. 99

p. 85 Dim. conformità come in Bianchi. - La ~~[illegible]~~ costanti della

Ora —

~~[illegible]~~ Per $x=a$ $y=b$ nel 1° piano le par.e corr.ti si incontrano in 2 pt. nel 2° piano (per questo la corr.za non è univoca. Se fatto è che $x=a$, $x=-a$ corrispondono alla stessa parab.e, $y=b$, $y=-b$ anche id. id.; ai 4 pt. del





1° piano ci 2 del 2°, ciascuno dei quali proviene da 2 vertici d'angoli opposti del rettangolo

(2 e −2 danno lo stesso $w=z^2$)

u_x, etc. si applica quando usiamo per scrivere (°) la derivazione di f.^ni composte (Genocchi p. 150 n. 106); Tric. II p. 119)

Formula (°) cioè $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy'}{dx} : \frac{dx'}{dx}$ si applica ~~d~~ p. es. deriv. di f.^z $\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dx'} \frac{dx'}{dx}$; oppure considerando le der. come rapp. di diff.^li.

p. 85 nota se $v_y = 0$ allora $tg\,\theta' = \frac{v_x}{tg\,\theta . u_y} = -\frac{1}{tg\,\theta}$, $tg\,\theta\, tg\,\theta' = -1$

$\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$ $\left[tg\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{sen(\theta + 90°)}{cos(\theta + 90°)} = \frac{cos\,\theta}{-sen\,\theta} = -\frac{1}{tg\,\theta}\right]$

89 che $\theta' = \theta + \alpha$ e $\theta' = \alpha - \theta$ ~~indicano ... trasf.~~ ~~...~~ θ': $\pm$ ~~...~~ indicano risp. e trasf. dei 2 tipi si vede ~~...~~ così: θ è l'angolo formato da x con la retta di coeff. ang. $tg\,\theta$, ecc. e nei due casi θ e θ' crescono assieme, o no.

pp. 95-97 Ex^nto v: 2°, par. cf^x; cfr. Rey Pastor Cálculo p. 12.

p. 101. Che ogni aff. circolare sia rapp.^ta nel modo detto: Fano-Terracini p. 432.

p. 101 dim. che $w = \frac{az+b}{cz+d}$ è aff. circolare: Bianchi p. 31.

p. 101 ~~VI~~ de Bianchi (completato)

p. 102 VI " "

p. 109 VII " "

p. 111. Teor. Riemann. 1° modo d'enunciarlo in Goursat II p. 92 il 2° cfr. per es. Lez. Tor. II p. 121. - Come li si abbia riferendoli a domini qualunque si avrebbe cioè per piano ritenuto, o piano perforato. Ma qui noi siamo già riferiti all'interno di α, e quindi non occorre altro

p. 111. - f.^la Poisson. cfr. Lez. Tor. 137; Tric. F.A. p. 36

retro n. 1

113. L'arco di integrazione si suppone con x, y continue come in Tricomi p. 235 e sta bene però nella 2ª accezione spezzettando in archi $y = f(x)$ come ha fatto dopo Tricomi ~~$\int f(z)\,dz = \int f(x)$~~ v. ivi

Si applica integrazione per sostituzione tra a e b dove $dx = \frac{dx}{dt}\,dt$.
Quindi esige ~~[illegible]~~ di $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dx}{dt}$ perché sia e pari con la continuità che da un integrale continuo

p. 121. Nel passare da $f = f_1 + \dots + f_n + R_n$
a $\int f\,dz = \int f_1\,dz + \dots + \int f_n\,dz + \int R_n\,dz$
naturalmente bisogna presupporre la integrabilità di R_n (seguendone quella di f) o quella di f, seguendone quella di R_n. Ma così di fatto però f risulta continua (somma di serie unif. conv. di f^{ni} continue), è continua la parte reale, e così la parte imag.

p. 117. 1ª metà: Nella formula $\int f(z)\,dz = \int f(z(t))\,\frac{dz}{dt}\,dt$
il 2° membro è l'integrale di una funzione complessa di variabile reale t $\int[\varphi(t) + i\psi(t)]\,dt$ ed è da intendersi definito da $\int \varphi(t)\,dt + i\int \psi(t)\,dt$
tra A e B e che ha valore $\left[\varphi + i\psi\right]_A^B$.

p. 117 Il passaggio

$\int \frac{df}{dt}\,dt = f(b) - f(a)$ è però che perché a $f = u(t) + iv(t)$
$\int \frac{df}{dt}\,dt = \int \left(\frac{du}{dt} + i\frac{dv}{dt}\right)dt = u(b) - u(a) + i[v(b) - v(a)] = f(b) - f(a)$ c.d.d.

p. 113. - Calcolo dell' invarianza del $\Delta_2 = 0$ come in Lez. Torino p. 134. N. 8

p. 111 probl. Dirichlet in modo esatto (f.ne armonica dentro L, continua su L, che prende su L valori prefissati).

p. 111. - L' $\int$ di Poisson. - Sulla circ.za non viene molto prudente $r = R$ di fattore esterno nullo. e sotto $\int$ il den.re si annulla nel pt. coincidente dove $r = R$ e $\theta = \varphi$ cui $(R-r)^2$. - Ma facendo tendere il pt dall' interno alla circ.za il limite verrà il valore prefissato

113-19. da Lez. Tor. p. 21. 25. - cfr qui N 1.

112 $\int\int'$ - Non occorre il campo sol. connesso. Basta la uniformità di f come è chiaro

119 ulteriore cfr. p. es. Tricomi II p. 15.

p. 123 nelle decomp.ne del cammino si tace ~~ecc.~~ si deve dire che si taglia un n° finito di volte. È ~~più preciso~~ ~~[illegible]~~ con

121 Dm. come in Tricomi II p. 59. - È suff. nel reg.to che le uniformità altrimenti bisogna. (cfr p. es Knopp. p. 9)

125 che per diff. esatto $A\,dx + B\,dy$, per $I = \int_{x_0 y_0}^{XY} A\,dx + B\,dy$

si $\frac{\partial I}{\partial X} = A$, $\frac{\partial I}{\partial Y} = B$ v. p. es Tricomi II p. 247. Cammino fra $X + \Delta X, Y$.

$$\Delta I = \int_{XY}^{(X+\Delta X,\, Y)} A\,dx + B\,dy \quad \text{dove si sceglie} \quad \overrightarrow{XY \quad X+\Delta X, Y}$$

del cammino rettilineo. $\Delta I = \Delta x \cdot A(X + \vartheta \Delta X, Y)$

$\frac{\Delta I}{\Delta X} = \cdots$; $\frac{\partial I}{\partial X} = A$ (~~[illegible]~~ A essendo continua)

p. 123 teor. di Cauchy. γ interno al campo di esistenza: cfr. p. es. Osgood II A 1 Enz. p. 15 (dove il T. a mm. d p 9 è ridotto). E lo stesso per $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz$ (ib.) p.

Nel campo reale (Tric. II p. 227) $\int_{x_0}^{x} f(x,\alpha)\,dx$ si può derivare sotto il segno $= \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ ~~esiste~~ se $f'_\alpha(x,\alpha)$ esiste ed è continua.

cfr. p. es. Frank u. v. Mises Diff u. Int. vol. I p. 142

retro N. 8

× Gen.te [1] se $\varphi(z,\alpha)$ è funz. anal.ca di z, dipendente dal par.tro reale o complesso α e se $\varphi(z,\alpha)$ tende uniformemente a $f(z)$ per $\alpha \to \alpha_0$ (senza che occorra a priori che esista $\varphi(z,\alpha_0)$)

$$\lim_{\alpha=\alpha_0} \int_\gamma \varphi(z,\alpha)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz \left(= \int_\gamma \lim_{\alpha=\alpha_0} \varphi(z,\alpha)\,dz\right)$$

Dim. p. N 9

L'ipotesi vuol dire che comunque η piccolo a piacere esiste ε tale che se $|\alpha-\alpha_0|<\varepsilon$, qualunque sia z su γ, sempre $|\varphi(z,\alpha)-f(z)|<\eta$.

La dim. che $f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}$ equivale a provare che considerando h come parametro

$$\frac{1}{h}\left[\frac{f(z)}{z-a-h} - \frac{f(z)}{z-a}\right]$$ tende unif.te a $\frac{f(z)}{(z-a)^2}$

e effettivamente è questa la differenza che risulta in valore assoluto $< \frac{M}{R^2(R-|h|)}$ a p. 135 per tutti gli z.

×× p. 129. Si riveda fun. $\int \frac{f(z)}{z-s}\,dz$ con s esterno all'area racchiusa da γ vale zero perché dentro γ $\frac{f(z)}{z-s}$ è anal.ca

~~[illegible]~~

[1] Però applicando il teor. gen. p. es. alla deriv. sotto il segno non si guadagna di fatto nulla: la difficoltà consiste a far vedere la tendenza uniforme al limite)

p. 126 teor. Morera. cfr. p. es. Tricomi F A p. 26 N. 9

p. 131-133. dm. teor. Cauchy come in Lez. Tor. p. 39

p. 133. 1ª linea. Il passaggio completo sarebbe così: è λ come f^{ne} di t è funzione cplessa di var. reale t: posto $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ è chiaro che $\int \lambda\, dt = \int (\lambda_1 + i\lambda_2)\, dt$ si può considerare come il solito limite della somma: quindi $\left|\Sigma(\lambda_1 + i\lambda_2)\Delta t\right| \leq \Sigma\left|\lambda_1 + i\lambda_2\right|\Delta t$ da cui $\left|\int \lambda\, dt\right| \leq \int |\lambda|\, dt$ e quindi $\leq \varepsilon \cdot 2\pi$. <135 dev.^{ta} su per giù come Tor.; ma un po' cambia

p. 135. l. 4. Esistenza di M. – Risulta da ciò $f(z)$ è continua nell'area e in particolare sulla curva. Quindi tale è pure $|f(z)|$ (da $|p-q|<\varepsilon$ segue $\big||p|-|q|\big|<\varepsilon$ p. es. dal triangolo opq). Perciò $|f|$ sulla curva ammette un massimo (si riporta al caso dell'intervallo, p. es. in funzione dell'arco interpretato come ascissa) (p. es. Severi p. 13). Basta prendere M maggiore di tale massimo.

