GEOMETRIA SUPERIORE

1935-36

ARGOMENTI VARI DI GEOMETRIA (TOPOLOGIA)

Gli argomenti vari di cui al titolo si connetteranno tutti più o meno direttamente con la ~~Tologia~~ Topologia, per quanto alcuni potranno avere interesse anche a sè. La topologia (o Analysis situs) è sostanzialmente lo studio delle proprietà delle figure che dipendono soltanto dalla continuità vale a dire che sono invarianti per trasformazioni continue Come in geom. proi. si studiano le p.tà invarianti per omog ..., qui si pongono base queste trasformazioni tanto più generali. P.es. in topologia si equivalgono la nozione di area interna a un quadrato e di area interna a un cerchio, perchè si può passare per cont.tà da una all'altra. Diversa invece da quelle è l'area p.es. racchiusa in una corona circolare, perchè merntre in questa si può segnare una linea chiusa non intrecciata non riducibile per continuità a un punto ciò non avviene nel cerchio. La topologia, nata nel secolo (Jordan e.) scorso ha preso recentemente un grande sviluppo. Da essa di-pendono ~~molte~~ varie altre parti della matematica. Per citarne ~~qual~~ una la teoria delle funzioni alg. di una o più variabili, cioè delle curve algebriche, e così sup. algebriche ecc. Per le curve algebriche p.es. è noto quale importanza abbia la rapp.ne dei suoi ∞^2 punti complessi nella ∞^2 reale dei punti di una sup., la cosidetta sup. di Riemann relativa a quella curva. Ora il genere della curva si ripercuote sulla natura topologica della sup. di Riemann; avendosi la sfera con p manici come modello topologico per il genere p. E così in

essa studia le p.tà più profonde delle figure, e quindi la topologia generale

(Picard. Severi. Lefschetz.)

ceto modo analoghe passando dalle cu ve alle sup. .Ma anche in tante altre parti della mat. la topologia ha una importanza fond.le.Ricordo qui come esempio tipico il problema delle soluzioni periodiche nel celebre problema dei tre corpi;dove Poincaré ha fatto dipendere la questione da un teorema di topologia,da lui solo intravisto e che è stato poi dimostrato da Birckhoff

(Quanto un po' vecchio

Il primo cap. del corso sarà dedicato ai gruppi d'ordine finito,o discontinui infiniti ; sui primi cito soprattutto Bianchi Lez. sulla teor. dei gr. di sost. per . Varie nozioni che vi incontreremo saranno poi applicate;ma a ogni modo come ho detto il capitolo avrà interesse anche per sè.

CAPITOLO I. GRUPPI (~~[illegible]~~ finiti, e ~~[illegible]~~. DISCONTINUI, infiniti).

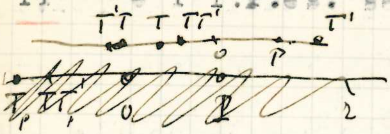
Tutti sanno dal più al meno cosa si intende per gruppo. E' un concetto fond. le della mat' moderna. Esso si può presentare sotto un aspetto concreto,più el.re,e sotto aspetto astratto. che diremo poi Comicismo dal primo.Si considera una classe C di ~~enti~~ elti E,e poi delle trsf.ni o operazioni (univoche) T,ognuna delle quali muti ogni ~~ente~~ elto E di C ancora in un ~~ente~~ elto E' di C.Allora di due tali trf.ni si definisce il prodotto T T';è la trsf.ne che si ottiene applicando ai vari elti ~~di~~ E della C prima la T,e poi,al risultato la T'.(esempio:elti E i punti di una retta, C la loro totalità, T una trsf.ne univoca della retta in sè,& p.es. una proi.

Se, come vogliamo supporre le op.ni T che si consi-derano sono biunivoche, accanto a ognuna si può considerare la INVERSA T^{-1}; è per definizione questa; se T mutava gli E negli E', essa è quella che muta ogni E' in E. Il prodotto $T\,T^{-1}$ lascia dunque fermo ogni E; essa si chiama l'identità (e si indica spesso col simbolo 1). Ha quindi un senso anche T^{-p} (con p int. positivo) vuol dire $(T^{-1})^{p}$.

Se due op.ni A, B conicidono fra loro, e scriveremo simb.te $A = B$, si può moltiplicare questa id.tà per una stessa op.ne C (sempre operante su quegli E) e dedurre $AC = BC$ oppure $CA = CB$; si può "moltiplicare a destra oppure a sinistra".

Solo in casi particolari, le op.ni sono permutabili

Tutti sanno anche che questo prodotto NON gode nec?te della proprietà commutativa,vale a dire non è detto che siano eqv. TT' e T'T.P.es. se stando all'es.pio di ora prendo,su una



retta r:T syn.risp. pt fisso O
T' traslazione di un cm. verso destra,la figura mostra che questi due prodotti operano diversamente.E' quindi essenziale stabilire una volta per tutte se il fattore che si applica per primo si scrive a sinistra(come faremo o a destra).Il prodotto di più trasformazioni T,T' T'' ecc. si definisce nello stesso modo:applicare prima la T poi al risultato la T', poi al risultato la T''. ESSO gode invece della p.tà associativa. Infatti,dato il significato così chiarito per T T' T'',si vede subito che nondifferisce da esso (TT') T'' oppure T (T'T''
Vale dunqu per i prodotti di trsf.no la p.tà associativa,ma non nec.te la commutativa . ~~La proprietà~~ Dalla df. di prodotto segue poi ovviamente quella di potenza T^n,con n intero positivo.

La df. di gruppo è allora la seguente. Un insieme G fi trsf.ni T operanti sugli enti E della classe C è un gruppo quando gode delle seguenti proprietà:

1) di contenere insieme a due qualunque sue trsf.ni anche il loro prodotto

2) di contenere insieme a ogni trsf.ne T,anche la sua inversa T^{-1}.

Ogni gruppo contiene dunque,in conseguenza anche il

Precisamente: insieme in corr.za biun. con gli intieri positivi. Ma si potrebbe anche dire con i positivi e negativi (come ci accadrà subito di considerare: basta ordinare questo così $0, 1, -1, 2, \ldots$). Ci servirà anche il fatto che le coppie di el.ti estratti da un insieme numerabile formano un insieme id. ($a_1 a_2 a_3 \ldots$,v. p. 13) e così le terne, ecc. Ogni insieme infinito estratto da un insieme numerabile è esso pure numerabile: 1° el.to il primo che si trova nell'insieme dato e così via (serve p.es. nel gruppo mod p 17)

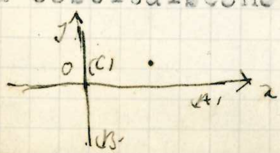
Per gr. d'o. f. l'ordine di un sottogruppo Γ è divisore dell'o. del gr. G. ~~è il lato autom. di un~~ Se $\Gamma = S_1, S_2 \ldots S_m$ scriviamo le op.ni di G così. ($S_1 \ldots S_m$ Non avendo esaurito G, sia T altra allora le TS_i sono distinte dalle S_j ($TS_i = S_j$ darebbe $T = S_j S_i^{-1}$) e fra loro $TS_i = TS_j$ darebbe $S_i = S_j$ moltiplicando a sinistra per T^{-1}. Le mettiamo in 2a riga. Se G è esaurito, è provato. Se no sia U nuova. Le US_i son distinte dalle prec.ti e fra loro (fra loro e dalle S_j c.s. e così dalle TS_j perchè $US_i = TS_j$ darebbe $U = TS_j S_i^{-1} = TS_k$ ~~...~~ che starebbe in 2a riga). Se ho posto ord $G = g$ ord $\Gamma = m$ ... Quindi in particolare il periodo di una trasf. di gr. d'o. f. è divisore dell'ordine del gruppo prodotto TT^{-1} cioè l'identità.

Si chiamano discontinui i gruppi (e sono quelli di cui ci occuperemo) che sono costituiti da un n.° finito di traf.ni, oppure da una totalità numerabile (spiegare). (ordine n, finito o ∞)

Per i gruppi finiti (d'ordine finito) basta la cd/ne 1). Infatti essa dice che nell'~~gruppo~~ insieme stanno T^2, T^3, T^n con n postivo intero arbitrario, ma siccome il gruppo contiene solo un n.° finito di traf.ni, succederà formando queste successive potenze che a un certo momento se ne troverà unanan nuova; sia $T^n = T^m$ (già trovata) $(n > m)$ allora moltiplicando questa eg.za per T^{-m} (qui cioè diff.za altra cosa) ho $(T^{n-m}) = 1$, ~~spiegare ho~~, cosicchè vedo intanto che ogni traf.ne di un gruppo finito è ~~[illegible]~~ periodica (e il suo periodo, minimo esp.te ..) (spiegare); se invece moltiplico per T^{-m-1} vedo che $T^{n-m-1} = T^{-1}$ e siccome ~~quest'ultima~~ le prime sta nel gruppo ecc.

Indicherò qualche esempio di gruppo, dove interverranno i concetti: a) di sottogruppo, cioè parte di un gruppo che costituisce a sè un gruppo; b) di enti equivalenti rispetto a un gruppo. Le sue traf. operavano sugli enti E; due di questi che si possano ottenere uno dall'altro mediante un'op.ne del gruppo si dicono equivalenti rispetto al gruppo.

1) In un piano considero le simmetrie rispetto a due assi ort. x, y e al pt. comune O; chiamandole A B C. Esse colla id.tà costituiscono un gruppo. Infatti (v. figura e pt. P qualsiasi)



$A^2 = 1$; $B^2 = 1$, $C^2 = 1$.

$AB = C$, $BA = C$; $AC = CA = B$; $BC = CB = A$.

T_0 quadrimolettura

 A. i. N. sono a punti 2.

Abbiamo dunque un gruppo do'ordine 4. Le sue op.ni sono a due a due permutabili(gruppo abeliano). Quel G_4 si dice trirettangolo (Vierergruppe). Qui gli enti E sono i punti del piano; sono nti equivalenti rispetto al gruppo verici di un rettangolo di cui gli assi sono le mediane

LAN

2) il gruppo delle proi.tà di r in sè che mutano terna di pt LMN in sè. E' evidente la p.tà di gruppo, e trattarsi di un G_6. Se è A è la p.tà ~~LMN~~ $\begin{pmatrix} L & M & N \\ M & N & L \end{pmatrix}$ la $\begin{pmatrix} LMN \\ NLM \end{pmatrix}$ è evid. A^2 (e poi $A^3=1$ Restano altre tre cioè

$$B=\begin{pmatrix} L & MN \\ L & NM \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} L & M & N \\ N & M & L \end{pmatrix}; \quad D=\begin{pmatrix} LM & N \\ ML & N \end{pmatrix}.$$ Ho

$B^2=C^2=D^2=1$. ~~Sarebbe facile studiare~~ Le $A, A^2, A^3=1$ costituiscono evidentemente un sottogruppo ~~ciclico~~. Sarebbe facile vedere quanto valgono i prodotti a due a due. P.es.

$$BC=\begin{pmatrix} LMN \\ NLM \end{pmatrix}=A^2; \quad CB=\begin{pmatrix} LMN \\ MNL \end{pmatrix}=A.$$

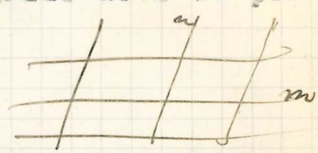
Non si tratta dunque di un gruppo abeliano. Più in generale si vede così che

$$BC=CD=DB=A^2, \quad CB=DC=BD=A.$$

Definisco con l'occasione cosa di intende per trasformazioni generatrici di un gruppo; sono trsf.ni tali che tutte quelle del gruppo di possono ottenere come loro prodotti. Qui p.es sono tali le B,C,D, perchè le altre tre sono date v. sopra. Nel caso del gruppo trirettangolo, non basta evid.te p es la sola A a generare il gruopo perchè $A^2=1$, ma A e B sì perchè si è visto .

c) Prendo ~~[illegible]~~ UNA QUALUNQUE OPERAZIONE T e le sue potenz[e] di esp. intiero positivo e negativo. Allora vi è luogo ~~e le sue potenze con esp. intiero positivo o negativo~~ a distinguere due casi. Se T è ~~ciclica~~ periodica di periodo k, cioè è $T^k=1$, le operazioni $1, T, \ldots T^{k-1}$ essuriscono già il gruppo perchè per ogni altro intiero p positivo o negatico si ha che T^p è già eguale a una di quelle (scrivo T sotto le forme $p = ak + s$ con s tra 0 e $k-1$ inclusi ho $T^p = T^{ak} \cdot T^s = T^s$). Ho così un gruppo ciclico finito G_k. Se invece T non è ~~ciclica~~ periodica, quelle sue potenze costituiscono ancora evd.te un gruppo, ancora ciclico (ma è infinito) ma questa volta un G_∞ (un gruppo che si chiama). Esempio: prender per T una traslazione ~~di~~ di ampiezza α sulla retta, spiegare. Ecco un esempio di gruppo disc. infinito (qui di proi.tà) Qui si ha sempre $T^m \cdot T^n = T^n T^m = T^{m+n}$, cioè il gruppo è abeliano. P.ti equivalenti sono qui punti a distanza $n\alpha$ con n intiero. La T è generatrice del gruppo. Se prendo T^2 e le sue potenze $(T^2)^n = T^{2n}$ ho un sottogruppo (di infinito).

d) Nel piano, considero due traslazioni, in direzioni distinte (p es perp.ri) rappresentate dai vettori a, b. Chiamandole A, B e moltiplicandole comunque fra loro nasce un gruppo abeliano. Intanto AB = BA ((spiegare geom.te). Allora un qualunque prodotto ottenuto applucando qualche fattore A e poi qualche ~~N~~ B e poi qualche A e così via si riduce al tipo $A^{\alpha}B^{\beta}$ infatti Se prendo ~~xxxxxxxxxxxxx~~ p es. $A^{\alpha}B^{\beta}A^{\gamma}$ ognuno dei fattori A di A^{γ} si può far passare avanti ai singoli fattori B di B^{β}, e così si riuniscono tutti i fattori A prima e poi quelli B. Che tutti questi prodotti $A^{\alpha}B^{\beta}$ (α, β interi positivi o negativi) costituiscano gruppo si vede perchè sono soddisfatte le due p.tà che servono alla df. la prima perchè $A^{\alpha}B^{\beta}A^{\alpha'}B^{\beta'}$ si riduce come ora detto a $A^{\alpha+\alpha'}B^{\beta+\beta'}$ e la seconda perchè presa una qualunque op.ne $A^{\alpha}B^{\beta}$ la sua inversa è la $A^{-\alpha}B^{-\beta}$ (che sta nell insieme delle trsf.ni considerato); invero $A^{\alpha}B^{\beta}A^{-\alpha}B^{-\beta} = A^{\alpha}A^{-\alpha} \cdot B^{\beta}B^{-\beta} = 1$. Anche questo gruppo è abeliano. Se ~~traccio nel~~ piano due rette m,n parallele alle direzioni delle due trasl.ni e poi tutte quelle dove m si porta nella trasl. B e suoi multipli, e quelle dove si porta n nella A e multipli, il piano viene diviso in tanti prgr.. Ogni punto del piano ha un equivalente in uno di questi prgr. e uno solo se non sta su un suo lato.



E' questo il gruppo che ha un importanza fond.le nella teoria delle fz.ni ellittiche. (oss. E' un gr. disc. nella nostra df.; cioè le sue op.ni costituiscono una totalità numerabile Veramente esse sono in corr.za biunivoca co le coppie di n interi , ma queste costituiscono un insieme numerabile perchè le coppie di un ins. n.le formano un insieme numerabile; potendosi ordinare p.es. per somma crescente,

↓ (si dice in generale a p. 6)

Infatti $(\gamma z+\delta)z'-\alpha z-\beta=0$

$z(\gamma z'-\alpha)+\delta z'-\beta=0$

$z=\dfrac{\delta z'-\beta}{-\gamma z'+\alpha}$ det.te 1

e per ogni valore della somma p es per primo addendo cresc
spiegare)

5) Cito ancora come gr. discontinuo infinito il gruppo
modulare. Partiamo dalle ~~ttà~~ sost. lineari su una variabile
complessa z: possiamo interpretarla p.es. come coord.ta dei
pt. complessi di r. Saranno questi gli el.ti E. Esse forma
no un gruppo (di omografie) -continuo. Prendiamo fra esse
solo quelle (~~unimodulari~~)

$$(1) \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{scriv.} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma$$

con la restrizione che $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ siano intéri e che il det. te della sost.ne sia unitario (unimodulari) Queste particolari sost. forma no gruppo. Invero presa quella come T e poi $T'\left(z'' = \frac{\alpha' z + \beta'}{\gamma' z + \delta'}\right)$

Ho TT' [illegible] nelle sost. lin. $\dfrac{\alpha' \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + \beta'}{\gamma' \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + \delta'}$ cioè

$$z' = \frac{(\alpha'\alpha + \beta'\gamma) z + (\alpha'\beta + \beta'\delta)}{(\cancel{\gamma'\alpha} + \delta'\gamma) z + (\gamma'\beta + \delta'\delta)}$$ a coeff.ti interi con $\alpha \ldots \alpha'$.

e con det $= \begin{vmatrix} \alpha'\alpha + \beta'\gamma & \alpha'\beta + \beta'\delta \\ \gamma'\alpha + \delta'\gamma & \gamma'\beta + \delta'\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = 1$

Anche la 2ª pté è soddisfatta: data la sost. di coeff.ti $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ per dimostrare che nelle [illegible] (1) vi è l'inversa ~~basta~~ [illegible] cerchiamo $\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'$ tali che il prodotto TT' sia $z' = z = \frac{z}{1}$ ($\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$) Allora $\begin{cases} \alpha'\alpha + \beta'\gamma = 1 \\ \alpha'\beta + \beta'\delta = 0 \end{cases}$ $\quad \gamma'\alpha + \delta'\gamma = 0 \quad \gamma'\beta + \delta'\delta = 1$ Le due 1e danno α', β' e precisamente $\alpha' = \delta$; $\beta' = -\beta$ (è soddisfatta la [illegible] $\delta\alpha - \beta\gamma = 1$

di aggruppamenti, tali cioè che sappiamo sempre se due el.ti H li vogliamo considerare distinti o no. (Come le solite p.tà transitive ecc.)

Tutti poi i nuovi gruppi più generali vengono a godere delle stesse p.tà dei gruppi di trasf.ni, dove il prodotto era associativo dunque

b) che il prodotto di essi si detto sia associativo cioè

$$(H_1 H_2) H_3 = H_1 (H_2 H_3)$$

va bene) cui $\gamma' = \delta - \gamma$; $\delta' = \alpha$. Quindi le inverse delle T_i

$$z = \frac{\delta z' - \beta}{-\gamma z' + \alpha}$$ che ha coeff.ti interi e $\Delta et = 1$.

Quindi si tratta di gruppo; e discontinuo, anzi formato da inversione numerabile. (lo dim. v. p. 6 le quaderni di esercizi, e poi quindi la parte dell'inversione per cui $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

si chiama gruppo modulare

Oss.ne A essere precisi; bisogna aggiungere questo. Se prendo una sost. del gruppo mod.re anche quella corr.te a $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta$ sta evid. nello stesso gruppo; ed è addirittura la stessa sost.ne Quindi una stessa sost. del gr mod proviene da due diverse quaterne di intéiri e da due sole (perchè volendo avere sost. coincidente con la data devo prendere $\rho\alpha, \rho\beta$ etc, ma $\rho^2 = 1$ dà $\rho = \pm 1$) (~~nel rag di sopra si potrebbe allora convenire di adottare pos. α positivo e se esso è nullo positivo β entrambi nulli non sono~~). Comunque è sempre parte in f.te d'una numerabile.

Qui si potrebbero provare che generatori del G_∞ le $z' = z + 1$ e $z' = -\frac{1}{z}$ (da mio appunti unimodulari).

Indicherò poi ancora molti altri esempi, anche fra i più importanti. Ma vediamo ora l'altra df. più astratta del concetto di gruppo, quella che si è accennata a p3. Secondo la df. concreta là adottata, si considerano soltanto gruppi di operazioni, o di trasf.ni. La df. astratta permette di definire gruppi anche di altri enti. La nozione di gruppo acquista così una portata molto più ampia. Quello che c'è di essen-

P° [cfr. par le espagnol Reidemeister. Einführung in die Kombinatorische Topologie 1932

Van der Waerden (1930) Moderne Algebra I] ziale nella df. di gruppo sono le due cd. 1) 2 di p.5, dove si parla di "prodotto di due trsf" e di"inversa di una trsf.ne" E allora viene l'idea che si possano definire dei gruppi di enti qualunque H, anche non trasf.ni, purchè quei due concetti siano definiti per tali enti (non importa come. Quindi bisogna partire da una classe (H) di enti qualunque H tali che entro la quale sia definita una relazione

a) per due di essi H_1 e H_2 sia definito (nella classe) un ente prodotto(gen.te non sarà comm.vo) che si conviene di scriver H_1H_2

Poi, bisogna che sia definito l'ente inverso di un H, H^{-1}. Per trsf.ni T^{-1} veniva sost.te definita come una nuova trsf.ne tale che il prodotto TT^{-1} fosse l'identità. Per poter quindi definire l'inverso dell' el.to H cominciamo a definire un analogo della trasf.ne identica. perciò domandiamo anzitutto che fra gli enti H (della classe (H)) ce ne sia uno che si comporta come l'identità. Ora, per gruppi di trsf. ho evid.te $1.T = T.1 = T$, qualunque sia T. Quindi domandiamo

b) che fra gli enti H ne esista almeno uno (poi l'almeno cadrà) sia E tale che per ogni H risulti

$$EH = H, \qquad HE = H$$

Possiamo aggiungere che tale el.to (detto unità) è necessariamente unico, perchè se ve ne sono due E, F ho

$$EF = F, \qquad EF = E \qquad \text{e quindi } E = F$$

Aggiungiamo finalmente la nozione di el.to inverso di un dato. Domandiamo cioè che

(Leggete ora a p. 16)

Invertito l'elto invers è unico:

se U è un altro tal
$$\cancel{H}\cancel{X} = E$$
$$\cancel{H}U = \boxed{E}$$
$$\cancel{H}\,\cancel{X} = \cancel{H}U$$

dim.
$$\cancel{\Sigma\, x\, \Sigma = \Sigma\, E}\, u \qquad X(HX) = X(HU)$$
$$\cancel{(\Sigma x)\Sigma = (\Sigma x)}\, u \qquad (XH)X = (XH)U$$

$\cancel{Ma\ \Sigma X} =$ ma $XH = E$ (poiché H è l'inv. di X)

dunque

$$X = U \quad \text{c.d.d.}$$

d) per ogni ente H di (H) esiste un ente, che chiameremo il suo inverso ,X tale che

$$\boxed{HX = E}$$

Questo ente inverso X si potrà poi chiamare H^{-1}. Ma aspettiamo un momento a farlo, perchè il simbolismo non ci faccia concludere troppo presto senza giustificazione che se X è l'inverso di H, H lo è di X (cioè non solo HH^{-1}, ma anche $H^{-1}H$ dà l'ente unità). Per dimostrarlo effettivamente: sia Z l'ente inverso di X, cosicchè per df.ne $\boxed{XZ = E}$. Moltiplicando a sinistra per H ho $\boxed{H(XZ) = HE = H}$ (perchè E è unità). Ma per b) $\boxed{H(XZ) = (HX)Z = EZ = Z}$. Quindi $Z = H$ cdd.

Per una classe di enti come quella considerata (H) ha allora senso imporre a un insieme I estratto da (H) le due cd di p. 5, cosicchè si può parlare di un <u>gruppo</u> di tali enti. Questi gruppi più generali, ove occorra distinguerli da quelli di trasf.ni si possono chiamare astratti (anche se saranno concreti!) Il simbolismo delle potenze si estende ov.te.

ESEMPI. Come enti prendiamo i numeri reali, come prodotto il vero e proprio prodotto; b) è soddisfatto; anche c) prendendo come ente unità il numero UNO, e anche d) dove l'ente inverso sarà l'inverso purchè si escluda dalla classe dei n i lo zero. Quindi l'esempio va precisato con tale esclusione. Precisato così un esempio di classe (H) un esempio di gruppo astratto si ha prendendo entro (H) la classe di <u>numeri razionali non nulli</u>. Sono infatti soddisfatte le due cd. di p 5. E' un gruppo infinito discontinuo perchè i n.

(tutte le date, salvo quelle d elte precedenti) razionali costituiscono una totalità numerabile

2° Prendiamo ancora per H i numeri reali, ma dove definiamo come prodotto di due tali enti la loro somma aritmetica (prodotto ord.le additivo). L'ente unità è allora lo zero, l'ente inverso di a è $-a$. Allora si ha un gruppo in ogni insieme di numeri reali tali che con due di essi contenga la loro somma, e con ogni a anche $-a$ (tali insiemi si chiamano moduli). P. es. i numeri intieri formano in tal senso un gruppo così i multipli (positivi e negativi) di un n° intiero qualunque p. ecc. Anche questo è un gruppo discontinuo. Gli esempi ora portati sono di gruppi abeliani ($ab = ba$, $a+b = b+a$). Le nozioni di periodicità, di generatrici, di gruppo infinito (ciclico) generato da un ente non periodico, di sottogruppo ecc. si estendono ovviamente ai gruppi astratti. P.es. il gruppo degli intieri considerato per ultimo è evidentemente ciclico; esso è generato dall'ente $H = 1$, perchè $H^2 = 1+1$, $H^3 = 1+1+1$, ecc. $H^{-1} = -1$, ...

3°) Fissiamo un n° intiero n, e rispetto ad esso riuniamo gli altri intieri in classi di n. congrui. Ogni m definisce una tal classe (m). Queste classi si possono combinare p. es. per somma (il prodotto darebbe luogo a esempio meno ovvio); se ho le classi $(m)(m')$ si vede subito che sommano un n° della prima con uno della seconda i risultati sono tutti congrui, e si ha così la classe $(m+m')$. Queste classi sono in tutto n, ognuna avendo un rappresentante con $0 \leq m < n$. Allora si può adottare per "prodotto e si vede che il G_n è

ciclico generato dalle rotazioni di $\frac{2\pi}{n}$

di due classi (m) nel senso di cui sopra la loro somma; vale la prop.tà associativa; l'ente unità è la classe (o), l'inverso della classe (m) è (-m). La <u>totalità</u> di queste classi forma essa stessa un gruppo d'ordine finito.

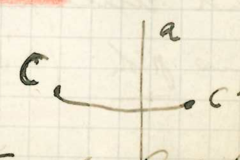
Vari altri esempi si vedranno poi. Per ora torniamo ai "gruppi di trasformazioni" per arricchire un pò la nostra conoscenza di esempi. Intanto non abbiamo ancora parlato di un esempio estremamente importante: i <u>gruppi di sostituzioni</u> su n lettere; qui le operazioni con cui si forma il gruppo sono "sostituzioni" con cui si passa da una data permutazione a un'altra.

Ma vediamo qualche esempio geometrico. Particolarmente importanti sono i "gruppi poliedrici", cioè gruppi di ordine finito di rotazioni di una sfera in sè. Pensiam a gruppi finiti di eguaglianze. Potrei cominciare da rima qui il gruppo non può contenere nessuna traslazione (che non è periodica) e quindi solo eguaglianze inverse - il prodotto di due sarebbe diretta) e quindi un gruppo non può essere costituito che da una simmetria e dal suo quadrato. Cerchiamo se nel piano si può avere qualche cosa più interessante. Prendiamo solo un gruppo di eguaglianze dirette; una tale è notoriamente traslazione o rotazione; ma le traslazioni non essendo periodiche, non possono comparire nel G. Questo sarà allora di sole rotazioni. Dimostro anzitutto che queste avvengono intorno a uno stesso centro. Interpretiamo il piano come piano di Gauss: rotazione intorno al punto a, di angolo φ è rappresentata da $z' - a = e^{i\varphi}(z-a)$

Presa z come ascissa su r, è l'eq. di proi.tà, con gli U uno all'infinito, e l'altro in $z = c$, diciamoli risp. U_∞ e A. Facendo lo stesso per le altre rotazioni del gruppo piano, avrò su r altrettante proi.tà tutte con U_∞ e ulteriore punto unito come A. Anche queste proi.tà devono, ovviamente formare gruppo (sono quelle stesse rotazioni ~~ma~~ interpretate sulla retta complessa). Vorrei dimostrare nel piano la coincidenza dei pt analoghi ad a; allora sulla retta degli A. Mi basta dimostrare ~~un~~ che se ho su r un G_n di proi.tà con un U in ciascuna, esse hanno in comune anche il secondo punto unito; e (risulterà insieme) esse costituiscono nec.te un G_n ciclico. Invero qui ho già e poi potrei sempre ridurmivi, similitudini ~~esse~~ $S_1 \ldots S_n$ siano $\kappa_1 \ldots \kappa_n$ i loro rapporti. Ognuna di esse poi ha periodo, divisore di n (p. 6) cosicchè $S_i^n = 1$; $\kappa_i^n = 1$. Le κ_i sono radici n.esime dell'unità, ma tutte diverse fra loro, perchè se ~~a~~ fosse $\kappa_i = \kappa_j$ la $S_i S_j^{-1}$ è similitudine di rapporto $\kappa_i/\kappa_j = 1$, cioè eguaglianza diretta, che non può far parte del gruppo. Qui fra esse ve ne è certo qualcuna primitiva: Se ρ è radice primitiva, le altre sono $\rho = \kappa_1$ ~~Ma~~ le similitudini $S_1, S_1^2, S_1^3, \ldots, S_1^n$ che stanno certo nel G hanno ~~tali~~ rapporti $\kappa_1^2 \ldots \kappa_1^n$ e sono perciò tutte distinte fra loro; esse esauriscono già il gruppo G_n. Ma $S_1^2 \ldots$ ecc hanno gli stessi pt. uniti di S_1 e tutto è dimostrato.

Veniamo finalmente-e qui troveremo modelli di gruppi interessanti- ai gruppi d'o f di eguaglianze di rette in S3.Qui(p es Enriques p 363)una tale eguaglianza è traslazione o rotazione intorno a un asse,o moto elic. intorno a asse.La prima eventualità si esclude per la impossibilità della periodicità,e per la stessa ragione il terzo. Sono dunque possibili soltanto gruppi di rotazioni.(si intende tra i gdof). Un caso ovvio possibile è naturalmente quello in cui tutte sono intorno a uno stesso asse e:allora segando con piano normale si avrà un gruppo di rotazioni piane e per il risultato precedente"Un gruppo dof di rotazioni INTORNO A UNO STESSO ASSE è nec.te un gruppo ciclico" Studiamo gli altri casi Dico intanto che gli assi sono certo a due a due incidenti .Siano invero a e b assi distinti,risp. di S e di T.Il prodotto ~~ST~~ ~~R~~ $ST^{-1}=R$ è ancora nel gruppo,e quindi rotazione;sia c il suo asse .Esso è distinto da a perchè siccome ~~T=SR~~ $S=RT$, $T=$ ~~R S~~ ~~R~~ $R^{-1}S$ se fosse c ≡ a,i punti di tale retta sarebbero tutti uniti (per R^{-1}, per S) per T ,e quindi cadrebbero su b ,cosicchè anche a≡b contro l'ipotesi. Esiste dunque un punto C di c fuori di a . ~~La~~ S lo muove certamente:lo porterà in $C' \neq C$ .Però siccome $ST^{-1}=R$ ~~c~~ c

~~T^{-1} riporterà~~ - R deve lasciar fermo C,



vuol dir che T^{-1} riporterà C' in C, ossia che T porta C in C'!

Conviene subito introdurre una sfera Σ di centro O, la quale evidentemente è dalle rotazioni mutata in sè. Se il gruppo è un G_n in generale un punto della sfera ha n equivalenti (tra cui sè stesso). Ma punti particolari possono avere meno di n equivalenti distinti. Precisamente se P è unito per qualche trasformazione del gruppo ~~non identica~~, diciamo per τ (fra cui l'identità $R_1 \dots R_\tau$), i suoi equivalenti sono esattamente $\frac{n}{\tau}$.

Invero se P' è un qualsiasi equivalente, ottenuto applicando a P la traf.ne S anche le $R_i S$ portano evid.te P in P' e sono distinte. Ho così intanto τ rotazioni che portano P in P'. Ma non altre perchè se tale è la T

~~[illegible]~~ pure di T è un $R_i S$. Cioè $T = R_i S$ cioè ~~$S^{-1} T = R_i$~~: e ~~effettuata $S^{-1}T$ portando P' in~~ $TS^{-1} = R_i$: ed effettuata TS^{-1} porta P in P' e poi indietro in P e quindi lascia P fermo; cioè è un R_i). E per questa ragione ciascun punto fra quelli equivalenti a P, p. es. P', è unito per τ rotazioni (Altro è anzi il gruppo degli equivalenti che è di $\frac{n}{\tau}$, di $\frac{n}{\tau'}$: la relaz. di equiv. è transitiva).

Punti uniti per rotazioni non identiche ($\tau \geq 2$) si diranno poli (d'ordine τ)

Adunque tanto la S quanto la T portano C in C'. Ora, p.es per la S la a si trova nel piano λ perp. alla retta CC' nel punto medio (perchè ogni punto di a è equidist?te da C, C'). Per la stessa ragione anche la retta b è nello stesso piano. Ecco dunque che le rette a,b sono complanari. Gli assi delle rotazioni del gruppo sono dunque a due a due complanari, e quindi o tutte in un piano o tutte per un punto. Ma tutte complanari no; perchè il piano λ non contiene certo C ($\equiv$C') , e quindi non può contenere la retta c asse della rotazione $R \cdot S\, T^{-1}$. Gli assi passano dunque per un punto, e precisamente proprio: se no avrei assi paralleli, e segando con un piano perp. in quuesto avrei un gdof di rotazioni intorno a centri distinti; sappiamo impossibile.

In definitiva dibbiamo <u>ricercare tutti i possibili gdog di rotazioni in torno ad assi concorrenti in un punto proprio O</u>

Alcune soluzioni si assegnao facilmente a priori. Prendiamo p es un tetraedro regolare ABCD-quindi nec.te iscritto in una sfera di centro O, e pensiamo alle rotazioni intorno a diametri della sfera che sovrappongono il tetraedro a sè stesso (cioè portano ogni vertice in un vertice). Esse godono evidentemente della p.tà di formare grup

po,e diciamo subito d'ordine finito,perchè anche ammesso(
il che non è)che si possa con rotazione portare i vertici
in quell'ordine nei vertici comunque permutati,avremmo al
massimo 24 rotazioni.Vediamo meglio: ~~££~~ rotazioni che la-
scino fermo p es A devono avvenire intorno all'asse AO,e
dovendo portare B in C o in D,ne ho due(oltre all'identità)
~~in~~ sost. b_i da $\pi/3$
una è il quadrato o l'inversa dell'altra. Così per B,C,D.
Ho così 8 rotazioni distinte oltre all'identità.Di rotazioni
che portino A p es in B ne ho qualcuna,p.es. ~~qualla~~
una rotazione intorno a OC,e una intorno a OD.Esse sono

$$S \quad \begin{matrix} ABCD \\ BDCA \end{matrix} \qquad\qquad T \quad \begin{matrix} A\,B\,C\,D \\ B\,C\,A\,D \end{matrix}$$

Ma in tutto devo averne tre,perchè vi sono come già visto
nel gruppo tre rotazioni $R_1 R_2 R_3$ ~~con~~ B unito. (v.p. 30 ~~Per questa ragione~~!
~~Partendo da S ho che le tre rotazioni~~ SR_i ~~portano tutte~~
~~A in B(e sono evid.te distinte); non di più perchè se~~ la
~~rotazione H porta A in B (voglio vedere $H = SR_i$: $S^{-1}H = R_i$)~~
~~la $S^{-1}H$ porta B in B (A in A e poi in D) onde $S^{-1}H$~~
~~è una R_i e da $S^{-1}H = R_i$ $(SS^{-1})H = SR_i$~~

~~Ora~~ Queste tre le ottengo dunque facendo ~~seguire~~ precedere a S l'iden-
tità -e allora ho S -oppure la $\begin{pmatrix} ABCD \\ ACDB \end{pmatrix}$ oppure la $\begin{matrix} ABCD \\ ADBC \end{matrix}$

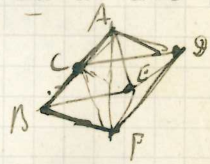
I prodotti sono risp.e $\begin{matrix} ABCD \\ BCAD \end{matrix}$ e $\begin{matrix} ABCD \\ BADC \end{matrix}$ La prima ~~Quest'ulti~~
è la T;l'~~altra~~ ultima rotazione che porta A in B è invece di tipo
nuovo rispetto alle considerate perchè scambia A e B,C e D

senza lasciar fisso nessun punto. E per la ragione esposta
Quindi $\frac{n}{\tau}$: n° pt. equiv.ti di $n=12$
è la sola ulteriore che porta A in B. Per la stessa ragione avrò una sola rotazione ulteriore che porta A in C e una sola A in D. E poi nessun'altra. Le rotazioni del gruppo sono dunque in tutto 12. Ho così il G_{12} tetraedrico (o del tetraedro regolare) E' anche facile capire geom.te cosa sono le tre ultime rotazioni, p. es. la $\begin{matrix}ABCD\\BADC\end{matrix}$. In essa la retta AB è unita e così la CD. Ma una rotazione non possiede rette unite proprie distinte dall'asse a meno che sia di 180° (simmetria) nel qual caso l'asse è perpendicolare alle rette unite distinte da esso.. Qui dunque saremo nel caso, e l'asse sarà perp. ad AB e a CD, e dovendo la rotazione portare A in B, sarà per nel punto medio, e così per CD; in altre parole si tratterà di una rotazione di 180° intorno alla conhiungente i punti medi dei due spigoli opposti. (n c.te perp.re a essi, e passante pel centro). Il G_{12} tetraedrico contiene dunque l'identità tre rotazioni a periodo due e otto a periodo tre. Esso ci dà dunque un esempio di gdof di rotazioni.

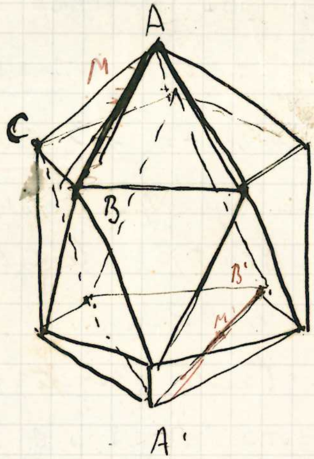
In modo analogo potremo procurarci altri esempi, prendo invece di un tetraedro regolare un altro fra i poliedri regolari (ottaedro, cubo; dodecaedro e icosaedro). Vediamoli intanto un momento. ~~Avverto subito che come sopra si vede che se un vertice~~ è unito per un certo n° τ di rotazioni, ~~ciò~~

$1 + 9 + 6 + 8 = 24$

Per l'ottaedro (descriverlo: due piramidi, opportune a base quadrata) il vertice A è unito per rotazioni in cui l'opposto è unito e allora il quadrato BCDE deve scorrere su sè stesso, rotazione di 90° e sue potenze; $\tau = 4$. I vertici sono tutti equivalenti (A a ogni contiguo p. es. B mediante rotazione di ~~180° intorno al~~ 90° intorno al diametro CE ; al non contiguo F per rotazione id di 180°)



Quindi come visto a p. 30 detto n l'ordine del gruppo ho $\frac{n}{4} = 6$ da cui $n = 24$. Ho così il G_{24} ottaedrico Analizziamo un momento le sue 24 rotazioni. HO l'identità, e poi tre rotazioni non id. che intorno ad AF e analog.te intorno algi altri diametri che congiungon vertici opposti; $3.3 = 9$ Poi qui ogni vertice ha un diam.te opposto: così ogni spigolo: se M, N sono i pt. med. 1 spigoli oppti (p. es. BC, DE) le rotaz.ni di 180° intorno a MN porta il quadr. BCDE in sè e quindi l'ottaedro in sè. Ho rot.ni di questo tipo tante quante le coppie di spigoli oppti cioè $\frac{12}{2} = 6$. (sono del tipo delle ultime incontrate per il tetraedro). Poi ancora se da O conduco la perp. a una faccia p es ABC (e sarà tale anche alla faccia opposta) una rotaz. intorno a questa perp. che faccia scorrere ABC su sè stesso porta l'ottaedro in sè (la faccia in sè e l'opposta id; nè altro). Ho due tali rot.ni non identiche (periodo 3). Trovo c



~~37~~

~~vi sono esattamente rotazioni che lo portano in ciascuno dei vertici ad esso equivalenti rispetto al gruppo(che sono poi,come vedremo, tutti),~~

sì due nuove rotazioni per ogni coppia di faccie opposte in tutte $2\frac{8}{2}$ cioè 8 In tutto ho già 1 e 9 e 6 e 8 cioè 24. Potrei poi considerare il "gruppo cubico" ma ritroverei lo stesso G ottaedrico: basta pensare che i punti me le facce dell'ottaedro formano un cubo, cosicchè il gruppo ottaedrico lo muta in sè; e viceversa i pt medi delle facce di un cubo formano un ottaedro cosicchè il gruppo cubico muta un ottaero in sè; i due ~~...~~ gruppi, ognuno sottogruppo dell'altro, coincidono. Per la stessa ragione basta parlare ancora del gruppo icosaedrico, perchè il dodecaedro non dà nulla di nuovo. Per icosaedro (12 vertici, 20 facce, 30 spigoli) ogni vertice A è contiguo a altri cinque, ~~vertici di un pentagono regolare~~ in un piano perp. alla retta OA. Ogni rotazione per cui A sia fermo fa scorrere questo insieme di vertici contigui in sè, cioè il pentagono su sè stesso; ho dunque, inclusa l'identità 5 tali rotazioni. Tale vertice corrisponde dunque a $\tau = 5$. Inoltre i vertici sono tutti equivalenti; ognuno essendolo ~~...~~ ogni contiguo (A pes a B, perchè AB è lato di un pentagono formato dai vertici adiacenti a C, il quale scorre su sè stesso per rotazione intorno a C), e potendosi passare da ognuno a ognuno mediante successivi passaggi a contigui (~~...~~ l'insieme degli spigoli connette tutti i vertici). Quindi $\frac{n}{5} = 12$ cioè $n = 60$. Ho così il G_{60} icosaedrico. Vedis

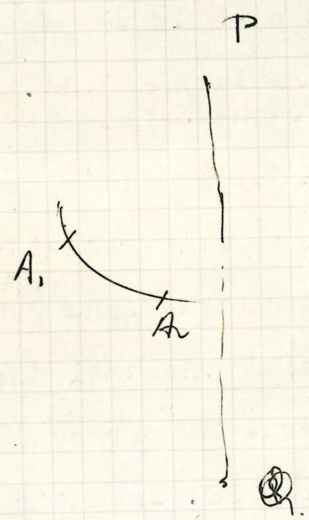
$1 + 24 + 15 + 20 = 60$

come sono costituite le sue 60 rotazioni. Ho
identità
rotazioni intorno al diametro cong.te vertici opposti, sono come già detto 4 non identiche per ogni coppia in t tutto 4.6 cioè 24 .

Poi(cerchiamo le analoghe a quelle già considerate per i casi precedenti):pensiamo a simmetrie(rotazioni di 180) intorno alla retta che congiunge pt. medi di spigoli opposti(ogni vertice ha un diam.te opposto,e quindi ogni spigolo.Detto ~~N~~ M il pt medio di AB,la retta OM è perp. ivi ad AB e alla diam.te opposta A'B' n l pt. medio M'):la rotazione di 180 intorno a MM' sovrappone la sfera a sè,scambia A e B e porterà l'icosaedro in ic reg. iscritto di vertici A,B cioè in sè(per me;fig. egua e alla data con A,B,O uniti,~~ma~~ se non è id.sarebbe rotazione con due assi OA,OB). Di queste simmetrie ne ho evi 30/2 cioè 15. Finalmente (III tipo dell'ottaedro) considero la perp. da O a una faccia;le rotazioni intorno a questa che sovrappongono la faccia sono 2 non id.che, e sovrappongono l'icosaedro a sè .Ho così due nuove rotazioni non dico per ogni faccia ma per ogni coppia di facce opposte,cioè 2. 20/2 cioè 20. In tutto ho già

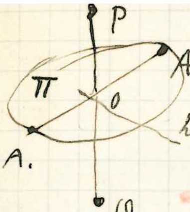
1 e 24 e 15 e 20 cioè 60. Vuol dire che non c'è altro (i periodi sono 5 per le 24,2 per le 15 e 3 per le 20).

~~[illegible]~~ Per quanto i ~~gru~~ poliedri regolari siano così esauriti,posso indicare anche un alt o esempio sostanzialmente analogo di gdof di rotazioni di sfera in sè.Prendiamo un poligono


P
A1
A2
Q

regolare di h lati iscritto in cerchio max di Σ & sia in piano π

$A_1 \ldots A_h$ e considero le due piramidi con tale base e vertici nei due poli P,Q rispetto a quel cerchio come equatore. La figura così formata si chiama doppia piramide regolare (ma non è un poliedro regolare salvo per $h = 4$). Pensiamo alle rotazioni che la mutano in sè e aggiungiamo (per il caso $h = 4$) che mutano in sè quella base. Una tale muta la coppia PQ in sè; cioè P in sè oppure in Q. Del primo tipo le evidentemente un G_h ciclico. Quindi, per P ho $\tau = h$. Qui è da distinguere il τ relativo a P perchè i vertici non sono più tutti equivalenti, non essendolo P agli A_i. P è però equivalente a Q: basta ~~prend re per asse~~ rotazione di 180° intorno a un ~~di rotazione~~ ~~un diametro~~ retta nel piano π, che sia asse di simmetria per il poligono (perp. da vertice al lato oposto per h dispari, congiungente due vertici opposti, oppure pt medi di lati idem per h pari); vengono sempre h rotazioni. Comunque, dato che P e Q sono eqv.ti, e per $\tau = h$, deve avere (p.30) h rotazioni che portano P in Q. E non essendovi altre possibilità, ho intutto $2h$ rotazioni. Questo gruppo si chiama G_{2h} della doppia piramide regolare, (o diedrico). Quello che ho detto vale per h intiero ≥ 3, potendosi solo allora parlare del poligono regolare $A_1 A_2 A_3$. Si considera però anche incluso nel gruppo diedrico un caso di degenerazione corrispondente a $h = 2$, prendendo A_1 e A_2 diametral



A_2 mente opposti, ~~...~~. Rivolte si riducono a 4 complanari: come nel caso generale si ~~parte~~ di passare alle sole rotazioni che mantengono il piano Π (cioè la retta PQ): quindi una prima rot.ne di 90° intorno ad una ⊥ A_1PA_2 che porta P in A_1. Ho quindi ~~...~~ per P $\tau = 2$ (id.tà e ~~...~~ 180° intorno a PQ). $\underline{\underline{G_4}}$. Le tre operazioni sono ~~...~~ rot. 180° intorno a PQ.

~~cioè rot.ni di 180° intorno a 3 .. 180° .. A_1A_2~~

~~cioè ... .. 180° .. $h \perp PQ, A_1A_2$.~~

Questo G_4 diedrico. Contiene dunque, oltre alla identità tre op.ni a periodo 2 come il G_4 involutorio considerato nel piano (p. 7). È comm.vo e lo è, ~~...~~ infatto detto A, B, C, con $A^2 = B^2 = C^2$ è certo $AB = BA = C$ etc. Invero - anche senza considerazioni geometriche $AB = A$ dalla $B = A^{-1}A = 1$ no; $AB = B$ dalla $A = BB^{-1} = 1$ no. Onde sarà certo $AB = C$, e così ~~BA~~ $= C$. Approfitto dell'occasione per dare l'importante nozione di isomorfismo di due gruppi (anche astratti secondo p. 19). Considero due gruppi G e G': e sia stabilita una corrispondenza univoca fra gli enti (p es treni) di G e quelli di G'; a ogni ente H di G corrisponda dunque un ente I(H) di G' colla condizione essenziale che -avuto riguardo alla df adottata per il prodotto (sia per ogni coppia di enti H_1, H_2 di G

$$I(H_1 H_2) = I(H_1) \cdot I(H_2)$$

"a ~~prodotto d'enti corr.ti corrisponde~~ il corr.te del prodotto sia cioè il prodotto dei corrispondenti

Della corrispondenza fra G e G' si domanda solo la univocità, non nec?te la biunv.tà; si domanda però sempre che ~~quan~~ gli nti di G' che nascono come corr.ti degli enti di G descrivano tutto G', cosicchè ogni ente di G' avrà uno o più corrispondenti in G. I due gruppi si dicono allora isomorfli; e l'isomorfismo è oloedrico o meriedrico secondochè la corrispondenza è biunivoca oppure no. Il G_4 diedrico e il G_4 involutorio di p. sono evidentemente in isomorfismo oloedrico. E anzi il breve rag.to di p.prec.te mostra che ogni G4 formato da 3 involuzioni e dall'identità è sempre oloed isomorfo a quelli. Si parla sempre di G_4 involutorio o trirettangolo (concetto, possiamo dire invariante per isomorfismi sottinteso oloedrici)

Ebbene, possiam provare che

I gdef di rotazioni sono il G_n ciclico intorno a un asse, i tre gruppi dei poliedri regolari, e il G_{2n} diedrico

~~Prima però apro una digressione sull'isomorfismo dei gdef. Si capisce che per studiare il modo di comporsi delle trsf.ni (e più in generale deglienti) di un gruppo, è indifferente sostituire a un gruppo un altro olod is. Ora è notevole la circostanza che i gdef di sostituzioni su un certo n.° di lettere citati come esempio a p. dànno già rappresentanti tipici per TUTTI i gdef, nel senso che~~

~~ogni gdf è ad ad ad un una di costituzione~~ Riprendia-
mo perciò p. 31; e pensiamo ai vari poli delle rotazioni
del G_n formiamo classi di poli equivalenti -(per i poliedri
regolari erano eqvti i poli che cadevano nei vertici, ma
si avevano altri poli, p.es. nell'ottaedro le intersezioni
della sfera colla congiungente i pt medi di spigoli oppo-
sti). Abbiasi una classe di poli eqvti di ordine τ_1, poi
una di ordine τ_2 e così via. Alcuni n. $\tau_1, \tau_2 ..$ possono anche
essere eguali fra loro. La ricerca si farà prima di tutto
in senso aritmetico: quali sono i valori possibili dell'or-
dine n del gdof, e degli interi $\tau_1, \tau_2 ..$? Trovati questi
valori possibili, cercheremo i corr.ti gdof per convincere
che sono i noti. Ora ~~i poli del primo gruppo~~ per la
prima parte cerchiamo ~~la~~ anzitutto una relazione a cui soddisfano
quegli interi. Anzitutto, contiamo in modi diversi le ro-
tazioni non identiche del gruppo. Da un lato sono $n-1$; da
un altro ogni polo del primo gruppo - lasciato fermo da
un sottogruppo G_{τ_1} - ne dà $\tau_1 - 1$; i poli del primo gruppo
sono $\frac{n}{\tau_1}$; quindi il primo gruppo dà rotazioni non
identiche $\frac{n}{\tau_1}(\tau_1 - 1)$; e così via. Vengono due volte, e quindi

~~(1)~~ $\sum \frac{n}{\tau_i}(\tau_i - 1) = 2n - 2$. la somma essendo estesa alle
c.i. classi di poli eqvti. Dividendo per n

(1) $\sum \left(1 - \frac{1}{\tau_i}\right) = 2 - \frac{2}{n}$ eq. indeterminata di un certo

intero positivo — 5, —

tutte le soluzioni. Con (3º caso) $2 \le \tau_i \le n$.

Il 2º membro è < 2 ma è ≥ 1 (perchè $n \geq 2$; quindi vale 1 o più). D'altro lato ogni ( ) del 1º membro è $\geq \frac{1}{2}$.

(e < 1). ~~Dopo~~ Quante potranno essere le ( )? Una sola no; due, tre forse: quattro no perchè la loro somma è già troppo elevata. Quindi il nº delle ( ) cioè delle τ_i è due, oppure tre. Se due (1) dà $1-\frac{1}{\tau_1}+1-\frac{1}{\tau_2} = 2-\frac{2}{n}$ cioè

$$\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}=\frac{2}{n}.$$

Ma $\tau_i \le n$ cioè $\frac{1}{\tau_i} \geq \frac{1}{n}$

Quindi ciascuno degli addendi è già $\geq \frac{1}{n}$. Vuol dire che vale il segno =. Ho quindi

I) n qualunque, $\tau_1 = n$, $\tau_2 = n$.

Se le τ son tre (1) dà $\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}+\frac{1}{\tau_3} = 1+\frac{2}{n}$

Una τ_i è $= 2$ (se no il 1º membro ≤ 1): chiamiamola τ_1, ho
($\leq \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$)

$$\frac{1}{\tau_2}+\frac{1}{\tau_3} = \frac{1}{2}+\frac{2}{n}$$

Escluso tal caso ~~Una~~ τ soltanto è tre (se no il 1º membro $\leq \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$).

Sia essa τ_2. Risulta

$$\frac{1}{\tau_3} = \frac{1}{6}+\frac{2}{n} \quad \text{cioè} \quad \frac{2}{n} = \frac{1}{\tau_3}-\frac{1}{6}; \quad n = \frac{2}{\frac{1}{\tau_3}-\frac{1}{6}} = \frac{12\tau_3}{6-\tau_3}$$

Quindi ($n>0$) $\tau_3 < 6$. Bisogna provare per τ_3 i valori (2 non può

Studiamo a parte il caso se può un'altra τ, oltre τ_1, valere anche 2. Allora l'eq. dà $2\tau_3 = n$. Ho così nuova soluzione

II) $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 2$, $\tau_3 = k$, $n = 2k$
(con k intero positivo qualunque ≥ 2)

Ricordare molti che

ogni vol. muta ogni

classe in 2°

ma 3, 4, o 5. $\tau_3 = 3$ oc $n = $ [illegible] 12.

4 .. 24

5 60.

Ho così le nuove soluzioni

III) $\tau_1 = 2$ $\tau_2 = 3$ $\tau_3 = 3$ $n = 12$

IV) $\tau_1 = 2$ $\tau_2 = 3$ $\tau_3 = 4$ $n = 24$

V) $\tau_1 = 2$ $\tau_2 = 3$ $\tau_3 = 5$ $n = 60.$

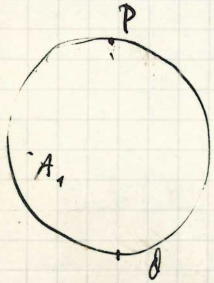
Si vedrà dopo i gruppi ~~[illegible]~~ negli altri. Nei casi gli ordini dei gruppi tetraedrico, ott. icos. nel I come nel ciclico nel II doppie piramidi. Si tratta di dimostrare per le 5 soluz. I ... V) che corrispondono proprio uno solo a ciascuna a meno di [illegible] coi gruppi scritti. ma a questi stessi gruppi.

~~[illegible]~~ In ogni caso si osservi che se ho un polo di ordine τ, anche il punto diam. opposto, essendo fisso per le stesse rotazioni, sarà un polo di ordine τ (forse della stessa classe, forse di un'altra)

Caso I. Ho G_n con un polo P di ordine n (e altro analogo) Allora siccome le rotazioni sono appunto n, per tutte P è polo, cioè hanno tutte lo stesso asse. Ma allora sappiamo già che il gruppo, essendo di rotazioni attorno a uno stesso asse è il G_n ciclico

caso II. Prendo intanto i poli della terza classe, di ordine h per il G_{2h}. Nella classe ce ne sono $\frac{n}{\tau} = \frac{2h}{h} = 2$

,equivalenti. Se P è uno, dovendo il diam.te opposto essere anche un polo di ordine h e non essendocene altri, vuol dire che il diam.te opposto è il secondo della classe, Q. Ciò non sta per il caso di $h_{\sim}$, su cui torno poi. Vi sono dunque h rotazioni con poli P,Q cioè attorno a PQ, che costituiscono un sottogruppo G_h, nec.te essendo di rotazioni intorno a un asse-ciclico. Pensiamo ora ai poli della prima classe, in n.° di



$\frac{2h}{2} = h$, siano $A_1 \ldots A_h$. Dimostro che stanno nel piano dell'equatore

Essendo ognuno polo di 2. Ordine, vuol dire per una sola rotazione non identica, nec.te di 180° (1 asse a_i): una tale rotazione deve mutare la coppia PQ in sè (sono i soli poli di ordine h) cioè la retta PQ in sè, e allora PQ come retta unita è perp. all'asse a_i, cosicchè A_i è in piano diam.le (e così gli altri A) perpendicolare all'asse OQ. Intanto così gli A_i sono nel piano dell'equatore rispetto a P Q poli. Il sottogruppo G_h muta questa prima classe in sè, cioè le sue rotazioni devono far scorrere il poligono $A_1 \ldots A_h$ su di sè, cosicchè questo è un poligono regolare. Abbiamo proprio il gruppo della doppia piramide. Resta il caso $h = 2$, dove abbiamo un G_4 e $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 2$, $\tau_0 = 2$ avr

tre gruppi di poli eq.ti del 2° ordine: tutti i poli di 2° ordine vuol dire tutte le rotazioni di 180 cioè involutorie, il gruppo consta di tre involuzioni A, B, C quindi ha la struttura di p. ~~48~~ 45 (cioè è isomorfo a quel G_4; ma noi vogliamo stabilire che è proprio quel G_4)) Le tre assi delle tre rotazioni non identiche La permutabilità di A B C porta come conseguenza che (distinti fra loro perchè vi sono sei poli) sono a due a due perp.ri: infatti chiamando P un punto dell'asse della rot.ne A, la AB = BA prova che $B(P) \equiv A\big(B(P)\big)$, cioè il punto ~~la retta~~ B(P) è unito in A ~~e come tale perp.re ad~~ quindi è nell'asse di B ciò è nell'asse di A: ogni pto di quest'asse ha in B un corr.te nello stesso asse: ciò l'asse di A è unito in B e come tale ⊥ all'asse di B. Ho quindi tre rot.ni di 180° intorno a 3 rette mutuamente ⊥ri: siamo proprio nel caso di p. 45

Caso III. ~~Nella terza classe~~ (2 3 3 G_{12}) Nella terza classe ho 4 poli equivalenti A B C D. Rotazioni con ~~P~~ A fisso sono tre, costituiscono un G3 ciclico (avendo lo stesso asse), cioè di rotazioni di 120° e multipli. Essi devono far scorrere il triangolo degli altri tre vertici cioè B C D su sè stesso; quindi questo ha i tre lati eguali, cioè è equilatero. Il tetraedro ABCD avendo gli spigoli eguali è guà regolare. Gruppo tetraedrico.

Caso ~~III~~ IV (2 3 4 24) La terza classe dà sei poli euivalenti se uno è A, il diam.te opposto corrispondendo pure a $\tau = 4$ (p 53) è nellastessaclasse (non ve ne sono altre con $\tau = 4$); quindi quesi sei punti sono a coppie diam.te opposti AA',

generato da una rot. di 90
BB' CC'. Attorno all'asse AA' ho un G 4 che questo ~~che~~ dovendo mutare la classe in sè porta la retta BB' -in sè no dunque-nella CC' e viceversa, il suo quadrato porta BB' in sè; quindi AA' e BB' sono perp. e così via. Ho i tre spigoli di un tetraedro trirett. e i sei punti AA' ecc. sono vertici di un ottaedro regolare.

caso V. (2 3 5 60) La terza classe contiene 12 punti. Si tratta di far vedere che sono i 12 vertici di un icos. reg. Per la stessa ragione del caso preCte. sono sei coppie di punti opposti AA', ... FF'. Chiamo a, ... f i relativi diametri. Nel caso prec.te avevamo an.te tre diametri, di cui si è provato che sostituivano un triedro trirett. lo come nell'ottedro, e ciò serviva a provare che i pt&? AA' ecc. erano vertici
: C'era una "impalcatura", con le -
di un ottaedro. Qui provo a dimostrare che la figura analoga cioè le 6 rette ~~diagonali~~ a f formano una figura eguale a quel
delle 6 diagonali a' 5' .. f'
la ~~[illegible]~~ che si presenta nell'icosaedro reg. re; se lo provo, sovrapponendo le due figure i dodici punti AA' ecc. si sovrappongono ai 12 vertici dell'icosaedro e quindi formano essi pure ic reg.re

Ora le rotazioni intorno ad a dovendo sovrapporre la terza classe a sè e quindi la sestupla di rette a sè, dove già a va in sè, sovrappongono la quintupla b... f a sè. Se chiamo b una retta qualunque della quintupla, chiamo c ecc nell'ordine quelle in cui si porta per la rotazione generatrice del G_5, rot. preciso ~~di~~ R $d \cdot \frac{360°}{5} = 72°$

e sue multiple. Allora sono eguali gli angoli acuti

$ab, ac \dots af$

fatto da a con ciascuna delle altre, analog.te quelli fatti

da b, ecc. Quindi

1) le sei rette per O formano angoli acuti a due a due eguali.

Inoltre la R porta il piano ab nel piano ac, cosicchè

2) l'angolo acuto dei piani ab, ac è di 72°

Dimostro che queste condizioni determinano completamente

l'angolo acuto t delle rette a due a due. Stabilito questo,

segue la sovrapponibilità alla figura a'... f', perchè so

vrapposte a e a' posso sovrapporre per l'eguaglianza di t

le b e b'; allora ~~[illegible]~~ c e c' restano sovrapposte perchè sono ottenute da b e b' per rot. di 72, ecc.

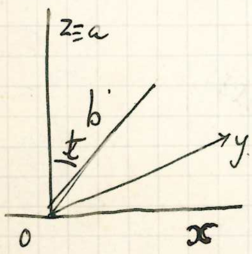
~~differendo di 72 dai piani già sovrapposti ab a' b', e qui~~

~~vi risultano sovrapposte c e c~~ Far vedere che ~~α~~ t è individua

to dalle cond.ni 1) e 2) è in sostanza una questione di

trig. sferica, che possiamo risolvere egualmente come es. di g. an. ca. Prendo a come asse z, O come origigine, il pia

no xz passante per b. Allora



b) $y = 0, \quad x = \mathrm{tg}\, t\, z$. Con le eq. di c.

Facendo la rot. di 72° intorno all'asse z le formule sono (come rot. piana in xy)

$$\begin{cases} x' = x\cos 72° - y \operatorname{sen} 72° \\ y' = x \operatorname{sen} 72° + y \cos 72° \\ z' = z \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = x'\cos 72° + y' \operatorname{sen} 72° \\ y = -x' \operatorname{sen} 72° + y' \cos 72° \\ z = z' \end{cases}$$

Siccome c si ottiene da b con la rot. le sue eq.ni sono (sopprimendo ')

c) $-x \operatorname{sen} 72° + y \cos 72° = 0; \quad x \cos 72° + y \operatorname{sen} 72° = z\, \mathrm{tg}\, t$.

~~Le scrivo sotto~~ Per avere l'angolo bc le scrivo sotto la forma "ridotta".

delle generatrici

b) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{\operatorname{ctg}\alpha}$; c) ho intanto $\dfrac{x}{\cos 72^\circ} = \dfrac{y}{\operatorname{sen} 72^\circ}$ [illegible]

l'altra [illegible] $\cos^2 72^\circ + \ldots \operatorname{sen}^2 72 = z \operatorname{tg}\alpha$ cioè $l = \dfrac{t}{\operatorname{tg}\alpha}$. Quindi

c). $\dfrac{x}{\cos 72^\circ} = \dfrac{y}{\operatorname{sen} 72^\circ} = \dfrac{z}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

da cui

$$\cos t = \frac{\cos 72^\circ + \operatorname{ctg}^2\alpha}{\pm\sqrt{(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)^2}} = \frac{\cos 72^\circ + \operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$$

(prendo + perchè il num. è + e t è acuto)

cioè

$$\cos\alpha \quad \frac{\cos 72^\circ + \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}}{1+\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}} = \operatorname{sen}^2\alpha \cos 72^\circ + \cos^2\alpha$$

o infine ~~ordinando~~

$$\cos^2\alpha + (1-\cos^2\alpha)\cos 72^\circ - \cos\alpha = 0 \; ; \; (1-\cos 72^\circ)\cos^2\alpha - \cos\alpha + \cos 72^\circ = 0.$$

equazione di 2° grado in $\cos\alpha$; una radice è $\cos\alpha = 1$ come si vede

ne resta solo un'altra (data $\dfrac{1}{1-\cos 72^\circ} - 1 = \dfrac{\cos 72^\circ}{1-\cos 72^\circ}$) che

è dunque unica. Quindi tutto è dimostrato. $\dfrac{\cos 72^\circ}{1-\cos 72^\circ}$ è, come deve essere

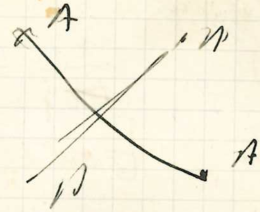
un possibile cos. è > 0, come il num. [illegible] ed è < 1 ciò equivalente

a $c < 1 - c$; $2c < 1$; $c < \frac{1}{2}$ vero perchè è il coseno (de-

crescente) di $72^\circ > 60^\circ$.

c.v.d.

La determinazione fatta dei G di rotazioni della sfera in sè riceve applicazione anche da un altro punto di vista, in quanto si potrebbe provare che si hanno così anche tutti i G di proi.tà della retta in sè. Senza entrare in paritolari,



Se invece su AA', BB' si è una rot. ec. di poli AA' che scambi fra loro BB' : se r vi sarà una pos.tà di punti uniti AA' che scambi AB' cioè questi costituiscono una coppia di circ.ze A'' A''

se è *generica* invece 62

(de Rico)

posso pensare Σ come: una sfera ~~&&&&&&&&~~ immagine del piano di Gauss di una retta complessa r: allora le rotazioni di Σ in sè corrisponderanno a certe trsf?ni biun. di r in sè che di fatto risultano proiettività (e i poli di quelle sono gli [illegible] di quelle) cosicchè ogni G di rotazioni dà un G di proi.tà. Viceversa si dimostra che così si hanno tutti i G di proi.tà. Se ne avranno così 5 tipi

Facciamo vedere [illegible] Entra in particolare in [illegible] per G_{60} icosaedrico

(prima [illegible])

I) un G_n ciclico, sarà generato da $z' = \varepsilon z$; $\varepsilon^n = 1$, [illegible]

II) il G_{2h} diedrico. Là esso conteneva un G_h ciclico e con certi poli ulteriormente delle rot.ni di 180 che ne sxambiavano i poli Qui si capisce che sarà ottenuto da un G_h ciclico $z' = \varepsilon z$ ($\varepsilon^h = 1$) ampliandolo con (nec.te) involuzione che scambia i due punti uniti, ~~&&&&&~~ $zz' = k$ p.es. $z' = \frac{1}{z}$.

P.es. si ha il G_4 diedrico 4 involutorio.

$z' = -z$, $z' = z$, $z' = \frac{1}{z}$ e (per prodotto) $z' = -\frac{1}{z}$.

III) G_{12} tetraedrico. Ai quattro vertici corrispondono su r 4 punti formanti un gruppo equian.co, perchè alla rotazione $\begin{matrix} ABCD \\ ACDB \end{matrix}$ corrisponde proi.tà che mostra essere eguali quei due bir. (se il primo è ρ il secondo è $\frac{1}{1-\rho}$ onde $\rho(1-\rho) = 1$ cioè $\rho^2 - \rho + 1 = 0$). Si tratterà dunque del G, nec.te G_{12} anez'altro, di proi.tà che mutano una quaterna equian.ca in sè.

IV) G_{24}. ~~Si prova che~~ Estremi di diametri perp.ri di Σ corrispondono a coppie armoniche su r. Avremo perciò

66

Si tratta di sost. su un certo n.o di lettere si ricordi le distinzioni in "pari" e "dispari" ~~secondo il n.o di ...~~ ~~operazioni pari e dispari~~ ~~di inversioni che ci presentano rispetto a una permutazione scelta tipo~~ che si può presentare in 2 modi

1) rispetto a una perm. fissa le altre si distinguono in pari e dispari secondo le inversioni pari o dispari. Le sost. si dicono allora pari o dispari

2). Ogni sost. è il prodotto di trasposizioni. Essa è pari o dispari secondo il n.o di trasposizioni e fattore:

Ogni G_m su n lettere ~~...~~ o contiene tutte sost. pari, ~~...~~ (ed è allora il $G_{n!}$ alterno) o tanti pari quanti dispari, ~~...~~ ~~e ... è pari~~ ~~il prodotto ... pari ... dispari ...~~

~~...~~ per $TA_1 \ldots TA_k$ ~~...~~

dispari, perchè o ... ne sono dispari ... non ... D la $T' = TD$ è entro il G ... che resta così è pari in dispari e viceversa su r come immagini dei vertici dell'ottaedro tre coppie di punti a due a due armoniche; e il G_{24} sarà formato dalle proi. tà che mutano questa sestupla di punti in sè.

V) Viene un certo G_{60} di cui ~~dirò solo che è generabi~~ le con le ~~due~~ proie~~ttività~~: indichi le 60 proi. tà v. p. 73

Accennerò piuttosto all'isomorfismo tra i i gruppi di rotazioni G 12 G24 G 60 e certi gruppi di sost. particolarmente semplici. Per il gruppo tetraedrico, ogni sua rotazione corrisponde evid.te a una sost. su quattro lettere ABCD; esso è quindi isomorfo a un G_{12} di sost.ni su quattro lettere (sottogruppo del G_{24} totale). Per ragioni generali che accennerò sotto ne segue già ... Comunque come ho visto detto avevamo là rotazioni dei due tipi $\begin{pmatrix} ABCD \\ ACDB \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} ABCD \\ BADC \end{pmatrix}$ Abbiamo risp le due inv.ni CB DB e le due BA DC; quindi si tratta sempre di sost.ni pari; saranno le 12 sost.ni pari Quindi il G_{12} ottaedrico è isomorfo al gruppo alterno su 4 lettere (V. sotto) (si chiama gruppo alterno su n lettere quello formato dalle sost. pari. Esso è un G di ordine $\frac{n!}{2}$, anzi il solo sotto gruppo di ordine $\frac{n!}{2}$ nel $G_{n!}$ totale (chiamato anche simmetrico) su n lettere, come possiamo fermarci un momento a dimostrare. Intanto il gruppo alterno contiene tutti i "cicli su tre lettere (abc) cioè... tutto il resto restando fermo; invero si tratta del prodotto (abc) è pari perché

Ovviamente anche il gruppo totale contiene tutti tali cicli

$(ab)(bc) = \begin{pmatrix} abc.. \\ bac.. \end{pmatrix}\begin{pmatrix} abc.. \\ cba.. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc.. \\ bca.. \end{pmatrix}$. Viceversa, se un gruppo di sost. su n lettere d [illegible] se è del tipo $(ab)(ac)$ c̄ $= abc$ p prec.

e se è $(ab)(cd)$ lo mise $\underline{(ab)(ac)}.\underline{(ac)(cd)}$.

e va bene.

contiene tutti i cicli su tre qualunque di esse, ~~si dimostr~~
che esso contiene tutte le sost.ni pari(~~perchè facendo vede~~ perchè
~~re che~~ il prodotto di due trasposizioni è sempre anche
prodotto di cicli su tre lettere) e quindi tutte le
n! /2 sost.ni pari.Se non ne contiene altre è il gruppo al
terno,se altre ha ordine maggiore della metà di n! e doven
do essere divisore di n! sarà n! cioè è il gruppo simm.co.