135 fin. Dm. $f'(z)$ v. Knopp. Farei così: Parto da

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}$$

Rapp. incr. è $$= \frac{1}{2\pi i h}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz\,\left[(z-a)^2-(z-a-h)^2\right]}{(z-a)^2(z-a-h)^2}$$

La ~~diff. fra l'integrale e~~ $$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz\,\left[2(z-a)-h\right]}{(z-a)^2(z-a-h)^2}$$

La diff.^{za} D fra l'integrale e $\dfrac{2f(z)}{(z-a)^3}$ è nota N 9

da p. 8. N. [illegible] f (continua) è [illegible]

$$f(z) = \varphi(z,\alpha) + f(z) - \varphi(z,\alpha)$$

$$\int f(z)\,dz = \int \varphi(z,\alpha)\,dz + \int_\gamma [f(z)-\varphi(z,\alpha)]\,dz$$

$$| \qquad\qquad | \le \eta L$$

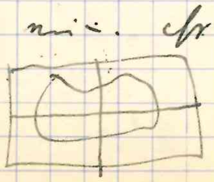
~~Se~~ ~~basta~~ equivalente $|f-\varphi| < \eta$ con $|\alpha-\alpha_0| < \varepsilon$.

Ora per $|\alpha-\alpha_0| < \varepsilon$ sarà

$\left|\int f\,dz - \int \varphi(z,\alpha)\,dz\right|$ piccolo a piacere c.d.d.

~~[illegible]~~ Oss. la analiticità di f ~~non è propriamente necessaria (Altrimenti non occorre [illegible])~~ (N. 8) è una presupposizione (cfr. p. Osgood Ez. II N 1. p. 21). (Cfr. del resto il teor.a di Weierstrass.)

× Invece è continua [illegible] e sul contorno circolare per teor. delle f.ni continue di 2 variabili si è limitata (e vi assume i valori max e min. cfr. p.e. Bianchi p. 15? Tricomi II accanto



ecc.)

$$\frac{f(z)}{(z-a)^3(z-a-h)^2}\left\{2(z-a)^2-h(z-a)-2(z-a-h)^2\right\} =$$

$$=\frac{f(z)}{(z-a)^3(z-a-h)^2}\left\{-h(z-a)-2h^2+4h(z-a)\right\} =$$

$$=\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^3(\zeta-a-h)^2}\left(3h(z-a)-2h^2\right)$$

Quindi se su γ $|f|\leq M$ e se $|\zeta-a|\geqq R$ ho

$$|D|\leq\frac{3|h|M}{R^2(R-|h|)^2}+2\frac{|h|^2}{R^3(R-|h|)^2}$$

~~così la diff. tende unif. a zero e si applica p. 8 relaz.~~

(~~dettaglio~~, e come per la der.^{ta} prima $|\int D\,dz|\leq$ di una quantità che tende a zero con h, il che prova l'assunto. Si farà an.^{te} con maggior complic. per le derivate successive

p. 137. Si intende che il contorno di γ è interno al campo di esistenza della f.^{ne} analitica.

p. 137 come in Tricomi F.A. p. 39.

p. 137 La esistenza di M che maggiori i valori al contorno risulta come nelle note a p. N 9 (p. 135 l. 4) [illegible]

p. 139-41 Dim. Lemma, come in Knopp. p. 132 ma semplificata. Così il teor.^{a} fond. dell'algebra

143$_{1-2}$. $|f|$ è lim.^{to} ~~se contorno perché [illegible] e v sono f.^{ni} di una var. reale t, continue nell'int.^{llo} chiuso $t_0 - T$.~~

147. principio... Ora ho $\int_\gamma \Phi(\theta, z)\,dz$ e gli applico il teor. di $\int$ per sostituz. dove **non** occorre la analiticità dell'integrando come si diceva a p. 111. Va bene!

V. 10 bis

Da p. 140. Dim. per continuità ~~totale~~ del teor. di D'Alembert (da Courant–Robbins – What is Mathematics p. 250).

Sia $f(z) \neq 0$ per ogni z. Consideriamo la trasf.ne $z' = f(z)$. Fra i pt. trasf.ti non vi è O. Quindi gli ∞^1 cerchi C di centro O e raggio variabile → ∞^1 linee chiuse non per O. Chiamo ordine di O rispetto a C (per data $f(z)$) il n° di giri che fa Oz' quando Oz fa un giro su C (ha senso perchè $z' è \neq 0$, cioè C' non passa per O). – Per C di raggio nullo, l'ordine è 0. Per C di raggio grande, ordine n (v. sotto). Quindi assurdo perchè l'ordine è un intero che, variando per contin.tà, deve esser costante – al variar del raggio t.

Per C grande ho, $(a_0 = 1)$, $|f(z) - z^n| \leq |a_1 z^{n-1} \cdots + a_n|$

$$\leq |z|^{n-1} \left\{ |a_1| + \frac{|a_2|}{|z|} \cdots + \frac{|a_n|}{|z|^{n-1}} \right|$$

$$= t^{n-1} \left(|a_1| + \frac{|a_2|}{t} \cdots + \frac{a_n}{t^{n-1}} \right|$$

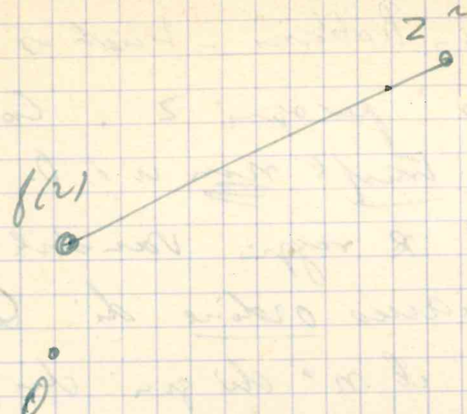
$$\leq t^{n-1} \left(|a_1| + |a_2| \cdots + |a_n| \right) \quad \text{se prendo } t > 1$$

$$\leq t^n \quad \text{se prendo } t > |a_1| \cdots + |a_{n-1}|.$$

$$= |z|^n.$$

Perciò ~~$f(z)$ è~~ rispetto al pt. z^n, il pt $f(z)$ dista meno dell'origine; cioè il segm.to $z^n - f(z)$ (volta)

(viene da p. 10 bis)



non contiene l'origine (quando $f(z)$ si muove in C').

Per la cont.^{e} ~~trasc~~ legge di z^n, il pt

$O z^n$ fa n giri (quando z descrive C);

ora L si può deformare con cont.$^{\grave{a}}$ in C' senza

passare per O (spingendo z^n su $f(z)$ lungo

il segmento); l'ordine di O rimane invariato

perchè è un intero variabile per cont.$^{\grave{a}}$.

c.d.D.

p. 143 sgg.te dm. formula Poisson come in Tricomi N. 11

149 fine Per far vedere

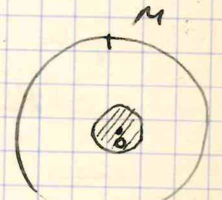
$$\lim_{r=0}\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(R\cos\theta, R\sin\theta)\,d\theta}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}=\frac{\cancel{R^2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\,d\theta$$

basta far vedere che $(R^2-r^2)\dfrac{u(R\cos\theta,\dots)\,d\theta}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}$ tende uniformemente al suo limite ''', cioè che preso η, la diff.za fra l'espressione scritta e $R^2u(\dots)$ si può rendere in val. ass. $<\eta$ purchè $|r|<$ di un certo ε per tutti i θ. Ora il den. vale (v. p. 145) $|z-a|^2=\overline{AM}^2$ dove $A=(r,\varphi)$ e M è un pt. var. sul cerchio. Si tratta di vedere

$$|u|\left(\frac{R^2-r^2}{\overline{AM}^2}-1\right)<\eta$$ per tutti pt. M. Ora $|u|$ è limitato su γ quindi si tratta di vedere $\left|\dfrac{R^2-r^2-AM^2}{AM^2}\right|<\eta'$ per tutti pti.

Ora

$$\left|\frac{R^2-r^2-AM^2}{AM^2}\right|\leq\frac{|R^2-AM^2|}{AM^2}+\frac{r^2}{AM^2}$$ Basta prendere egualmente limitato il 2° membro



Vado A nel cerchietto nero, di raggio ε,

AM sta fra $R-\varepsilon$ e $R+\varepsilon$ così $|R-AM|<\varepsilon$, $R+AM<3R$ (se prendo $\varepsilon<R$), $|R^2-AM^2|<3R\varepsilon$. ; $AM>\frac{R}{2}$, $\frac{1}{AM}<\frac{2}{R}$.

$$\frac{|R^2-\overline{AM}^2|}{AM^2}+\frac{r^2}{AM^2}<\frac{3\varepsilon}{R}+\frac{\varepsilon^2}{R^2}$$

Quindi se prendo ε tale che $\dfrac{6\varepsilon}{R}+\dfrac{\varepsilon^2}{R^2}<\eta'$ sono a posto.

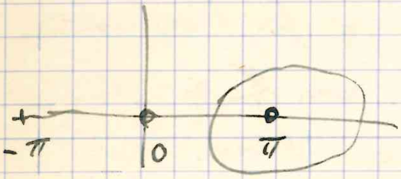
e siccome $\dfrac{\varepsilon^2}{R^2}<\dfrac{\varepsilon}{R}$ basta prendere $\dfrac{7\varepsilon}{R}<\eta'$. Va bene

''' come nel caso complesso (N.p. 8 retro). per trattare qui il caso reale (la stessa dim. che c'è a p. N9)

N. 11. retro.

p. 159. 2ª metà:

1) il caso in cui f si annulla è veramente eccezionale per il minimo: basta considerare uno zero con un contorno sul quale f non si annulli; per es. sen z.



2) il teor. 2 dice: se preso γ chiusa e max $|f| = M$ su γ in z interno ... $|f(z)| \leq M$ (se ne ricava un max. interno). A p. 137 avevamo (per γ una circolare...) $|f(z)| \leq \frac{ML}{2\pi\delta}$ meno espressiva

(pulire: sviluppo lungo γ e γ_1; il ris. è valido solo nell'interno perchè $|z-a|<|z-c|$ ecc...)

× — Però, anche se nella dim. lo sviluppo vale per l'interno, vale poi anche per γ e γ_1 (prendo γ più in fuori e γ_1 più in dentro: lo svil. è lo stesso come risulta nel teor. di unicità)

p. 153. Nell'integrazione i coeff. di $f.\varphi$: 1. Si applica l'unicità allo svil. in serie di potenze dimostrato a p. 155 (che sostituisce il principio di identità dei polinomi).

pp. 151-153. Che in (1) sia $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$ si può N. 12.
vedere anche così. Derivo i due membri n volte (è lecita la deriv. per serie di una serie di potenze, come sappiamo) e poi faccio $z = a$. Trovo

$$f^{(n)}(a) = n!\, c_n \qquad ; c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

(Ciò renderebbe inutile il teor. di p. 135.). (Fatto)

p. 157 teor.^{a} $h = 0$ in I ed. de leg. Teor. 52; così gli ~~p.ti~~ estremi di $|f|$.

p. 163. – Formula di Cauchy per contorni pluriconnessi
Esplicitata in Picard II p. 113. Eg. Osgood p. 17 per ipsis p. 163. Enun.^{to} Laurent: si intende che lo svil. vale nell'interno delle corone; però γ e γ_1 sono interni al campo

pp. 165-7. Dim. Laurent come in leg. Teor. semplificato, cioè come in Tricomi p. 7

pp. 169-71. Unicità svil. Laurent de leg. Teor.

p. 171. Dividendo per $(z-a)^{r+1}$ si mantiene la converg. unif. seguita come leg. Teor.

183. trascurato intero p.c. Knopp. 130

185$_2$. Qui $\lim_{z=\infty} f'(z) = 0$, e $f(z)$ è all' ∞ nulla "di 2° ordine". Tricomi p. 60. Invero $f(z) = g(t)$ e

$$\frac{d}{dt} g(t) = \frac{d}{dt} f\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right) = -z^2 f'(z)$$ Essendo

$\lim_{t=0} g'(t)$ finito ($= g'(0)$) sarà finito $\lim_{z=\infty} z^2 f'(z)$ (o anche dalla serie!)

187. teor.^{a} Casorati con dim. come in Tricomi p. 59; in Bianchi p. 166 teor.^{a} di Weierstrass; Knopp. p. 135 "teor. di Casorati-Weierstrass"

$$\lim_{\rho=\infty} \int_0^{\pi} e^{-\rho \operatorname{sen}\theta}\, e^{i\rho\cos\theta}\, d\theta \qquad (1)$$

$$\lim_{r=0} \int_0^{\pi} e^{-r \operatorname{sen}\theta}\, e^{i r\cos\theta}\, d\theta \qquad (2)$$

Quanto a (1) non è vero che $e^{-\rho \operatorname{sen}\theta}$ tenda a zero in tutto l'intervallo di integrazione (inclusi estremi): per $\theta = 0$, o $\theta = \pi$ $e^{\operatorname{sen}\theta} = 1$ e il $\lim_{\rho=\infty} (e^{\operatorname{sen}\theta})^{\rho}$ non è zero. Quindi tanto meno può aver luogo la convergenza uniforme dell'integrando a zero in tutto l'int. Ma posso dir così. Prendo ~~$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\beta<\pi$~~ tenendo p. es. l'int. da 0 a $\frac{\pi}{2}$ (e poi farei lo stesso per l'altra metà). Prendo $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\pi/2} = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi/2}.$$

Nel 2° integrale $\operatorname{sen}\theta > c > 0$, $e^{\operatorname{sen}\theta} > e^{c}$

$$\left| e^{-\rho\operatorname{sen}\theta}\, e^{i\rho\cos\theta} \right| < \left(\frac{1}{e^{c}}\right)^{\rho}.$$

Quindi appena è ρ abbastanza grande perchè $\left(\frac{1}{e^{c}}\right)^{\rho} < \varepsilon$, resta ~~tutto~~ l'integrando ovunque $< \varepsilon$. Quindi fissato α ho

$$\lim_{\rho=\infty} \int_0^{\pi/2} = \lim_{\rho=\infty} \int_0^{\alpha} + \text{zero} = \lim_{\rho=\infty} \int_0^{\alpha}.$$

D'altro lato
$$\left| \int_0^{\alpha} e^{-\rho\operatorname{sen}\theta}\, e^{i\rho\cos\theta}\, d\theta \right| \leq \int_0^{\alpha} e^{-\rho\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$$

$$= \alpha\, e^{-\rho\operatorname{sen}\theta_0} \quad (0<\theta_0<\alpha). = \frac{\alpha}{(e^{\operatorname{sen}\theta_0})^{\rho}} < \alpha$$

Quindi ~~per $\alpha \to 0$ il lim~~ ~~[illegible]~~ essendo α arbitrario è $\int_0^{\pi/2}$ minore di una quantità arbitraria e perciò nullo. c. d. d.

p. 209 principio. Dico qui, come Bianchi che gli N. 15
ordini di zero λ_i restano limitati. In Tricomi (che considera gli zeri come distinti, pensando di ripetere i fattori primari) la cond.ne non c'è. E sta bene. Le serie $\sum \frac{1}{|a_r|^n}$ mia e di Bianchi **non** è la stessa di Tricomi ~~ma~~, chiamando a'_r gli zeri come in Tricomi ~~$\sum \frac{1}{|a_r|^n}$~~ ~~$\sum \frac{\lambda_r}{|a'_r|^n} = \sum$~~

La somma Tric. è $\sum \frac{1}{|a'_r|^n}$

" " mia è $\sum \frac{1}{|a_r|^n}$

e $\sum \frac{1}{|a'_r|^n} = \sum \frac{\lambda_r}{|a_r|^n}$. Però se le λ_r sono limitate le due serie $\sum \frac{1}{|a'_r|^n}$ e $\sum \frac{1}{|a_r|^n}$ sono assieme convergenti, e i risultati vanno d'accordo.

p. 209. pri. Accoppiando fattori primari consecutivi È lecito. È come in una serie convergente $a_1 + a_2 \dots$ $(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+$. Le "ridotte" della 2ª sono tra quelle della prima, e quindi tendono allo stesso limite.

p. 211 pri. Divisione a membro a membro di prod. infiniti. Quello che faccio è scrivere

$$\frac{u_1 u_2 u_3 u_4 \dots}{u_2 u_4 \dots} = u_1 u_3 \dots$$

come nella somma di due serie

e va bene perchè $(u_1 u_3 \dots)(u_2 u_4 \dots) = u_1 u_2 u_3 u_4 \dots$

p. 208. valore di e (e serie) Marchi p. 108:

p. 219. passaggi linee 2-3. Segue dalla continuità di e^x: $e^{\lim (u_1 + \dots + u_n)}$ posto $u_1 + \dots + u_n = s_n$ ho $e^{\lim s_n} = \lim e^{s_n}$.

p.225 .ultima linea. "resulta". Ciò dipende dal teor di Wierstrass, non dato in questo corso(teor delle serie doppie, applicazione del&&&&&&&&&&&& la formula di Cauchy, secondo cui(p. e. mio corso Torino o Tricomi p 61) data la serie di funzioni

$$u_1(z) + u_2(z) + \dots$$

anal regolari in un dominio sempl connesso C, contorno compreso e unif te convergente sul contorno, segue non solo la convergenza uniforme in C ,ma che la somma è una funcione anal regolare, (e che le sue derivate possono calcolarsi derivando termine a termine)

p. 211. Ma $\prod \left(1 - \frac{2}{n}\right)$ non si può disporre il teor. ma quale è prima $\prod \left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)$ — Sarebbe come in serie $\sum \frac{1}{n^2}$ senza $\sum \frac{1}{n^2} + 100 - 100 =$

$$(1+100) - 100 + \left(\frac{1}{2^2} + 100\right) - 100 + \left(\frac{1}{3^2} - 100\right) - 100$$

che non converge (termine generale non tende a zero).

p. 217 Lorenzo Mascheroni. 1750-1800 poeta e matem. Monti gli dedicò la "Mascheroniana". — Geom. del compasso costruz. di g. e. col solo compasso. P.e. raddoppiare segmento. Intersez. cerchio retta

Costruito M simm. di O rispetto a AB i pti cercati hanno da M dist.za uguale al raggio e quindi si trovano segando con cerchi di centro M e raggi uguali al dato

p. 197. Se l'unico pt. sing. ess. è proprio in $z = a$, con la trasf. $z' = \frac{1}{z-a}$ posso mandarlo all'∞.

p. 199-201. Su per qui cfr. Knopp 167-68.

pp 205-7 cf. prod. inf.te cfr. Knopp 171

(197 e ss. è chiaro che per 1/f ho poli semplici)

Va a p.

p. 195 bis (*). ~~Se~~ L'integrale improprio $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b$ esiste (cond. suff.te) se $f(x)$ per $x \to \infty$ diventa infinitesima d'ord. maggiore di uno (quindi qui trattandosi di un intero almeno $= 2$). cfr. p. es. Tricomi II p. 28 [se non è infinitesima o se lo è di ord. $\rho \leq 1$ e se per x abbastanza grande è sempre $|x^\rho f(x)| > \delta > 0$ l'integrale non esiste]

p. 195 bis. Nel calcolo del 2° integrale (fatto rispetto a θ) ammetto che $\int \cancel{\lim_{\rho\to\infty}} = \lim_{\rho\to\infty}\int = \int \lim_{\rho\to\infty}$. E così in seguito in altri casi. È lecito, ma per sicurezza occorrebbe (vedi p. 8. e 9) assicurarsi che l'integrale tende al limite, cioè qui a zero, uniformemente per tutti i θ considerati. E ciò avviene perché l'integrando è

$$\frac{P(\rho e^{i\theta})}{Q(\rho e^{i\theta})}\, i\rho e^{i\theta} \quad \text{con modulo} \quad \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\rho\right| = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right||z|.$$

Questo modulo tende a zero per $z \to \infty$, cioè ~~per tutti~~ dato ε arbitrario esiste L tale che per tutti gli z con $|z| > L$ è $\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right||z| < \varepsilon$. La tendenza a zero è perciò uniforme.