Allora volendosi provare che un $G_{n!/2}$ su n lettere è nec.te l'alterno, supponiamo non sia l'alterno,e quindi NON contenga un certo ciclo su 3 let T
scriviamo le sost. di quel $G_{n!/2}$

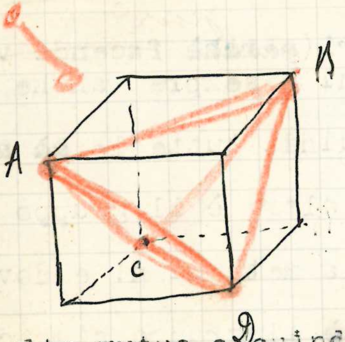
$S_1 - - - - S_{n!/2}$

completando poi il $G_{n!}$ mediante molt.ne a sinistra per
la sost. T di cui sopra che sta fuori del G

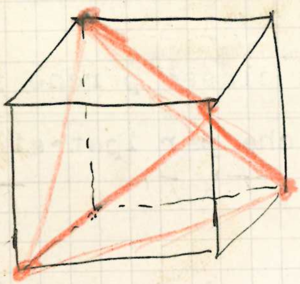
$T S_i$

Allora la T^2 non può stare nella prima classe perchè forma
gruppo e conterrebbe anche $(T^2)^2 = T^4$ cioè T che per ipotesi non
vi è.Nemmeno nella seconda perchè da $T^2 = TS_i$ ne $T = S_i$
contro l'ipotesi

Il gruppo ottaedrico è invece ol.is. al gruppo totale
su quattro lettere. Invero l'ottaedro ha 4 altezz
(perp.da O a coppie di facce opposte) a b c d;ogni rotazione
permuta abcd,cosicchè a ogni rotazione corrisponde una so
stituzione su abcd.
Rotazioni diverse dànno luogo a sost.ni diverse,perchè
se no la RR'^{-1} lascia ferme le quattro altezze,ciò che può
avvenire solo per l'identità(se no avendosi rot. con quelle
4 rette unite,sarebbe di 180 intorno a retta perp. a tutte
e 4,che sarebbero dunque complanari assurdo!) Quindi si

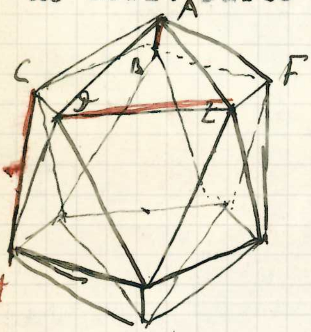


Siccome il G_{24} totale su 4 lettere contiene come sottogruppo quello al terno, così è presumibile il risultato che il G_{24} ottaedrico contenga come sottogruppo un G_{12} tetraedrico. Effettivamente-ci riferiamo a cubo anzichè a ottaedro per rendere più intuitiva la cosa, se al vertice A associo quelli B,C,D opposti a A su ognuna delle tre facce per A, la relazione fra i 4 punti risulta mutua, e quindi sono a distanza costante, cioè vertici di un tetraedro regolare T. Di questi ve ne è un secondo T'. Ogni rotazione del cubo o lascia fissi T e T' o li scambia P.es. come a fine p. 66 si vede che sono nello stesso numero; quindi quelle che lasciano fermo T(e quindi anche T') costituiscono appunto un G_{12} tetraedrico.



ottengono TUTTE le sost. su abcd cioè il G_{24} totale

Finalmente,il gruppo icosaedrico è ol. is. al G_{60} alterno su 5 lettere.La prima idea sarebbe di studiare il modo in cui vengono dal gruppo permutate le 6 diagonali;ma si arriverebbe così(almeno in un primo tempo) soltanto a un gruppo su 6 lettere.Alle sei diagonali conviene cercare allora di sostituire qualche altro ente geometrico che si presenti solo con 5 rappresentanti.Esso si ottiene così. Parto dall'oss. che lo spigolo AB è perp. allo



spigolo che gli è"opposto " nella base della piramide pentagonale di vertice A Infatti il piano~~par~~ diametrale per AB è piano di una simmetria che porta l'ic in un ic. con vertici A B ddunque lo stessoRispetto a questo piano la base pentagonale è simmetrica di sè stessa,i suoi due spigoli uscenti da B si portano uno nell'altro,i due adiacenti id. ilrimanente è unito,e quindi perp. a quel piano e come tale ortogona ad AB.Ho così un modo per trovare degli spigoli ort. a un dato- . ~~Anzi~~: prendere uno spigolo uscente da un vertice insieme collo spigolo "opposto" della base pentagonale relativa a quel vertice. Anzi,per la stessa ragione lo spigolo CH della figura è ort. ai due hià considerati(trattando CH come uscente da C ,CH è perp ad AB;trattando come uscente da D è DE perp CH). Si ha dunque la possibilità

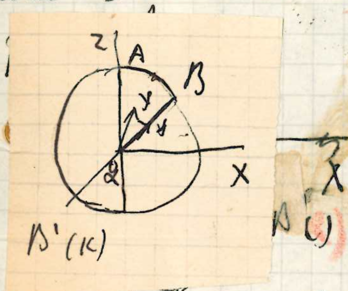
di formare con le direzioni di convenienti spigoli (p.es.

ora c 83

(da p. 67)

Vediamo un pò più in dettaglio, e così ~~ci faremo anche idea più precisa sulla possibilità di generare il gruppo icosaedrico primitivo) con due~~ sue rotazioni (con meno evid.te è impossibile, ~~avendo periodi troppo piccoli)~~ Dispongo l'icos. con diagonale AA' verticale (polo N polo S); la proi. stereografica sul piano della variabile complessa, equatore, si fa p es dal polo N. Se chiamo S la rotazione attorno a AA' di $\frac{2\pi}{5}$, questa per proiezione evid.te dà luogo a id id nel piano z, cioè dà luogo alla sostit. lineare ~~già indicata~~ $S)$ $z' = \varepsilon z$ ~~$(\varepsilon^5 \ldots)$~~ $(\varepsilon = e^{2\pi i/5})$

Prendiamo poi nel piano z gli assi x, y coincidenti con gli omonimi della ~~xyz~~ XYZ spaziale che fisso così; Z = AA', (origine nat.te in O), e il piano ~~xz~~ XZ passante per il vertice -che chiamo B - uno dei 5 adiacenti ad A (vedi in figura): esso, contenendo O contiene il pt B' diam.te opposto, che sarà adiacente ad A'.



Considero la rotazione T di 180° intorno all'asse Y; questo è perp. ad AA' e BB' (e O), queste sono dunque rette unite, cosicché l'icosaedro reg. si porta in id id con vertici in A A' B B' e non può essere che lo stesso. Quindi la rot. T è una del G_{60} (sarà dato il periodo una rot. intorno a congiungente punti medi di due certi spigoli opposti). A che trsf.ne dà luogo nel piano z? Nello spazio porta (XYZ) in $(-X \; Y \; -Z)$. Proiettando stereograficamente il primo pt dà il pt $z = \frac{X+iY}{1-Z}$ (perché XYZ dà coord.te (in coord. con. xyz, raggio sfera = 1) $\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z-1}{Z-1}$ (letto $z=0$; $x = -\frac{X}{Z-1}$, cioè $x = \frac{X}{1-Z}$; $y = \frac{Y}{1-Z}$); il 2° dà $z' = \frac{-X+iY}{1+Z}$; ora $zz' = \frac{-Y^2-X^2}{1-Z^2}$ = (perché si tratta di pt. della sfera

Segue 75

$= \frac{z^2-1}{1-z^2} = -1$; quindi $z' = -\frac{1}{z}$. cioè

$T) \quad z' = -\frac{1}{z}$.

Il G_{60} (nel piano) contiene nat.te tutti i prodotti fatti con S e T. Intanto ho nel G_{60} le 5

$S^i) \quad z' = \varepsilon^i z \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$

poi le 5.

$S^iT) \quad z' = -\frac{1}{\varepsilon^i z}$ (10 in tutto)

tutte diverse fra loro e dalle prec.ti. Potrei fare le ~~[illegible]~~

S^iTS^j; $z' = \varepsilon^j\left(-\frac{1}{\varepsilon^i z}\right) = \cancel{[illegible]} = -\frac{\varepsilon^{j-i}}{z}$

ma non esco dalle prec.ti: con S e T non genero ancora il gruppo. Prendo allora nel G_{60} primitivo la rot.ne di 180° LR

interno al diam biseccante AB e A'B'; nel piano z sarà proi.tà inv.ria (come la oggettiva rotazione) scambiante o con k, dove chiamo così l'img di B', e ∞ con l'immagine di B che (B e B' si possono considerare simm.ci rispetto all'asse Y e quindi si applica quanto sopra) sarà $-\frac{1}{k}$. Sarà la

R) $\quad z' = \frac{-z+k}{kz+1}$ che porta $z = k$ in $z' = 0$, $z = 0$ in $z' = k$, $z = \infty$ in $z' = -1/k$

Nat.te il valore di k si può precisare; accennerò poi. Allora formule

$\boxed{S^iRS^j}$ Porta da z a $\varepsilon^i z$; ~~[illegible]~~ $\frac{-\varepsilon^i z + k}{k\varepsilon^i z + 1}$; e poi a

$$z' = \varepsilon^j \frac{-\varepsilon^i z + k}{k\varepsilon^i z + 1} \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3, 4)$$

(segue 77)

I° ~~Si vedrà che, non possono coincidere le prec. potenze~~

Per le coincidenze con una delle 25 prec. (con le altre la struttura è diversa) si dovrebbe

$$-\frac{\varepsilon^i}{k} = k\varepsilon^l \qquad \text{cioè } k^2 = -\varepsilon^{-i-l}$$

e invece $k\varepsilon^i = -\dfrac{\varepsilon^l}{k}$ cioè $k^2 = -\varepsilon^{l-i}$

Onde deve $\varepsilon^l = \pm\varepsilon^{-l}$; cioè $l = 0$, e poi $k^2 = -\varepsilon^i$

Ma (v. sotto) $k = -\varepsilon - \varepsilon^4$. Onde

$$\varepsilon^2 + \varepsilon^8 + 2\varepsilon^5 = -\varepsilon^i \qquad \text{cioè}$$

$\varepsilon^8 + \varepsilon^i + \varepsilon^2 + \varepsilon = 0.$ cioè $\varepsilon^3 + \varepsilon^i + \varepsilon^2 + \varepsilon = 0$

assurdo perchè $\varepsilon^4 + \dots + 1$ è irriducibile che sono 25 tutte distinte tra loro (come si vede dai coeff.) e delle S^i, S^iT. Ho così 35 trasf.ni.

Poi prendo le S^iRTS^j T Comincio c.s. per $\dfrac{K\varepsilon^i z+1}{\varepsilon^i z-K}$ e poi

$$z' = \varepsilon^j \frac{K\varepsilon^i z+1}{\varepsilon^i z-K} \qquad T^0$$

che sono di nuovo 25 diverse da loro e dalle precedenti. Ho così 35+25 = 60. Le 60 trasf.ni del gruppo. Per provare k; provenire da B' le cui coord. sono (v. figura dove è segnato l'angolo α di p. 61) $X = -\cos(90°-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$, $Y=0$, $Z = -\operatorname{sen}(90°-\alpha) = -\cos\alpha$; Ora (p. 73)

$$k = \frac{X+iY}{1-Z} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}. \quad \text{Ora v. la:} \quad \cos\alpha = \frac{\cos 72°}{1-\cos 72°} =$$

perché $\cos 72° = \dfrac{\sqrt5-1}{4}$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt5-1}{4-\sqrt5+1} = \frac{\sqrt5-1}{5-\sqrt5} = \frac{5\sqrt5-5+5-\sqrt5}{20}$$

$$= \frac{4\sqrt5}{20} = \frac{\sqrt5}{5} = \frac{1}{\sqrt5}; \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{\sqrt5} \quad \text{Quindi} \quad k = \frac{-2}{\sqrt5+1} = \frac{-2(\sqrt5-1)}{4} = \frac{-\sqrt5+1}{2}$$

Ho così (confrontando con $\cos 72° = \dfrac{\sqrt5-1}{4}$) $k = -2\cos 72° =$

$$= -2\cos\frac{2\pi}{5} = -e^{\frac{2\pi i}{5}} - e^{-\frac{2\pi i}{5}} \boxed{= -\varepsilon - \varepsilon^4}.$$ Questo valore

si può sostituire nelle eq.ni di sopra che così contengono

solo più ε. Risulta così anche la possibilità di GENERARE il G_{60} con le tre operazioni generatrici S T R. In realtà, lo si può generare anche solo con le DUE S, R (con meno no avend

(Segue 79)

tutte periodi troppo piccoli (non si tratta di un gruppo ciclico!) Con due, perchè la T è già un prodotto formato con

S e con R. Formo infatti le (p 75 fine)

$$S^i R S^j R_{(z)} = \frac{\varepsilon^{i+j} z - k\varepsilon^j + k^2 \varepsilon^i z + k}{-k\varepsilon^{i+j} z + k^2 \varepsilon^j + k\varepsilon^i z + 1}$$

$$S^i R S^j R S^l_{(z)} = \frac{(\varepsilon^{i+j+l} + k^2\varepsilon^{i+l}) z + k(-\varepsilon^{j+l} + \varepsilon^l)}{k(-\varepsilon^{i+j} + \varepsilon^i) z + k^2 \varepsilon^j + 1}$$

$$S^i R S^j R S^l R_{(z)} = \frac{-(\varepsilon^{i+j+l} + k^2\varepsilon^{i+l}) z - k(-\varepsilon^{j+l} + \varepsilon^l) + k^2(-\varepsilon^{i+j} + \varepsilon^i) z + k^3 \varepsilon^j + k}{k(\varepsilon^{i+j+l} + k^2 \varepsilon^{i+l}) z + k^2(-\varepsilon^{j+l} + \varepsilon^l) + k(-\varepsilon^{i+j} + \varepsilon^i) z + k^2 \varepsilon^j + 1}$$

~~Ora se faccio i = 2 j = 2~~ Cioè

$$\boxed{z' = \frac{z\left(-\varepsilon^{i+j+l} + k[\,\cancel{\varepsilon}^{i+l} - \varepsilon^{i+j} + \varepsilon^i]\right) + k\left\{k^2\varepsilon^j + \varepsilon^{j+l} - \varepsilon^l + 1\right\}}{k\, z(k^2\varepsilon^{i+l} + \varepsilon^{i+j+l} - \varepsilon^{i+j} + \varepsilon^i) + 1 + k^2(-\varepsilon^{j+l} + \varepsilon^l + \varepsilon^j)}}$$

Cerco di determinare se possibile i j l in modo che con una k $z' = \frac{M}{z}$

Ora se assumo $i = 3$ $j = 2$ $l = 3$ ~~il coeff. di z al num.~~

scrivendo (per pura) se il coeff. di z al num. e il termine noto al den. si annullano ho le due eq.ni

$$-\varepsilon^3 + k^2(-\varepsilon - 1 + \varepsilon^3) = 0 \; ; \; 1 + k^2(-1 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2) = 0$$

che coincidono perchè la 2ª ~~...~~ $x - \varepsilon^3$ dà le fa. E sono soddisfatte per $k^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + 2$ anche la 2ª si sviluppa in

(segue 81)

1	ε	ε^2	ε^3	ε^4
1	+1	−1	−1	+1
+1		+2	+2	
+1				
−2				

$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = 0$ va bene.

Allora (calcolo M) dividendo sopra e sotto per k ho

$$z' = \frac{1}{2}\,\frac{(\varepsilon^2+\varepsilon^3+2)\varepsilon^2 + 1 - \varepsilon^3 + 1}{(\varepsilon^2+\varepsilon^3+2)\varepsilon + \varepsilon^3 - 1 + \varepsilon^3}$$ ~~dove si vede~~

~~cioè Num + Den = 2~~

$$z' = \frac{1}{2}\,\frac{3 + 2\varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \varepsilon^4}{-1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^3 + \varepsilon^4}$$

Ma $N + D = 0$ perchè $(= 2 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4)$ Quindi

$$\boxed{z' = -\frac{1}{2}}$$

Concludo che $\boxed{T = S^3 R S^2 R S^3 R}$

Quindi il G_{60} è generato dalle S, R

Queste sono poi legate da varie relazioni. Intanto

$S^5 = 1$ Poi $R^2 = 1$ (Mi era verif. p. 75).

E poi scriveremo che $T^2 = 1$ (come è evidente da $z' = -\frac{1}{2}$)

ho $\boxed{S^3RS^2RS^3RS^3RS^3RS^3R = 1}$

(Nei dati che ricaviamo le rel.: osservo poi che queste mette in evidenza che S^3RS^2R avrà periodo 3) ~~Tornare~~ a p. 67]

p. es. cui: rot. a periodo 5: intorno ad AA' si permutano

i 5 spigoli per A che uniscono a 2 a 2 ⊥ (come è in testo)

appartengono a triedri trirett.:

a periodo 3: i lati del △ [illegible] sono di triedri

trirett.

a periodo 2 (ciascuna degli spigoli) spigoli uniti

p. u.

sulla // e ⊥ asse ($x' = -x$, $y' = -y$; $z' = z$; $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$

di $\frac{x}{-l} = \frac{y}{-m} = \frac{z}{n}$) ⊥ ~~[illegible]~~ sol. a 45° con

l'asse Quindi si possono vedere [illegible]

(da p. 71)

conducendo le parallele per O) dei triedri trirettangolá .Insieme ai tre spigoli considerati dànno lo stesso triedro i loro opposti che sono paralleli. Ho così in tutto 30: 6 cioè 5 di questi triedri trirettangoli. Siano $T_1 \ldots T_5$. Ora ogni rotazione del gruppo dà luogo a una sostituzione fra queste T_1. Nè è possibile che due rotazioni diverse R R' portino una stessa sostituzione, perchè allora la rotazione non identica $R\,R'^{-1}$ lascierebbe fermo ogni T_i, vi sarebbe cioè una rotazione non identica del gruppo icosaedrico che trasformerebbe la direzione di ogni spigolo o in sè o in una direzione perpendicolare. E si vede facilmente che ciò non è possibile. Si avranno così 60 sostituzioni sulle T_i che formano un gruppo certo oloed is. al dato Ed essendo un G_{60} sottogruppo del G_{120} totale su cinque lettere, è certo il gruppo alterno c d d .

In generale, <u>ogni gdof (anche astratto) è ol. isomorfo a un gruppo di sost. su un certo n.° di lettere</u> (un G_n a un G di sost. su n lettere sempre, event.te su meno come nei casi ora visti). Se (parliamo di trsf.ni, ma va bene anche nel caso astratto) le n trsf.ni sono

$S_1 = 1,\ S_2, \ldots\ S_n$ (in ordine qualunque)

deduco da questa come 1.a linea una i-esima moltiplicando es a sinistra per S (i = 1, 2, . . n).

i^a linea $S_i S_1,\ S_i S_2 \ldots\ S_i S_n$

x No perchè veggo bene bisogna prendere le $S_1 S_2 - S_2 S_1$

In ogni linea si ritrovano dunque le stesse S, ma con nuovo ordine (p.es. al primo posto vengono nelle varie linee sempre S_i diverse). Si hanno cioè nelle i linee altrettante permutazioni delle n ~~lettere~~ S_i. Consideriamo le ~~n!~~ n sost.ni sulle n lettere S che consistono nel passaggio dalla permutazione della prima linea a quella di ognuna delle successive. Poniamo

$$T_i = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_i S_1 & S_i S_2 & \dots & S_i S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_r \\ S_i S_r \end{pmatrix}$$

cosicchè la T_i consiste nel sostituire a ogni S_r la $S_i S_r$. Queste T formano un gruppo

perchè

$$T_i T_j = \begin{pmatrix} S_r \\ S_i S_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_i S_r \\ S_i S_j S_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_r \\ (S_i S_j) S_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_r \\ S_l S_r \end{pmatrix} \text{ se } (S_i S_j) = S_l$$

~~Le T~~ Ho dunque corr.ze biun. e tali S_i e le T_i e queste si moltiplicano come quelle. cioè ho isomorfismo oloedro

Verrò ora a alcuni ~~risultati~~ concetti generali sui gruppi, pensiamo pure astratti. Dato un gruppo G (di enti H) sia g un suo sottogruppo . Se A è un ente qualunque di G possaimo considerare l'insieme che ~~xxxxx~~ scriviamo Ag dei prodotti di A per tutti glienti di g (come si è fatto p es per dimostrare che per i gdof l'ordine di ogni sottogruppo è divisore dell'ordine del gruppo p.) L'insieme Ag generalmente non è un gruppo (perchè gen.te non contiene più l'identità; lla contiene solo se A è l'inverso di un ente di g, cioè soltanto se A sta già nel sottogruppo g): possiamo chiamarla una classe adiacente al sottogruppo g (a sinistra)

In ogni gruppo discontinuo, possiamo formare dei sottogrup pi; p.es. se A è un ente qualunque del gruppo prendendo tutti gli enti A^i dove i è un intiero arbitrario positivo o negativo; prodotto di due enti e inverso di un ente dell'insieme sono evid.te nell'insieme. Così se parto da due enti del gruppo A e B e formo in tutti i modi i loro prodotti

$A^i B^j A^l B^m \ldots$ (1) (fattori in n° finito)

dove i, j ecc. sono interi arbitrari positivi e negativi (invece che da due potrei partire da tre o più enti). Il prodotto di due (1) è ancora del tipo (1); e ogni prodotto ha un inverso dello stesso tipo, p.es. per fissare le idee

$A^i B^j A^l B^m$ (quella nota a p. 93) ha per inverso $B^{-m} A^{-l} B^{-j} A^{-i}$

perchè facendo il prodotto $A^i B^j A^l B^m (B^{-m}) A^{-l} B^{-j} A^{-i} = 1$

Si ha dunque così il sottogruppo generato dagli enti A e B (e così via). Può ev.te coincidere col gruppo, se questo è generabile con A e B (p.es. nel G_{60} icosaedrico di proi.tà p. 75) le S e R generavano già il gruppo, mentre le S, T generavano solo un sottogruppo (diedrico, cfr p 65) G_{10})

Come esempio (altro di sottogr.) cito il gruppo dei commutatori di G, ottenuto così: se A, B sono due enti di G si chiama (en commutatore di questi l'ente

$A B A^{-1} B^{-1}$ gr. commutatori = quello generato da c

evid.te appartenente a G. Se A e B sono permutabili, il loro commutatore si riduce all'identità perchè scrivendo

$A B A^{-1} B^{-1} = 1$ si ha $A B A^{-1} = B$. $AB = BA$.

(1) Segre Reidemeister Einf. i. d. komb. Topologie p. 11

Quindi se G è abeliano, il gruppo dei commutatori si riduce al sottogruppo formato dall'identità. Ma nat. te non sempre così (Si può andare al caso opposto in cui il gruppo dei commutatori esaurisce G (v. oltre)). P.es. prendo il gruppo diedrico p.es. come G_{2h} di proi.tà di p 65 ~~[illegible]~~ formato dalle

$S^i) \; z' = \varepsilon^i z \; ; \; TS^i) \; z' = \frac{\varepsilon^i}{z} \; \left(T) \; z' = \frac{1}{z}\right)$ ε radice primitiva h^a. Osservo $S^l T = T S^{-l}$ (1) (*)

Qui; se prendo per A e B delle S il commutatore è l'identità; se prendo per A una S^i e per B una TS^j il commutatore è

$$S^i T S^j S^{-i} (TS^j)^{-1} {}^{(2)} = S^i \cancel{T S^j S^{-j}} T = S^i T S^{-i} T$$

$$= \text{(per (*))} = \cancel{\ldots} = S^i S^{i-j} T^2 S^j = \text{Commutatore } S^{2i}$$

Se prendo per A una TS^i e per B una S^j il commutatore è

$$TS^i S^j (TS^i)^{-1} S^{-j} = T^2 S^{-i-j} S^i S^{-j} = \text{commu. } S^{-2j}$$

Prendendo per A e per B delle TS^i ho

$$TS^i TS^j \, TS^i TS^j = (TS^i TS^j)^2 = (T^2 S^{i-j})^2 = S^{2(i-j)}.$$

I commutatori che trovo sono sempre $S^{\text{esp. pari}}$: e vi stanno nel G_h ciclico ~~che è~~ sottogruppo del G_{2h}. Se h è pari $= 2m$, il sottogruppo dei commutatori è il G_m formato da S^2, S^4 ecc. Se h è dispari è

(1) perché $S^l T$ è $z' = \frac{1}{\varepsilon^l z} = \frac{\varepsilon^{-l}}{z}$. e TS^{-l} è $z' = \varepsilon^{-l}\left(\frac{1}{z}\right)$

2) Invece di scrivere $(TS^j)^{-1}$ scrivo TS^j (pensare al G_{2h} di rotazioni e inversioni o anche diretto)

Per gli altri gruppi di rotazioni ho: gruppo ciclico abeliano, quindi il gruppo dei comm. ridotto come si disse all'identità. E per i rimanenti, essendo come sappiamo (p 67-71) isomorfi a gruppi alterni o totali di sost. la questione è risolta da ciò: <u>per il G_n totale su n lettere, il gruppo dei commutatori è il gruppo alterno; per il gruppo alterno il gruppo dei commutatori coincide con questo</u> (quindi per il G24 ott. si ha il G12 tetraed.; ~~[illegible]~~ pel G60 icos. i commutatori generano il gruppo stesso) purchè $n \neq 4$.

Si dimostra così. Per gruppo totale, ogni commutatore è una sost. pari (contenendo un n° pari di sost. dispari) cosicchè il sottogruppo dei commutatori intanto contiene solo sost. pari. Ma contiene tutte le pari; basta far vedere (p. 67) che contiene tutti i cicli su 3 lettere. Invero se assumo $A=(ab)$, $B=(ac)$ $(A^2=B^2=1)$ il commutatore è

$$ABA^{-1}B^{-1}=(AB)^2=(abc)^2=(acb)$$

e evid.te si può fare in modo nella scelta di A e B che esso sia un ciclo arbitrario di tre lettere.

Pel gruppo ~~totale~~ alterno $(n \neq 4)$ segue che quando sapremo che il ~~gr~~ sottogruppo dei commutatori è invariante e che ~~il G_n altern~~ per $n \neq 4$ il gruppo alterno non ha sottogruppi invarianti altro che l'unità (è semplice). Resta da studiare solo il gruppo alterno su 4 lettere, cioè il G_{12} tetraedrico.

Provare per esercizio che <u>il gruppo dei commutatori è il G_4 contenente oltre l'identità le</u> (ab)(cd), (ac)(bd), (ad)(bc) cioè nel gruppo di rotazioni il G_4 quadrinv. contenente le tre rotazioni di 180 Infatti se le A B sono a periodo 3 sono cicli su 3 lettere delle 4; quindi due comuni; se a è una di esse la metto in 1° posto nei 2 cicli: il 1° sia (abc). Il 2° può essere (abd), (adb), (adc), (acd). Il 3° caso scrivendo (cab) e (cad) si riduce al 1°; il 4° scrivendo (cab) e (cda). Quindi i casi da studiare sono 2:

1° $(abc)(abd)(acb)(adb)=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}=(ab)(cd)$, 2° $(abc)(adb)(acb)(abd)=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}=(ac)(bd)$ e va bene

Se $A^3=1$ e $B^2=1$, sia $B=(ab)(cd)$. Allora A è un ciclo su 3 lettere, è indifferente su quali (potendosi scrivere (cd)(ab) e (bc) per (ab) ecc.). Stando dopo

$(abc)(ab)(cd)(acb)(ab)(cd)=(ad)(bc)$ e va bene seg. p. 92

arriva così anche a S e quindi il sottogruppo dei commutatori è lo stesso G_h ciclico.

Veniamo al concetto di sottogruppi equivalenti, o coniugati in un gruppo G (astratto), o trasformati l'uno dell'altro. La nozione si definisce come dirò nello stesso modo anche per un insieme di enti del gruppo G che non vi formino sottogruppo, e quindi anche per un singolo ente H. Comincio dunque con questa definizione. Si chiama equivalente (o ecc.) nel gruppo G all'ente H di questo un altro ente H_1 tale che sia

$$(1) \qquad \boxed{H_1 = A^{-1} H A}$$

Se A e H sono permutabili è sol allora $H_1 \equiv H$ (da tener presente anche in seguito)

dove A è un ente di G ~~ed~~ H_1 è il trsfto di H mediante A. Sono da osservare alcune cose

1) Supponiamo che si tratti di trsf.ni, p.es. per fissare le idee operanti su ~~punti~~ punti. Allora ~~ed~~ avviene questo che le coppie di punti corr.ti in H_1 si ottengono dalle coppie di punti corr.ti in H applicando loro la A (Ciò spiega bene la locuzione che H è trasformato di H mediante A: in realtà sono le coppie che sono trasformate). ~~dei~~ Invero ciò equivale a dire: se H fa corrispondere P e P', la H_1 fa corrispondere $A(P)$ e $A(P')$; cioè se $P' = H(P)$, la H_1 fa corrispondere $A(P)$ e $A(H(P))$, cioè $H_1(A(P)) = A(H(P))$ cioè $\boxed{AH_1 = HA}$ che equivale a (1).

2) anche il termine di equivalenti trova la sua spiegazione nel caso dei gr di trsf.ni. Per tali, ancora operanti p es su punti, chiamavamo equivalenti

segue l'esempio de p. 90). Se $A^2=1$ $B^2=1$ ossia

$$(BAB^{-1}A^{-1})^{-1} = ABA^{-1}B^{-1}$$ e ricado nel caso di prima.

se $A^2=B^2=1$, come per es. $A=(ab)(cd)$ e $B=(ac)(bd)$

ho $ABA^{-1}B^{-1} = (ab)(cd)(ac)(bd)(ab)(cd)(ac)(bd) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

= identità.

Nel G_{12} tetr. questo G_4 sarà formato — che con formano gruppo (4-inv.) φ risulta dal fatto che i 3 diametri attorno a cui si ruota di 180° sono $\perp$ e 2 a 2. Invero la $(AB)(CD)$ porta AC in BD e viceversa e quindi il nuovo diam. in sé

(Per $n=3$ il G alterno è G_3 ciclico, abeliano e quindi gr. dei comm. $=1$)

φ infatti $(AB)(CD)\,(AC)(BD) = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$

è per forza G_4 diedro; quindi si ha questa perpendicolarità.

[...]cenibili l'uno dall'altro mediante trasf.ni del gruppo (ricordare p es il caso tipico dei gruppi di rotazioni) Qui le coppie di H_1 sono proprio in questo senso equivalenti alle coppie di H, in quanto proveggono da quelle applicando una trsf.ne del gruppo, la A: è quindi spontaneo di chiamare l'insieme di tali coppie di H_1 eqv all'insieme delle coppie di H, cioè addirittura H_1 equivalente ad H. Le locuzioni si usano, come ho detto, anche per gruppi astratti.

3) La relazione definita di equivalenza è, come deve essere, riflessiva, simmetrica e transitiva. Riflessiva, cioè ogni H equiv.te a sè, usando per A l'identità. Simmetrica perchè (1) si scrive

$$A H_1 A^{-1} = H$$

cosicchè H appare come trasformato di H_1 mediante l'ente A^{-1}; transitiva cioè se H è eqv a H_1 e H_1 a H_2, segue H eqv a H . Invero per ipotesi

$$H_1 = A^{-1} H A \qquad H_2 = B^{-1} H_1 B$$

dove A,B sono enti del gruppo. Segue (sostituendo H_1 nella 2ª)

$$H_2 = B^{-1}(A^{-1} H A) B = (AB)^{-1} H (AB)$$

e H_2 appare come trasformato di H mediante l'ente AB del G.[1]

Se ora, invece di prendere un solo elemento H, se ne prende un insieme che si trasforma con (1) - usando sempre per tutti gli enti dell'insieme dato I lo stesso ente A - si ottiene un nuovo insieme I' equivalente, ecc. al dato I. Si estende ovviamente l'oss. 3)

Se infine si prende come insieme I un sottogruppo, g, si applica sempre quanto sopra, con l'oss. in più che l'insieme trasformato è ancora un sottogruppo. ~~Se infatti g contiene H e H_1 e quindi~~

[1] Applico qui: l'ente inverso di AB è $B^{-1}A^{-1}$: per gruppi di trasf.ni si spiega a parole..... In ogni caso si verifica così

$AB B^{-1}A^{-1} = A A^{-1} = 1$. e così pure in generale $A^r B^s C^t$ etc. ha l'ente inverso $C^{-t} B^{-s} A^{-r}$

2) e con un el^{to} l'inverso

se quello è $A^{-1}HA$

l'inverso è $A^{-1}H^{-1}A$

e siccome H^{-1} è in g. questo

è in Γ

~~l'insieme trasformato contiene~~ Si tratta di provare che l'insieme trasformato I' contiene, con due suoi enti qualunque, il loro prodotto: due enti qualunque sono i trasf.ti di H e di H_1 di G cioè

$$A^{-1}HA \quad , \quad A^{-1}H_1A.$$

Devo provare che il loro prodotto sta in I'. Esso è

$$A^{-1}HA . A^{-1}H_1A = A^{-1}(HH_1)A$$

ed è quindi il trasf.to mediante A di HH_1 che è in G, quindi sta in I'.

si scrive brevemente $A^{-1}gA$

Si ha così questa nozione importante di sottogruppi equivalenti,o coniugati in un gruppo. Esempi:

1) se G è un gruppo di trasf.ni p.es puntuali, e g è il sottogruppo formato da quelle che lasciano fisso un punto P(pensare p es ai G di rotazioni) e la A porta P in P',il sottogruppo trasformato è formato dalle trasfni di G che lasciano fisso P',precisamente dalla totalità di esse. Invero :a) se per H il punto P è fisso,la (1) mostra che per H_1 è fisso P' ;b) se per H_1 è fisso P',risolvendo come prima la (1) rispetto a $H^{(1)}$,si vede che per H è fisso P.In altre parole ogni sottogruppo con punto fisso ha per equivalenti sottogruppi nelle stesse condizioni,e precisamente quelli che hanno come punto fisso un punto equivalente al primo(rispetto al gruppo G)

2)per questa ragione p.es. nel grùppo tetraedrico sono equivalenti i sottogruppi ciclici G_3 intorno ai diametri per i vertici;in quello icosaedrico gli analoghi G_5,ecc

Particolarmente notevoli,tornando al caso generale,sono quei sottogruppi g,tali che tutti i loro equivalenti coincidono con g stesso :sono i sottogruppi invarianti.Per essi dunque comunque si prenda l'ente trasformatore A, il trasfor

(1) $H = A H_1 A^{-1}$.

mato ~~&&&~~ del sottogruppo è sempre il sottogruppo stesso

<u>Alcuni esempi di sottogruppi invarianti</u> 1° Nel gruppo totale di sost.ni su n lettere il sottogruppo alterno è invariante, perchè (p. 57) non esistono altri sottogruppi dello stesso ordine. Per la stessa ragione il G_{12} tetraedrico contenuto nel ~~&&&&&&&&~~ gruppo G_{24} ottaedrico (p 70) è invariante.

2° nel G_{2h} diedrico il G_h ciclico è sottogruppo invariante (per $h>2$ (1), ma per $h=2$ cfr. sotto) invece prendendo come a ~~p.es.~~ per la rappre

p. 89 S^i $z'=\varepsilon^i z$ TS^j $z'=\frac{\varepsilon^i}{z}$ ove $S^iT=TS^{-i}$

~~ne come G di proiett.tà trasformando una proi tà del G_h~~

trasformando una ~~$z'=\varepsilon^i z$~~ pro.tà del G_h cioè S^i

con una ~~$A)\ z'=\varepsilon^j z$ o con una $B)\ z'=\frac{\varepsilon^j}{z}$ si ha risp.~~ $A=S^j$

o con una $B=TS^j$ ho

$$A^{-1}S^iA=S^{-j}S^iS^{-j}=S^i.$$

$$B^{-1}S^iB=TS^jS^iTS^j=TS^{j+i-j}T=TS^iT=S^{-i}.$$

Quindi ogni trasf.ne di G_h è mutata in ~~...~~ una del G_h.

3° in un gruppo abeliano essendo gli el.ti a due a due permutabili, ogni el.to è equivalente soltanto a sè stesso quindi <u>ogni sottogruppo è invariante</u>.

Ciò esaurisce anche 2° per il G_4 perchè esso è abeliano, cosicchè ognuno dei suoi tre G_2 è inv.te; il che pure senza interesse completa quanto sopra

(1) se non vi è solo <u>un</u> G_h ciclico, e si dimostra <u>ogni</u> G_h ciclico, e che ogni tale sia invariante segue appunto da

2° Prendiamo in un gruppo G tutti i suoi elementi che sono permutabili con ogni altro el.to di G. (Reid. p 12): essi (vi è certo l'identità) formano un sottogruppo, e più precisamente un sottogruppo invariante, che si shiama il centro di G (nei gruppi abeliani esaurisce dunque G) Sia invero H permutabile con ogni A di G

H_1 id id

Devo per verificare che ~~si~~ ha un sottogruppo far vedere che HH_1 è permutabile con ogni A di G, cioè

$A(HH_1) = (HH_1)A$ E infatti $(AH)H_1 = HAH_1 = H(H_1A) = HH_1A$

3) Inoltre se H è permutabile con ogni A, lo è anche ~~&&&&~~ l'elemento inverso (non sarebbe necessario provarlo per i gruppi finiti, ma penso anche agli infti discontinui) Invero provare

$AH^{-1} = H^{-1}A \equiv$ ~~AH~~ $A = H^{-1}AH \equiv HA = AH$ e vale.