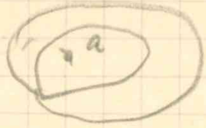
p. 195 IV. Ci sono 2 passaggi al limite sotto il segno $\int$.

p. 231. C'è da osservare: sappiamo dalla rapp.ne trig.ca di z (p.) que in una regione spl connessa che non contenga z=0 posso considerare log z come funzione anl.uniforme. Anal per log (z-a) .Sappiamo que

con der.te $\frac{1}{z}$

$$\int^{a} \frac{dz}{z-a}$$

in regione connessa che non contiene z=a è fz anal. unif con derivata 1/(z-a).Pertanto quell'integrale e log (z-a) differiscono solo per un costante addtiva (p.) que al calcolare l'incremento come si fa per calcolare l'integrale definito non ha nessuna influensa. Che se poi integro lungo un camminco C che eviti il punto z=a ma non racchiudibile in regione connessa splte come sopra, p.e.



lo spezzo in piccole parti ecc. Quindi va bene il detto per log (z-a)

Quanto all'inte rale di f'/f posso fare analogte su un cammino C lungo il quale f non si annulli.Invero in una reg sempl connessa dove f non si annulli posso considerare una det.ne di log f come funzione anal. uniforme : basta porre f=Z, e considerare ivi log Z

(T.^{da} p. 117).

Esempii di applicazione del teor.^{a} 1

Rouché.

In che quadranti stanno le radici dell'eq.^{ne}

$$z^4+z^3+4z^2+2z+3=0\ ?$$

(Non ha radici positive: per le negative, posto $z=-x$ ha $\overbrace{x^4-x^3+4x^2}-\overbrace{2x+3}=0$.

Per $x<1$ i gruppi ⌴ ⌴ sono >0.

Per $x\geq 1$ lo sono i gruppi ⌐ ⌐).

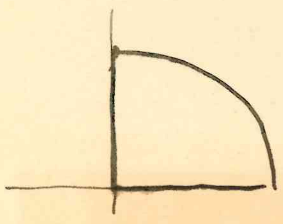
Quindi non ha radici reali.

Nemmeno ha radici immag. pure come si vede ponendo $z=iy$. Perchè dovrebbero

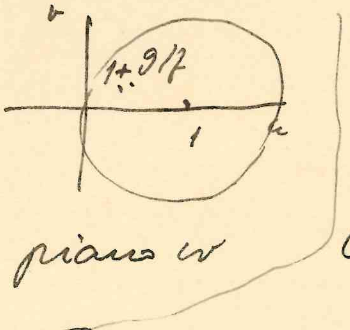
$$y^4-4y^2+3 \quad e \quad y(y^2-2)=0$$

aver radici comuni che non ci sono.

Prendo C limitato dai semiassi $x>0$, $y>0$ e $x^2+y^2=R^2$ con R grande



cerchio di centro 1 e raggio 1. Quindi per



piano w

$$w = 1 + \frac{g}{f} = \rho e^{i\varphi}$$ ho

$$-\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{1}{2}\pi.$$

Corrispondentemente percorrendo il contorno di

C, ~~[illegible]~~ mai può cessare questo di segno positivo. Perciò φ torna al valore iniziale. Quindi segue (1).

Il teorema di Rouché è dimostrato

Da Titchmarsh. The Theory of Functions

p. 116.

<u>Teor.ª di Rouché.</u> Se $f(z)$ e $g(z)$ sono analitiche entro e su C e $|g(z)|<|f(z)|$ su C, si deduce che le due funzioni

$$f(z) \quad \text{e}$$

$$f(z)+g(z)$$

hanno lo stesso n° di zeri entro C.

1ª dim.) $f \neq 0$ su C. $|f| \neq |g|$ su C. — Siano N, N' i n.i degli zeri risp. di f e $f+g$ entro C. Le formule (dedotte dell' indicatore log. con caso di comp. di poli dentro C e di zeri su C) $2\pi N = \Delta_C \arg f$ (dove Δ_C è la var. di arg f al percorrere C) danno

$$2\pi N = \Delta_C \arg f$$

$$2\pi N' = \Delta_C \arg(f+g)$$

Per provare $N=N'$ è da provare

$$\Delta_C \arg\left(1+\frac{g}{f}\right) = 0. \quad (1)$$

Ora nel piano ~~rappresentativo di f~~ di Gauss, essendo $|g|<|f|$ il pt $w = 1+\frac{g}{f}$ è nell'interno del cir...

Frank u. v. Mises
Die Differential und Integralgleichungen der Mech. u. Phys.

I. p. 152.

$s(z,\alpha)$ sia anal.ca in z per α ~~variabile~~ parametro ~~reale e anche co~~ complesso o anche eventualmente solo reale. Considero valore α_0 di α / senza che occorra presupporre la esistenza di $s(z,\alpha_0)$

Se su γ $\lim_{\alpha=\alpha_0} s(z,\alpha) = f(z)$ uniformemente

cioè preso ε arbitrario, esiste η tale che per $|\alpha-\alpha_0|<\eta$ e ogni z su γ

$|s(z,\alpha)-f(z)|<\varepsilon$, segue

$$\lim_{\alpha=\alpha_0}\int_\gamma s(z,\alpha)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz \text{ cioè } = \int_\gamma \lim_{\alpha=\alpha_0} s(z\alpha)\,dz$$

Quindi se $\dfrac{s(z,\alpha)-s(z,\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}$ tende uniform.te

a $\left(\dfrac{\partial s}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0}$ segue $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\int s(z,\alpha)\,dz = \int\dfrac{\partial s(z,\alpha)}{\partial\alpha}dz$

Bartolini
Luzzi
Fatto Russo
Fantin
Stefalini
Michelo

MATEMATICAS SUPERIORES 1944
Trabajos prácticos
III

1) Calcular la integral curvilinea

$$\int (x+y+1)\,dx + x\,dy$$

a lo largo de cada uno de los caminos γ y γ' que van desde el punto A(-1,0) al punto B(1,0): el camino γ es rectilíneo y γ' es la circunferencia de diámetro AB en el semiplano $y \geq 0$. ¿Podía preverse que los resultados coinciden ?

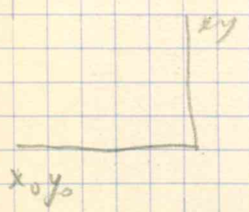
2) Lo mismo, para la misma integral, suponiendo ahora A(-1,-1) y B(1,1) ; γ y γ' son ahora las dos lineas quebra-das cada una de las cuales tiene un lado paralelo al eje x y el otro paralelo al eje y.

3) Comprobar que

$$\cos x \ \ \mathrm{ch}\, y$$

es una función armónica, y calcular (aplicando el método general) la función armónica conjugada.

3)



$$\int V_x\,dx + V_y\,dy = \int -u_y\,dx + u_x\,dy =$$

$$\int -\cos x\,\mathrm{sh}\,y\,dx - \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{ch}\,y\,dy = -$$

$$= -\mathrm{sh}\,y_0(\cancel{\mathrm{sen}}\,x - \mathrm{sen}\,x_0) - \mathrm{sen}\,x(\mathrm{sh}\,y - \cancel{\mathrm{sh}\,y_0})$$

$$= -\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sh}\,y.$$

MATEMATICAS SUPERIORES 1944

TRABAJOS PRACTICOS II

1. Dibujar, en el plano de Gauss los 4 campos definidos respectivamente por

a). $|z| \leq 3$, $|z-2| \leq 2$
b) $|z| \leq 3$, $|z-2| \geq 2$
c) $|z| \geq 2$, $\mathcal{R}(z) \geq 0$
d) $\mathcal{R}(z) \geq 0$, ~~R(~~ $R(z-2) \leq 0$, $|z-1| \geq 2$

2.-Calcular la parte real u(x,y) y el coeficiente del imaginario v(x,y) de la función

$$z^4 = (x+iy)^4$$

y averiguar directamente que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann , y que cada una de las dos funciones u,v es armónica.

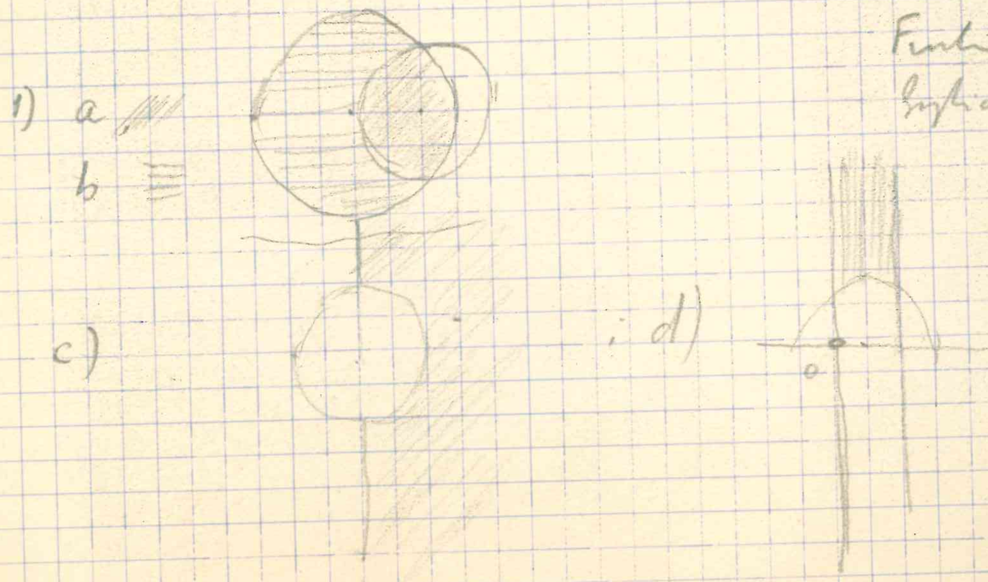
3.- Lo mismo para la función

$$w = \frac{1}{z^2}$$

4.- Lo mismo para la función

$$w = \frac{z+1}{z-1}$$

[illegible]
[illegible]
[illegible]
Russo —
Luppi —
[illegible] —
[illegible]
[illegible]



Fabbi:

Micheli

Mairola

Russo

Luzzi

Bachus

1943

MATEMATICAS SUPERIORES

TRABAJOS PRÁCTICOS I

En los ejercicios 1-2 indicados a continuación la esfera de Riemann se supone de radio 1. La misma, en los dibujos, se entenderá representada en el plano como superficie topográfica, y más precisamente se dibujarán a parte el hemisferio Norte y el Sur.

1.- Dibujar en el plano de Gauss y en la esfera de Riemann los doce puntos siguientes

$$z = 1+i, \quad z = 1-i \qquad z = -1+i, \qquad z = -1-i$$

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \qquad z = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \qquad z = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

$$z = \frac{1+i}{2}, \quad z = \frac{1-i}{2}, \qquad z = \frac{-1+i}{2}, \qquad z = \frac{-1-i}{2}$$

2.- Dibujar en el plano de Gauss y en la esfera de Riemann las circunferencias

$$|z| = 1, \qquad |z| = 2, \qquad |z| = 3$$

$$|z| = 0{,}5 \qquad |z| = 0{,}3$$

(Applicare

$$X = \frac{2R^2 x}{x^2+y^2+R^2}; \quad Y = \frac{2R^2 y}{\text{〃}}; \quad Z = \frac{R(x^2+y^2-R^2)}{\text{〃}}$$

Per i pt. della sfera [illegible] determinare il valore di Z e di ζ)

(volta)

P/hul

3.- Si la esfera de Riemann tiene radio R cualquiera, ¿ cuál es el valor de la variable compleja z en un punto genérico (X,Y,Z) de la esfera de Riemann ?

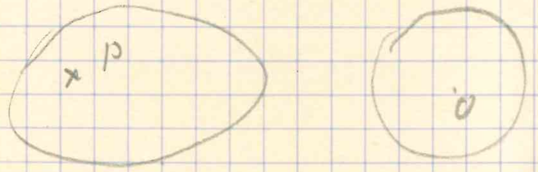
$$Z - R = \frac{R(X^2+Y^2-R^2) - R(X^2+Y^2+R^2)}{X^2+Y^2+R^2} = -\frac{2R^3}{X^2+Y^2+R^2}$$

Queda: $X^2+Y^2+R^2 = -\frac{2R^3}{Z-R} = \frac{2R^3}{R-Z}$

$$x = \frac{R}{R-Z}X; \quad y = \frac{R}{R-Z}Y; \quad \boxed{z = \frac{R}{R-Z}\times(X+iY)}$$

Picard, Julia, Goursat, Courant-Hilbert
Frank v. Mises

Goursat II p. 52. Teor. Riemann: la rapp. conforme f(z) su cerchio, f(z) dipende da 3 cost.^{ti}, sceglibili p. es. in modo che $P \to O$ e più una coppia di pt. corrisp.^{ti} sui contorni



$w = \frac{1}{2}$ rapp.^{ta} ... su semipiano.

$w = \cos z$ (p. 53)

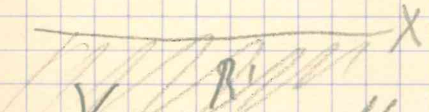
$0 \le x \le \pi \quad y > 0$

$X = \cos x \,\mathrm{ch}\, y$

$Y = -\sin x \,\mathrm{sh}\, y$

$Y < 0$, w sotto l'asse X

Quando z è sul contorno è



$Y = 0$ annullandosi uno dei fattori.

Viceversa, a ogni pt. del semipiano R' corrisponde un pt. di R: se infatti z' soddisfa a $\cos z' = w$ le altre soluz. sono $2k\pi \pm z'$. Se Imag $z' > 0$ una sola di questi pt. è in R perchè tutti i $2k\pi - z'$

Sono sotto x. Dei pt $2k\pi + 2'$ ve ne è <u>uno</u>

in R, [illegible] un pt con ascissa tra 0 e 2π

ma non tra π e 2π, dove $Y > 0$

— p. 11 linee $U =$ cost "isoterme"

([illegible])

(1930)

Goursat I° - p. 273. $\int P\,dx + Q\,dy$ ind.te del cammino è detta ~~per~~ supponendo le derivate di P, Q cont.

la $\int P\,dx + Q\,dy = \iint (Q_x - P_y)\,dx\,dy$

è chiamata di Green p. 204. Le continuità delle derivate intervengono nella deduzione che se in un pt. $Q_x - P_y \neq 0$ essendo continua (p. 226), in un areola il membro di segno cost.te e nullo il 2° membro nullo. Quindi per dedurre che se $\int_c = 0$. $\Rightarrow$ $Q_x = P_y$ interviene la continuità.

Nelle eq. a diff. totali ($\overline{I}$. 53) f è supposta con derivate prime continue (~~[illegible]~~)

Matemáticas superiores 1944
TRABAJOS PRACTICOS IV

(Un grupo de alumnos resuelve los 1-3-5-7 y otro grupo los 2-4-6-8)

Falta
Run

1

Para la función analítica

$$f(z)=\frac{z-1}{z+1}=u(x,y)+iv(x,y)$$

dibújense alguna de las líneas u= const., v= const.

2

Indicándose con $s_{2n}(x)$ la suma de los primeros términos de la serie

$$y=\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots.$$

hasta $(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ incluído, dibújense en el intervalo $0\leq x\leq 4$ los cuatro primeros diagramas aproximantes c_0, c_2, c_4, c_6:

$y=s_0(x)$; $y=s_2(x)$; $y=s_4(x)$; $y=s_6(x)$.

Con tal objeto se construirá previamente (utilizando tablas de potencias y máquina de calcular) una tabla de los valores de los segundos miembros para valores de x intervalados entre sí de 0,2 . Dibújese también en el mismo intervalo (utilizando una tabla trigonométrica) el diagrama de la función y=cos x.

3

La serie del ejercicio anterior es uniformemente convergente en el intervalo considerado (debido a que la misma, en el campo complejo, converge en todo el plano de Gauss). Pues bien, compruébese que para $n\geq 4$ todos los diagramas aproximantes $y=s_{2n}(x)$, en el intervalo $0\leq x\leq 4$ están contenidos en una faja obtenida al levantar o bajar de $\varepsilon=0,3$ la cosinusoide y=cos x.

Con este objeto se partirá de la observación que, aplicando a cos x el desarrollo en serie de Mac-Laurin con el resto de Lagrange se tiene

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x$$

siendo $0\leq\theta\leq 1$. Luego para un dado x el error $R_{2n}(x)$ que se hace al reemplazar cos x por $s_{2n}(x)$, es en valor absoluto

$$\leq\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Al variar x en el intervalo considerado, el error resulta para cada x ,

$\leq \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$. Si x varía en el intervalo $0 \leq x \leq 4$, dicho error queda constantemente $\leq \dfrac{4^{2n+2}}{(2n+2)!}$. Sáquese la conclusión.

Análogamente compruébese que, limitándose al intervalo $0 \leq x \leq 2$, y a partir de c_4 los diagramas aproximantes están comprendidos en una faja análoga con $\varepsilon = 0{,}1$. Dibújese (en una escala conveniente, de manera que la figura resulte bien clara) la cosinusoide y la faja ahora considerada, junto con los diagramas c_4 y c_6, confirmando con el dibujo el resultado anterior.

4

Aplicando el teorema de Cauchy-Hadamard (o alguna consecuencia del mismo) encuéntrese el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$; 4) $1 + \dfrac{z^5}{5} + \dfrac{z^{10}}{10} + \dfrac{z^{15}}{15} + \ldots\ldots$;

5) $z - 2^4 z^2 + z^3 - 2^8 z^4 + z^5 - 2^{12} z^6 + \ldots\ldots$

5

Lo mismo para las series de potencias:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{3n^2+3} z^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}}{3^{n+1}} z^n$

3) $1 + z + z^{2!} + z^{3!} + z^{4!} + z^{5!} + \ldots\ldots$

4) $5z + z^2 + 5^3 z^3 + z^4 + 5^5 z^5 + z^6 + \ldots\ldots$

5) $z + 2^2 z^2 + 3^3 z^3 + z^4 + 2^5 z^5 + 3^6 z^6 + z^7 + 2^8 z^8 + 3^9 z^9 + \ldots\ldots$

6

Para $|z| < 1$, partiendo del desarrollo

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots\ldots = \frac{1}{1-z}$$

y apliendo la derivación término a término dentro del círculo de convergencia, súmese cada una de las dos series siguientes:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = 1+2z+3z^2+\cdots$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)z^n = 1.2+2.3z+3.4z^2+4.5z^3+\cdots$

En la serie 2) hágase $z=\frac{i}{2}$,y dedúzcanse fórmulas que expresen la suma de la serie de las partes reales de los términos, y la de la serie de los coeficientes del imaginario.

7

Para $|z|<1$,partiendo del desarrollo

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = 1+z^2+z^4+z^6+\cdots = \frac{1}{1-z^2}$$

y actuando como en el ejercicio anterior,súmese cada una de las dos series siguientes:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2n\,z^{2n-1} = 2z+4z^3+6z^5+8z^7+\cdots$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)(2n+2)z^{2n} = 1.2+3.4z^2+5.6z^4+\cdots$

En la serie 2) hágase $z=\frac{\sqrt{i}}{2}$, y dedúzcanse fórmulas que expresen la suma de la serie de las partes reales y la de la serie de los coeficientes del imaginario.

8

Dado un número real $k>1$, indicar todas las raices ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ (imaginarias) de la ecuación en z:

senz=k

(recordando que senz=sen(x+iy)=sen x ch y + icox x sh y).Aplíquese en particular a la ecuación

sen z =2

(utilizando tablas numéricas de funciones hiperbólicas)

Análogamente, dado h real p. e. positivo,indicar todas las soluciones de la ecuación

senz = ih

y aplíquese en particular a la ecuación

sen z =i

Matemáticas superiores 1944

Trabajo práctico n. V

1.-Expresar la parte real $u(x,y)$ y el coeficiente del imaginario $v(x,y)$ de cada una de las siguientes funciones de la variable compleja $z= x+iy$:

$\operatorname{tg} z$; $\quad \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$; $\quad$ && $\quad \dfrac{1}{\cos z}$.