Che poi sia un sottogruppo invariante, è ovvio perchè se H è nel centro

$A^{-1}HA = H$, ~~(e ... le HA = AH)~~ e ogni el.to del centro è addirittura trasf.to in sè

perchè $= A^{-1}AH = H$

Esempio di sottogruppo centro di un altro. Nel G_{2h} diedrico $(h>2)$ rapp.to come a prec.te una S^i è permutabile con tutte se per ogni j

$$S^i S^j = S^j S^i \text{ sì} \quad \text{e} \quad S^i T S^j = T S^j S^i \text{ cioè}$$

$$\text{se } T S^{j-i} = T S^{j+i} \text{ cioè } \underline{S^i = S^{-i}}$$

Una TS^j con tutte non può essere perchè dovrebbe soddisfare per ogni i la prec.te (e ciò per $h>2$ no). Quindi il centro contiene ~~tutte~~ l'id.tà e quelle S^i per cui $S^i = S^{-i}$ ciò che può avvenire solo per h pari e $i = \frac{h}{2}$. Quindi per un G_{2h} diedrico (di rotazioni) con h pari il centro è il G_2 formato dalla rotazione di 180° intorno a PQ e dall'identità (per h dispari solo l'identità).

Direttamente, ciò è stabilito p. 11

5° il gruppo dei commutatori di G è un sottogruppo invariante. Infatti il singolo commuatatore $MNM^{-1}N^{-1}$ viene trasformato da A in $A^{-1}MNM^{-1}N^{-1}A = A^{-1}MAA^{-1}NAA^{-1}M^{-1}AA^{-1}N^{-1}A$

$$= (A^{-1}MA)(A^{-1}NA)(A^{-1}M^{-1}A)(A^{-1}N^{-1}A) = (A^{-1}MA)(A^{-1}NA)(A^{-1}MA)^{-1}(A^{-1}NA)^{-1}$$

che è esso pure un commuatore. Quindi se C è un comm.re lo è $A^{-1}CA$. Un elto qualunque del gruppo dei commùtatori è

$C_1 C_2 C_3 \ldots\ldots$ e il suo trasformato mediante A

è

$$A^{-1}C_1 C_2 C_3 \ldots A = (A^{-1}C_1A)(A^{-1}C_2A)(A^{-1}C_3A) \ldots$$

che per quanto precede sta ancora nel gruppo dei commutatori. Ne segue p.es. (p. 90) che pel G tetraedrico G_{12} è invariante il G_4 diedrico là considerato. Invece pel gruppo alterno su n lettere con $n > 4$, non esistono sottogruppi invarianti diversi dal gruppo stesso e dall'identità, cioè tale gruppo è semplice, chiamandosi semplice ogni gruppo intali condizioni (analoghi in certo senso ai numeri primi dell'aritmetica) (non darò qui la dm.ne, cfr p es Bianchi p 54, mio corso 28-29 p 23)
Un gruppo nonsemplice si dice composto
Resta così completato quanto de to a p 90, che per $n > 4$ il gruppo dei commutatori nel gruppo alterno esaurisce il gruppo stesso

Classi di residui - Sia G un gruppo (astratto) e g un suo sottogruppo. Come abbiano fatto nella dm. relativa ai g of che l'ordine di un sottogruppo è divisore dell'ordine del gruppo, distribuiamo gli elementi di G in questo modo. Intanto mettiamo assieme quelli di g. Poi, preso A fuori di g, molte

E ciò inverte il risultato prima trovato: se le classi Ag, Bg coincidono, $A^{-1}B$ sta in g.

Formiamo il prodotto Ag di A per ogni H di g. Questo insieme (mettiamo sempre p.es. A a sinistra) si può chiamare brev.te ~~&&&&&&&&&&&~~ classe di residui rispetto al sottogruppo g (classe di residui volendo precisare a sinistra) e scriveremo Ag. Di queste classi potremo ottenerne varie, scegliendo variamente A. P es se scelgo A in g la classe Ag coincide con la stessa g: quindi una delle classi di residui è sempre lo stesso sottogruppo g. Non è detto che vengano tutte diverse, al variare di A: così se $A^{-1}B$ sta in g, le classi di residui Ag e Bg coincidono, perchè

$$Bg = AA^{-1}Bg = A(A^{-1}Bg) = Ag$$

Invece di $A^{-1}B$, si potrebbe dire $B^{-1}A$ (che è l'inversa)

Gli elementi di G si trovano ripartiti nelle classi di residui in modo che ogni elemento appartiene a una e a una sola di queste. A una sì, perchè se si tratta dell'elemento A di G, siccome $A = A1$ e 1 sta in g, A appare come un Ag. Ad una sola, perchè due diverse classi di residui non hanno nessun elemento in comune. Se invero le classi Ag e Bg ~~&&&&&&&&&&&~~ hanno in comune un elemento $AH = BH_1$, con ~~&&~~ H e H_1 in g, leggo $H = A^{-1}BH_1$, $A^{-1}B = HH_1^{-1}$; $A^{-1}B$ è in g cosicchè (v. sopra) le classi Ag e Bg coincidono addirittura. Aggiungo ancora che le classi di residui, a eccezione di g non sono più gruppi (perchè non contengono più l'identità, già contenuta in g)

in classi di residui

Ogni sottogruppo dà dunque luogo alla ripartizione degli el.ti di G

Osservazione. Abbiamo parlato di classi di residui a sinistra, a partire dal sottogruppo g. Partendo dal medesimo potrei fare una nuova ripartizione degli elementi di G in classi di residui a destra, formando le classi gA, per ogni A. Può avvenire che la ripartizione in classi sia nei due casi la stessa? Per la prima ripartizione l'el.to A cioè A.1 appartiene come si è visto alla classe Ag. Per la seconda A appartiene alla classe gA. Quindi se le ripartizioni coincidono (cioè se ogni classe di residui a destra lo è anche a sinistra) la classe di residui a destra gA, che contiene A, se deve coincidere con UNA classe di residui a sinistra non può coincidere che con la Ag che appunto contiene A. Quindi se si presenta quella particolarità ogni classe Ag deve coincidre con la gA, e allora $Ag = gA$

per ogni A e allora il sottogruppo g è invariante (cioè se per ogni A di G e ogni H di g è $AH = H_1 A$ con H_1 in g cioè $H_1 = AHA^{-1}$). E viceversa. La particolarità indicata caratterizza dunque i sottogruppi invarianti.

Qualcuno (van der Waerden; Seifert e Threlfall nel Lehrbuch der Topologie) dice **omomorfismo** (homomorphismus ma poi ciò che in topologia. l'homöomorphism = omeomorfismo di [illegible])

L'origine del termine classi di residui è questa; se G, gruppo astratto è la totalità degli interi positivi e negativi con la somma definita come prodotto (p 23), e g èil sottogruppo formato dai multipli positivi e negativi di un intiero n - i quali formano evidentemente un sottogruppo, e si fa la ripartizione degli elti del gruppo, cioè degli intieri in classi di residui secondo la df. generale, gli intieri di una classe Ag sono quelli ottenuti sommano a un numero A un multiplo arbitrario di n, cioè sono i numeri congui secondo n; ogni classe contiene cioè un residuo mod n e tutti gli intieri ad esso congrui.

meriedrico = mer. iso. / isomorfo: ol. iso. / in seguito prov.ta che

ISOMORFISMO MERIEDRICO. GRUPPO COMPLEMENTARE DI UN SOTTOGRUPPO.(1) A p 45 si è data una df generale di isomorfismo fra due gruppi, che abbiamo sinora applicata solo nel caso oloedrico. Cerchiamo di approfondire un pò il caso meriedrico. Indichiamo il primo gruppo con G, il secondo con G', e con $I(A)$ l'elemento di G' corrispondente a A.

$= I(A)$

Intanto l'identità p. unità in G ha come corrispondente l'identità in G'; e elementi inversi in G hanno come corr.ti elti inVERSI IN G'. Se infatto E è l'id.tà in G cosicchè

per ogni A è $AE = A$

trasformando con l'isomorfismo ho $I(AE) = I(A)$

ma per df. di isomorfismo $I(AE) = I(A)\,I(E)$. Quindi

per ogni A $I(A) \cdot I(E) = I(A)$.

Ma per df di isomorfismo, ogni elto di G' proviene da un qualche A, cioè si può scrivere I(A) e allora l'ultima eguaglianza prova che I(E) è unità per G'. Inoltre siccome per A qualunque in G è $AA^{-1} = E$

trasformando segue $I(A) \cdot I(A^{-1}) = I(E)$ dove il secondo membro è l'unità in G'; e siccome anche ora I(A) può essere arbitrario in G', si legge che il suo inverso è appunto $I(A^{-1})$ c d d.

$\bar{I}(A)$

L'unità di G si porta dunque nell'unità di G'; ma non si può dire che sia il solo elemento di G che ha per corrispondente l'unità di G', appunto per la meriedria dell'isomorfismo

Dobbiamo quindi parlare della classe formata dagli elementi X di G tali che $I(X) =$ unità di G'.

Dimostriamo : la classe degli elementi di G a ciascuno

(1) seguo qui van der Waerden. Mod. Alg. I. p. 32 (con not.i diversi)

dei quali nell'isomorfismo meriedrico corrisponde in G' l'identità forma un sottogruppo, e per di più invariante e;

e le classi di residui entro G ha cui dà luogo questo sottogruppo e sono formate dalle classi di elti di G che nell'isomorfismo hanni un medesimo corrispondente in G'.

Dm. 1) e è un gruppo. Infatti indicando con 1 l'unità in G', se p endo due elementi A e B in e ho per ipotesi

$$1(A) = 1 \quad ; I(B) = 1$$

Quindi (per l'isomorf)

$$I(AB) = I(A)\ I(B) = 1.1 = 1$$

Quindi AB ha ancora come corr.te 1 cioè anche AB sta in e. Inoltre devo far vedere che e con ogni suo el.to A contiene l'inverso; siccome (p prec.) elti inversi in G si portano in elti inversi in G', e A si porta per ipotesi in 1, A^{-1} si poterà nell'inverso di 1 che è ancora 1.

2) e è sottogruppo <u>invariante</u>. Devo provare che se prendo comunque A in e e comunque M in G si ha $M^{-1}AM$ in e Ora

$$I(M^{-1}A\ M) = I(M^{-1})\ I(A)\ I(M) = I(M^{-1}).1.I(M) =$$

$$\text{(p prec)} = \left(I(M)\right)^{-1}.I(M) = 1$$ Ciò prova che $M^{-1}AM$ ha per

corr.te 1, cioè sta in e c d d

3) Quanto all'ultima parte dell'enunciato, partiamo da

una classe di residui Me con M scelto comunque in G sarà la classe degli MA con A variabile in e. Ora

$$I(MA) = I(M).\ I(A) = I(M).1 = I(M)$$

Si ha dunque sempre per corrispondente entro G' uno stesso el.to I(M), comunque vari A entro e, cioè per tutti gli elementi di una classe di resìdui Me. Nè ulteriori elementi di G si possono portare in quello steso elemento I(M) di G': se invero N è un tale elemtno di G, e per ipotesi

$$I(N) = I(M) \quad \text{ho}$$

$$I(NM^{-1}) \underset{(\text{cs.}^{\circ})}{=} I(N).\ I(M^{-1}) \underset{\text{p.}^{\text{a}}\text{ prec.}}{=} I(N).\left[I(M)\right]^{-1} \underset{\text{ip.}^{\text{si}}}{=} I(N).\left[I(N)\right]^{-1}$$

$= 1.$ Quindi NM^{-1} ha per corr.te 1 cioè NM^{-1} è in E
cioè $NM^{-1} = A$ (di E) e $N = MA$. c.d.d.

E anzi di G' basterebbe domandare che sia merid. isomorfo in modo che alla sua unità corrisponda g (però allora per la cond. p. 105–107 sono appunto le classi di residui rispetto a g quelle di el.ti di G con uno stesso corr.te in G')

Cerchiamo ora se è possibile invertire il risultato. Prima si partiva da G' meried. is. a G, coi risultati detti. Ora invece parto da G e da un suo sottogruppo invariante g, insieme con le classi di residui a cui dà luogo, e mi domando se è possibile di costruire un G', meriedte isomorfo a G, tale che i singoli elementi di G' abbiano appurto per corrispondenti in G (tutti) gli elementi delle classi di residui: l'unità di G' avrà allora necte come corr.te g (perchè dovrà avere per corr.te una classe di re.1))

Giungeremo alla costruzione di G' provando ad adottare come elementi di esso addirittura quelle classi di residui, dove occorrerà intanto per considerarle come elementi di un gruppo, definire una legge di prodotto. Occupiamoci intanto di questo Esse sono le classi Mg, con M variabile in G

Adotto come legge di prodotto questa; chiamo prodotto della classe Mg e &&&&& della classe Ng la classe di residui MNg. La definizione esige un complemento: quando dico la classe di residui Mg, questa come sappiamo può provenire da parecchi M, e precisamente da ogni Q di G tale che MQ^{-1} ($M^{-1}Q$) sia in g di ∈ g,
Così Bg rpoviene da ogni R tale che NR^{-1} ($N^{-1}R$) sia in g. di ∈ g

Allora la classe che ho definito come prodotto delle due Mg, Ng si può definire come tale (soltanto) se non varia quando a M,N
se la classe MNg la
sostituisco risp. Q ,R; cioè &&&&&&&&&&&Rg coincide con QRg. Ora &&& ho le classi && &&&&&&&
&&&Mg&&&&Rg&&&&&&&&&&&
&&&&Ng&&&&Rg&&&&&&

g

1) ricordo (per ipotesi) non che vi è anche un sottogruppo (nel lavoro prec.) e tale è solo g (cfr. n.° a p. 10 d prima,

$M^{-1}Q = g_1$ $\quad Q = Mg_1$

$\left\{ \begin{array}{ll} g & \\ Mg, & Qg \ldots \text{\&\&} \ \cancel{MQ^{-1} \ g} \ \text{cioè} \ \cancel{M = g_1 Q} \ \text{cioè} \ \cancel{Q = Mg_1} \\ Ng & Rg \quad \text{e cn.te a sopra} \quad R = Ng_2 \end{array} \right.$

Allora

$$QRg = Mg_1^{-1}Ng_2^{-1}g = Mg_1^{-1}N(g_2^{-1}g) = Mg_1^{-1}Ng$$

(Ma g_2^{-1} fa parte di g invariante g: per [illegible])

$$= MN(N^{-1}g_1^{-1}N)g = MNg_3g = MNg$$

e va bene ~~[illegible]~~.

Quindi l'operazione che vogliamo definire come prodotto

di due classi di residui è certamente univoca:esso è ovviamente associativo,come deve essere (p.16;lo è perchè è lo stesso parlare delle classi (MN)Qg e M(NQ)g) Come unità(p.19) funge la classe costituita da g,perchè il $=(1.g)$

suo prodotto per la classe Mg,secondo la df data è

(1.M) g cioè ancora Mg. Ogni elemento ha come deve un

inverso-tale cioè che il prodotto dei due sia l'unità-perchè la classe Mg e la classe M^{-1}g dànno con quella def.ne il prodotto(MM^{-1}) g cioè g dove g è appunto l'unità. Abbiamo così costruito un gruppo,avente per el.ti le

singole classi Mg,con quella df. di prodotto. Il gruppo

che abbiamo così costruito,in modo ben determinato a

partire da G e g(inv.te) si può chiamare gruppo complementare di g entro G,e indicare con
G/g.

Esso gode effettivamente della proprietà richiesta in

principio di p. 109:basta porre tra G e il nuovo gruppo,

diciamo G' la corrispondenza che nasce associando a o

gni elemento A di G la classe di residui(el.to costitu

tivo di G') in cui esso si trova(cioè Ag). Ogni el.to di

~~&&&&&&~~ G, sia A ha così proprio un corr.te determinato, il suo I(A), e inoltre è proprio

I(AB) = I(A) I(B)

perchè I(AB) è la classe di residui ABg

I(A) e (I(B) sono risp. le classi Ag e Bg e il loro prodotto con la df. adottata è proprio ancora ABg.

Nella costruzione di G' abbiamo proceduto un pò arbitrariamente; cosicchè a priori non è sicuro che non si possa procedere altrimenti. Però, comunque si ottenga G'' che goda della p.tà richiesta a p 109 in principio, esso non può differire da G' già da noi ottenuto che a meno di un isomorfismo oloedrico. Siccome infatti a ogni el.to di G' e di G'' corrisponde una classe di residui in G, basta considerare il riferimento che così nasce fra gli el.ti di G' e quelli di G'': è corr.za biunivoca-attraverso quelle classi di residui-la quale per di più conserva i prodotti

~~Per~~ Vediamo ben chiaro quest'ultima cosa, ~~occorre capire bene quale sarà la legge del prodotto in G'': in G' lo sappiamo già~~. Ora

G (per ipotesi) G''

una classe Mg ⟷ un el.to di G'', sia μ

" " Ng " un el.to di G'', sia ν.

pel rapporto isomorfico tra G e G''

a ogni el.to $Mg.Ng$ ⟷ sempre $\mu\nu$.

Vi è dunque un el.to $MHNH_1$ con H, H_1 in g, anzi

$M.NN^{-1}HNH_1 = MN\underbrace{(N^{-1}HN)}_{\text{in } g}.H_1$ dove il prodotto fattore è in g: $= H_2$ e H_2H_1 è in g e (dipendendo poi da H_1) è qualunque in g. Dunque gli el.ti $MgNg$ sono tutti gli el.ti MNg.

Le tabelle ~~[illegible]~~ altri

G	G''
clas Mg	el.to p.
.. Ng	el.to v.
.. MNg	el.to pv.

Tra G e G' succede [illegible] per costruire lo stesso [illegible] quando tra G e G'' si conservano i prodotti

c.d.d.

Riassumendo, il problema posto a p 109 è risolto dal gruppo complementare rispetto a g e si può dire solo da questo, nel senso che tutte le altre soluzicni sono oloed. isomorfe a questa. Cioè, dato G e un suo sottogruppo invariante g, è possibile, in un solo modo&&- a meno di un is. ol COSTRUIRE UN GRUPPo G' merie åscomorfo a G, tale che all'unità in G' corrisponda in G proprio il sottogruppo invaria(e le classi di residui siano le mis. degli el.ti di G')TE & g: la soluz.one è guà data dal gruppo complementare G/g. - L'esistenza di un sottogr.o invariante è un fatto interno in G [illegible] di costruire gruppi in is.o meriedrico. (l'ordine < di g [illegible]).

Conviene enunciare anche questa conseguenza dei teoremi visti: se di un gruppo G&&G' so che è meried. isomorfo a G, G' è certo oloed. isom. a un gruppo complementare G/g, dove g è un certo sottogruppo invariante di G, e precisamente quello che è formato da&&&&gli el·ti di G che corrispondono all'unità in G'. E' conseguenza immediata dei teoremi che precedo o.

Oss. 1) Riattaccandosi all'oss. di p.104, per formare il gruppo complementare di g rispetto a G è indifferente usare le classi residue a destra o a sinistra; cioè (per g invariante come noi abbiamo considerao) è inutile distinuere gr cpltari a destra e a sinistra

2) Per gdof se G è d'ordine n e g di ordine m, il gruppo complemenatre -che ha tanti el.ti quante sono le

Quanto segue dà anche una nuova dim. dell' [illegible] e ~~es^zio 1 p~~ nel t^ra [illegible]

dell'es^zio 1 p

classi di residui Mg- è d'ordine m/n ,cioè quello che si

chiama indice di g entro G.

Esempi 1) Considero il G_4 diedrico come sottogruppo del G_{12} tetraedrico (p. 92) e quindi del G_{24} ottaedrico, per

formare il relativo gruppo complementare. Il primo caso non ha interesse, perchè si tratterà(oss. prec.) di un G3 e non può essere che un G3 ciclico. Ma nel secondo caso ho un G_6 e non è detto a priori che cosa sia. Vediamo per esercizio

Intanto, il fatto che il G4 sia invariante nel G12 non dice ancora che sia invariante nel G 24 (sarebbe vero il viceversa) perchè sappiamo solo che ~~[illegible]~~

$A^{-1}HA = H'$ con H' in G_4 se H è nel G4 e A nel G12

ma non sappiamo se A è nel 24 inv

Però, di fatto G4 è invariante nel G24. Trattiamo quei gruppi come possiamo così: G24 come gruppo totale su 4 lettere abcd e allora il G4 è

$1 \quad (ab)(cd) \quad , (ac)(bd) \quad (ad)(bc)$

Per formare $A^{-1}HA$ con sostituzioni su lettere (in n. qualunque) vale questa regola; se H decomposta in cicli è p. es. $(abcd)(ef)\ldots$ mentre

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & \ldots \\ p & q & r & s & t & u & \ldots \end{pmatrix}$$

la $A^{-1}HA$ è $(pqrs)(tu)\ldots$

come si vede subito. Quindi comunque prenda nel G24 trasformando p es la $(ab)(cd)$ viene sempre il prodotto di due traspozionisu lettere distinte, cioè un'altra sostituzione del G4. Questo è dunque proprio invariante. ~~Allora~~

Formiamo

$g) \quad 1, (ab)(cd), (ac)(bd), (ad)(bc).$

Ora in ogni Mg vi è una sost.ne che lascia fermo (p. es.) d: invero se tale è M va bene, se M porta d p. es. in b c'è la M. (ac)(bd). ~~Dunque~~ Se la vedo con M, le altre Mg portano d in a, b, c: quindi ce n'è una sola. Ecco è una sost.ne sulle sole abc. Ne ho 6: una per ogni classe di residui.

Posso adottarle a rappresentare quelle classi. e quindi a el.ti del G_6 ~~[illegible]~~ ~~[illegible] è dunque formato dalle 6 sost.ni su abc~~

~~Il G_6 cercato è il G_6 totale su 3 lettere~~

(II p. 109)

Ora ATTENZIONE al passaggio formalmente immediato, ma come concetto importante. Nel caso generale si parlava del gruppo complementare, qui $G6$ come di un gruppo astratto avente come elementi le sei classi di residui opportunamente combinate per prodotto. Io posso come ho detto rappresentare ognuna delle 6 classi con la relativa sostituzione su abc; e pensare a un $G6$ non più astratto, ma di sostituzioni su abc. Naturalmente non è più la stessa cosa; ma quello che faccio in questo modo è semplicemente di sostituire a quel $G6$ astratto un $G6$ di sostituzioni ad esso oloed ISOMORFO, come si vede subito (fare il prodotto di due tali classi secondo la df data equivale proprio a fare il prodotto delle sostituzioni adottate a rappresentarle) Quindi il $G6$ complementare, possiamo dire, è un $G6$ totale su tre lettere

2) Se prendo il G e g dell'esempio iniziale a p. 105, il g è invariante (perchè quel G è abeliano e quindi ogni suo sottogruppo è invariante). Posso quindi fare G/g come sopra spiegato. Le classi Mg sono qui formate dai numeri $\equiv 0, \equiv 1, \equiv n-1 \pmod n$. Se A è quella dei n.i h e B quella dei n.i k, il loro prodotto (p 109) è la classe ABg formata dai n. $\equiv h+k$. ~~Ho dunque come un~~ G_n : ~~In un primo tempo dovrei dire il~~ G_n formato da quelle n classi, col prodotto adottato, ~~ma posso rappresentare ogni classe col n.° h, risp. k, definendo come loro prodotto il residuo mod n della somma~~ (es. stesso di pp 23-25). ~~E anche qui un passaggio per isomorfismo~~. Il ~~nuovo~~ gruppo è ~~poi~~ un G_n ciclio, perchè indicando con A la classe dei n.i 1, le altre sono A^2, ecc. I G_n ciclici sonotutti isomorfi e possiamo, volendo materializzarlo, pensare di sostituire a quel G_n ciclio un G_n cilico (di trsf.ni) qualunque.

Troveremo fra poco un procedimento che ha un notevole grado di generalità per formare il gruppo complementare di g (invariante) rispetto a G. Torneremo allora anche su questi esempi.

Ma prima converrà che ci fermiamo a studiare più da vicino i gruppi discontinui in relazione a un certo sistema di loro generatrici o el.ti generatori. Possiamo mantenere il femminile anche se si tratti di gruppi astratti (e quindi piuttosto di el.ti generatori) (Seguo in sostanza l'ultimo cap. di Seifert e Threlfall, desunto in buona parte da Reidemeister Einf. in die komb. Topologie.

GENERATRICI E RELAZIONI FONDAMENTALI. Sia G un gruppo e sia

$A_1 \; A_2 \; A_\alpha$

un sist. di sue generatrici (che supponiamo in n° finito d'accordo con S&T p 295) Sappiamo che ciò significa: ogni el.to di G si può rappresentare come un ~~prodotto~~ prodotto fra quelle A . P.es.

$$P(A_i) = A_1^{i_1} \dots A_\alpha^{i_\alpha} A_1^{j_1} \dots$$

Un tale prodotto ~~&&&&&~~-visto che le A_1& sono <u>lettere</u> si può chiamare, come da alcuni viene chiamato una <u>parola</u> (Wort, p.es. Reidemeister lc, S & T) Gli elementi del gruppo appaiono allora come tante <u>PAROLE</u>. Tra queste conviene anche considerare la <u>parola vuota</u>, non contenente nessuna generatrice, come rappresentante dell'unità di G. che continuo a& indicare con 1. Delle generatrici NON si domanda l'indipendenza, cioè che una non si possa considerare come una parola formata mediante le altre. ~~&&&&&&&&&~~

Un elemento si può scrivere in modi diversi; cioè ci possono essere parole diverse che rappresentano uno stesso elemento, p.es. se l'el.to A_1 ha il periodo 5 cioè $A_1^5 = 1$, è naturalmente $A_1^2 = A_1^7 = A_1^{-3} = \dots$ Quindi <u>ci possono essere delle parole che tra loro sono eguali senza essere identiche</u>. P& es. or ora A_1^2, A_1^7 erano scritti diversamente, ma erano eguali&. Si possono dunque in generale avere delle eguaglianze fra parole non identiche

$$P_1(A_i) = P_2(A_i)$$

Così nel G_{60} (icosaedro) si avevano (p 81) generatori $A_1 = S$ $A_2 = R$ e come esempio le relazioni

$$A_1^5 = 1 \qquad A_2^2 = 1$$

$$A_1^3 A_2 A_1^2 A_2 A_1^3 A_2 A_1^3 A_2 A_1^2 A_2 A_1^3 A_2 = 1$$

? [non nec.te ind.ti: cioè possono esprimere tutte che 1 si ottiene applicando le altre]

Una tale eguaglianza si chiama una relazione (sottinteso fra le generatrici di G). Si può lasciare al secondo membro l'identità, moltiplicando a sinistra per l'inverso dell'elemento $P_2(A_i)$, e che possiamo indicare con $P_2^{-1}(A_i)$, e che sappiamo formare (p. 9) ;si comincia dall'ultimo el.to del prodotto ecc).
Ogni relazione si può dunque scrivere

$P_1(A_i)\,P_2^{-1}(A_i)=1$ cioè (1) $R(A_i)=1$ cioè parola

eguagliando dunque a 1 la PAROLA scritta a primo membro: (1)
cioè appare come una RAPPRESENTAZIONE dell'unità (con le A_i)
Esempi ovvi di relazioni sono le

$$A_i A_i^{-1}=1 \quad e \quad A_i^{-1}A_i=1$$

Possiamo appunto chiamarle le relazioni OVVIE, per distinguerle dalle rimanenti; si hanno due relazione OVVIA per ogni generatrice A_i.

Vengo ora a definire quello che si chiama un SISTEMA DI RELAZIONI FONDAMENTALI. Supponiamo di conoscere alcune relazioni (in n.° finito: S e T l.c.)

$R_1(A_i)=1$ $\qquad$ $R_2(A_i)=1$ $\qquad$ (1)

Da ognuna di esse possiamo intanto dedurne altre così: prendiamo nel gruppo G una parola qualunque $P(A_i)$. Se in un certo punto di questa parola si leggono tali e quali (con gli stessi esponenti) le lettere p.es. della parola $R_1(A_i)$ ~~(dove ... è una qualunque fra le precedenti)~~ siccome $R_1=1$ quelle lettere si possono cancellare.
Ripeto in altra forma: se prendo una parola $P(A_i)=$ la quale

$P_1(A_i)\,R_1(A_i)\,P_2(A_i)$

Nelle applicazioni di cui si è detto è da tenr presente:

1) qualunque sia la parola $P_1(A_i)$ si può ovunque inserire oppure sopprimere

$$P_1(A_i)P_1^{-1}(A_i)$$

(generalizzazione dell'applic delle relazioni ovvia). Infatti& se p.es.

$$P_1 = A_1^{\sim}A_2$$

vengo a inserire

$$A_1^{\sim}A_2A_2^{\sim -1}A_1^{\sim} = A_1A_1A_2A_2^{\sim -1}A_1^{\sim -1}A_1^{\sim -1}$$

cioè (cominciando dagli estremi)

$$A_1 A_1^{\sim -1} \quad \text{e poi} \quad A_1(A_1A_1^{\sim -1})A_1^{\sim -1} \quad \text{e poi} \quad A_1^{\sim}(A_2A_2^{\sim -1})A_1^{\sim\sim}$$

tutte applicazioni di relazioni ovvie

2) Se una relazione non è scritta isolando 1 al secondo membro, bensì nella forma considerata inizialmente della eguaglianza di due parole

$$P_1(A_i) = P_2(A_i) \quad \text{ovvero} \quad R \equiv P_1P_2^{-1} = 1$$

se io in un parola P dove si legge p.es. P_2 lo sostituisco con P_1 (o viceversa) questa è ancora una applicazione materiale della relazione considerata Invero in $P = QP_2S$ posso inserire $R \equiv P_1P_2^{-1}$ e allora

$$P = QP_2S = Q(P_1P_2^{-1})P_2S = QP_1(P_2^{-1}P_2)S$$

e (applicando 1)

$$= QP_1S \qquad \text{c.d.d.}$$

sia scritta come detto ,si può semplificare la scrittura cancellando R_1 ~~inquesto modo~~. Analogamente se la parola data conteneva "a fattore" R_1^{-1} ,anzichè R_1 ,anche R_1^{-1} si può candellar

Viceversa,invece di cancellare,potrei in un punto qualunque di una parola qualunque P intercalare la pa ola R_1 o la R_1^{-1} .Fare questi cambiamenti così specificati (cancellare e scrivere R_1 o R_1^{-1}) in una parola qualunque del gruppo,lochiamiamo in modo preciso"applicare la relazione $R_1 = 1$"Naturalemnte se a fattore trovassimo anche R_1^2 ecc. l'applicazione della relazione si può fareripetutamente.

Allora,date quelle relazioni (1) ,esse si dicono costituire un sistema di relazioni fondamentali di G,se ogni ulteriore relazione esistente tra le generatrici A_i si può ottenere come una conseguenza delle (1) e delle relazioni ovvie,nel senso preciso che si può ottenere materialmente applicando come sopra ho detto un numero finito di volte tali relazioni.

~~Esempi~~ Il sistema delle relazioni fondamentali(non ovvie) può anche mancare:p.es. se A non è periodica,il gruppo infinito A^1 non contiene nessuna relazione:il suo primo membro sarebbe un prodotto con la sola A cioè una potenza di A ,allora eguale ad uno contro l'ipotsi.

Esempi.G_n ciclico,generato da A con $A^n=1$ Abbiamo qui questa relazione

$$(1) \qquad A^n = 1$$

Essa è da riguardare come fondamentale.Infatti studiamo le eventuali altre relazioni: ogni una ~~altra relazione~~ non può avere a primo membro,anche qui che un prodotto con la sola A a fattore,cioè una potenza di A ed è così del tipo

$$(2) \qquad A^m = 1$$

~~Sì~~ In tale relazione posso applicare la (1),nel significato preciso di sopra,cioè al posto di ogni fattore A^n del primo

Provo che la (2) si può ottenere applicando la (1) (PER me; nella deduzione dei risultati NON occorre ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ servirsi solo di applivcazioni in tal senso). Invero posso ivi supporre m positivo, e allora anche $A^{\mu}=1$ dove

μ è il resto di m rispetto a n. Se $\mu \neq 0$ ~~&&~~ A avrebbe un periodo minore di n e non avrei un G_n, contro l'ipotsi.

Quindi le sole relazioni ulteriori che possonò sussistere sono le $A^{pn}=1$ p intero $\gtrless 0$.

Ma una tale si ottiene certo applicando la $A^n=1$, cioè ~~metten~~ [illegible] ~~do 1 al posto di ogni fattore A^n o secondochè è positivo~~ o negativo.
~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~

~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~. Altro esempio. Prendo il G_6 totale su 6 [illegible] lettere abc. Tre sost. pari

$$S_1 = 1 \qquad S_2 = (abc) \qquad S_3 = (acb)$$

e tre dispari

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

Con queste ultime genero il G6, perchè (v. le [illegible] controllo)

$$A_1 A_2 = A_2 A_3 = \cancel{S_3} = A_3 A_1 = S_3.$$

~~$A_1 A_3$~~

$$A_2 A_1 = A_3 A_2 = A_1 A_3 = S_2.$$

H. [illegible] elementi generatori A_1, A_2, A_3 e le relazioni

$$\begin{cases} A_1^2 = 1 \quad A_2^2 = 1 \quad A_3^2 = 1. \\ A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_1 \\ A_2 A_1 = A_3 A_2 = A_1 A_3 \end{cases}$$

(le gen.ⁱ sono in parte superflue, ma non importa p. es. $A_3 = A_2 A_1 A_2$).

Esse formano un sistema ~~completo~~ fondamentale; sia infatti una qualunque nuova relazione

$$A_i A_j A_l \dots = 1.$$

Se due fattori consecutivi sono eguali li sopprimo mediante applicazione delle precedenti. Così ridotta la relazione allo studio, se vi sono a primo membro almeno tre fattori, posso mediante applicazione delle precedenti (p. 124, 2) sostituire la coppia dei primi due in modo che il secondo diventi eguale al terzo (se questo è p es A_3 sostituisco la prima coppia con una eguale dove il secondo fattore sia A_3) così diminuisco il n° dei fattori di un'unità. In questo modo riduco la supposta relazione mediante applicazione delle precedenti, a una

$A_i A_j = 1$ (se i fattori erano in n° pari

a una $A_i = 1$ se dispari

La seconda ipotesi è assurda, perchè nessuna fra le $A_1 A_2 A_3$ è l'unità. Quanto alla prima se $i \neq j$ è assurda per motivo analogo, se $i = j$ si riduce ancora a $1 = 1$. E' dunque questo l'unico caso possibile. Quindi ogni relazione ulteriore mediante applicazione di quelle si riduce a $1 = 1$; e quindi viceversa si ottiene da $1 = 1$ con quelle stesse applicazioni in senso inverso, cioè inserendo al primo membro quelle coppie che si erano cancellate; è proprio "applicazione" delle relazioni considerate c d d.

UNA CONSEGUENZA IMPORTANTE DELLA NOZIONE DI SISTEMA FONDAMENTALE DI RELAZIONI è questa che esse definiscono completamente un gruppo (a meno di isomorfismo oloedrico). In modo preciso così. Si abbia un gruppo G con le generatrici

$$A_1 \dots A_\alpha$$

e un altro gruppo G' con lo stesso n° di generatrici

$$B_1 \dots B_\alpha$$

Riferiamo le B alle A a parità di indici. Supponiamo inoltre che sia le A sia le B soddisfino a uno stesso sistema di relazioni fondamentali

$$R_i(A_i) = 1.$$

Dico che i due gruppi risultano oloed isomorfi. Prendo infatti un elemento qualunque di G, sia

$$P(A_i) = A_1^{\,l} A_2^{\,m} \dots$$

Gli faccio corrispondere l'el.to $P(B_i)$ di G'. La corrispondenza è biunivoca. A priori ciò non è evidente perchè quell'elemento di partenza ammetterà rappresentazioni mediante altre parole per $Q(A_i)$, e allora si potrebbe dubitare che ricorrendo a queste si trovino altri corrispondenti. Ma precisamente siccome i due gruppi ammettono le stesse relazioni fond. ciò non può avvenire. Se infatti

$$P(A_i) = Q(A_i)$$

questa è una relazione relativa al gruppo G, la quale non può per ipotesi che provenire mediante applicazione di relazioni fondamentali. Ma siccome queste sono le stesse nei due gruppi, applicandole nello stesso modo e nello stesso ordine al gruppo G' ne verrà appunto

$$P(B_i) = Q(B_i)$$

Ho dunque corr.za biunivoca, la quale evid.te conserva i prodotti, cioè appunto isomorfismo oloedrico.