2.- Aplíquese el método de los coeficientes indeterminados para desarrollar la función

$$\frac{1}{(z+2)(z+3)} \qquad (1)$$

en una serie de potencias de z:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots$$

Se encontrarán a_0, a_1, y una fórmula de recurrencia que vincula, para $r \geq 0$ los tres coeficientes consecutivos de indices r, $r+1$, $r+2$. Por otra parte, el mismo desarrollo puede encontrarse al considerar la función (1) como diferencia de las

$$\frac{1}{z+2} \quad y \quad \frac{1}{z+3}$$

De esta segunda manera, se encontrará fácilmente la expresión general del coeficiente a_r . Comprobar que de la mencion da fórmula de recurrencia se deduce el mismo resultado.

3.- Lo mismo para la función

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(z+1)(z+2)} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(z+2)(z+3)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} + \frac{1}{2(z+3)}$$

4.-Mediante el método de los coeficientes indeterminados, encontrar los primeros término d l desarrollo de

$$\frac{1}{\cos z}$$

en serie de potencias de z .- Encuéntrense de tal manera los primeros <u>números de Euler</u> E_2, E_4, E_6, E_8, E_{10} : los números de Euler están definidos por

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{0}^{\infty} \cancel{(-1)^k}\, \frac{E_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$$

5.- Con el método de los coeficientes indeterminados, encontrar el desarrollo en serie de potencias de z de la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - zw = 0$$

que cumple con las condiciones iniciales

$w(0) = 1$; $w'(0) = 0$

Comprobar que dicho desarrollo converge en todo el plano.

6.- Lo mismo, con las condiciones iniciales

$w(0)= 0$; $w'(0) = 1$

(v. nota)

HAGANSE LOS EJERCICIOS 1,3,5 O BIEN 2,4,6.

en una serie de potencias de z:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots$$

Se encontrarán a_0, a_1, y una fórmula de recurrencia que vincula, para $r \geq 0$ los tres coeficientes consecutivos de indices r, $r+1$, $r+2$. Por otra parte, el mismo desarrollo puede encontrarse al considerar la función (1) como diferencia de las

$$\frac{1}{z+2} \quad y \quad \frac{1}{z+3}$$

De esta segunda manera, se encontrará fácilmente la expresión general del coeficiente a_r. Comprobar que de la mencion da fórmula de recurrencia se deduce el mismo resultado.

3.- Lo mismo para la función

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(z+1)(z+2)} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(z+2)(z+3)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} + \frac{1}{2(z+3)}$$

4.-Mediante el método de los coeficientes indeterminados, encontrar los primeros término del desarrollo de

$$\frac{1}{\cos z}$$

en serie de potencias de z .- Encuéntrense de tal manera los primeros números de Euler E_2, E_4, E_6, E_8, E_{10} : los números de Euler están definidos por

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_0^{\infty} \cancel{(-1)^k}\, \frac{E_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$$

5.- Con el método de los coeficientes indeterminados, encontrar el desarrollo en serie de potencias de z de la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - zw = 0$$

que cumple con las condiciones iniciales
$w(0) = 1$; $w'(0) = 0$
Comprobar que dicho desarrollo converge en todo el plano.

6.- Lo mismo, con las condiciones iniciales
$w(0) = 0$; $w'(0) = 1$

HAGANSE LOS EJERCICIOS 1,3,5 O BIEN 2,4,6. (y resto)

$$\begin{cases} \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \\ \cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y \end{cases}$$

1- ovvio da

Matemáticas ... curso 1944

Trabajo práctico n. 4

1.- Expresar la parte real $u(x,y)$ y el coeficiente de la imaginaria $v(x,y)$ de cada una de las siguientes funciones de la variable compleja $z = x + iy$:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} z} \qquad \frac{1}{\cos z} \qquad \frac{1}{\operatorname{sen} z}$$

2) $1 = (z^2+5z+6)\left(\frac{1}{6} - \frac{5}{36}z + a_2 z^2 \dots\right)$

$$a_r + 5a_{r+1} + 6a_{r+2} = 0 \quad (\sim)$$

2.- Aplicando el método de los coeficientes indeterminados, desarrollar la función

$$\frac{1}{(z+2)(z+3)} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} = \frac{1}{2(1+\frac{z}{2})} - \frac{1}{3(1+\frac{z}{3})} = \sum_0^\infty (-1)^r \left(\frac{1}{2^{r+1}} - \frac{1}{3^{r+1}}\right) z^r$$

en una serie de potencias de z:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

per vedere $(\sim)$ è corretta

Se pide averiguar ... a_r ... $r+2$.

$$\frac{1}{2^{r+1}} - \frac{1}{3^{r+1}} - 5\left(\frac{1}{2^{r+2}} - \frac{1}{3^{r+2}}\right) + 6\left(\frac{1}{2^{r+3}} - \frac{1}{3^{r+3}}\right)$$

Por otra parte, el mismo desarrollo puede obtenerse al considerar la función (1) como diferencia de las

$$= \frac{4 - 10 + 6}{2^{r+3}} - \frac{9 - 15 + 6}{3^{r+3}} = 0.$$

De este segundo modo, se encuentra fácilmente una expresión general del coeficiente a_r. Compruébese que de la relación de fórmula de recurrencia se deduce el mismo resultado.

3) $a_r = (-1)^r \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{2 \cdot 3^{r+1}} \right\}$

3.- Lo mismo para la función

4) $\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{10}}{10!}\right)\left(1 + \frac{E_2}{2!}z^2 + \frac{E_4}{4!}z^4 + \frac{E_6}{6!}z^6 \dots\right) = 1$

$z^2)$ $E_2 - 1 = 0 \qquad E_2 = +1$

$z^4)$ $E_4 - 6 + 1 = 0 \qquad E_4 = 5$

4.- ... como ... los números de Euler ...

$z^6)$ $E_6 - 5 \cdot 15 + 15 - 1 = 0 \qquad E_6 = 61.$

en serie de potencias ... números de Euler $E_2, E_4, E_6, \dots E_{2k}$ definidos por

$z^8)$ etc. $1385, \quad 50521$

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$$

5.- Con el método de los coeficientes indeterminados, desarrollar en serie de potencias de z la solución de la ecuación diferencial

5) $w = c_0 + c_1 z + c_2 z^2$

6) Tr. 377

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - z\,w = 0$$

$2c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3 z + 4 \cdot 3\, c_4 z^2 + \dots - z(c_0 + c_1 z + \dots) =$

que cumple con las condiciones iniciales $w(0) = 1$; $w'(0) = 0$. Compruébese si dicho desarrollo converge o no.

$2c_2 + (3 \cdot 2 \cdot c_3 - c_0)z + (4 \cdot 3 \cdot c_4 - c_1)z^2 \dots$

6.- Lo mismo, con las condiciones iniciales $w(0) = 0$; $w'(0) = 1$.

$c_2 = 0$, e per $h \geq 3$ $\quad h(h-1)c_h = c_{h-3}$

Quindi $c_5 = c_8 \dots = 0$

per ricavare (~) si controlli che

$$\frac{1}{2^{r+1}} - \frac{1}{3^{r+1}} - 5\left(\frac{1}{2^{r+1}} - \frac{1}{3^{r+1}}\right) + 6\left(\frac{1}{2^{r+1}} - \frac{1}{3^{r+1}}\right) \sim$$

$$= \frac{1-10+8}{2^{r+1}} - \frac{1-15+8}{3^{r+1}} = 0.$$

c) $a_r = (-1)^r \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{2 \cdot 3^{r+1}} \right\}$

4) $\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{10}}{10!}\right)\left(1 + \frac{E_2}{2!} z^2 + \frac{E_4}{4!} z^4 + \frac{E_6}{6!}\right.$

$z^2)$ $E_2 + 1 = 0$ $\quad E_2 = +1$

$z^4)$ $E_4 - 6 + 1 = 0$ $\quad E_4 = 5$

$z^6)$ $E_6 - 5 \cdot 15 + 15 - 1 = 0$ $\quad E_6 = 61.$

$z^8)$ etc $\quad 1385, \quad 50521$

---

5) $w = c_0 + c_1 z + c_2 z^2$

6) Trovare

$$2c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3 z + 4 \cdot 3\, c_4 z^2 + \dots - z(c_0 + c_1 z + \dots) =$$

$$2c_2 + (3 \cdot 2 \cdot c_3 - c_0) z + (4 \cdot 3 \cdot c_4 - c_1) z^2$$

$\therefore c_2 = 0$ e per $h \geq 3$ $\quad h(h-1)c_h = c_{h-3}$

Quindi $c_5 = c_8 \dots = 0$

~~In 5)~~ Per c_0 di $c_3 \quad c_6$ etc

 $c_1 \quad$ " $\quad c_4 \quad c_7$ etc

In 5) $c_1 = c_4 = c_7 \dots = 0$ e $\quad c_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}$; $c_6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}$;