UN'ALTRA OSSERVAZIONE IMPORTANTE. Noi siamo partiti da un gruppo supposto preesistente, e abbiamo considerato per esso un sistema di generatrici, e poi relazioni e particolare un sistema di relazioni fondamentali.

Si può fare l'inverso, e cioè prefissare ad arbitrio dei simboli

$$A_1 \ldots A_\alpha$$

che si vogliono adottare per generare un gruppo astratto che sarà formato dalle PAROLE

$$P(A_i)$$

$$R_1(A_i) = 1, \text{ etc}$$

prefissare arbitrariamente unsistema di relazioni fondamentali, Nasce allora in ogni caso un gruppo formato da tutte quelle parole Infatti, tra gli el.ti del gruppo che si vogliono adottare è definita una eguaglianza (p. 16) cioè sappiamo quando due parole si devono considerare egiali: ciò avviene quando e solo quando, se esse sono $P_1(A_i)$ e $P_2(A_i)$ la scrittura

$$P_1(A_i) = P_2(A_i) \quad \text{cioè} \quad P_1(A_i)\,P_2^{-1}(A_i) = 1$$

è una applicazione nel senso specificato delle relazioni che si vogliono considerare fondamentali. Il prodotto è definito, e sta nell'insieme; c'è l'unità (parola nulla) el.ti inveri ecc. Vi è proprio il gruppo; e anzi per quanto preced è unico, a meno di isomorfismi oloedrici.

Esempio; se ho una sola A, con $A^n = 1$ verrà il G_n ciclico; se ho $A_1 A_2 A_3$ con le relazioni di p. 18 verrà il G6 totale su tre lettere, ecc.

Del ciclico sappiamo già.

Del G_{2h} diedrico si può assumere 2 generatori

A_1, A_2 e d. rist. fond. $\boxed{A_1^2 = 1 \quad A_2^2 = 1 \; ; \; (A_1 A_2)^h = 1}$

(si può dire lo stesso — per l'ordine 2) qui contro, parte destra —

$\boxed{A_1^h = 1, \; A_2^2 = 1 \quad (A_1 A_2)^2 = 1}$

perché del 1° modo posso dedurre. gen. A_1, A_2, A_3 con

$A_3 = A_1 A_2$ e $A_3^h = 1$ quindi rel. fond.

$A_1^2 = 1 \quad A_2^2 = 1, \quad A_3^{-1} A_1 A_2 = 1 \quad A_3^h = 1$

[in realtà la 4ª dalla $(A_1 A_2)^h = 1$ me segue per applicazione $A_1^h = 1$; può seguire $(A_1 A_2)^2 = 1$ per 1) etc. etc.]. cioè presa $A_3 = \ldots$

~~Allora le 2ª di $A_2 = A_3 A_1^{-1}$~~ Applico a questo gen. $A_1 A_2 A_3$ e rel. $A^h = 1, A_2^2 = 1, A_3^h = 1, A_1 A_2 A_3 = \ldots$

~~l'ord. II in senso inverso e penso che 2 gen. $A_1 A_3$ con~~

~~$A_1^2 = 1 \quad A_3^h = 1, \quad (A_3 A_1^{-1})^2 = 1.$~~ e presa $A_1' = A_1^{-1}$

~~(ord. II) $A_1'^2 = 1 \quad A_0^h = 1 \quad (A_0 A_1')^2 = 1$~~ E lo stesso per 1° ~~viceversa.~~ modo

~~E così viceversa è quindi indifferente prendere l'uno o l'altro~~

Ora ho le gen. S e T (p. es. p 89) che danno le trasf.

S^i e $TS^i = S^{-i}T \; (i = 0, 1 \ldots h)$. Preso $S = A_1$, $T = A_2$ ho dunque

le gen. $A_1 A_2$ le relazioni $A_1^h = 1$, $A_2^2 = 1$; e poi anche

$(A_1 A_2)^2 = 1$ perchè $A_1 A_2 = ST$, $(A_1 A_2)^2 = ST\,ST = S.S^{-1}T\,T = 1$

Quindi quelle relazioni vi sono. E che siano fond. si vede collo stesso principio applicato per il G_{2h} (esposto qui) poichè le parole distinte formabili in base a quelle sono ... facendole commutare con A_2 ecc.

(segue 103)

Ora indicherò altri esempi;ma osservo ancora,senza fermarmi alla verifica(che per la 2.a osservazione non è immediata;v. Seifert & Threlfall p 295-97) quanto segue che
~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~
indica modi di alterare generatrici e sist. fond.le di relazioni di un G,senza alterarne il carattere di risp. generatrici e sist. fond. di quello stesso gruppo

Oss. I . Date le generatrici A_i e il sistema fondamentale

$$R_1(A_i)=1,\ldots\ldots,R_r(A_i)=1$$

se una ulteriore relazione $R_{r+1}(A_i)=1$ si ottiene applicando le precedenti,le

$$R_1=1 \quad \ldots \quad R_{r+1}=1$$

costituiscono esse pure un sist. di relazioni fondamentali
(ovvio) Evidente (cioè si posso aggiungere o sopprimere $R_{r+1}=1$)

Oss. II ~~Qui si~~ cambiano anche le generatrici(aumentandole o diminuendole) Date c s le A_i e le R .Presa una parola arbitraria $P(A_i)$ e ponendo

$$A_{\alpha+1}=P(A_i)$$

le $A_1 \ldots A_\alpha A_{\alpha+1}$ costituiscono un sistema di generatrici, col sistema di relazioni fondamentali

$$R_1=1 \ldots R_r=1 \qquad A_{\alpha+1}^{-1}P(A_i)=1 \qquad (1)$$

E viceversa,se ho le $A_1 \ldots A_\alpha, A_{\alpha+1}$ generatrici e tra le relazioni fondamentali vi è la
(le altre sono $R_i(A_1, A_\alpha A_{\alpha+1})=1$) $A_{\alpha+1}^{-1}P(A_i)=1$
si può sopprimere la generatrice $A_{\alpha+1}=P(A_i)$,conservando solo le altre,restando le altre relazioni fondamentali

$$R_i(A_1, A_\alpha, P(A_i))=1$$ che portano sulle sole $A_1 - A_\alpha$.

Indico ancora qualche esempio concreto.Precisamente,i G ~~dei~~ di rotazione ~~dei poliedri regolari~~.Qui si hanno nei tre casi due generatrici $A_1 A_2$ coi sistemi di relazioni fondamentali

G.. $A_1^3=1 \; A_2^2=1 \qquad (A_1A_2)^3=1$

$A_1^3=1 \; A_2^2=1 \qquad (A_1A_2)^4=1$

$A_1^3=1 \; A_2^2=1 \qquad (A_1A_2)^5=1$ (vi devo accennare)

dim in Dyck M A XX) Qui farò la verifica solo per il caso dell'ottaedro. ~~Negli altri si "potr~~ Negli altri si "potrebbe" fare ana. le.

(segue da 134) elevato o

$A_1^{\ell} \quad (\ell = 0, 1, \dots, h-1)$

$A_1^{i} A_2 \quad (i = 0, 1, \dots, h-1)$

$(\ell = 1, 2, \dots h)$

Poi le $A_1^{i} A_2 A_1^{\ell}$ si riducono alle prec^ti poiché

~~applicando~~ $\cancel{(A_1 A_2)^i = 1}$ che esprime $\cancel{A_1 A_2 \cdots A_2 A_1}$ $h-1$

$A_1^{\ell} A_2 A_1 A_1 \dots A_1 = A_1^{i} (A_2 A_1) A_2 \dots A_2 = \dots$ e posto $(\ell = 0) = A_1^{i} (A_1^{h-1} A_2) A_1 \cdot A_1$ e

A_2 alle prime: e allora gli A_1 si riducono.

$A_2 A_1 = A_1^{h-1} A_2$ (esprime il prodotto $A_2 A_1 A_2$ ~~che~~ A_1 che è ottenuto applicando $A_1 \cancel{A_2 A_1 A_2}$ $= A_2 A_1 A_1^{h-1} A_1$ ~~esprime il prodotto~~) le formule per t $A_2(A_1 A_2 A_1 A_2) A_2 = 1$

Per i G_{12} G_{24} G_{60} s. contro: avvertiamo che analogamente al detto per il G_{2h} diedrico. si può scrivere

$$A_1^2 = 1 \qquad A_2^i = 1 \qquad (A_1 A_2)^j = 1$$

$(i = 3, 4, 5)$

o altri analoghi

$A_1^2 = 1$, $A_2^i = 1$, $A_3^j = 1$

$A_1 A_2 A_3 = 1$

etc.)

Gruppo ottaedrico $= G_{24}$ totale su $abcd$. Pongo

$$A_1 = (bcd) \qquad A_2 = (ab). \qquad (A_1^3 = 1 \ , \ A_2^2 = 1)$$

Quindi

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix} = (abcd) \quad . \quad (A_1A_2)^4 = 1.$$

Ora A_1 e A_2 sono generatrici del G_{24}: infatti il G da esse generato entro il G_{24} ha un ordine multiplo di 3 $(A_1^3 = 1)$ e di 4 $\left((A_1A_2)^4 = 1 \ [\text{ma } (A_1A_2)^2 \text{ no}]\right)$: quindi o è il G_{24} intero o un G_{12}: ma questo non può essere il G_{12} alterno, e invece contiene sost. dispari.

Tra esse ho le relazioni

$$(1) \ A_1^3 = 1 \qquad (2) \ A_2^2 = 1 \qquad (3) \ A_1A_2A_1A_2A_1A_2A_1A_2 = 1.$$

$$R_1 = 1 \qquad R_2' = 1 \qquad R_3 = 1$$

Costituiscono un sistema fond. le ?

Risulterà ora di sì; perchè provando a studiare l'eguaglianza di parole non identiche in un gruppo definito dalle A_1 A_2 come generatrici e dalle (1) (2) (3) come relazioni fondamentali nel senso di p. 131, troverò che le parole diverse sono al massimo 24. Quindi se nel G24 ottaedrico vi fossero delle relazioni non ottenute applicando le precedenti, p.es.

(e a posteriori 24)

$$R_4(A_1\ ) = 1$$

esse condurrebbero a nuove riduzioni nel numero delle parole distinte; p.es. lo stesso prima membro si ridurrebbe all'elemrnto unità, mentre prima certo no, appunto in quanto l'ultima relazione non è conseguenza delle precedenti. Non c'è dunque che da fare la verifica detta. Possiamo pensare che ogni parola cominci con A_1 con esponente 0,1 2; così resta anche incluso il caso di parole che di fatto comincino con A_2. Ho così

Parole A_1^{ℓ}	(ℓ = 0,1 2)	n.° 3
Parole $A_1^{\ell} A_2$	c s	n. 3

Poi parole $A_1^l A_2 A_1^m$ (qui m: 1, 2 se no ricado...) n.° 6

" " $A_1^l A_2 A_1^m A_2$ (m. c. s.; ne ho 1 da ognuna delle prec.) n.° 6.

(Badiamo che prima, e qui e poi, valutando il n.°, ecco è un limite superiore; non sto nemmeno a escludere che le parole di cui troviamo conto siano proprio tutte distinte: ho detto "al massimo 24")

Poi parole $A_1^l A_2 A_1^m A_2 A_1^n$ (l, m c. s.) Qui a priori potrei prendere n = 1, 2 e avrei così 6+6 = 12 parole. Ma alcune si riducono alle prec.ti. Precisamente ciò succede se sarà cioè $n = m$. Infatti se $n = m = 2$ ho dalle 2e lettere in poi,

$A_2 A_1^2 A_2 A_1^2$ che per le $R_3 = 1$ si scrive $A_1 A_2 A_1 A_2$.

(~~[illegible]~~) ~~[illegible] poiché $([A_1^{-1} A_2^{-1}]^2)^4 = 1$ ... $(A_2^{-1} A_1^{-1})^4$~~, ~~[illegible] $A_2 A_1^2$ ([illegible]) basta aggiungere a destra~~ perché (3)

esprime l'uguaglianza delle 2 parole $\underbrace{A_1 A_2 A_1 A_2}_{P_1}$ e $\underbrace{A_2 A_1^2 A_2 A_1^2}_{P_2}$ (è $P_1 P_2^{-1} = 1$) e si applica p. 124) e fatto il cambiamento ho $A_1^l (A_1 A_2 A_1 A_2)$ e mi riduco a una parola di 4 lettere cominciante con A_1 (cioè eletto qui) come già ho detto. Se $n = m = 1$ ho (dalle 2e lettere in poi)

esp

$A_2 A_1 A_2 A_1$. Ma applicando (nel caso 1 p. 124) le sostituzioni ~~[illegible]~~ $1 = A_2^2 = A_2 (A_1 A_2 A_1 A_2 A_1 A_2 A_1 A_2) A_2$ cioè

$A_2 A_1 A_2 A_1 A_2 A_1 A_2 A_1 = 1$ che esprime $\boxed{A_2 A_1 A_2 A_1 = A_1^2 A_2 A_1^2 A_2}$

Quindi con le sostituzioni mi riduco anche qui a una parola "più breve".

Non solo le parole di 5 lettere con $n = m$ sono inutili, ma anche alcune delle rimanenti. Infatti se prendo $m = l$, che è lo stesso, fatte della le prime lettere $A_1^l A_2 A_1^m A_2$ $(l = m)$ si trasforma con le 2 eq.ni già utilizzate, utilizzate qui in senso inverso e viene un uomo $A_2 A_1^i A_2 A_1^i$ che si riduce con l'A_1 che segue. Quindi rimangono solo al momento

$l = 0$ $m = 1$ $n = 2$
$m = 2$ $n = 1$

$l = 1$ $m = 2$ $n = 1$
2 $m = 1$ $n = 2$

cosicchè avrò una lettera in meno e ricomincia con A_2: cosicchè le ... non ... , ma si sorti altre parole; va bene

Ma anche delle due ultime parole, una è superflua poichè scrivendo la $R_3 = 1$ nella forma $A_1 A_2 A_1 A_2 A_1 = (A_2 A_1 A_2)^{-1}$ ho

$$A_1^2 A_2 A_1 A_2 A_1 = A_1 (A_1 A_2 A_1 A_2 A_1) A_1 = A_1 A_2 A_1^2 A_2 A_1$$

cosicchè la 5ª parola equivale alla 3ª. Quindi parole di 5 lettere ho le tre

$$\left.\begin{array}{l} (A_1^0)\, A_2 A_1 A_2 A_1^2 \\ (\ )\, A_2 A_1^2 A_2 A_1 \\ A_1 A_2 A_1^2 A_2 A_1 \end{array}\right\} \quad 3.$$

Poi da queste con l'aggiunta di A_2 formo parole di 6 lettere $A_1^l A_2 A_1^m A_2 A_1^n A_2$ equivalenti ora esatte per l, m, n.

3.

~~..~~ Ne ho prima (al max $3 + 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 24$).
E poi non ne ho più. Invero quelle di 7 lettere si riducono alle prec.ti (dopodichè quelle di 8 e 7, ecc. e 6 ecc.)
Invero le sole di 7 da considerare sono

$A_1^l A_2 A_1^m A_2 A_1^n A_2 A_1^p$ $\quad l, m, n:$ 0 1 2 $p = 1$ se no $= 2$
0 2 1 ; $p = 2$ se no $= n$
1 2 1 $p = 2$ se no $= n$

Scarto le p. = n se così le ridegno spiegate a p.

Ora il 3° con $\bar{e}$

$A_1 A_2 \underbrace{A_1^{-1} A \; A_1 A_2 A_1^{2}}$ e si riduce a $A_1 A_2 A_1 (A_1 A_2 A_1 A_2 A_1) A_1$

il

$= A_1 A_2 A_1 (A_2 A_1^{-1} A_2) A_1 = \underbrace{A_1 A_2 A_1 A_2} A_1^{-1} A_2 A_1 =$

$= A_2 A_1^{-1} A_1 A_1^{-1} A_1^{-1} A_2 A_1 = A_2 A_1^{-1} \underbrace{A_2 A_1 A_2 A_1}$ ~~6 lettere~~

il 2° $= A_2 \underbrace{A_1^{-1} A_1^{-1}} A_2 A_1^{-1} A_2 = A_2 A_1 A_2 A_1^{-1} A_2$ (6 lettere si riduce A_1°).

~~$A^{\circ} A_2$~~

Il 2° caso $A_2 A_1^{-1} A_2 A_1 A_2 A_1^{-1} = A_2 A_1 (A_1 A_2 A_1 A_2 A_1) A_1 =$

$A_2 A_1 (A_2 A_1^{-1} A_2) A_1 = A_2 A_1 A_2 A_1^{-1} A_2 A_1$ cioè si riduce al 1°

Finalmente il

1° caso $P \equiv A_2 A_1 A_2 A_1^{-1} A_2 A_1 = ~~(A_2 A_1 A_2 A_1) A_1 A_2 A_1~~$

~~$A_1^{-1} A_2 A_1^{-1} A_2 A_1 A_2 A_1$~~ $= (A_2 A_1 A_2 A_1) A_1 A_2 A_1 = A_1^{-1} A_2 A_1^{-1} A_2 \cdot A_1 A_2 A_1$

$= A_1^{-1} A_2 A_1^{-1} (A_2 A_1 A_2 A_1) = A_1^{-1} A_2 A_1^{-1} \cdot A_1^{-1} A_2 A_1^{-1} A_2 = A_1^{-1} A_2 A_1 A_2 A_1^{-1} A_2$

parola di 6 lettere.

Quindi per il G_{24} ottaedrico il sist. di relazioni

considerato è sufficiente

Qui pp. 157-189

-141-

Per non interrompere poi l'esposizione ,premettiamo quanto segue. Se G è un gruppo discontinuo,ha un senso parlare del minimo ~~gruppo invariante~~ sottogruppo invariante contenente alcuni elementi (in n° finito)prefissati del gruppo,siano S_1, S_2,... S_n .Infatti dei sottogruppi invarianti che li contengono ce n'è sono certo p.es. il gruppo stesso G. Penso alla totalità dei sottogruppi invarianti I ognuno dei quali contiene gli el.ti S. Quella totalità ammette una intersezione,formata dagli elementi comuni a tutti,perchè tali sono già certo almeno S_1 S_2 ecc. Provo che tale intersezione è a sua volta un gruppo invariante;infatti chiamandola J,se vi prendo un el.to qualunque H e lo trasformo mediante un qualsiasi A di G,l'el.to trasformato $A^{-1}HA$ sta in ogni I(appunto perchè ogni I è invariante) e quindi come elemento comune a tutti gli I sta nella loro intersezione J,cioè J si trasforma sempre in J.Dunque J è un insieme invariante;ma è un gruppo perchè se due el.ti stanno in J,cioè sono comuni a tutti i sottogruppi I,il loro prodotto sta in ogni I,cioè in J.Quindi J con ogni sua coppia di el.ti contiene il prodotto.E con ogni el.to l'inverso,come si vede in modo analogo. Quella intersezione J è proprio il minimo ~~gruppo~~ sottogruppo invariante contenente gli S (~~[illegible]~~ perchè ~~[illegible]~~ ogni altro sottogruppo invariante contenente gli elementi S_1 ecc ~~da~~ è un I e quindi contiene J) Dico inoltre che quel sottogruppo invariante minimo J,definito dagli el.ti S_i è l'insieme degli elementi

$(*)\ \prod_h B_h^{-1} S_{i_h}^{\pm 1} B_h$. $(B_k$ in $G)$ (gli S_i intendendo ripetibili)

(prodotto di un n° finito di fattori) .

Infatti ~~per~~ ogni I,contenendo gli S_i ed essendo invariante deve contenere tutti questi prodotti. Perciò J,intersezione degli I contiene pure tutti quei prodotti.Quindi J contiene a) tutti quei prodotti e poi b) forse altri elementi.Faccio vedere che questi altri elementi non ci sono,provando che ~~già~~ i prodotti considerati in a) formano già un gruppo e per di più invariante in G;cosicchè se J contenesse anche gli ulteriori elementi di cui in b) non sarebbe il minimo I. Effettivamente il prodotto di due di quei prodotti è evid.te ancora un prodotto dello stesso tipo;l'inverso di un prodotto è ancora un prodotto dello stesso tipo(fare).Quindi i prodotti ((*) formano un gruppo.Inoltre esso è invariante perchè preso comunque C in G ho (tratto p.es. un $\prod$ con h=2) $C^{-1} B_1^{-1} S_{i_1}^{\pm 1} B_1 B_2^{-1} S_{i_2}^{\pm 1} B_2 C$ $= C^{-1} B_1^{-1} S_{i_1}^{\pm 1} B_1 (C C^{-1}) B_2^{-1} S_{i_2}^{\pm 1} B_2 C = (B_1 C)^{-1} S_{i_1}^{\pm 1} (B_1 C) . (B_2 C)^{-1} S_{i_2}^{\pm 1} (B_2 C)$ che stan in J c.v.d.

Veniamo ora, come si è preannunciato a p. 119 a mettere in relazione il punto di vista esposto coi ~~grupp~~ sottogruppi invarianti e con la formazione del gruppo complementare.

Parto anzitutto da G con le solite generatrici A_1; ... , A e le relazioni fondamentali

(1) $R_1 = 1,\ R_2 = 1 \qquad \ldots \qquad ,\ R_\alpha = 1$.

A questo sistema proviamo a aggiungerne noi arbitrariamente alcune altre (sottintendo sempre in n° finito)

(2) $S_1 = 1 \ \ldots \qquad S_s = 1$

Allora quelle stesse generatrici A_1 col sistema di relazioni fond (1) (2) definiscono-p. 131 -un altro gruppo che chiamo G' (per complicato che sia sil sist. direlazioni prefissato, almeno almeno sarà G' costituito dall'ide.tà, prendendo tutte le A = 1) .Tra i due gruppi G e G' nasce spontaneamente un riferimento, univoco nel passaggio da G a G', nel senso che presa in G una parola qualunque, posso farle corrispondere in G' l'elemento che vi è rappresentato da quella stessa parola. La corr.za è univoca, in tal senso, ma non biunivoca, perchè parole diverse in G possono venire a coincidere in G', perchè in G per passare da una parola alle eguali possiamo <u>applicare</u>, soltanto le (1), mentre in G' abbiamo a disposizione anche le (2). Però ogni parola di G' proviene da <u>qualche</u> parola di G, almeno almeno da quella scritta nello stesso modo. Inoltre se prendo in G il prodotto di due parole-ottenuto in sostanza scrivendole una dopo l'altra-la legge di corr.za adot

P. es. il gruppo delle trecce (aperte) d'ordine 3 ($A_1^3 = A_2^2$) p. 151 è il gruppo modulare (p. 148) (aggiungere $A_1^3 = 1$; e bis $A_1^3 = 1$; $A_2^2 = 1$.)

oppure il G modulare e G_{24} ottaedrico ($A_1^3 = 1$, $A_2^2 = 1$. $(A_1 A_2)^2 = 1$.)

(I altri pol. reg.

cioè aggiungendo le nuove relazioni come si è detto l'immagine in G dell'unità in G' è il minimo sottogruppo invariante in G che contiene gli el.ti costituiti dalle parole primi membri delle nuove relazioni, cioè delle (2).

tata gli fa corrispondere in G' il prodotto delle parole corrispondenti. In definitiva, ho tra G e G' un <u>isomorfismo meriedrico</u>. Quindi <u>aggiungere nuove relazioni porta a un gruppo in isomorfismo meriedrico con quello prima definito</u>. Possiamo aggiungere quale è il sottogruppo invariante g in G(p 107) a cui corrisponde l'unità di G'(perchè sappiamo-p 115 -che G' è poi in sostanza il gruppo complementare G/g). Si tratta di conoscere la totalità g delle parole in G a cui corrisponde 1 in G', cioè delle parole in G che si riducono a 1 quando si applicano non solo le (1) ma anche le (2). Tali sono evid.te le parole $S_i^{\pm 1}$, e poi anche le $P^{-1}(A_i)\, S_i^{\pm 1}\, P(A_i)$ (°)
perchè applicando le (2) valgono $P^{-1}P = 1$

Quindi anche i prodotti di un n° finito di (°), perchè ogni loro fattore si riduce appunto a 1 applicando le (2). Tali prodotti, come sappiamo (p. 140), formano ed esauriscono <u>il sottogruppo invariante minimo</u> J di G che contiene gli elementi S_i. Quindi intanto il sottogruppo invariante g contiene J(cioè è un I). In realtà g coincide addirittura con J. Potrei provare a dimostrarlo, facendo vedere materialmente che ogni parola di G che, applicando ulteriormente le (2) si riduce a 1 è effettivamente scrivibile nella forma di uno di quei prodotti. Ma ciò risulterà direttamente dopo l'inversione delle pp seguenti(v p 153)

Vediamo di invertire ilrisultato. ~~Ora~~ prefissavamo nuove relazioni $S_i = 1$, e si passava così a un G' "complementare rispetto a un g invariante", diciamo così, o in isom. meredrico che è lo stesso. Viceversa, ora prendiamo sempre il gruppo G come sopra (con le A_i e le $R_i = 1$), e prendiamo a priori un suo sottogruppo invariante g [chiamiamolo J]. Potrei pensare di generare g a partire da certi suoi el.ti in numero finito S_1, ecc. , ma per non legarci a questo che non invertirebbe il risultato nella forma ottenua a p. p ecto diciamocosì; sia g definito come il minimo sottogruppo invariante J che contiene certi el.ti S_1, (in n.° finito) S_s (vuol dire che se g è generato da questi el.ti, tanto meglio) chiamiamolo J. Abbiamo così

gruppo G, gene.ci $A_1 .. A_\alpha$, relazioni $R_1 = 1, \ldots R_\lambda = 1$

In G il sottogruppo [abbiamo scelto] J, definito come il sottogruppo inv.to minimo definito dal contenere certi el.ti comunque prefissati in G, siano $S_1, S_2, \ldots$

Proviamo a formare il gruppo complementare G/J. Esso (p. 109)è formato dalle classi di residui MJ. L'isomorfismo tra G e il gruppo cpltare G/J consisteva (p. 111) nel passare da ogni el.to M di G all'el.to "classe di residui MJ". ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ Allora indicavo tale classe, cioè l'el.to di G'= G/J omologo di M con I(M); ora la denoto invece con $\overline{M}$. ~~Allora ogni el.to~~
Quindi in particolare $\overline{1}$ è l'el.to di G' corr. te a 1 in G cioè il sottogruppo invariante J. – [i più semplice l'unità di G:] Altre ogni el.to

di G è per ipotesi una parola $P(A_i)$. Siccome l'isomorfismo tra G e $G' = G/\mathfrak{J}$ conserva i prodotti l'el.to corrispondente in G' [cioè una classe di residui] - sarà il prodotto delle corrispondenti $\bar{A}_i$, cioè sarà la stessa parola $P(\bar{A}_i)$. Perciò intanto ogni classe di residui è una parola di tal fatta, cioè è un prodotto delle $\bar{A}_i$. <u>Le classi di residui $\bar{A}_i$ costituiscono dunque un sistema di generatrici del gruppo complementare $G/\mathfrak{J}$</u>. Cerchiamo di completare la nostra conoscenza di questo gruppo in base appunto a tale sistema di generatrici, vediamo cioè di procurarci per esso un sistema fondamentale di relazioni.

Intanto le $R_l(A_i) = 1$ valide in G, passando al gruppo in isomorfismo meried. G' dànno [ge $A_1^l A_v^m \dots = 1$ per isomorfismo di $\bar{A}_1^l \bar{A}_v^m \dots = \bar{1}$ all' [illegible] → [illegible] J.]

$$(1) \qquad R_l(\bar{A}_i) = \bar{1}$$

Inoltre per il gruppo G' valgono anche le

$$(2) \qquad S_m(\bar{A}_i) = \bar{1}$$

perchè scrivere questo $\bar{A}_1^h \bar{A}_v^k \dots = \bar{1}$ vuol dire: la parola a primo membro, in G', è l'unità, ~~cioè è~~ J, cioè [pensato alla legge d'isomorfismo G e G'] l'el.to $A_1^h A_v^k \dots = S_m(A_i)$ <u>STA</u> in J, ed è vero perchè J era appunto un sottogruppo, anzi il minimo, contenente le parole S_m. Constatiamo così intanto che nel gruppo G' valgono ora le (1) e (2). Dico che, di più, <u>esse vi costituiscono un sistema fondamentale</u>

Si tratta cioè di provare; ogni altra relazione in G'; sia essa

$$(3) \qquad R(\overline{A}_i) = \overline{1}$$

si ottiene applicando le (1), (2). Ora una tale reazione significa (come a prec.te dopo la (2): in G, la parola $R(A_i)$ sta in J. Partiamo dunque da questa ipotesi (dobbiamo sempre concludere che la (3) si ottiene applicando le (1) (2)). Ricordando che J è l'inciemo degli el.ti

$$\prod_h P_h^{-1}(A_i)\, S_{i_h}^{\pm 1}(A_i)\, P_h(A_i)$$

essa significa che tale parola, in G è eguale a un tale Π che cioè applicando le $R_\ell(A_i) = 1$ la parola $R(A_i)$ si riduce a un Π (Sottintendo sempre che oltre al le relazioni che si applicano si applicano anche relazioni OVVIE) Allora, se procediamo materialmente nello stesso modo sulle lettere sopralineate (el.ti di G') vuol dire che la parola $R(\overline{A}_i)$ con l'applicazione delle stesse relazioni $R_\ell(\overline{A}_i) = \overline{1}$ e di relazioni ovvie si riduce a un'espressione

$$\prod_h P_h^{-1}(\overline{A}_i)\, S_{i_h}^{\pm 1}(\overline{A}_i)\, P_h^{-1}(\overline{A}_i)$$

Ottenuta questa riduzione per $R(\overline{A}_i)$, se ora applico anche le (2) {voglio dimostrare che $R = 1$ si ottiene applicando le (1) e (2) } è ovvio che mi riduco ancellando i fattori S_{i_h} e poi distruggendo le coppie $P_h^{-1} P_h$ (oss.e 2a di p 125) a 1 = 1. E così tutto è dimostrato -perchè facendo le APPLICAZIONI in senso inverso trasformo 1 nella parola $\dot{R}$. Quindi le (1), (2) sono un sist. fond per $G' = G/J$

Mettiamo in evidenza in modo particolare, supponendo che manchino le $R_i=1$ (cioè che in quanto precede G sia un gruppo libero con un certo n.° di generatrici), questo. Le parole di G che applicando certe relazioni prefissate (e le ovvie) (che prima chiamavo $S_i=1$ e posso chiamare $R_i=1$) si riducono all'unità sono tutte e sole le parole (a meno di relazioni ovvie: cioè possibilità di intercalare ovunque delle $A_iA_i^{-1}$ o viceversa)

$$\prod_h P_h^{-1}(A_i)\, R_i^{\pm 1}\, P_h(A_i)$$

Questo viene a chiarire in modo ben preciso quali sono in definitiva tutte le relazioni che si ottengono applicando un insieme di relazioni $R_i=1$. Sono le (a meno di fattori $A_iA_i^{-1}$ etc.)

$$\prod_h P_h^{-1}(A_i)\, R_i^{\pm 1}\, P_h(A_i)=1.$$

E' evidente che ogni tale relazione si ottiene applicando le $R_i=1$ e relazioni ovvie, ma per di più sappiamo ora che non ve ne sono altre. ~~Ciò si applica p es a p. 179~~ .

(1). ~~Si ottengono~~ le ~~generali~~ tutte quelle parole, a meno di rel.ni ovvie, si ottiene 1 cancellando $R_i^{\pm 1}$ (senza bisogno di ricorrere con altro p. 120); ma è ... a meno di rel. ovvie è lo stesso potere ricorrere R onde con rel. ovvie ricorrere RR^{-1} e cancellare R^{-1}

Posso dunque enunciare; sia G un gruppo con le genratrici

A_1 A_α e con le relazioni $R_1(A_i)=1, \ldots R_r(A_i)=1$

Considero in esso un sottogruppo invariante J, definito come

il minimo sottogruppo invariante contenente ~~&&&&&&&&~~ cert

parole (arbitrarie) $S_1(A_i)$, ... $S_s(A_i)$. Allora il gruppo complementa

re ha lo stesso n° di generatrici . $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha$.

con il sistema di relazioni fond

$R_1(\bar{A}_i)=\bar{1}$ $R_r(\bar{A}_i)=\bar{1}$

$S_1(\bar{A}_i)=\bar{1}$ $S_s(\bar{A}_i)=\bar{1}$

(cioè formalmente le~~&~~ stesse del dato, oltre quelle che si

ottengono eguagliando all'unità quelle parole S_i a par

tire dalle quali era definit~~t~~o J)

Completo il punto lasciato in sospeso a p 145 fine. Si trat tava di provare: se una parola $P(A_i)$ si riduce a 1 applicando

le $R_\rho(A_i)=1$ e le $S_m(A_i)=1$, (oltre relazioni ovvie) essa applicando le sole prime re

lazioni (e le ovvie) si riduce a un $\Pi P_h^{-1} S_{i_h}^{\pm 1} P_h$. Ora prendendo le S_m ~~&&&&~~ da

ce e applico a partire da esse l'ultimo teorema. IN G/J

così è dove sta $\bar{P}$? Siccome valgono in tal gruppo le rel fond ora

scritte, riduco in base a esse $\bar{P}$ e allora data l'ipotesi che valeva per la parola P, esso si riduce all'unità. Ho dunque

$$\bar{P}=\bar{1}$$

come

Ma allora ciò significa (p 149, a 2/3) che la parola P sta nel

sottogruppo invariante J, e allora (p 152) essa ammette proprio

la rappresentazione voluta nella forma Π .

c.v.d.

Lo

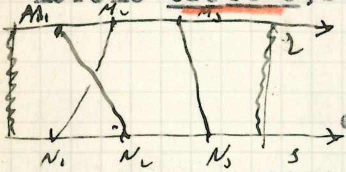
Esempio. Applico il metodo prec.te per trovare il $\frac{G_{24}}{G_4}$ di p 117.
(gruppo ottaedrico
G_4 invar.te ordine: 1, (a b)(c d) etc.)

Del G_{24} ho (p. 135) gen.ri A_1, A_2
rel. fond. $A_1^3 = 1$ $A_2^2 = 1$, $(A_1 A_2)^4 = 1$.
a p. 135 ho $A_1 = (bcd)$ $A_2 = (ab)$ $A_1 A_2 = (abcd)$.
Nel G_4 invar.te vi è $S = (A_1 A_2)^2 = (ac)(bd)$. Quindi esso è un gruppo invar.te contenente S e il minimo (perchè ogni tale gruppo contiene le $P^{-1}SP$ con P arbitrari nel G_{24} totale contiene nec.te p. 117 ecc (ab)(cd) etc). Posso quindi applicare il teor. prec. (l'ultimo) usando $S = A_1 A_2 A_1 A_2$
Seconda esso, il G_6 cercato (levando le sopralineature) ha 2 gen.ri A_1, A_2 e le rel. fond.
$A_1^3 = 1$ $A_2^2 = 1$ $(A_1 A_2)^4 = 1$, $(A_1 A_2)^2 = 1$ (1)
Allora la 3.a cade (p. 137) e le altre definiscono il G_6 ~~totale~~ ~~n. 3~~ ciclico V. 1950-51 ~~diedro~~. Per esso invece avevamo a p. 127

$A_1 A_2 A_3$ con le $A_1^2 = 1$ $A_2^2 = 1$ $A_3^2 = 1$; $A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_1$
e altre $(A_2 A_1 = A_3 A_2 = \ldots$ conseguenze di queste $(A_1 A_2)^{-1} = (A_2 A_3)^{-1}$ etc.)
definisco A_3 da $A_1 A_2 = A_2 A_3$ (p. 131) e ho $A_3 = A_2 A_1 A_2$ e poi $A_3^2 = 1$ da $A_2 A_1 A_2 A_2 A_1 A_2 = 1$ id. id.; e $A_1 A_2 = A_3 A_1$
da $A_1 A_2 = A_2 A_1 A_2 A_1$ cioè $(A_1 A_2)^3 = 1$. Restano
con $\boxed{A_1^2 = A_2^2 = (A_1 A_2)^3 = 1}$ cioè -- oltre le rel.ni le (1)
(per le trasf.ni cfr p. 132). Va bene.