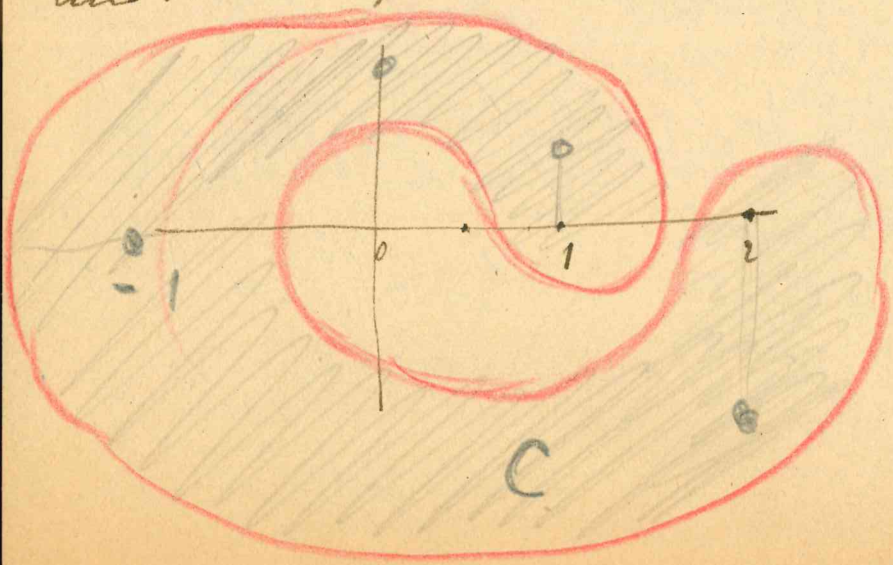
$c_9 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}$; cioè $c_3 = \frac{1}{3!}$; $c_6 = \frac{4}{6!}$ $\quad c_9 = \frac{4 \cdot 7}{9!}$

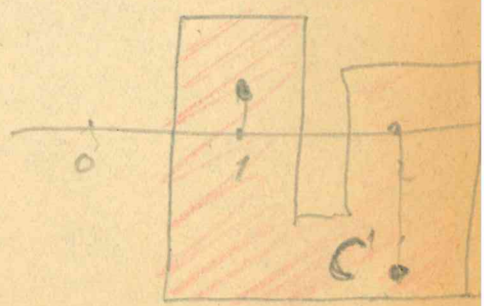
$c_{3n} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{(3n)!}$. Per $z > 0$ $\quad$ serie a t. positivi con

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = z^3 \frac{3n-2}{(3n+2)(3n+1)(3n+3)}$ che $\to 0$

Am = 6)

5) La funció $\log z$, a la qual se imposa de tomar la determinació 0 en el punt $z = 1$ es uniforme en cada una de les següents campos C, C'. Quin valor torna





dicha funció, en los dos casos, para $z = 2$? ¿I para $z = 2 - i$? ¿I para $1 + \frac{i}{2}$? Etc. ...
etc

---

8) Sistemes $u = \text{const.}$ $v = \text{const}$ para la funció

$$w = \cos z$$

tre $l-\varepsilon$ y $l+\varepsilon$.

$$(l-\varepsilon)^p < \frac{u_{n+p}}{u_n} < (l+\varepsilon)^p$$

$$u_n^{\frac{1}{n+p}}(l-\varepsilon)^{\frac{n}{n+p}} < (u_{n+p})^{\frac{1}{n+p}} < u_n^{\frac{1}{n+p}}(l+\varepsilon)^{\frac{p}{n+p}}$$

[illegible] con n fijo.

$$n_p \to \infty$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$l-\varepsilon \qquad\qquad l+\varepsilon$$

Por tanto, [illegible]

$$l-2\varepsilon < \sqrt[m]{u_m} < l+2\varepsilon.$$

Así $\sqrt[n]{u_n} \to l$

Lo mismo si u_n

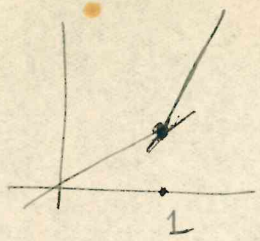
$1 \quad a \quad ab \quad a^2b \qquad a \neq b$

$$\sqrt[n]{a_n} \to \sqrt{ab}$$

$0-1 \quad a \quad b.$

$ax \qquad a + b(x-1).$ $\qquad b>1.$

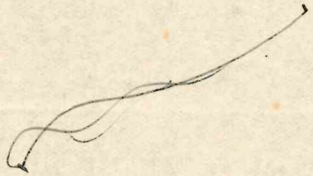
$bx \cancel{-a} (b-a).$

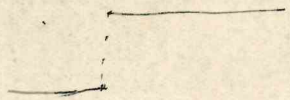


Qui non c'è derivata

$$\cancel{x[x] - \tfrac{1}{2}\left([x]+[x^2]\right) \sim \tfrac{1}{2}x^2} - \tfrac{1}{2}x.$$

f'





1) Parte real e coef. del sing. en

$$\operatorname{tg} z \; ; \quad \frac{1}{\operatorname{sen} z} \; ; \quad \frac{1}{\cos z}$$

2) Método coef. ind.^s para

$$\frac{1}{(z+2)(z+3)} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \dots \quad (1)$$

(por recurrencia). i escribir explicit.^te los primeros coef^es.

~~Comparar con el producto~~ $\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}$

$\times \frac{1}{z+3} = \frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)}$

y con la diferencia $\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3}$

P.e. de ésta se sacan fácilmente a_n; ~~tratar~~ de deducir el mismo de las f.^las de recurr.^a

~~Hacer otros ej.^s análogos (p.e. $\frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)}$~~

3). ~~Ej.~~ Met. coef. ind.^s para $\frac{1}{\cos z}$

Definir los números de Euler E_{2K} mediante

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_0^\infty \cancel{(-1)^K} \frac{E_{2K}}{(2K)!} z^{2K}$$

encontrar los primeros E_{2K}

$(E_2 = 1, \; E_4 = 5, \; E_6 = -61, \; E_8 = 1385, \; E_{10} = -50521 \dots)$

4). Encontrar Met. coef. ind.^s para $w = P(z)$ que cumple con la ec. d.

$$w'' - \cancel{z}\, w = 0$$

con las condiciones iniciales

a) $w(0) = 1; \quad w'(0) = 0.$

b) $w(0) = 0; \quad w'(0) = 1.$ ($w(z)$ resulta convergente en todo el plano)

Otros ejercicios analíticos.

P. e. estudiar el desarrollo en serie de

$$\sum \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)}$$

además que con los coef. ind.°, obtener la igualdad con

$$\frac{1}{2}\left(\sum \frac{1}{(z+1)(z+2)} - \sum \frac{1}{(z+2)(z+3)}\right)$$

y ~~des~~ $= \frac{1}{2}\left(\sum \frac{1}{z+1} - \sum \frac{1}{z+2}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3}\right)$

etc.

~~o cualquier ...~~ o algún otro caso de $\sum \frac{1}{\varphi(z)}$

con φ polinomio (de ceros reales $\neq 0$ distintos o no), descomponiendo $\frac{1}{\varphi(z)}$ en fracciones simples.

— 5 —

Derivar miembro a miembro (1); y empezar con el desarrollo de $\frac{2z+5}{(z+2)^2(z+3)^2}$ calculado directamente mediante el ej. ...)

$\cancel{1}$ 1

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(x+iy-1)(x-iy+1)}{(x+iy+1)(x-iy+1)} = \frac{x^2+y^2+2iy-1}{x^2+y^2+1}$$

$$x^2+y^2-1 = k(x^2+y^2+1)$$

$$y = k(x^2+y^2+1)$$

1)

Para la función analítica
$$f(z) = \frac{z-1}{z+1} = u(x,y) + i\,v(x,y)$$
dibújense algunas de las líneas u = const., v = const.

Per 8

$$\operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$$

~~x = 1 per~~ è reale per $\cos x = 0$ o $\operatorname{sh} y = 0$

è reale > 1 solo per $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$

Se il valore reale prefissato è $K > 1$ deve risultare

$$(\pm 1)^n \operatorname{ch} y = K$$

Siccome $\operatorname{ch} y$ è > 0 n è pari

Quindi $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ e

$$\operatorname{ch} y = K$$

Diagr. ch y catenaria

Per $K > 1$ ho 2 valori opposti di y y_1 e $-y_1$ Se per

$z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \pm y_1$ $K = 1$ valori

Chermuchet
Grave
~~Tabella~~
~~Tavole~~

volle

Da vedere

$\operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$

è imag puro $= ih_{(h>0)}$ per $\underline{\operatorname{sen}} x \operatorname{ch} y = 0$; $x = m\pi$.

$i(-1)^m \operatorname{sh} y = ih$

Per avere il 2° membro ih con $h>0$

se m è pari) $\operatorname{sh} y = h$ $y > 0$

se m è dispari $\operatorname{sh} y = -h$ $y < 0$

Ora sh y è crescente (derivata >0). Ho $y_1 (>0)$ tale che

$$\operatorname{sh} y_1 = h \quad e \quad \underline{z = 2n\pi + iy_1}$$

oppure Le altre soluzioni sono

$$z = \underline{(2l+1)\pi - iy_1}$$

Si applica a $\underline{\operatorname{sen} z = i}$

risultato (v. J. Ende)

$$\boxed{\operatorname{sh} y = 1}$$

2)

Indicando con $s_{2n}(x)$ la suma de los primeros términos de la serie

$$y = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots \quad (1)$$

hasta $(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ incluido, dibujar en el intervalo $0 \leq x \leq 4$ los ~~diez~~ cuatro primeros diagramas aproximantes C_0, C_2, C_4, C_6:

$$y = s_0(x) \; ; \quad y = s_2(x) \; ; \quad y = s_4(x) \; ; \quad y = s_6(x)$$

Con este objeto se ~~calcularán~~ construirá previamente (con la máquina de calcular) una tabla de los segundos miembros para valores de x intervalados de 0,2 entre sí.

Dibújese también el diagrama de la cosinusoide $y = \cos x$ en el mismo intervalo.

3) 2)

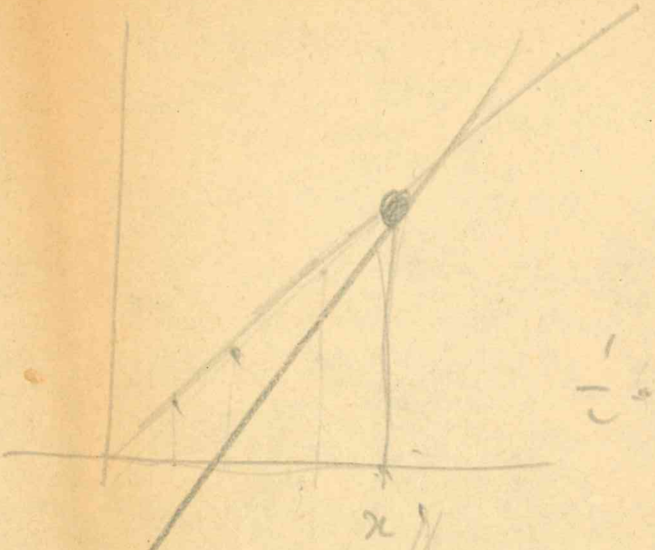
(Del ej. 2)

La serie (1) es uniformemente convergente en el intervalo considerado (~~por~~ debido a que la serie ~~[illegible]~~ de Gauss en el campo complejo converge en todo el plano).