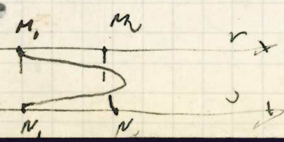
Va a p. 191

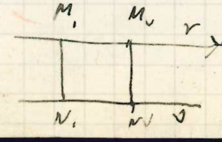
Darò un rapido cenno, come esempio di generatrici e relazioni fondamentali, di un'applicazione avente carattere topologico, (dovuta a Artin; cfr. Klein Hist. Sem. 1926. p. 353) relativa agli intrecciamenti. Si tratta di quelle che chiameremo trecce T, schematizzate così. Considero un rettangolo, (indefinito)



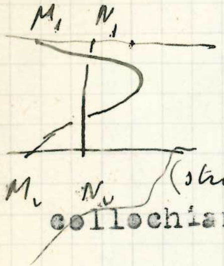
avente due lati opposti sulle rette r,s orientate egualmente: su ciascuna sono se- ~~[illegible]~~ gnati r punti risp. $M_1,\dots M_r$; $N_1,\dots N_r$ che si seguono nei versi positivi. Da ogni punto M_i parte un filo (linea) λ_i nello spazio che va a un certo punto N, che non sarà gen.te N_i, sarà diciamo N coll'indice ~~&~~ 1_i, i vari fili (r in tutto arrivando ai vari punti N~~j~~. Ognuno di questi fili si immagina orientato dal punto M di partenza al punto N di arrivo; ~~&&~~ ogni singolo filo ~~[illegible]~~ deve inoltre essere senza nodi e nemmeno intrecciato e più precisamente proiettarsi ortogonalmente sul piano delle due rette parallele r,s in una linea ~~della~~ entro la striscia rs, incontrata in un solo punto dalle rette parallele alle r,s e le varie linee λ_i (le chiamo ora anche in proiezione) devono incontrarsi a due a due in un numero finito di punti. La T considerata si dice di ordine r

Due trecce di dato ordine si considerano come eguali (equivalenti) quando l'una si può ridurre all'altra per deformazione continua (senza rompere fili). P es. sono eguali le trecce di 2.° ordine



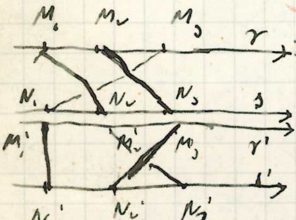


Dove nella 1a λ_1 (2a fig.) passa tutta due volte "sopra" λ_2 mentre si può contrarre nella



E' invece intuitivo che la treccia di 2° ordine qui accanto non è riducibile alle precedenti.

Definiamo ora un procedimento per moltiplicare fra loro due trecce di ordine r. Prese T_1 e T_2 (striscie $r\,s$ $r'\,s'$, i pt $M\,N\,M'\,N'$) collochiamo il 2° lato s della striscia di T_1 in modo che sia sovrapposto al 1° r' della striscia di T_2 (si intende nello stesso piano) e poi, sempre per continuità portiamo a coincidere i punti $M_1'\,M_2'\,M_3'$ di T_2 coi punti $N_1\,N_2\,N_3$ di T_1, deformando convenientemente in corrispondenza i fili $L_1'\,L_2'\,L_3'$. Colleghiamo allora il filo di T_1 che finiva in un punto N col filo di T_2 che si inizia in questo stesso punto, e poi portiamo via la retta $s \equiv r'$. 1) Il risultato è una nuova treccia, della striscia $r\,s'$ prodotto $T_1 T_2$ delle prime due. Naturalmente il filo L_i non risulta gen.te collegato al filo L_i' (v. p.es. figura dove L_1 è collegato a L_2' ecc.)



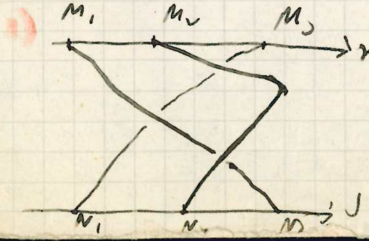
Il prodotto così definito gode della p.tà associativa perchè si vede subito che per tre trecce $T_1\,T_2\,T_3$ è

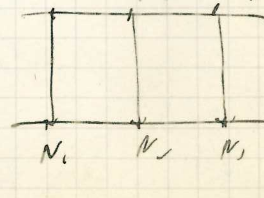
$(T_1\,T_2)\,T_3 = T_1\,(T_2\,T_3)$.

Ci si convince subito che per il prodotto così definito vi è una treccia unità, formata dai cammini rettilinei $M_1 N_1$, $M_2 N_2$, etc.

treccia unità

1)



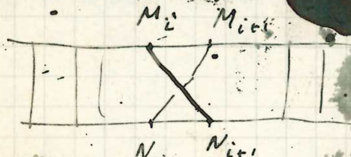


1 p es

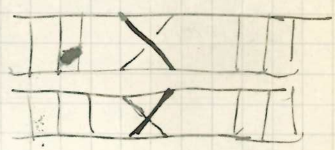
perchè facendone il prodotto per una treccia qualunque T secondo la data df., cioè collocando al disotto T, e unendo i fili, ecc. si ritrova una nuova treccia che si ottiene dalla T per deformazione continua (fare p es. per $r=2$) ~~Definiremo poi anche~~ trecce inverse una& dell'altra. Ma

Avremo poi le [illegible] di

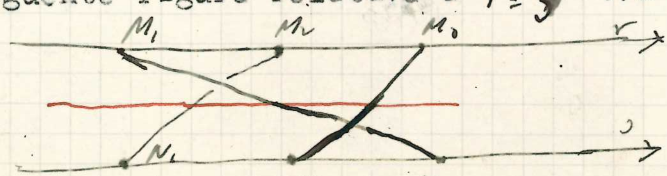
prima conviene fermare l'attenzione sulle trecce particolarmente semplici formate così: come la treccia unità, con la sola variante interessante due fili, che si congiungono



, ~~aaaaaiiiiaaaaaaa~~ con un solo incrocio (in propiezione, nel quale λ_i passa sopra λ_{i+1} sotto. Chiamiamo A_i questa treccia (abbiamo dunque così le $A_1 A_2 \ldots A_{r-1}$) e Se invece facessi analogamente ma passando λ_i sotto e λ_{i+1} sopra, verrebbe una treccia A_i'; e si controlla subito (e così $A_i' A_i = 1$) che $A_i A_i' = 1$ Quindi la seconda treccia la chiameremo A_i^{-1}.



Ebbene, ogni treccia (si intende fissato sempre l'ordine r) si può sempre scrivere come un prodotto di fattori, [illegible] ognuno dei quali è $A_1^{\pm 1}, \ldots A_{r-1}^{\pm 1}$. Faccio vedere sul la seguente figura relativa a $r=3$. Vi ho segnato una



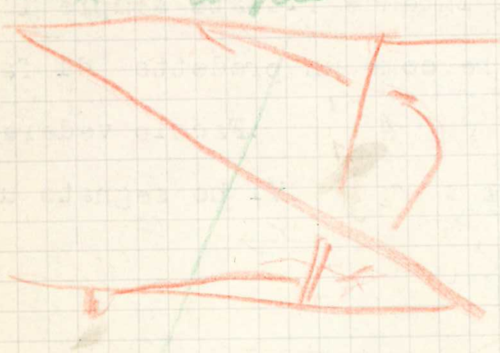
treccia qualunque T di ordine 3. Scendo con una orizzontale finchè trovo un primo incrocio; posso supporre sia unico facendo se no una piccola deformazione, lo spezzo con una orizz.le tirando λ_2 verso destra

sotto ~~tutto~~ (in modo da

abbassare il più

$A_i A_{i+1} =$

$A_{i+1}^{-1} A_i A_{i+1} A_i$



cioè

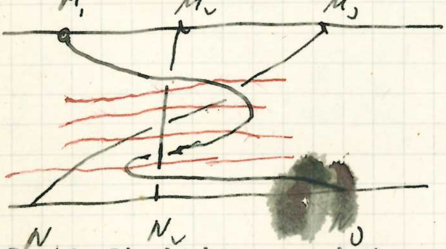
(2). p. sg^te

e invece con λ_1 sotto a $\lambda_1(y)$

ausiliare. Ho sopra una treccia A_1 e sotto una treccia A_2^{-1}

Quindi $$T = A_1 A_2^{-1}$$

E così in ogni caso più complicato. p.es. le mani T (anche per $r=3$)



$$T = A_1 A_2 A_1 A_2^2$$

e così via

In definitiva, ogni treccia appare come una parola, formata colle r-1 generatrici(lettere) A_1 A_2 A_{r-1}. Ne segue che ogni treccia ha un'inversa, tale che il prodotto è l'unità: la parola inversa; nei due esempi risp.

$$A_2 A_1^{-1} \quad e \quad A_2^{-2} A_1^{-1} A_2^{-1} A_1^{-1}$$

(La totalità delle)

Le ~~trecce~~ di ordine r formano dunque un gruppo (il prodotto die due è una treccia, ogni treccia possiede una inversa) con quelle generatrici A_1 A_{r-1}

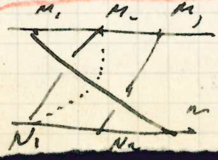
Allora sarebbero da ricercare le relazioni. Che ve ne siano in generale, si vede dalle due seguenti figure per r = 4, dove una è deformabile nell'altra (si può far scorrere il primo incrocio in basso, ecc.)

Qui dunque vedo che ho la relazione $A_1 A_3 = A_3 A_1$

Ora essa si generalizza subito a due A qualunque, purchè non consecutive

V. contr.

(se uso la figura cade: se ho $A_1 A_2$ cioè



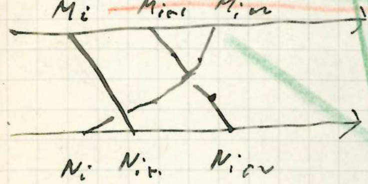
(deformando

e cerco di abbassare spostando $M_2 N_2$) il 1° incrocio sotto il 2°, questo 1° me lo impedisce)

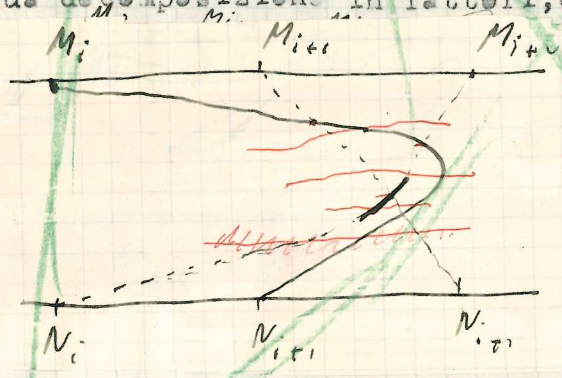
Ho dunque intanto le <u>relazioni</u>

$$\boxed{A_i A_k = A_k A_i \quad \text{per indici non consecutivi}} \quad (1)$$

Altre relazioni si ottengono così. Considero la figura



dove sono segnati solo i punti M_i M_{i+1} M_{i+2} e i corr.ti N (gli altri fili essendo come nella treccia unità). Essa è la treccia $A_{i+1}^{-1} A_i$. In essa il filo λ_i non passa sotto a nessuno passa ~~sopra agli altri due~~, posso deformare lasciando gli altri due inalterati e tirare λ_i verso destra, conservandolo sopra tutto finchè venga a disporsi come in figura. La nuova treccia, ottenuta per deformazione dalla primitiva, coincide con essa, ma avuto riguardo alla sua decomposizione in fattori, concludo



$A_i A_{i+1} A_i^{-1} A_{i+1}^{-1}$

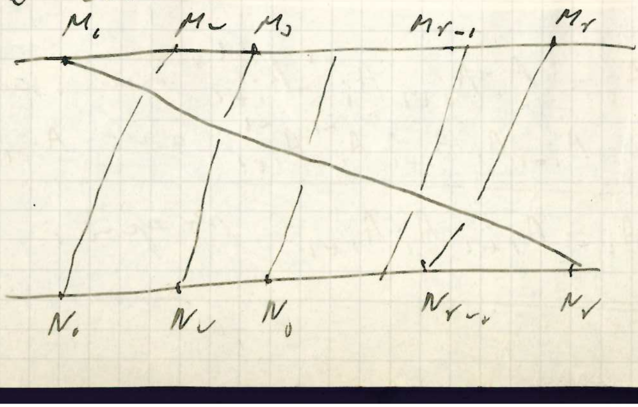
$$A_{i+1}^{-1} A_i = A_i A_{i+1} A_i^{-1} A_{i+1}^{-1} \quad \text{da cui x sinistra } A_{i+1}$$

$$A_i = A_{i+1} A_i A_{i+1} A_i^{-1} A_{i+1}^{-1} \quad \text{a destra } A_{i+1} A_i$$

$$\boxed{A_i A_{i+1} A_i = A_{i+1} A_i A_{i+1} \quad \text{per ogni } i} \quad (2)$$

~~Nel qual caso qui è sempre basta capovolgere~~

col significato geometrico ovvio per $B_1 = A$ mentre B_2 è evoluto

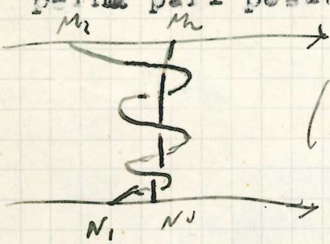


Ebbene, un esame più approfondito mostra che le (1) e le (2) costituiscono un sistema di relazioni fondamentaki (v. Klein l c p 357) In altre parole è lo stesso sapere se due trecce si possono ottenere una per deformazione dell'altra, oppure sapere se le parole che le rappresentano si possono portare a coincidere mediante applicazione delle (1) e delle (2).

La nozione di trecce equivalenti, di contenuto topologico, riceve così un contenuto puramente aritmetico; p es le due trecce di 2° ordine di p 157 fine e 159 principio ora si capisce perchè sono risp. eguali o no alla treccia unità. La prima si decompone, come si vede sulla figura in $A_1 A_1^{-1} = 1$ e va bene, e la seconda in A_1^2 che non si riduce a 1. Precisiamo, anzi che per $r=2$ come è qui il caso le relazioni fondamentali vengono a mancare tutte (vi comparivano delle A_i diverse, e qui ne abbiamo una sola) cosicchè per r il gruppo è il G_r ciclico infinito con una sola generatrice.

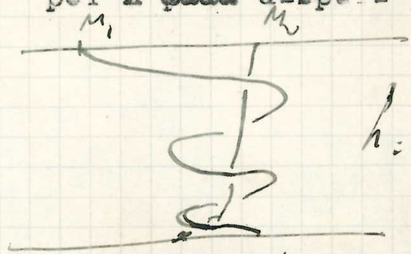
In altre parole, per $r=2$ ogni treccia è deformabile in una del tipo A_1^h cioè

per h pari positivo



$(h=6)$

per h dispari positivo



$h=5)$

e an.te per h negativo.

Tornando al caso di r qualunque (>2), si può anche ricorrere a un minor n° di generatrici, naturalmente con altre relazioni; e precisamente bastano due generatrici qualunque sia il valore di r. Poniamo a tale scopo

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_1 A_2 \ldots A_{n-1}$$

Cerco infatti di esprimere le A come prodotti delle B. Formo perciò il prodotto (per ogni A_i)

$$B_2 A_i \quad \text{cioè} \quad A_1 A_2 \ldots\ldots A_{r-1} A_i$$

Date le relazioni fondamentali (1) con cui le A risultano "generalmente" permutabili, cioè se non hanno indici consecutivi, posso portare indietro l'ultimo fattore A_i fino a collocarlo subito dopo A_{i+1} (farlo passare prima non posso) e allora

$$B_2 A_i = A_1 A_2 \cdots A_{i-1} \underline{A_i A_{i+1} A_i} A_{i+2} \cdots A_{r-1}$$

Applico allora (2) ai tre fattori sottolineati e ho

$$B_2 A_i = A_1 \cdots A_{i-1} \underline{A_{i+1} A_i A_{i+1}} A_{i+2} \cdots A_{r-1}$$

dopo di chè applicando nuovamente (1) posso portare il fattore A_{i+1} sottolineato sempre avanti di un posto fino a ottenere

$$B_2 A_i = A_{i+1} (A_1 \cdots A_{i-1} A_i A_{i+1} \cdots A_{r-1}) = A_{i+1} B_2$$

cosicchè

$$A_{i+1} = B_2 A_i B_2^{-1}$$

Quindi per ricorr. ho.

$$A_1 = B_1; \quad A_2 = B_2 B_1 B_2^{-1}, \quad A_3 = B_2 (B_2 B_1 B_2^{-1}) B_2^{-1} = B_2^2 B_1 B_2^{-2}$$

e in generale

$$\boxed{A_i = B_2^{i-1} B_1 B_2^{-i+1}} \qquad (3)$$

Le (3), esprimendo ogni A_i come un prodotto mediante le B_1, B_2 mostrano appunto che il gruppo delle trecce di ordine r per ogni r ammette le due generatrici B_1 B_2.

Esempio

In tal caso, come si ottiene subito con le oss. di p. 100 i punti delle (1), (2) per $r=3$ ho solo la $\underbrace{A_1 A_2} A_1 = A_2 A_1 A_2$

Posso dunque definire come 2^a gen.^te (v. la ...) $B_2 = A_1 A_2$ e ho rispetto alle 3 $A_1 A_2 A_1$.

$$(*) \begin{cases} B_2 = A_1 A_2 \\ B_2 A_1 = A_2 B_2. \end{cases}$$

Poi (v. la ...) ricavata A_2 dipende dalla 2^a cioè da $A_2 = B_2 A_1 B_2^{-1}$ (dunque per le (3)) restano le sole A_1 e B_2 cioè ($B_1 = A_1$) B_1 e B_2 con le sole rel. fond. $B_2 = B_1 . B_2 B_1 B_2^{-1}$ cioè (x a sinistra e a destra per B_2)

(la 1^a delle (*)) ~~dalla 2^a medesima~~

$$\boxed{B_2^3 = (B_2 B_1)^2}$$

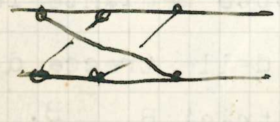
Le gen.^i A e B sono dunque

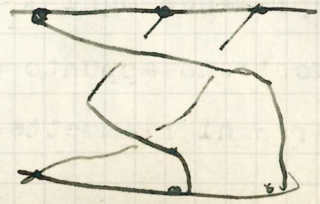
$A = B_2 = A_1 A_2$.

$B = B_2 B_1 = A_1 A_2 A_1$.

(~~da~~ in cui si controlla subito la relazione di ponte venendo le due volte $A_1 A_2 A_1 A_2 A_1 A_2$)

Quindi

A) 

B) 

Ora sarebbero da introdurre le relazioni fondli per le nuove generatrici;e qui non basta l'ess. di p. 133, perchè qui non ci troviamo in quel caso·Allora bisognerebbe cercare le nuove relazioni in modo preciso,e (cfr Klein l c) si trova che esse sono (r ordine delle trecce)

(4) $$\boxed{B_2^2 = (B_2 B_1)^{r-1}}$$

(5) B_1 e $B_2^i B_1 B_2^{-i}$ permutabili cioè

(5) $$\boxed{B_1 \underbrace{B_2^i B_1 B_2^{-i}}\, B_1^{-1} B_2^i B_1^{-1} B_2^i = 1 \quad \text{per } 2 \le i \le \frac{r}{2}}$$

tutti che $2 \le i \le r-2$

(per le altre i sussisterebbe ancora (5) ma è inutile porle: si trova che si riduce alle altre)

Così,p.es per $r=3$ la (5) non dà nula perchè non vi è nessun valore di i da adoperare,e rimane come unica relazione fondamentale la (4) cioè prendendo ora nuove generatrici $A=B_2$ e $B=B_2B_1$ due generatrici A,B col'unica relazione fondamentale

(6) $$\boxed{A^3 = B^2}$$

Approfitto di questo esempio:gruppo delle treccie di ordine tre per dare un'idea della risoluzione del cosidetto problema delle parole. Se si ha ungruppo,definito in base a generatrici A_1 ... A_α e a relazioni fondamentali $R_1(A_i)=1, \ldots R_r(A_i)=1$ ~~&&&&&&&&&&&&~~ sappiamo che due parole del gruppo sono da considerare eguali se si passa dall'una all'altra mediante applicazione un n.° finito di volte delle relazioni fondamentali.

Definito così <u>in teoria</u> quando due parole del gruppo sono d riguardare come eguali, resta la questione <u>pratica</u> di sape riconoscere se effettivamente due date parole $P(A)$ e $Q(A)$ sono o no eguali; occorrerebbe avere delle regole precise per sapere quale relazione fra le date, e in che modo bisognerà cominciare a pplicare alla P e così via per essere sicuri di poter arrivare in un tempo finito a riconoscere se le due parole si possono portare o no a coincidre. E' questo il così detto "problema delle parole". Ma esso è in generale non risoluto. In alcuni casi è ovvio; così p.es. nel gruppo con le generatrici $A_1 \ldots A_\alpha$ <u>senza relazioni fondamentali</u> <u>(gruppo libero con α generatrici)</u> Qui data una parola, mancano le relazioni fondamentali da applicare; la sola cosa che si p fare è applicare le relazioni ovvie, e cercare p es mediante queste di mettere ogni parola del gruppo sotto una forma ridotta: se sono vicini i fattori A_1 e A_1^{-1} eliminarli, se sono vicini più in generale A_1^p e A_1^q scrivere A_1^{p+q}. Allora ogni parola del gruppo si riduce a un prodotto "ridotto"

$$A_{i_1}^{l_1} A_{i_2}^{l_2} \ldots A_{i_h}^{l_h} \ldots\ldots$$

dove fattori vicini hanno sempre l'indice diverso, e dove tutti gli esponenti sono diversi da zero (verrebbero se no dei f fattori unitari che è inutile scrivere). Ogni parola si riduce subito (in un solo modo) alla forma indicata, e allora per sapere se due parole sono eguali basta vedere se hanno la stessa forma rid dotta. Ma, in generake un procedimento analogo manca (cfr Reidemeister, Einf. p 37)

rapidamente

Appunto in questo ordine di idee, faccio vedere come si può risolvere il <u>problema delle parole</u> per il gruppo (lo si risolve anche per ordine qualunque) delle treccie di ordine 3. Si capisce, p.es. in questo esempio specifico che interesse può avere questa risoluzione: sappiamo (p.167) che la equivalenza topologica di due trecce si riconosce in base alla eguaglianza delle parole che le rappresentano, cioè appunto riducibilità dell'una all'altra mediante applicazionedelle relazioni fondamentali da noi trovate. Ma la quesione resta finora risolta solo fino a un certo punto; sappiamo formare la paroàe rappresentante ognuna delle due tre ce, e sappiamo anche quali sono le relazioni fondamentali; Solo se sapremo risolvere ilproblma delle parole sapremo condurre a termine la questione di riconoscere l'eguaglianza topologica o meno di due date trecce. Si tratta dumque di ungruppo con due generatrici $A_1 A_2$ e la unica relazione fond. (6) che generalizzo in $\boxed{A_1^p = A_2^q}$ (7) con p.q. intieri.

Per spiegare bene il procedimento, al momento cambio il gruppo, e prendo invece in gruppo con le duestesse gen.ci ma le DUE relazinni fond.li (Reid.r cit. p. 37)

$$\boxed{A_1^p = 1 \qquad A_2^q = 1.} \tag{8}$$

p.q. intieri che possono essere [illegible]

L'idea che si può seguire è in sostanza quella che ho indicata pel gruppo libero, cioè di cercare per ogni parola una forma ridotta che sia univocamente determinata dalla parola stessa. Qui faccio così. Per la parola $P(A_i)$ intanto la scrivo cominciando con A_1 ev.te con esp.te zero (come già fatto p es pel G24 ottaedrico) ~~alternando~~ lettere distinte e dove per ogni esponente mediante le (8) posso supporre che sia compreso per A_1 fra 1 e p-1 e per A_2 fra 1 e q-1 (inclusi gli estremi; fa eccezione come si è detto il primo esp. di A_1 che può essere nullo e ~~così l'ultimo di A_2 ad id.~~ Ho così, e la si determina subito, a partire da ogni parola una "parola ridotta" ad essa eguale

$$A_1^{p_1} A_2^{q_1} A_1^{p_2} A_2^{q_2} A_1^{p_3} A_2^{q_3} \dots$$

$0 \le p_1 \le p_j$ e le altre $p_i\, q_i$ limitate come si è detto

Ora due parole ridotte non possono essere eguali, come spiego subito, senza essere identiche. Abbiamo così un procedimento ~~rapido~~ per riconoscere se due parole del gruppo studiato sono o no riducibili l'una all'altra: per ognuna formare come si è spiegato la parola ridotta ad essa eguale, e poi controllare se tali parole ridotte coincidono materialmente tra loro. Resta da capire bene quanto si è affermato: due parole ridotte non possono essere eguali senza essere coincidenti. Ciò è ~~già~~ presumibile perchè se scrivo (mi fermo a 4 fattori per parte)

$$(9) \quad A_1^{p_1} A_2^{q_1} A_1^{p_2} A_2^{q_2} \dots = A_1^{p_1'} A_2^{q_1'} A_1^{p_2'} A_2^{q_2'} \dots \text{ cioè}$$

Osservo coll'occasione che nel tipo ora trattato rientra il gruppo modulare

(p. 15) $z' = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ $\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1 \quad$ $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ interi

del quale si prova (p. es. Reid.r Ensl. p. 48)

che è definibile con due generatori A_1 e A_2 che

$A_1^3=1 \; ; \quad A_2^2=1$ come relaz. fond.li:

(A_1 è $z' = 1-\dfrac{1}{z} = \dfrac{z-1}{z}$ (modulare) e allora si vede subito che

A_1^2) $z'' = 1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} = 1-\dfrac{z}{z-1} = \dfrac{-1}{z-1}$

A_1^3) $z''' = 1-\dfrac{z-1}{-1} = 1+(z-1) = z$ $\qquad$ cioè $A_1^3=1$

A_2) $z' = \dfrac{-1}{z}$ $\quad$ modulare $\quad$ e $\quad A_2^2=1$.

E si prova che sono proprio gen.ri e che quelle sono proprio relazioni fondamentali:

non si capisce come potrebbero intervenire le (8) per trasformare formalmente il secondo membro nel primo, visto che là gli esp.ti sono p e q, e qui minori. Ma volendo la cosa si potrebbe dimostrare in modo preciso (cfr. Reidemeister Einf p 38) ~~Klein&&&&~~ Il caso del gruppo (7) si può trattare in modo analogo (Reid. l c, Klein 366); in sostanza così. Abbiamo ora per le due generatrici la sola relazione

$$A_1^p = A_2^q$$

In virtù di essa l'elemento A_1^p è permutabile con tutti gli elementi del gruppo: infatti lo è con le generatrici A_1, A_2

$$A_1 A_1^p = A_1^{p+1} = A_1^p A_1 \quad ; \quad A_2 A_1^p = A_2 A_2^q = A_2^{q+1} = A_2^q A_2 = A_1^p A_2$$

cosicchè procedendo per gradi lo si permuta con ogni parola. ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ Lo stesso vale per l'elemento particolare A_2^q e anche per A_1^{-p}, A_2^{-q}. Ciò premesso, presa una parola qualunque

$$A_1^{p_1} A_2^{q_1} \ldots\ldots$$

se il primo fattore ~~&&&&&~~ ha un esponente $\geq p$ posso prenderci il fattore parziale A_1^p e portarlo alla fine del gruppo, e così se p_1 era positivo eventualmente ripetere portarlo ~~&&&~~ a essere un p_1 tale che $0 \leq p_1 \leq p$ Anzi se p se negativo. Così faccio per il secondo fattore notando che alla fine porto tanti A_2^q che sono uguali ad A_1^p. Così viene una parola ridotta.

$$(*) \qquad A_1^{p_1'} A_2^{q_1'} A_1^{p_2'} A_2^{q_2'} \ldots\ldots A_1^{kp}$$

nella quale tutte le $p_i' \, q_i' \, p_i' \, q_i'$ ~~sono~~ tali che

$0 \leq p_i' \leq p-1$ (~~ogni esponente~~ fa eccezione A_1' il 1°

$0 \leq q_i' \leq q-1$ ~~ogni q_i~~ ogni $i <$ ... $\leq$).

Es. 2°

Tornando al gruppo (A_1, A_2) con $A_1^p = A_2^q$ osservo che esso ci dà anche un esempio semplice del centro di un G definito a p. 99, come insieme degli el.ti permutabili con ogni altro. Tale è invero: come si vede A_1^p, quindi ogni

A_1^{kp} (con k intero $\gtrless 0$). Viceversa, se un el.to di G è permutabile con tutti esso è di tal forma. Se no, sia E_i (p pres) sotto forma normale $A_1^{\pi_i} A_2^{\chi_i} \dots A_1^{lp}$ con le π_i etc. $\neq 0$ [salvo forse la prima, ma allora $\neq 0$ le successive]. Sarà per ip.si

$$A_1^{p_i} A_2^{q_i} \dots \underrightarrow{A_1^{kp} A_1^{\pi_i} A_2^{\chi_i} \dots A_1^{lp}} =$$ id commutato con le

$p_i\, q_i$ arbitrarie (ci fanno ridotta) con

$$A_1^{p_i} A_2^{q_i} \dots A_1^{\pi_i} A_2^{\chi_i} =$$ id. commutato. Ma devono fare ridotte al 1° e 2° membro; quindi pel teor.a invocato a p. pre. dovrò aver $\equiv$. $p_i = \pi_i$ etc. e ciò per l'arbitrarietà delle $p_i\, q_i \dots$ è impossibile. Quindi $\pi_i = \chi_i = \dots = 0$. Ho cioè $(A_1^p)^k$. Ho questo gruppo ciclico infinito come centro.

Degli elementi di G (el.ti equivalenti, o coniugati p. 81). Perciò

Anche qui si dimostra che per ogni data parola la parola ridotta è unica;quindi per giudicare della eguaglianza di due parole basta ridurle entrambe come si è detto,e poi confrontare le parole ridotte se sono identiche. Insomma in questi casi il problema delle parole è risolubile,in quanto esiste per ogni parola la;possibilità di ridurla a una for.a ridot.a o normale,tale che l'eguaglianza di due parole si traduce nella identità delle relative parole ridotte

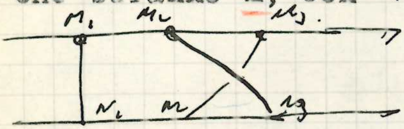
Ciò vale anche,in sostanza deigruppi poliedrici:pensare p es al G24 ottaedrico(p. 133)generatrici A_1 A_2 relazioni fondamentali

$$A_1^3 = 1 \quad , A_2^2 = 1 \qquad (A_1A_2)^4 = 1$$

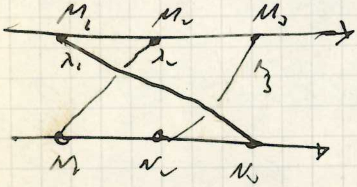
Là abbiamo visto,in modo preciso che leparole di 7 lettere si riducono a 6,ecc. e si sono formate parole con un n° di 6 o meno letterache davano già tutte le 24.Quindi presa una parola di un n° qualunque di lettere per paragonarla con un'altrala riduco per gradi a una di quelle (24) (cominciando a ridurre un nucledo di 7 le tere a meno,e così via)AN.te per l'altra parola,e confronto le forme ridotte.

La teoria delle trecce serve anche per illustrare il concetto di trasf. di

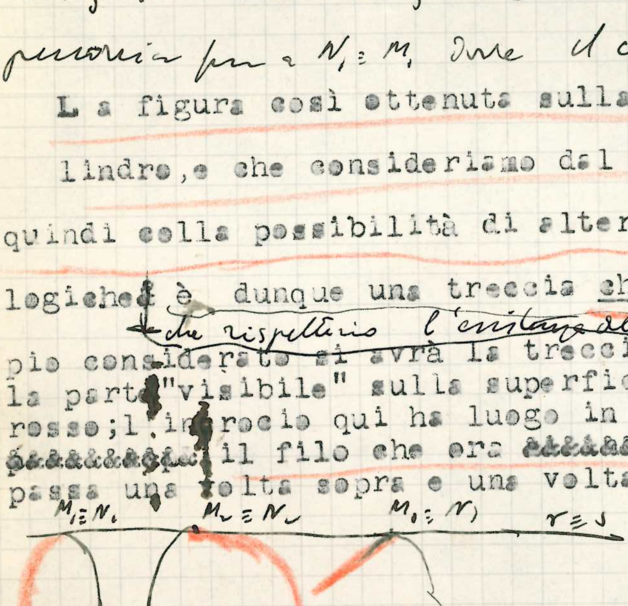
~~[illegible] di [illegible] illustrare alcuni altri concetti [illegible] di un gruppo [illegible] vedremo~~ poi, spiego ancora il concetto di "treccia chiusa" Prendiamo una treccia di ordine n,come sinora,materializzata nella sua proiezione,e disponendo della possibilità di muovere i punti M_i sulla r e N_i sulla s,muoviamo p es questi ultimi finchè le rette M_iN_i vengano a disporsi perpendicolarmente alle r,s.Avvolgiamo allora la striscia su un cilindro(la cui sezione retta abbia lunghezza eguale alla lar ghezza della striscia; il punto N_1 viene a sovrapporsi al punto M_1. Quel punto N_1 era termine ~~&&&&&&~~ di un filo (gen. te non λ_1); qualunque esso fosse, colleghiamolo in N_1 col filo che parte da M_1 il quale effettiavemnte è λ_1. Fatti tutti i collegamenti, avrò complessivamente un n° di fili chiusi (orientati) che sarànno m, con $1 \leq m \leq n-1$ P.es. le due figure per n 3 trecce chiuse la prima di due fili

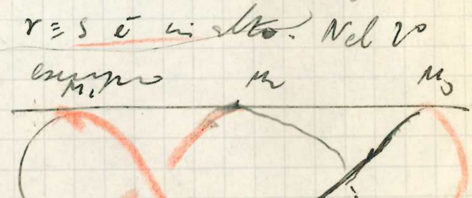


dànno risp. due ~~&&&&&&&&&&&&~~ (λ_1 si chiude in sè, dopo un giro, mentre λ_2 si salda in $N_3 \equiv M_3$ con λ_3 e viene a chiudersi dopo due giri) e la seconda di un solo filo (λ_1 giunto in $N_3 \equiv M_3$ si salda con λ_3 e giunto in $N_2 \equiv M_2$ si salda con λ_2 che percorrerà fino a $N_1 \equiv M_1$ dove il ciclo si chiude.