~~Para~~ ~~Demostrar~~ Comprobar que para $n \geq 4$ los diagramas aproximantes $y = s_{2n}(x)$, en el intervalo considerado están todos contenidos en una faja obtenida al ~~bajar~~ levantar o bajar la cosinusoide (1) de ~~un ancho~~ $\varepsilon = 0,3$

$y = f(x) = x$

1

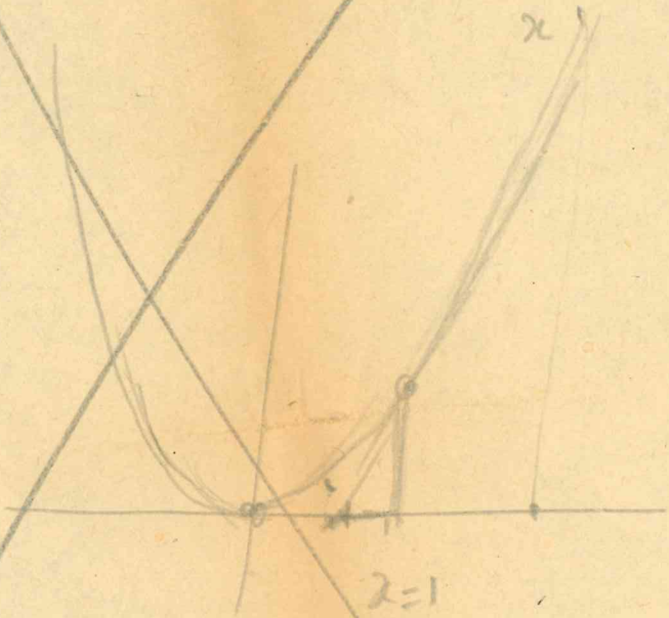


$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$y = x^2$

der^e : $2x$

2



$$\lim_{h=0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h=0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

$$\lim_{h=0} \left(2x + h\right) = 2x$$

Con este objeto se partirá de la observación que ~~en la ser~~ consideremos ~~en la serie (1) correspondiente como serie de Mac-Laurin el resto~~ R_{n+} ~~que resulte al pasar en el término en~~ x^{n-1}

aplicando a $\cos x$ el desarrollo en serie de Mac-Laurin con el resto en la forma de Lagrange se tiene

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta x$$

siendo $0 \leq \theta \leq 1$. Luego el error para cada valor de x que se hace reemplazando ~~cos~~ x por $S_{2n}(x)$ es $R_{2n}(x)$, en valor absoluto

$$\leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Si x varía en el intervalo $0 \leq x \leq 4$ el error es, para cada $x \leq \frac{4^{2n+2}}{(2n+2)!}$. Síguese la conclusión

permite

$\boxed{\text{E}}$rror $\leq \frac{4^{2n+2}}{(2n+2)!}$ y lo mismo decrece con n

(multiplicando por 16 y dividiendo por un nº mayor)

O sea que para $n=4$ error $\leq \frac{4^{10}}{10!} = \frac{\cancel{4}.\cancel{4}.\cancel{4}.\cancel{4}.4.4.4.4.4.4}{\cancel{2}.3.\cancel{4}.5.\cancel{6}.7.\cancel{8}.9.10}$

$$= \frac{256.16}{15.21.45} = \frac{4096}{14175} < 0,3$$

15	315
21	45
15	1575
30	1260
315	14175

42525

Segue per me

Nell'intv. $0-2$ $\left|R_{2n}(x)\right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$

(anche per i cos' delle serie alterne)

Per $n=3$ s_6 di errore $\leq \frac{x^8}{8!} \leq \frac{2^8}{8!} = \frac{\cancel{2}.\cancel{2}.2.2}{1.3.\cancel{4}.5.6.7.8} = \frac{4}{15.42}$

Per $n=2$ s_4 di errore $\leq \frac{x^6}{6!} \leq \frac{2^6}{6!} = \frac{\cancel{4}.2.\cancel{4}}{\cancel{1}.3.\cancel{4}.5.\cancel{6}_3} = \frac{4}{3.5.3} = \frac{4}{45} < \frac{1}{10}$

(per per $x=2$ ho $\cos x \sim 1-2+\frac{16}{24} = 1-2+\frac{2}{3} = -0,33\ldots$ [illegible])

Aceptado ~~[illegible]~~ que comprueben y limitándose al ~~[illegible]~~ intervalo $0 \leq x \leq 2$ ~~para $n \geq 2$~~ a partir de c_4 los diagramas aproximantes estén contenidos en una faja amplia con $\varepsilon = 0,1$.

~~Además~~ ~~Además reprodúzcanse~~ los (no difiriendo conveniente ~~en~~ escala de ~~[illegible]~~ de manera que el dibujo resulte bien claro) ~~diagramas c_4 y c_6 en escala conveniente~~

También dibújese la cosinusoide y la ~~correspondiente~~ ahora correspondiente faja, junto con los diagramas c_4 y c_6, ~~adaptando una escala con~~ para el intervalo $0 \leq x \leq 2$, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~averiguando~~ comprobando con el dibujo el resultado ~~[illegible]~~ anterior

5

6) 9) (o algún enunciado del mismo)

Aplicando el teorema de Cauchy-Hadamard encontrar el radio de convergencia de cada una de las ~~series~~ siguientes series de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$$

$\sqrt[n]{n^n} = n \to \infty$ radio 0

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$$

$\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} \to 0$ radio ∞

$$\sum n^2 z^n$$

$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1 \quad \text{radio } 1\right)$

$$1 + \frac{z^5}{5} + \frac{z^{10}}{10} + \frac{z^{15}}{15} \cdots$$

(algún coeff. 0 otros de $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ de $\to 1$ máx lím 1. luego radio 1)

$$z - 2^2 z^2 + z^3 - 2^4 z^4 + z^5 - 2^6 z^6 \cdots$$

(los restos sigue siendo $\to 1$ $\to 2$. M.L. 2 radio $\frac{1}{2}$).

5 6)

Lo mismo para las series de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n^2+3} z^n$$

$\left(\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+3}{3(n+1)^2+3} \cdot \frac{3n^2+3}{n+2} = 1 \quad \text{radio} = 1\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}} z^n$$

$\left(\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{3^{n+1}}{3^{n+2}} = \frac{2}{3} \quad \text{radio } \frac{3}{2}\right)$

$$1 + z + z^2 + z^6 + z^{4!} + z^{5!}$$

(radio = 1 pues coeff. 1 ó 0.)

$$5z + 4z^2 + 5^3 z^3 + z^4 + 5^5 z^5 + \cdots$$

(coeff impar $\sqrt[n]{5^n} \to 5$ pares $\to 1$ M.L. 5 radio $\frac{1}{5}$)

$$z + 2^2 z^2 + 3^3 z^3 + z^4 + 2^5 z^5 + 3^6 z^6 + \cdots$$

(~~radio $\frac{1}{3}$~~) (análogo. M.L. 3 radio $\frac{1}{3}$)

Siendo $|z| < 1$.

Partiendo del desarrollo ~~válido~~ ~~para $|z|<1$~~

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \frac{1}{1-z}$$

y aplicando la derivación término a término dentro del círculo de convergencia ~~calcular~~ ~~la suma de~~ para sumar cada una de las series siguientes

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1} + \dots \qquad \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) z^n = 2 + 2.3.z + 3.4.z^2 + \dots + n(n-1)z^{n-2} + \dots \qquad \frac{2}{(1-z)^3}$$

En esta última ~~fórmula~~ serie hágase $z = \frac{i}{2}$ y dedúzcanse ~~el la~~ fórmulas que expresen ~~valor de~~ suma de la serie de las partes reales de los términos y la de la suma de los coeficientes del imaginario

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\frac{i^n}{2^n} = \frac{2}{\left(1-\frac{i}{2}\right)^3} = \frac{2^4}{(2-i)^3} =$$

$$= \frac{2^4(2+i)^3}{5^3} = \frac{16}{125}\left(2^3 + 3.2^2 i + 3.2 - i\right)$$

$$= \frac{16}{125}(2 + 11 i).$$

$$2 - \frac{3.4}{2^2} + \frac{5.6}{2^4} - \frac{7.8}{2^6} \dots = \frac{32}{125}$$

$$\frac{2.3}{2} - \frac{4.5}{2^3} + \frac{6.7}{2^5} \dots = \frac{176}{125}.$$

~~Partiendo~~ d
Para $|z|<1$ partiendo del desarrollo

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = 1+z^2+z^4+\cdots = \frac{1}{1-z^2}$$

y ~~aplicando~~ actuando ~~análogamente~~ como en el ej. 5, ~~determínese~~ súmese cada una de las series siguientes

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n z^{2n-1} = 2z + 4z^3 + 6z^5 + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(2n+2) z^{2n} = 2 + 4.3.z^2 + 6.5.z^4 \cdots$$

~~En esta última ser~~ ~~la penúltima serie hágase~~

~~y más general la serie lograda al~~ deduzca

En esta última serie hágase $z = \frac{\sqrt{i}}{2}$ (= ~~[illegible]~~) y deduzcanse fórmulas que expresan la suma de la serie de las partes reales y la de la serie de los coeficientes del imaginario

7).

Dado un número k real > 1, ~~[illegible]~~ indíquense todas las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} z = k$.

(recordando que $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$)

Aplíquese en particular a la ecuación $\operatorname{sen} z = 2$.

Dado h real p. e. positivo, indicar todas las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} z = i h$.

Aplíquese en particular a la ecuación $\operatorname{sen} z = i$.

Hacer 1.3.5.7 o los 2.4.6.8