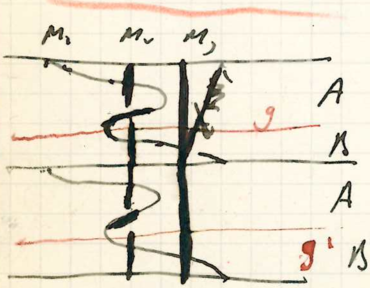
La figura così ottenuta sulla superficie laterale del cilindro, e che consideriamo dal punto di vista topologico, quindi colla possibilità di alterarla con deformazioni topologiche che rispetterà l'esistenza del cilindro è dunque una treccia chiusa. Così nel primo esempio considerato si avrà la treccia chiusa qui segnata, dove la parte "visibile" sulla superficie cilindrica è segnata in rosso; l'incrocio qui ha luogo in questa parte; ~~&&&&&&&&&&&&~~ ~~&&&&&&&&~~ il filo che era ~~&&&&&&&&&&&~~ passa su sè stesso, passa una volta sopra e una volta sotto. In [illegible] la gen. $r \equiv 3$ è in alto. Nel 2° esempio





Qui i 2 incroci sono uno visibile e uno no

E' però essenziale osservare questo: la posizione che la generatrice r occupa sul cilindro non ha nessuna importanza; dopo costruita la treccia chiusa nel modo spiegato, tale generatrice si può eliminare, e le possiamo sostituire una qualsiasi altra generatrice. Se ne prendiamo una vicina la treccia aperta con cui si è generata quella chiusa è topologicamente identica alla prima, ma se prendiamo la nuova generatrice g lontana, può anche differirne. In modo preciso le cose stanno così. Prendiamo la treccia ~~piana~~ aperta T e segnamo su di essa la posizione della nuova generatrice lungo cui tagliamo, sia g; per avere la nuova treccia piana, che dà la stessa treccia chiusa, ma corrispondentemente al taglio g, basta collocare un nuovo esemplare di T al di sotto, e riprodurre in esso la posizione di g, sia g'. Allora la parte della treccia complessiva situata fra g e g' è una nuova treccia aperta T' che dà luogo alla stessa treccia chiusa, e anzi la più generale, al variare di g. In sostanza, la g viene a spezzare la T nel prodotto di due treccie A, B; la nuova treccia T_e che sostituiamo alla T è il prodotto degli stessi fattori, ma in ordine invertito. Quindi ~~à~~ è questo il modo più generale di sostituire a una treccia aperta T un'altra T_e che dia la stessa treccia



chiusa; decomporre T in due fattori, in modo qualunque A e B e assumere poi $T_0 = BA$. Quindi che due trecce aperte siano eguali è ~~&&~~ sufficiente ma non necessario per l'eguaglianza delle rispettive trecce chiuse. Rappresentando le trecce di dato ordine come elementi di un gruppo come si è fatto (p es. p.163), vi possono essere parole distinte - non riducibili l'una all'altra mediante applicazione di relazioni fondamentali, le quali dànno origine a una stessa treccia chiusa. La sostituzione di T_0 a T si può descrivere così, che nel gruppo delle treccie di ordine n la T e la T_0 siano equivalenti, o coniugate o trasformate l'una dell'altra (p.91): ci teniamo qui alla denominazione di trasformate. Infatti se $T = AB$, $T_0 = BA$, la T_0 appare come una trasformata della T, mediante la A, perchè

$$T_0 = BA = (A^{-1}A)BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}TA.$$

Viceversa, se T_0 è una trasformata di T, posso ~~[illegible]~~ sempre decomporre la T in due fattori A, B tali che $T_0 = BA$. Infatti essendo $T_0 = M^{-1}T.M$ pongo $M^{-1}T = B$; $M = A$ e allora $T_0 = BA$; mentre $AB = M \cdot M^{-1}T = T$; cioè $T = AB$ c.d.d.

Si presenterebbe ora, accanto al problema delle parole PRIMA ACCENNATO UN PROBLEMA della trasformazione: date cioè qui il gruppo delle trecce aprete di ordine n, riconoscere se due di esse generano o no la stessa treccia chiusa; in generale dato un gruppo mediante generatrici e un sistema di relazi ni fondamentali, dare un procedimento effettivamente praticabile per riconoscere se due parole comunque assegnate sono o no trasformate una dell'altra.

si torna a p. 143 (182)

Da p. 155

Utilizziamo il procedimento spiegato per ottenere, a partire da un G definito mediante generatrici A_i e le solite relazioni fondamentali

$$R_1(A_i)=1, \quad \ldots \quad R_2(A_i)=1 \qquad (1)$$

il gruppo complementare rispetto al sottogruppo dei commutatori(p. 101) di cui già sappiamo che è un sottogruppo invariante. Precisamente, al momento consideriamo – anziché il gruppo K dei commut. – il sottogruppo invariante minimo J che contiene i commutatori partic.

$$A_i A_j A_i^{-1} A_j^{-1} \qquad (*)$$

(non è dunque detto che contenga tutti i commutatori, qui si considerano solo quelli formati dalle generatrici; in realtà conterrà anche gli altri, ma questo verrà poi)

Allora il gruppo complementare G/J è(p prec.) definito dall'insieme di relazioni fond. (1) oltre alle

$$A_i A_j A_i^{-1} A_j^{-1}=1 \qquad (2)$$

Questo gruppo G/J è intanto abeliano, perchè a norma delle (2) le sue generatrici sono a due a due permutabili: lo risultano quindi anche due parole qualunque del gruppo. Cerchiamo ora di dimostrare che J è proprio il gruppo K dei commutatori. Intanto K è un sottogruppo invariante che contiene tutti i commutatori e quindi i particolari commutatatori (*), mentre J è per def. il minimo sottogruppo invte che contiene id id. Dunque ogni elemento di J sta anche in K. Proviamo la coincidenza di

J con K facendo vedere che viceversa ogni elemento di K sta in J. Infatti, nell'isomorfismo meriedrico tra G e G/J, in cui a ogni el.to A corrisponde la classe di residui $\overline{A}$, rispetto a J, in cui si trova A, prendiamo in particolare come el.to A un <u>qualsisi</u> commutatore $PQP^{-1}Q^{-1}$. Nell'isomorfismo meriedrico - che conserva prodotti, ed el.ti inversi p. 105 - gli corrisponde in G/J l'el.to $\overline{(PQP^{-1}Q^{-1})} = \overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{P^{-1}}\,\overline{Q^{-1}} = \overline{P}\,\overline{Q}\,(\overline{P})^{-1}(\overline{Q})^{-1}$.

D'altro lato, abbiamo osservato che G/J è abeliano; quindi l'elemento ora detto è $= \overline{P}(\overline{P})^{-1}\overline{Q}(\overline{Q})^{-1} = 1$.

In definitiva ogni commutatore di G ha come el.to corrispondente in G/J l'unità, il che significa (p. 109) che ogni commutatore di G si trova in J. Quindi anche il prodotto di un n.° finito di commutatori qualunque, ossia (def. di gruppo K) tutto il sottogruppo dei comm.ri K fa parte di J. Dunque $J \equiv K$.

Risulta così provato che <u>il gruppo complementare di G rispetto al gruppo dei commutatori è definito dalle stesse generatrici $A_1, \dots, A_\alpha$, colle relazioni fondamentali (1)(2).</u> <u>Esso è</u> inoltre <u>un gruppo abeliano</u>. Esso si può chiamare il gruppo G <u>abelizzato</u> (reso abeliano).

Esempi. I gruppi di rotazioni non offrono esempi interessanti.

1) G ~~il~~ gruppo libero con α gen.ri $A_1 \dots A_\alpha$ (p. [illegible]). Qui

etto con quanto si disse a p. 187 sul passaggio dalle trecce aperte alle trecce chiuse. ~~Là~~ per passare da una treccia aperta a una chiusa era indifferente partire da AB oppure da BA. Quindi, rappresentando le trecce come parole nelle A_i, le trecce aperte $A_i A_k$ e $A_k A_i$ dànno sempre una stessa treccia chiusa. Cioè, se rappresentiamo una treccia chiusa col simbolo della treccia aperta da cui proviene, per trecce chiuse valgono le

$$A_i A_k = A_k A_i$$

Ma non si può poi tener conto di queste eguaglianze nei simboli di trecce qualunque, cioè permutare le generatrici nelle relative parole. Le eguaglianze scritte esprimono (p 187) che nel G delle trecce chiuse le $A_i A_k$ e $A_k A_i$ sono equivalenti. ~~Ma le equivalenze non si possono moltiplicare a membro a membro come sarebbe necessario di fare della e della anzi addirittura per concludere la~~. Ma per esempio le parole $A_i A_k A_l$ e $A_l A_k A_i$ non segue che siano equivalenti. Pure

p. es. a gruppi di sost. con $A_i = (ab)$ $A_k = (bcd)$ $A_l = (ad)$

da $A_i A_k A_l = \begin{pmatrix} a & c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & d \\ d & b \end{pmatrix} = (ac)(bd)$

$A_l A_k A_i = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & c & d & b \end{pmatrix} = (bcd)$

non sono equivalenti!

~~Notiamo che occorre che per tale gruppo ... fare~~

~~(*) si può concludere subito: che parole scritte~~

~~con qualche esp. diverso sono sempre diverse (perché~~

~~se $A_1^p A_2^q \dots A_\alpha^s = A_1^{p'} A_2^{q'} \dots A_\alpha^{s'}$ varrebbe (abeliano)~~

~~$A_1^{p-p'} A_2^{q-q'} \dots A_\alpha^{s-s'} = 1$ e se non fosse $p'=p \dots s'=s$~~

~~avrei una~~

mancano le relazioni fond.li (1);per abelizzare il gruppo restano solo le (2).Nel gruppo abelizzato G' ogni parola si può semplificare,visto che è abeliano, portando vicini gli A_1, gli A_2 ecc. Quindi anzichè scrivere le parole come nel gruppo libero (esp. [illegible])

$$\cancel{A_1^{p_1'} A_2^{q_1'} \ldots A_1^{p_2''} A_2^{q_2''}} \quad A_1^{p_1} A_2^{q_1} \ldots \quad A_1^{p_2} A_2^{q_2} \ldots \quad A_1^{p_3} A_2^{s_3}$$

tutte si possono scrivere

$$(*) \qquad A_1^{p} A_2^{q} A_3^{r} \ldots\ldots A_\alpha^{s}$$

E' questo il <u>gruppo abeliano</u> ~~[illegible]~~ <u>libere con</u> α <u>generatrici</u>Se ne è visto unesempio per $\alpha=2$,nel gruppo delle traslazioni piane generate da due date trsl.in direzioni distinte (p 11)

Se invece G contiene relazioni (1), è da tener conto di queste ,oltre che delle (2). Prendiamo p es,per avere un G con molte relazioni

2) il G delle trecce di dato ordine n,come a p 161 e sgg.

Qui hò $A_iA_k = A_kA_i$ (i, k non consecutivi) $A_iA_{i+1}A_i = A_{i+1}A_iA_{i+1}$

devo solo più aggiungere le $A_iA_{i+1} = A_{i+1}A_i$ .Allora le prec. ti dànno $\underline{A_i A_{i+1}} A_i = (A_{i+1} A_i) A_{i+1} = (A_i A_{i+1}) A_{i+1}$ [illegible] $x(\ )^{-1}$

~~e quindi~~ $A_i = A_{i+1}$ cioè $A_1 = A_2 \ldots A_{n-1}$ relazioni che comprendono tutte le altre.Ho dunque qui ~~il gruppo~~ come gruppo abelizzato <u>un gruppo ciclico infinito</u> (solo più una gen.ce senza relazioni) (~~molto~~ più ristretto dunque, avendo una sola gen.ce di quello che avevamo nell'esempio prec.te) OSSERVAZIONE. Non si deve confondere quanto ora

~~hanno già tra le relazioni fond.li le A per i e k non consecutivi. Per rendere il gruppo abeliano, basta dunque aggiungere alle relazioni fond.li le~~

GRUPPI ABELIANI. Vogliamo ancora cercare di approfondire la natura di quei gruppi particolarmente elementari che sono i gruppi abeliani. Pensiamo anzitutto a un G abeliano d'ordine finito, con generatrici A_1 A_α ecc. Queste sono attualmente periodiche, con periodi n_1, ecc cosicchè sussistono certe relazioni

(1) $A_1^{n_1} = 1 \quad - \quad A_\alpha^{n_\alpha} = 1.$

oltre a quelle che esprimono il carattere abeliano

(2) $A_i A_k = A_k A_i$

Ma non è detto nat.te che vi siano solo le (1) e le (2) perchè possono comparire altre relazioni, a ciascuna delle quali si può dare chiaramente la forma

(3) $A_1^{n_{11}} \ldots A_\alpha^{n_{1\alpha}} = 1$

Si dovrà così pensare a un sist. fond. di relazioni formato dalle (1), (2), (3) E siccome a priori nelle (3) vi è una certa indeterminazione (nel loro n.°, valori degli esp.ti), non si acquisisce così ancora un'idea precisa dei gruppi abeliani finiti. Perciò è molto notevole il seguente fatto, che per quello stesso gruppo abeliano finito è possibile adottare un nuovo sistema di generatrici tali che, se le chiamiamo ancora A_1, ..., A_α (eventualmente anche cambiando il loro numero cioè il significato di α e così per le n_i) il sistema delle relazioni fondamentali è costituito esclusivamente dalle (1) e dalle (2).

(Da p. 200)

Il primo fattore prende tanti valori diversi quanti sono i resti possibili dell'esponente xp_1 mod. e_1 al variare dell'intero p_1. Si vede facilmente che, chiamando ~~(...)~~ h_1 il M C D di x e di e_1 (e così si farà poi analog.te per gli altri indici) e ponendo

$$x = h_1 X \quad , \quad e_1 = h_1 E_1$$

con E_1 X primi fra loro, quei resti possibili (si intende distinti) sono in n° di E_1 [escluso)

Infatti basta far variare p_1 tra zero e quel n° i per il quale per la prima volta ix diventa divisibile per e_1, cioè

$$ix = me_1$$

con m piccolo quanto è possibile, ~~Ora se prendo~~ cioè $i = m\frac{e_1}{x}$ $= m\cdot\frac{h_1E_1}{h_1X} = m\frac{E_1}{X}$. ~~Siccome~~ Siccome X ed E_1 sono primi fra loro, per rendere intero il 1° e quindi il 2° membro il minimo m che posso usare è $m = X$ e allora $i = X\frac{E_1}{X}$ cioè $i = E_1$.

Per ciascuno dei fattori successivi in (1) si possono ripetere cose analoghe. Quindi, dato che sia x sarà

$$\omega(x) = E_1 E_2 \ldots E_\alpha \qquad (2)$$

Ora, supponiamo di avere già mostrato (come si è fatto per e_1) la univocità, per un dato gruppo di $e_1, \ldots e_m$ e cioè di avere date di questi numeri delle definizioni dipendentiunicamente da G; facciamo vedere che si può definire in tal modo anche e_{m+1}. Precisamente, dò di questo n° la seguente definizione (intrinseca evidentemente, e di cui ci assicureremo che definisce proprio e_{m+1}) "e_{m+1} è il minimo intero positivo x tale che il gruppo formato dalle potenze x-esime degli el.ti di G ha ordine

$$\omega(x) = E_1 E_2 \ldots E_m \qquad (3)$$

"

Si osservi che nella df.ne entrano solo gli e prima definiti. Effettivamente se si richiede per un x che valga (3), siccome $\omega(x)$ ha già l'espressione (2) paragonandole viene

$$E_{m+1} \ldots E_\alpha = 1$$

cioè (trattandosi di interi) $E_{m+1} = \ldots = E_\alpha = 1$, cioè $h_{m+1} = e_{m+1}, \ldots h_\alpha = e_\alpha$; cioè il MCD fra x e e_{m+1} è e_{m+1} e così via; cioè x è divisibile per e_{m+1} (e quindi già necess. per le altre successive). Il minimo per tali x è proprio e_{m+1}. E va bene.
[È implicito che essendo date le e, lo è pure il loro n.o) c.d.d.

Ciò risulterà per noi come caso particolare del risultato più generale che troveremo anche per gruppi abeliani dis continui infiniti. Una trattazone elementare in Bianchi, p 73, dove si trova anche (e ciò pure per noi verrà più in generale) altro ~~[illegible]~~ p es che si può sempre ottenere che i periodi $n_1, \dots n_\alpha$ dei nuovi el.ti generatori abbiano certe particolarità precisamente che ciascuno dia un divisore del ~~successivo~~ ~~precedente~~ precedente (senza esclu dere l'eguaglianza) .Prescindendo da queste particolarità la proprietà enunciata, permette di dominare completamente la costituzione del gruppo. Ogni sua parola si può scri vere, per il carattere abeliano $A_1^{p_1} \dots A_\alpha^{p_\alpha}$ e per le rela zioni fondamentali si può portare ogni p_i tra 0 e $n_i - 1$ (inclusi gli estremi); cosicchè ogni parola si può scrivere sotto la forma ridotta (e normale)

$$A_1^{p_1'} \dots A_\alpha^{p_\alpha'} \qquad 0 \leq p_i' \leq n_i - 1.$$

Sussiste inoltre la proprietà (analoga a quelle delle pp 177, 179) che due parole ridotte non possono essere eguali senza coincidere, ~~[illegible]~~ (su ciò torneremo poi) p. 517. cosicchè gli elementi distinti del gruppo sono in n.° di

$$n_1 n_2 \dots n_\alpha.$$

Si disse a p.pred. che risulterà dal seguito la possibilità di trovare un sist. di generatrici, per ogni gdog abeliano, che si trovino nelle edzioni enunciate. Non risulterà invece dal seguito, e anzi ci servirà a questo proposito un teorema di unicità, che dobbiamo dimostrare subito (indip. dall'esistenza). Sia G un gdof abeliano, con generatrici

$$A_1 \ldots A_\alpha$$

e relazioni fond.li

$$A_i^{e_i} = 1 \qquad (i = 1, 2 \ldots \alpha)$$

dove ogni e_i è divisa dalle successive. Dico che se si adottano altre generatrici (a priori anche in n° diverso)

$$B_1 \ldots B_\beta$$

e relazioni fond.

$$B_i^{b_i} = 1 \qquad (i = 1, 2 \ldots \beta)$$

con la stessa condizione aritmetica, ~~s~~ anche

$$\beta = \alpha \qquad b_i = e_i$$

. cioè le e_i sono univoc.te det.te da G

Per dimostrarlo, devo provare che i n.i e_i, e anche il loro numero sono univocamente determinati (in quanto esistano) dal gdof abeliano. ~~Ora osservo che, preso un intiero qualunque n~~

Cominciamo~~x~~ con e_1. Qualunque elemento E del gruppo è tale che

$$E^{e_1} = 1$$

Invero $E^{e_1} = (A_1^{p_1} A_2^{p_2} \ldots)^{e_1} = A_1^{p_1 e_1} A_2^{p_2 e_1} \ldots = 1.$
Anzi, e_1 è il minimo numero dotato di tale proprietà, perchè p.es. l'elemento A_1 ha periodo e_1 e non minore. Quindi posso dire "e_1 è il minimo intero positivo x tale che per ogni elemento E del gruppo risulti

$$E^x = 1$$"

~~Quanto alle successe~~ Tale definizione di e_1 viene unicamente a dipendere dal gruppo dato G, e assicura l'unicità di e_1. Quanto alle altre e successive, le definiremo per ricorrenza così. Intanto osservo che ~~...~~ in G, preso comunque l'intero x, le potenze x-esime degli elementi di G formano un sottogruppo, perchè trattandosi di un gruppo abeliano,

$$E^x \cdot E'^x = (EE')^x$$

L'ordine di tale sottogruppo $\omega(x)$ dipende naturalmente da x, e si può precisare facilmente. Un suo elemento generico è

$$A_1^{p_1 x} A_2^{p_2 x} \ldots$$

(1)

per valori arbitrari di $p_1, p_2 \ldots$. Naturalmente, interessano solo i resti degli esponenti, risp. secondo i moduli $e_1, e_2, \ldots e_\alpha$. Contiamo quanti sono gli elementi diversi e avremo così come loro n° l'ordine del sottogruppo.

$\omega = \omega_1 = e_1/(e_1, x)$

[Segue p. 198]

Tale è cioè l'ordine del gruppo. E' così risolto anche il "problema delle parole". La ~~struttura~~ natura del gruppo è completamente conosciuta.

Ci si può proporre il problema di dominare in modo analogo anche i gruppi abeliani discontinui infiniti. Ed è ciò che ora riusciremo a fare. I risultati che troveremo inchiudono in particolare quelli ora esposti per i gdof.

L'idea che seguiremo è in sostanza questa. Voglio studiare un qualsiasi gruppo abeliano discontinuo (finito o infinito). Dal punto di vista attuale esso sarà definito da generatrici $A_1 \ldots A_\alpha$ e da relazioni fond.

(1) $A_i A_k = A_k A_i$) e $\cancel{P_1 A_i}$ (2) $\underbrace{A_1^{n_{11}} \ldots A_\alpha^{n_{1\alpha}} = 1,\ A_1^{n_{21}} \ldots A_\alpha^{n_{2\alpha}} = 1, \ldots A_1^{n_{r1}} \ldots A_\alpha^{n_{r\alpha}} = 1}$

(attualmente non facendo l'ipotesi di gdof non è detto che vi siano tutte o in parte le (1) di p 197) Accanto al gruppo abeliano così definito, che chiamo G', considero il gruppo abeliano libero con α generatrici , ~~che~~ (p 195) che chiamo ancora $A_1 \ldots A_\alpha$; ho solo le relazioni (1). Sia esso G. Allora (p.143-5) se faccio corrispondere in G, G' parole scritte egualmente, ho un isomorfismo meriedrico tra G e G', e G' è poi (p. 118) - a meno di un isomorfismo oloedrico per noi inessenziale, il gruppo complementare G/J rispetto al sottogruppo (invte) J di G ivi definito (p. 145) come il minimo contenente le parole a 1° membro di (2)

Univocamente: per provarlo basti provare le $A_1^{n_1} \ldots A_\alpha^{n_\alpha} = A_1^{n'_1} \ldots A_\alpha^{n'_\alpha}$ implica $n_i = n'_i$; ove $A_1^{n_1 - n'_1}$ etc.. ossia $A_1^{n_1} \ldots A_\alpha^{n_\alpha} = 1$ implica $n_1 = n_2 \ldots = n_\alpha = 0$. E in questo V. p. F11-

~~Questa~~ In questa ipotesi ~~implica~~ segue che anche nelle B nessuna parola $B_1^{n_1} \ldots B_\beta^{n_\beta}$ si può ridurre all'unità, a meno che gli esp.ti siano tutti nulli; perchè se no avrei 2 diverse rapp.ni dell' 1 come prodotto di quel tipo: quella e la $B_1^0 \ldots B_\beta^0$ (parola vuota). — Viceversa se nessuna parola $B_1^{n_1} \ldots B_\beta^{n_\beta} = 1$ (salvo quella ~~che~~ con esp.ti nulli) le B, generatrici costituiscono una base, perchè le $B_1^{n_1} \ldots B_\beta^{n_\beta}$ e $B_1^{n'_1} \ldots B_\beta^{n'_\beta}$ sono diverse se le n_i non coincidono con le corr.ti n'_i.

Quindi si capisce che potremo arrivare a capire in modo preciso come è fatto un gruppo abeliano qualunque G', se sapremo in modo preciso come è fatto ogni sottogruppo di un gruppo abeliano libero (perchè poi il passaggio al gruppo complementare, univocamente determinato) ci condurrà a gruppi abeliani qualunque. p. 301

Perciò al momento, fermiamoci sul gruppo abeliano libero con α generatrici. Ogni suo el.to è come sappiamo

$$A_1^{n_1} \dots A_\alpha^{n_\alpha}$$

e anzi UNIVOCAMENTE scrivibile sotto questa forma. Il G libero è l'insieme di questi elementi, che formano una totalità tanto semplice. Si tratta ora dei sottogruppi.

Consideriamo intanto il concetto di base del gruppo abeliano libero - che chiamerò G_α (nat.te non è da confondere con l'indice usato per i gdof) Un insieme di elementi, in n° di ρ siano $B_1 \dots B_\rho$ si dice costituire una base quando si possono assumere per generatrici, e per di più in modo, che come avveniva per le A, ogni elemento del gruppo si possa esprimere univocamentenella forma

$$B_1^{n'_1} \dots B_\rho^{n'_\rho}.$$

Le A erano p.es. una base, ma non sarà la sola

Dimostriamo che:

1) nelle varie basi relative al gruppo abeliano libero G_α il n° delle generatrici èsempre ancora α

2) il modo più generale di passare a una nuova base, è quello di adottare

$$(1) \begin{cases} B_1 = A_1^{a_{11}} \dots A_\alpha^{a_{1\alpha}} \\ B_\alpha = A_1^{a_{\alpha 1}} \dots A_\alpha^{a_{\alpha\alpha}} \end{cases}$$

dove gli intieri a_{ij} costituiscono un determinante di valore ± 1

Quindi per un G abeliano libero ~~ta~~
~~un~~ si può definire una dimensione n.° delle
generatrici di una base qualunque. È chiaro
che tutti i G ab. lib. di dim. date sono tra
loro algebr. isomorfi. [e se no, no]

Dim.ne 1). Sia il numero delle B $\beta > \alpha$. Si avrà nat.te

$$B_1 = A_1^{n_{11}} \cdots A_\alpha^{n_{1\alpha}}$$
$$B_\beta = A_1^{n_{\beta 1}} \cdots A_\alpha^{n_{\beta\alpha}}$$

La matrice degli esp.ti intieri n_{ij} avendo ~~meno~~ più orizzontali che verticali, posso determinare una comb. lineare delle sue orizzontali che si riduce a zero. I coefficienti $\mu_1, \ldots \mu_\beta$ di questa comb. lin. si determinano razionalmente (risol. di un sist. lin omogeneo) e si possono supporre razionali e anzi interi (essendo definiti a meno di un fattore di proporzionalità), naturalmente non tutti nulli. Allora

$$B_1^{\mu_1} \cdots B_\beta^{\mu_\beta} = A_1^{\mu_1 n_{11} + \cdots + \mu_\beta n_{\beta 1}} A_2^{\cdots} \cdots A_\alpha^{\cdots} = 1.$$

Ma ciò è impossibile se le p. sono non tutte nulle p. 200. Quindi non può essere $\beta > \alpha$. E per la stessa ragione, scambiando nel rag.to le A e le B segue che non può essere $\alpha > \beta$. Dunque $\beta = \alpha$.

Dim. 2). Siccome $\beta = \alpha$, possiamo scrivere le (1). Inoltre le A si esprimono in modo analogo mediante le B; cioè

(2) $$A_i = B_1^{b_{i1}} B_2^{b_{i2}} \cdots B_\alpha^{b_{i\alpha}} \qquad (i = 1, 2, \ldots \alpha)$$

Sostituendo le (2) nelle (1) segue

$$B_j = A_1^{a_{j1}} \cdots A_\alpha^{a_{j\alpha}} = \prod_{i=1}^{\alpha} A_i^{a_{ji}} =$$

$$= \prod_{i=1}^{\alpha} B_1^{b_{i1} a_{ji}} B_2^{b_{i2} a_{ji}} \cdots B_\alpha^{b_{i\alpha} a_{ji}} = B_1^{\sum_{i=1}^{\alpha} b_{i1} a_{ji}} \cdots B_\alpha^{\sum_{i=1}^{\alpha} b_{i\alpha} a_{ji}}.$$

Ma costituendo le B una base le due parole considerate (1° e ultimo membro) devono coincidere cioè (guardando B_h)

$$\sum_{i=1}^{\alpha} b_{ih}\, a_{ji} = 0 \quad \cancel{\sum_{i=1}^{\alpha} b_{ik}\, a_{jk} = 0} \qquad (h \neq j)$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha} b_{ij}\, a_{ji} = 1 .$$

per tutti gli h, i

Queste relazioni fra gli intieri a e b si possono inter pretare in relazione alla matrice ottenuta come prodotto dei due determinanti $|b_{lm}|\,|a_{lm}|$. Precisamente la matrice ottenuta moltiplicando le ~~verticali~~ orizzontali del det. $|a_{lm}|$ per le ~~orizzontali~~ verticali del $|b_{lm}|$ risulta con tutti gli el.ti nulli, salvo quelli della diag princ. eguali a uno, e quindi ha det. unitario. Ma allora $|a_{lm}|\cdot|b_{lm}| = 1$ cosicchè, trattandosi di intieri $|a_{lm}| = \pm 1$ ~~&&&&&&&&~~ Quindi, se le B costituiscono una nuova base, è $|a_{lm}| = \pm 1$. Viceversa, se ciò avviene, le B definite dalle (1) costituiscono una nuoba base. Infatti p es A_1 (e così le altre A) è una parola nelle B, e precisamente (v le (1))

$$A_1 = B_1^{\mu_1} \quad B_\alpha^{\mu_\alpha}$$

dove le μ si determinano dal sistema

$$a_{11}\mu_1 \ldots + a_{\alpha 1}\mu_\alpha = 1$$
$$a_{12}\mu_1 \ldots + a_{\alpha 2}\mu_\alpha = 0$$
$$\ldots = 0$$

E siccome il det. te dei coeff. ti è ± 1, risolvendo il sistema si hanno per le μ_i valori intieri. Quindi sussistono anche relazioni del tipo (2), e le B sono generatrici del gruppo. Inoltre vi costituiscono una base, bastano provare (p. 202) che mai

$$B_1^{\mu_1} \dots B_\alpha^{\mu_\alpha} = 1$$ se le μ_i non sono tutte nulle.

Ora, se vale una tale relazione, sarà per la (1)

$$A_1^{a_{11}\mu_1 + \dots + a_{\alpha 1}\mu_\alpha} A_\cdot^{\dots} \dots = 1.$$

Ma per le A sappiamo (p. 203) che tale relaz. è impossibile se gli espon.ti non sono tutti nulli. E scrivendo ciò, si avrebbe per le μ un sist.ma omogeneo che – avendo il det. $= \pm 1$ e quindi $\neq 0$ – esige tutte le μ_i nulle contro l'ipotesi c.d.d.

Passiamo ora a studiare-secondo quanto si disse a p.203 come può essere costituito un sottogruppo Γ di un G_α abeliano libero: <u>un sottogruppo di un G_α abeliano libero con α generatrici è a sua volta un gruppo abeliano libero con un n° $\beta \leq \alpha$ di generatrici</u> (Sta bene che <u>si possano</u> avere ancora $\beta = \alpha$ gen.ci; p.es. le $A_1^2 \dots A_\alpha^2$ generano evid.te un ~~G_α~~ , o anche una sola p.es il gruppo generato da A_1 sottogruppo: comunque, si vuol dimostrare in modo preciso l'enunciato). Lo dimostriamo per ricorrenza, supponendolo già dimostrato per $\alpha-1$. Sia dunque Γ un sottogruppo del G_α. Considero gli elementi del G_α comuni a Γ e al $G_{\alpha-1}$ abeliano libero avente le sole generatrici $A_1, \dots A_{\alpha-1}$. Tali elementi comuni costituiscono un gruppo Δ (il prodotto di due sta in Γ e in $G_{\alpha-1}$ e quindi ancora nella intersezione, così l'inverso) Questo Δ è, stando in particolare in $G_{\alpha-1}$, è un suo sottogruppo. Quindi, avendo noi ammesso il teor. per $\alpha-1$, sarà Δ un gruppo abeliano libero con $\gamma \leq \alpha-1$ generatrici

Per questo Δ, fissiamo una base, e sia $B_1, \dots B_\delta$.

Ciò premesso, fra gli elementi di Γ che saranno certe del tipo

$$P \equiv A_1^{e_1} \dots A_\alpha^{e_\alpha} \qquad (*)$$

cerchiamone uno, che chiameremo B_0

$$B_0 = A_1^{f_1} \dots A_\alpha^{f_\alpha}$$

per il quale l'ultimo esponente f_α abbia un valore positivo così piccolo come potremo trovare (Che per ogni el'to di Γ sia $f_\alpha = 0$ si può escludere, perchè allora ogni el. to di Γ starebbe in $G_{\alpha-1}$, e quindi $\Gamma \equiv \Delta$ e il teor. ~~per~~ vale per Δ, tutto è dimostrato. Quindi, in Γ, possiamo supporre che vi sono degli el. ti con $f_\alpha \neq 0$, se già positivi tanto meglio; se no basta fare l'inverso. E tra tutti quegli positivi, intieri, ve ne è certo uno minimo. Prendiamo allora la B_0 in corrispondenza a tale valore. Potranno esservi anche varie B_0, ne scegliamo una) Allora ogni P di Γ, data da (*) ha l'esponente e_α multiplo (positivo e negativo) della f_α così determinato; perchè se no, detto r_α il resto della divisione di e_α per f_α, cosicchè $e_\alpha = N f_\alpha + r_\alpha$ con N inter. $\gtrless 0$, la parola

$$P B_0^{-N} = A_1^{\dots} \quad A_{\alpha-1}^{\dots} A_\alpha^{r_\alpha}$$

sarebbe un el. to di Γ (con P e B_0) avente un esp. te di A_α positivo e minore di f_α, contro l'ipotesi fatta su B_0. Possiamo dunque porre

~~$f_\alpha = N f_\alpha$~~ $e_\alpha = N f_\alpha$ (N inter. $\gtrless 0$). Allora l'el. to

] Dove questi ultimi esp.ti è da osservare che sono tutti nulli quelli per $i=1, \ldots r$ (poichè le $B_1, \ldots B_r$ stanno nel $b_{\alpha-1}$ generato da $A_0 \ldots A_{\alpha-1}$) mentre $a_{0\alpha}$, esp.te di A_α in B_0 è (espr.ne di B_0 a p. 211) δ_α (positivo non nullo)

PB_0^{-N} ,di Γ, or ora considerato si riduce a $A_1\, A_2 \ldots A_{\alpha-1}$ cioè sta in $G_{\alpha-1}$,cioè sta in Δ ,e come tale è della forma

$$PB_0^{-N} = B_1^{n_1} \cdots B_\rho^{n_\rho}.$$

da cui

$$\boxed{P = B_1^{n_1} \cdots B_\rho^{n_\rho} B_0^{N}.}$$

Quindi ogni el.to di Γ risulta suscettibile di tale rappresentazione, cosicchè appare generabile a partire dagli el.ti $B_1, \ldots B_\rho, B_0$. E tutte le P così ottenute stanno in Γ, standovi le $B_1, \ldots B_\rho, B_0$ .Troviamo così che gli el.ti, in n° di $\rho+1$, $B_1 \ldots B_\rho, B_0$ sono generatori di Γ .Per completare la dimostrazione, provo che Γ è gruppo (evid.te abeliano) libero ~~xxxxxx~~ generato da questi elementi ,cioè che questi el.ti non soddisfano che alle relazioni che esprimono la loro permutabilità, e a quelle ottenute applicandole. Basta provare (~~p..~~ come è evidente) che nessun prodotto $B_1^{n_1} \cdots B_\rho^{n_\rho} B_0^{n_0}$ si può ridurre all'unità salvo che gli esp.ti siano tutti nulli. Proviamo dunque ciò Supponiamo il contrario, cioè $B_1^{n_1} \cdots B_\rho^{n_\rho} B_0^{n_0} = 1$ (con le n_i non tutte nulle) Siccome ogni B sta in G_α ,sarà (~~[illegible]~~)

$$B_i = A_1^{a_{i1}} \cdots A_\alpha^{a_{i\alpha}} \quad (i = 1, \ldots \rho, 0) \quad \text{~~[illegible]~~}$$

Sostituendo nella presunta relazione fra le B, ~~viene~~ che è

$$\prod_{i=1}^{\rho,0} B_i^{n_i} = 1, \text{ viene } \prod_i A_1^{n_i a_{i1}} \cdots A_\alpha^{n_i a_{i\alpha}} = 1 \text{ cioè}$$

$$\cancel{A_1^{\sum a_{i1} n_1} \cdots A_\alpha} \qquad A_1^{\sum_i a_{i1} n_i} \cdots A_\alpha^{\sum_i a_{i\alpha} n_i} = 1$$

Ma fra le A non può passare nessuna relazione di questo tip salvo che con esp.ti nulli; quindi tutti gli espti devono essere nulli. E invece l'ultimo non lo è perché (annullate ecc. v. p. 212 dri come detto le $a_{i\alpha}$ per $i \neq 0$, vale $a_{0\alpha} n_0 = \rho_\alpha n_0$ dove $\rho_\alpha \neq 0$ e anche $n_0 \neq 0$ perché se no le supposte rel.ne sarebbe $B_1^{n_1} \ldots B_\rho^{n_\rho} = 1$ e legherebbe gli el.ti della base di Δ; assurdo. Abbiamo così un procedimento ricorrente per la dim.ne di 2); naturalmente esso presuppone la dimostrazione per un primo caso di partenza. Ora per $\alpha = 1$, torna già questa dimostrazione, adottando come $G_{\alpha-1}$ il gruppo costituito dalla sola identità. Così tutto è dimostrato.

Ciò premesso, riprendiamo l'idea esposta a p. 203-3

Si trattava di studiare un gruppo abeliano <u>qualunque</u>, che chiamavamo e chiamiamo G' definito dalle α generatrici $A_1, \ldots, A_\alpha$ e dalle relazioni fond.li

(1) $A_i A_k = A_k A_i$ e altre (quelle (2))

Secondo quella idea (ripetere) esso è il gruppo complementare, nel gruppo abeliano libero G_α con α generatrici, di uncerto sottogruppo [e precisamente di quello J definito in G come il minimo comprendente i primi membri delle (2).] Del resto, qui a noi basterà dire G' è G/J dove J è <u>un certo</u> sottogruppo di G_α. Sappiamo (p.209) che J è certo un gruppo abeliano libero con certe β generatrici ($\beta \leq \alpha$) (in. n.° $\leq \alpha$.

dunque senza relazioni fuori della permutabilità
Comunque consideriamo delle sue generatrici qualunque, senza domandarci

che costituiscono una base

Siano queste

$$\begin{cases} B_1 = A_1^{e_{11}} \cdots A_\alpha^{e_{1\alpha}} \\ \\ B_\beta = A_1^{e_{\beta 1}} \cdots A_\alpha^{e_{\beta\alpha}} \end{cases}$$

Per la conoscenza di $G' = G/J$, è sufficiente, entro $G \equiv G_\alpha$ conoscere J, e questo è già conosciuto se sono note le B (sono sue generatrici, ~~qui è inutile parlare di relazioni fondamentali, perchè B è un gruppo abeliano libero con quelle generatrici, cosicchè le relazioni rendelissero quelle sole di permutabilità~~) Quindi J è già conosciuto se lo sono gli interi e_{ij}, cioè la loro matrice M. Sarà dunque allora conosciuto anche $G' = G/J$. Tutto dipende dunque 1) dalla conoscenza della matrice M, e poi 2) da un modo concreto di utilizzare tale conoscenza per capire come sarà fatto il gruppo complementare. Quanto alla prima cosa, la matrice M, sarebbe nat.te comodo se essa si presentasse sotto una forma semplice. Si può cercare di ottenerlo, in base alla circostanza che per il gruppo G non siamo obbligati a prendere per generatrici le A (base), ma potremmo anche sceglie re un'altra base $A'_1 \ldots A'_\alpha$, ottenuta da quella come si disse a p. 203, e analogamente per il sottogruppo J, ~~che~~ ~~dove poi le libertà~~ (che è esso pure abeliano libero), ~~nel quale abbiamo~~ e quindi sostanzialmente nell ma dove abbiamo anche maggior arbitrarietà non essendoci le stesse condizioni). Quindi possiamo cercare alterando queste rappresentazioni risp. di G e di ~~K~~ J, di semplificare

ci obbliga a prendere le B in base

l. matrice M.P.es. potremmo cercare di ridurci, se possibile a applicare il teor. di p. 503, cioè di ottenere la forma diagonale, tanto semplice. Solo che per ottenerla dobbiamo poter fare e trsf.ni là chiamate elementari. Vediamo se esse si possono ottenere tutte con modificazioni per noi lecite nel sistema delle A e delle B.

1) Cambiamento di segno di una colonna. Se alla gen ce (p.es.) A_1 sostituisco la $A_1' = A_1^{-1}$, (ed è lecito perchè ho ancora un sist di generatrici di G_α, e inoltre il det. di p 203 vale -1; sono non nulli solo gli el.ti della diag princ. e tutti eguali a 1 salvo uno eguale a -1) nella tabella degli esponenti, siccome $B_i = A_1^{-e_{i1}} A_{\dots}$, cambiano appunto di segno quelli della 1^a colonna.

2) Cambiamento di segno di una orizzontale. Alla gen.ce B_1 (p.es.) sostituire la $B_1' = B_1^{-1}$ (lecito); la prima orizz.le cambia di segno, perchè $B_1' = B_1^{-1} = A_1^{-e_{11}} \dots A_\alpha^{-e_{1\alpha}}$

3) A una colonna aggiungerne un'altra; p.es. alla seconda la ~~seconda~~ prima. Lo ottengo sostituendo alla gen ce A_1 la $A_1' = A_1 A_2^{-1}$ le altre $A_i' = A_i$ (lecito perchè segue $A_1 = A_1' A_2'$ $A_i = A_i'$ e le A_i' sono ~~..~~ perciò generatrici; inoltre il det. degli esp. di ~~unitario~~ p. 203, è $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 \\ & & \dots \end{vmatrix} = 1$; e va bene). Allora

$$B_i = \cancel{A_1^{e_{i1}}} A_1^{e_{i1}} A_2^{e_{i2}} \dots A_\alpha^{e_{i\alpha}} = A_1'^{e_{i1}} A_2'^{e_{i1}} A_2'^{e_{i2}} \dots$$

$$= A_1'^{e_{i1}} A_2'^{e_{i1}+e_{i2}} A_3'^{e_{i3}} \dots$$ Va bene (se volessi dalla seconda sottrarre la 1a, cambierei di segno la 1a (lecito sotto 1)) e poi sommerei. Ma c'è anche p. 502)

scrivo così pensando che
in A' fare vincere linee che
zeri: $\cancel{A} = c \;(\leq \angle)$
$\leq \rho$

p. [Vedrai che se seguono linee di zeri vi sarebbe altre (nuove) $A_i = A_1^0 A_2^0 \ldots > 1$: vedrai che proprio questi A non costituiscono base di J.]

4) A una orizzontale aggiungerne un'altra; se voglio p es alla prima aggiungere la seconda ,sostituisco alla generatrice B_1 la $B_1' = B_1 B_2$ mentre le altre $B_i' = B_i$

Ho ancora generatrici perchè $B_1 = B_1' B_2'^{-1}$, $B_i = B_i'$

~~Inoltre il det.te degli espo. è 1~~

Quindi il cambiamentoè è lecito.Con esso

$$B_1' = B_1 B_2 = A_1^{l_{11}+l_{21}} \dots\dots A_\alpha^{l_{1\alpha}+l_{2\alpha}}$$

Le altre [illegible] restano invariate

Possiamo dunque supporre,senza restrizione,che la matrice sia scritta sotto la forma diagonale.Supponiamo dunque che sia così fin da principio(forma diag. di p. 515)

Vuol dire che sarà

$$(1)\quad \begin{cases} B_1 = A_1^{k_1} \\ B_2 = A_2^{k_2} \\ \vdots \\ B_\beta = A_\beta^{k_\beta} \end{cases} \qquad (k_1 \geq k_2 \dots \geq k_\beta)$$

Si presenta ora anche molto facile,ora che M è in forma semplice,passare al punto 2) di p 217,cioè capire come sarà fatto il gruppo complementare G/J. ~~Esso~~ Siccome J è un sottogruppo(nat.te invariante com ogni sottogruppo in un G abeliano) contenente le generatrici B_i,cioè il minimo sottogruppo invariante contenente gli elementi B_i,G/J(p.153) è definito dalle generatrici

$$A_1 \qquad A_\alpha$$

e dalle relazioni fond.li:permutabilità e

$$A_i^{k_i} = 1 \qquad (i = 1, 2 \dots \beta)$$

Esso è cioè ungruppo abeliano con quelle generatrici,alcune delle quali sono periodiche,senza altre relazioni fondamen

$\perp$ gen.^{te} qualunque e Γ

Perciò le convenienze di non

obbligarsi a base

// Va bene: erano le B che non
compaiono nelle (1): ivi $\lambda = \sum_C \lambda_{W_a}$
intendendo λ le (1)

tali. È da osservare che per ogni $k_i = 1$ si ha $A_i = 1$; questi si può prescindere da tali generatori e tra le periodicità consideriamo solo quelle con $k_i \neq 1$.
Quindi ogni gruppo abeliano è sempre un gruppo ~~appartenente~~ di questo tipo: gruppo con un certo n° di elementi generatori, alcuni dei quali eventualmente ~~.......~~ periodici, senza altre relazioni fondamentali. Quei periodi si possono sempre supporre tali che siano in un certo n° di ρ $(k_1, \dots k_\rho)$ dove ciascuno è diviso dal suvvessivo ×

Un gruppo come quello considerato nell'enunciato si dice prodotto diretto dei gruppi abeliani generati dalle singole A_i, alcuni dei quali sono gruppi ciclici infiniti, e altri sono invece gruppi ciclici finiti coi periodi considerati. Per questo gruppo abbiamo già considerato il problema delle parole a p. 517. Di ognigruppo abeliano conosciamo così completamente la struttura. Però il caso dei gruppi abelia nifiniti risulta in particolare quanto si disse a p. 197-99. pag 198

E' da ricordare: che i periodi delle generatrici cicliche sono i divisori elementari ~~della~~ dividenda 1 matrice M formata con gli esponenti che compaiono nelle B espresse come parole nelle A, dove le Bi sono generatrici del sottogruppo invariante J tale che ilgruppo abeliano in questione è G/J. ; il loro n.° ρ è la caratt. c di quella matrice diminuita del n.° dei divisori elementari = 1. Gli ulteriori gruppi ciclici infiniti che danno un prodotto diretto col gruppo considerato sono in n.° di p dove p è la differenza fra il n.° delle B e c, porre dunque: p = n.° colonne M − caratt M. – I n.i $k_1, k_2 \dots k_\rho$ si chiamano

Cpn queste definizioni ogni ~~[illegible]~~ gruppo abeliano appare come prodotto diretto di un certo n° di gruppi ciclici, e precisamente di p gruppi ciclici infiniti, dove p è il n° del Betti, e di un certo n. ρ di gruppi ciclici finiti, di ordini (ciascuno diviso dai successivi) $k_1, k_2 \ldots k_\rho$, che coincidono coi coefficienti di torsione del gruppo abeliano dato.

coeff.^{ti} di torsione del gruppo abeliano detto G', e

$\mathfrak{p}$ = (n° dei G ciclici infiniti generatori) il n° del Betti di G'.

Queste definizioni dei coefficiemti di torsione e del n° del Betti presuppongono naturalmente che quei n.i siano univocamente determinati dalla conoscenza del gruppo abeliano considerato G'. Ora tale univocità è assicurata (p. 503) per la forma diagonale di una matrice M a meno di una trsf.ne elementare. Qui invece si tratta di una cosa che non è la stessa. Potrei qui passare da una base A di G_α nel rag.to fatto a una base qualunque $A'_{i..}$ mediante una sost. unimodulare e pensare a applicare p. 514; ma resta l'indeterminazione delle generatrici B, che non è nemmeno detto costituiscano una base per il sottogruppo J considerato. Ma non basta, perchè potremmo pensare di ridurre mediante altri procedimenti il gruppo abeliano G' a un prodotto diretto di gruppi ciclici finiti e infiniti secondo l'enunciato di p. 223-4, restando il dubbio che il n° dei ~~[illegible]~~ gruppi ciclici infiniti (n° deifinito come n° del Betti) e i periodi di quelli finiiti (ordinati in modo che ciascuno sia diviso dai successivi; coeff.ti di torsione) possano variare. Dobbiamo dunque dimostrare che questi sono caratteri invarianti.

Supponiamo dunque, di ~~[illegible]~~ere per G' trovato una volta una sua rapp.ne come prodotto diretto di $\mathfrak{p}$ un'altra volta di $\mathfrak{p}'$ gruppi ciclici infiniti, e poi di gruppi ciclici finiti una volta coi periodi

$$k_1 \dots k_\rho \qquad \cancel{k'_1 \dots k'_{\rho'}}$$

e un'altra volta coi periodi (anche in n° diverso)

$$k'_1 \quad \dots \quad k'_{\rho'}$$

ma sempre con la condizione che ogni k_i sia divisa dalle successive. Si tratta di far vedere che $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ e che $k_i = k'_i$.

Basta far vedere che i n.i ρ, k_i si possono definire in un modo che risulta unico. Cominciamo da $\mathfrak{p}$, numero del Betti. Se rappresento ~~[illegible]~~ glielementi del gruppo con

$$A_1^{n_1} \dots A_{\mathfrak{p}}^{n_{\mathfrak{p}}}\, A_{\mathfrak{p}+1}^{m_1} \quad A_{\mathfrak{p}+\rho}^{m_\rho} \qquad (n_i \text{ qualunque} \quad 0 \leq m_i \leq K_i$$

, vedo che in esso le parole formate con le sole $A_{\mathfrak{p}+1} \dots A_{\mathfrak{p}+\rho}$ sono elementi periodici. Viceversa ogni el.^{to} periodico di G' si scrive

in tal modo, perchè se vi entrasse anche qualcuna delle prece
denti A, scrivendo che una tale parola ha un dato periodo, si
scriverebbe una relazione fra le A! [overtyped]
una certa parola in cui entrerebbero anche le prime A con es
ponente non nullo eguale a uno, il che è impossibile, perchè ta
le relazione non può seguire da quelle fondamentali (p 517)
Quindi possiamo pensare nel gruppo G' alla totalità degli ele
menti periodici, come a un sottogruppo Γ generato dalle sole ge
neratrici

$$A_{p+1} \ldots A_{p+\rho}$$

Tale sottogruppo (definito come totalità degli elementi perio
dici di G') è dunque un sottogruppo Γ univocamente definito

da G'? D'altro lato il gruppo complementare G'/Γ -univocamente

determinato da G', è (p.   ) un gruppo generabile con gene
ratrici

$$A_1 \ldots A_p \quad A_{p+1} \ldots A_{p+\rho}$$

e relazioni $A_{p+1}=1 \ldots A_{p+\rho}=1$ (oltre a quelle di permutabilità già valide in G'). In altre parole G'/Γ è un gruppo abeliano libero con p generatrici. Quindi il n.° p è il n.° delle generatrici di tale gruppo abeliano libero. (Definito così si vede è chiaro che è unico. Quindi il n° dei Betti è unico. (Dimensione del gruppo secondo p. 208)

~~[illegible]~~ Quanto ai coeff.ti di torsione, essi si possono studiare entro Γ, come periodi (con le solite cond. di divisibilità) di generatrici di Γ che soddisfano alle sole rel. fond.

$$A_{p+i}^{k_i}=1 \qquad (i=1, \ldots \rho)$$

Ma allora risulta già da p. 200.

Quindi anche i k_i sono univoc.te determinati

[però ho posto soltanto A_1, A_2; né altre nuove, come si vede subito: $A_1 A_2 A_1 = A_1^2 A_2 = A_2$ ecc.]

Il calcolo del n° dei Betti e dei coeff.ti di torsione dipende dalla matrice formata dagli esponenti di p. 217, dove le B sono generatrici, entro il gruppo abeliano libero con α generatrici G_α, di un sottogruppo J tale che G /J=G'. Tutto ciò è ben chiaro dall'esposizione fatta. Ma la cosa si può enunciare con riferimento soltanto al dato gruppo abeliano G': se esso è dato mediante gen.ci A_i e relazioni fondamentali $S_i(A_i)=1$ esso, secondo il teorema di p. 153, applicato al G_α abeliano libero e al suo minimo sottogruppo (neete invariante) J contenente gli el.ti S_i viene appunto a coincidere con G /J: e quelle S ~~fanno~~ che sono generatrici di J, fanno le parole[1].

Perciò, in definitiva, dato il gruppo abeliano mediante generatrici e relazioni fond.li che scriviamo ora $R_i \doteq 1$ - già coi primi membri ridotti in base alla permutabilità, cioè ordinati rispetto ad $A_1, A_2 \ldots$, numero dei Betti e coefficienti di torsione si calcolano sulla matrice formata dagli esponenti che compaiono nelle parole a primo membro delle relazioni fondamentali. Per fare un esempio ovvio, il G_4 quadrinvolutorio, che appunto è abeliano, è definibile con generatrici A_1 A_2 e relazioni fond. (oltre all'essere abeliano) $A_1^2=1$ $A_2^2=1$

(1) Prima si parlava di J = min. sottogr. inv.te contenente le S_i. Ma ora essendo in G_α basta J = ... contenente le S_i. Esso deve contenere le $\Sigma(S_i)$. Ma queste costituiscono già un gruppo. Quindi le S_i sono generatrici di J.

Qui dunque $M = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ n° di Betti nullo $\beta = 0$ (non vi sono gruppi ciclici infiniti. Infatti da M si ha $c = 2$. num° colonne $- c = 0$.)

Due coefficienti di torsione $k_1 = 2$ $k_2 = 2$.

[In un G_n ciclico. A_1 $A_1^n = 1$ $|n|$
$\beta = 0$; $k_1 = n$.]

<u>Numero del Betti e coefficienti di torsione</u>, fin qui considerati <u>solo per gruppi abeliani, si estendono a tutti i gruppi discontinui anche non abeliani</u>, definendo come tali quelli del <u>gruppo reso abeliano</u> (p. 193). Se questo è definito mediante generatrici $A_1 - - A_n$

e relazioni fondamentali $R_1(A_i), \ldots R_r(A_i)$,

quei caratteri si calcolano ~~dalla~~ riducendo i primi membri di queste come se le A_i fossero permutabili, in modo da essere ordinati rispetto ad A_1 A_2, ecc. e poi formando la matrice degli esponenti. Infatti per ciò bisogna sostituire al dato gruppo G lo stesso gruppo abelizzato. Ma questo (p 193) è definito da quelle stesse generatrici e dalle stesse relazioni fondamentali, oltre che dalle nuove esprimenti la permutabilità, delle quali si può dunque tener conto nel modo esposto.

Esempio. G ottaedrico. Generatrici e relazioni fondamentali di ~~G24~~ p. 133 che posso sostituire con le $A_1 A_2 A_3$

$A_1^2 = 1$ $A_2^3 = 1$ $A_3^4 = 1$ $A_1 A_2 A_3 = 1$ (v. p. 132)

Quindi devo formare la matrice

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

già considerata per es.[ro] a p. 513. ~~Ho numero~~ Ho per diagonale

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ho n° Betti = n° colonne − c = 0.
(evid.te a priori)

coeff.te di torsione unico solo = 2

(gli altri divisori el.ri = 1). Ciò a solo titolo di esempio di applicaz. del procedim.
Qui in sostanza il G dei commutatori (p. 90) è G_{12} tetraed.
Quindi il gruppo G_{24} abelizzato è G_{24}/G_{12} cioè un G_2 che non
può essere che un G_2 ciclico generato da A con $A^2 = 1$. Allora
i risultati ($p = 0$, $K_1 = 2$) sono evidenti.

Osserviamo ancora che per un gruppo abeliano, l'annullarsi di ($p = 0$) del n° del Betti avviene quando mancano i gruppi ciclici infiniti, e quindi è caratteristico per i gruppi finiti. Ma per gruppi non abeliani si può solo dire che se il gruppo è finito segue $p = 0$; ma non viceversa (può essere finito il gruppo abelizzato, senza che lo fosse quello primitivo. Per esempio, se prendo un gruppo nonabeliano definito da

$A_1\ A_2\quad A_1^2 = 1,\quad A_2^2 = 1$ le sue parole (p.177 dove si è parlato del problema delle parole per il gruppo definito da $A_1^p = 1\ A_2^q = 1$) sono $\quad A_1^i A_2 A_1 A_2 \ldots\ldots \quad (i = 0, 1)$

cioè infinite. Quindi è un gruppo infinito. D'altro lato, per avere il n.° del Betti, abbiamo il gruppo 235 : ho gruppo abeliano —

$A_1^{\sim} = 1 \quad A_2^{\sim} = 1$, G_4 quadrirotatorio). o ar

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

soprattutto per procurarci così un materiale di
esempi ~~a cui riferirsi~~ istruttivi a cui riferirsi
in seguito nelle considerazioni generali.
Cfr. S e T. in proposito
e Hilbert - Cohn Vossen - Anschauliche
Geometrie.

G R U P P I   D I   O M O L O G I A

Le figure che noi sottoporremo a indagine topologica, in questo capitolo, sono i cosidetti complessi. La loro idea sorge così. Se devo studiare una figura complicata, cercare di scinderla in figure elementari, più semplici da studiare. Naturalmente di questo insieme di figure elemntari interesseranno soltanto quelle proprietà che si trasmettono alla figura più complicata alla quale le abbiamo sostituite. P. es. la più semplice superficie a cui posso pensare è quella di un triangolo (o sup topte eqvti) che è la stessa cosa. Volendo considerare altre superficie scinderle in triangoli ;p es per la corona circolare come in

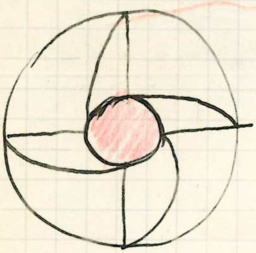


figura. Nat.te però come dicevo, per lo studio d lla figura oggettiva avranno interesse p.tà di questo insieme di triangoli, che non siano inerenti alla particolare decomposizione fatta (p.es. dire sono 8 triangoli ma che valgano in tutte tali decomposizioni possibili, e quindi dicano qualche cosa per la figura che si studia.

L'insieme di triangoli considerati ci dà un esempio di complesso. Prima di venire alla sua df.ne indico e anche qualche primo esempio intuitivo di sup. altri esempi di decomposizione in triangoli (topologic.te interpret P.es. superficie sferica: immagino un tetraedro p.es. regolare iscritto: e proietto le sue facce dal centro sulla superficie (proietto lungo semiraggi). La sup. sferica è così decomposta in quattro triangoli. Invece che tetraedro potrei prendere ottaedro oppure icosaedro: avrei decomposizione in 8 oppure rispettivamente in 20 triangoli.

Per la superficie del toro, potrei cercare di triangolarla direttamente. Ma posso fare anche così, e avrò modo di dare il concetto della identificazione di uso frequente in topologia. Tagli lungo un meridiano, e ho tubo che poi tagli lungo parallelo e distendo su un piano in un rettangolo. Precisamente ogni punto della sup. dà un punto interno al rettangolo, salvo i punti delle linee lungo cui ho tagliato, perchè si sdoppiano; ognuno si può ritenere rappresentato da due punti "opposti" su lati opposti del rettangolo (si corrispondono punti che stanno in faccia). E poi c'è il punto dove si incontrano sulla superficie del toro i due tagli, che ha per corrispondenti addirittura i quattro vertici del rettangolo. Viene dunque la superficie del rettangolo, per quanto riguarda i punti ad esso interni; quando al suo perimetro bisogna "identificare" punti in faccia, cioè pensarli come uno stesso punto e bisogna identificare fra loro i quattro vertici. Sulla

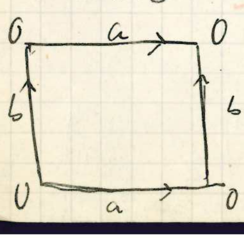
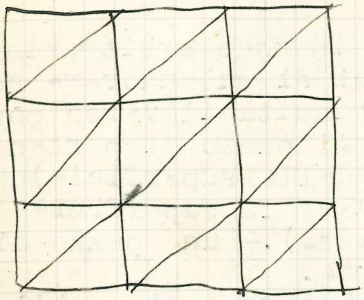


figura chiamo a e a i lati che identifico, e così b e b; e segno inoltre frecce che di

con che mentre su un a un pt. si sposta verso destra, id. sull'al l'altro a. Nat.te potrei invertire, purchè entrambe le frecce.



Per tale superficie posso p.es. considerare la decomposizione in triangoli come in figura (18 triangoli).

Per le superficie in generale si consideraranno le seguenti decomposizioni in triangoli (eventualmente a lati curvilinei. Parleremo di triangoli, di lati e di vertici; un qualsiasi triangolo, oppure lato oppure vertice lo chiamiamo per ora ~~dddd~~ "elemento" (poi si introdurrà un altro termine). La decomposizione di cui si varremo dovrà dunque essere tale che

a) ogni punto della superficie studiata appartenga almeno a un elemento

b) Noi considereremo divisioni "in un n° finito di triangoli; se ne potrebbe ammettere qualche volta anche una infinità numerabile, ma allora si domanderebbe che ogni punto appartenga a un n° finito di elementi

c) Due elementi o non hanno in comune nessun punto, oppure uno appartiene all'altro come lato o come vertice (se ~~dddd~~ l'altro è un triangolo) o come estremo, se l'altro è un lato; oppure hanno un lato in comune (se sono triangoli) o un estremo (se sono lati). Ma non hanno altri punti in comune all'infuori di quelli qui nominati. Così nell'ultimo esempio, non adotte

" per i complessi " infiniti" cfr. per gruppi di omologia S e T. p. 66.

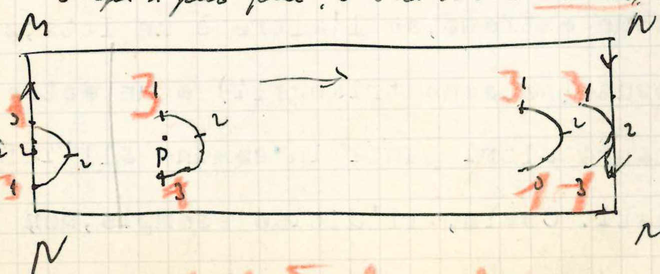
Diciamo,che definendo in un punto in modo arbitrario un verso positivo sulla normale, ci si può muovere sulla superficie conservando con continuità il verso positivo,in modo da arrivare di nuovo al punto di partenza(senza avere oltrepassato bordi della superficie) col verso positivo invertito. Invece la superficie della sfera p.es. è bilatera(chiusa).E un pezzo di di superficie piana è bilatera aperta.

Invece di parlare di sup . unilatera o risp. bilatera,in questi esempi si può parlare di superficie non orientabile ,o risp. orientabile.Nel nastro di Moebius ......

Invece per la sfera o pezzo di sup. piana,ciò non è possibile.Si parla perciò di nastro di Moebius come di una superficie NON orientabile,della sfera o pezzo di piano come di sup. orientabile (si ha orientabilità in due modi diversi,in senso ben preciso,perchè si può partire da un punto con orientazione ,cioè indicatrice arbitraria,e definendola per continuità in ogni altro punto non si può avere per questi risultato contraddittorio ,come si avrebbe per una superficie non orientabile.

Oss. (1)Per quanto in questo esempio bilateralità e orinetabilità di una superficie sia all'incirca la stessa cosa,vi è una differenza essenziale;che quella dipende dalla superficie in relazione collo spazio ambiente(si parlava di normale,ecc;),e questa esclusivamente dalla superficie.Essa appare come una nozione di carattere interno relativamente alla superficie. Come p.te interna è una nozione topologica inerente alla sola superficie.''

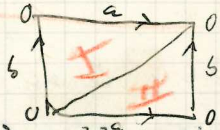
Anche sul rettangolo si vede bene la non orinetabilità inbase alla seguente figura. (il verso di rotazione, come sempre si può fare, è dato da un "cerchio" e verso 123)

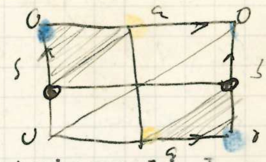


[(1) S.c T. p. 243] immergendo altrimenti, si può avere sup. non orientabile bilatera e orientabile unilatera.)

Dire subito del cerchio

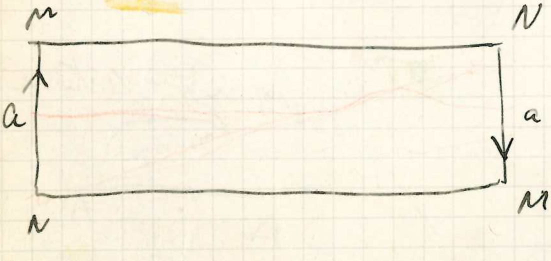
remmo la suddivisione in triangoli, più semplice, di nessuna delle due figure

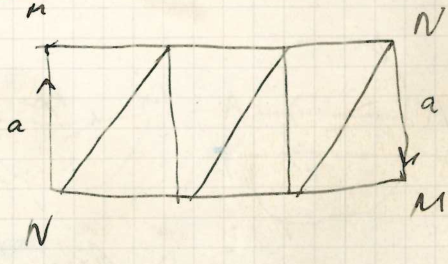




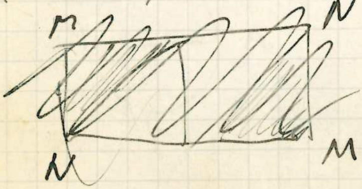
perchè nella prima~~&&&&~~ i triangoli I e ~~II~~ II [non hanno ,ciascuno, vertici distinti e comunque] hanno i tre lati a tutti comuni, e non uno solo, e ecc.; e nella seconda p. es. i triangoli~~&&&&&~~ tratteggiati hanno in comune i tre vertici(e non uno solo)

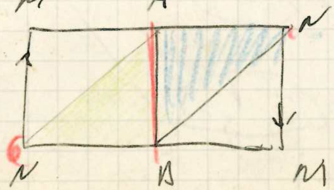
(2) Diamo ancora un esempio di queste "triangolazioni", prendendo il nastro di Moebius, superficie ottenuta da un nastro, o rettangolo, che chiudiamo dopo averne ruotato un lato di 180°. La superficie è notoriamente "unilatera (spiegare: si si può muovere sulla superficie senza oltrepassare i bordi non sovrapposti in modo da passare da un punto su una "faccia" allo stesso punto sulla faccia opposta; cioè, in modo preciso non ha senso distinguere le due facce. E allora la unilateralità di può definire, senza più cadere in contraddizione così. Partendo da un punto con un dato verso di rotazione intorno ad esso (~~[illegible]~~)-indiestrice-ci si può muovere con continuità sulla superficie senza passarne i bordi, fino a giungere allo stesso punto con la indiestrice invertita. Tagliando il nastro secondo il lato lungo il quale si era fatta la sovrapposizione, si ottiene come figura topologicamente equivalente un rettangolo, di cui vanno identificati due soli lati opposti, come in figura e i soli vertici opposti. Allora lo si può triangolare come nell'altra figura



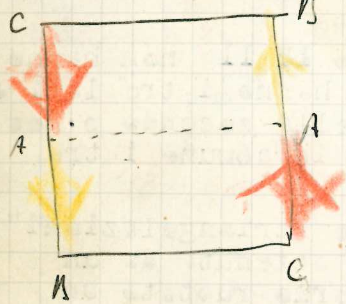


(ma un p. es.





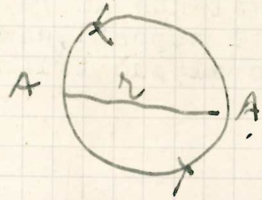
perchè i 2 triangoli tratteggiati hanno in comune i tre vertici unendo lungo AA i due rettangoli (sopra quello di destra): lungo AA coincidono pt. di idetipeu e cancello AA. Le lunghe di idetipagini (2 pieni ciascuno) sui lati BC i le stesse che per il nastro di Möbius.

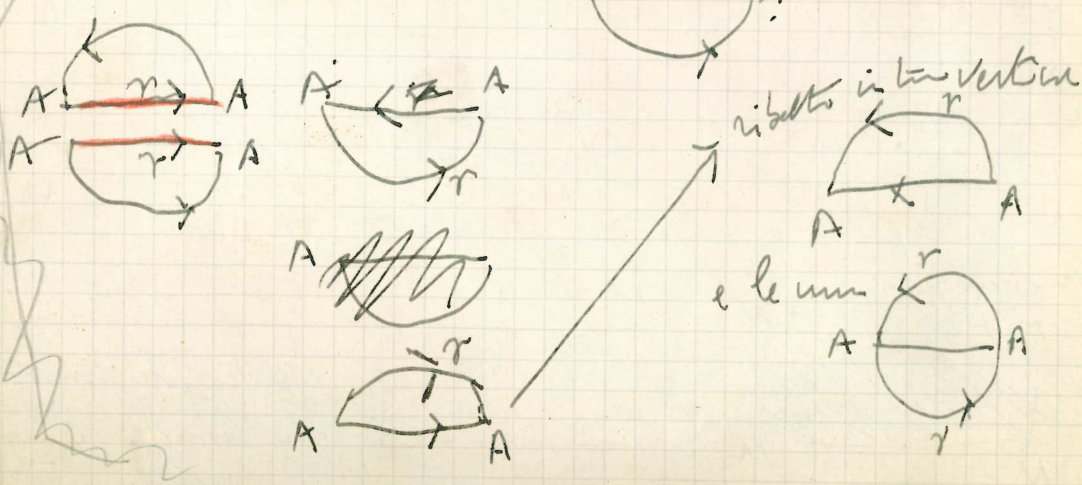


limite del piano π VO

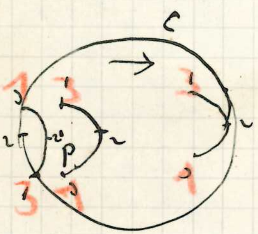
La circ.^{ne} è - per la sua genesi (pr 255 principio) - img. di r_∞. Ma la si può immaginare img. di altre rette generalizzate

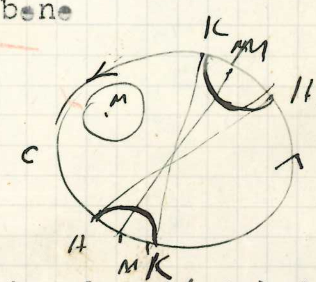
Sottoponendo il piano a π^{to} che la porti in r_∞. Oppure così:





Senza pensare qui a triangolazione ~~&&&&&&&&&&~~, per ora, dò un altro esempio di sup. non orientabile, ma questa volta chiusa. Essa ci è offerta dal <u>piano proiettivo</u>, a cui sostituisco stella di centro O che poi taglio con sup sferica di centro O; precisamente sego col solo emisfero p.es. inferiore, avendo così una rappresentazione generalmente biunivoca: fanno eccezione soltanto le rette orizzontali per O, ciascuna delle quali dà come immagine due punti diametralmente opposti sull'equatore. Mediante proiezione ortogonale sul piano dell'equatore, ottengo il piano proiettivo rappresentato biunivocamente (e continuamente) così: <u>i punti interni a un cerchio c, e punti della circonferenza, dove però per questi vanno identificato punti diametralmente opposti</u>. La sup. è non orientabile: si vede come nell'esempio di prima; v figura. Ed è chiusa: pure riferendoci solo a una idea intuitiva di sup chiusa (ogni punto della sup. è centro di un cerchio (topologico) i cui punti apprtengono TUTTI alla sup), si ha qui la seconda figura e va bene

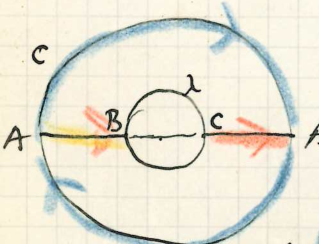


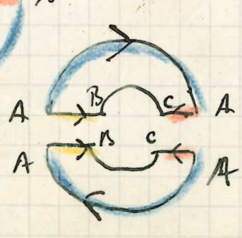


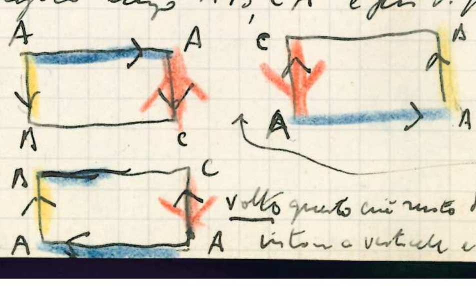
Del resto, il piano proiettivo <u>bucato</u> (cioè dal quale si asporti un cerchietto) si riduce al nastro di Moebius. Si vede:

1) o prendendo il cerchietto col centro in un punto M di c (ultima figura, e allora asportato il cerchietto di ha un quadrilateroKHKH coi due lati KH da identificare come in figura; è proprio il nastro di Moebius della p prec.

2) oppure prendendo il cerchetto interno, p.es. concentrico a c; sia λ: si ha allora la corona circolare cλ, ma dove su c vanno identificati i punti opposti(1). Per arrivare al nastro, taglio lungo AB, CA e poi v. figura





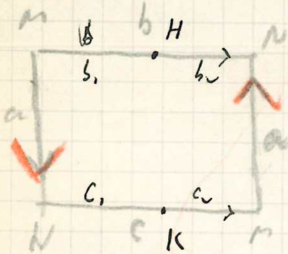


e poi

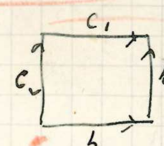
volto questo ciò resto di 180° intorno a verticale e ho

(1) servirà come modello del nastro a p. 259

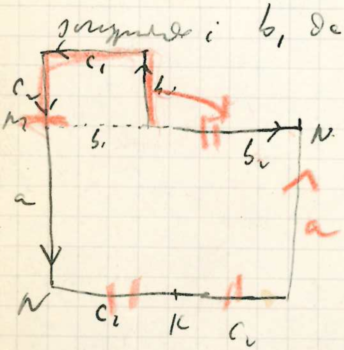
Avremmo potuto seguire un cammino inverso;invece di bucare il piano proiettivo per ot enere il nastro di Moebius,cercare opportunamente di chiudere il nastro di Moebius,superficie aperta (così come chiuderei una sfera bucata con un cerchietto in modo da passare a un sfera chiusa) in modo da passare a una superficie chiusa,che sia poi il piano proiettivo.Effettivamente il nastro di Moebius ha come contorno una linea chiusa(pensare a modeelo).Sul modello rettangolare qui sotto è l'insieme dei due lati b,c(che si riuniscono ,percorrendo p.es b nel verso MN in N .Ora posso pensare a prendere da un'altra parte un cerchio coll'area da esso racchiusa e anche senza pensare a sovrapporlo punto per punto al contorno di cui sopra,il che offrirebbe difficoltà a identificare invece i suoi punti con quelli di tale contorno e passare così a una superficie unica complessiva, ora senza contorni,cioè chiusa,formata dal nastro più il cerchio. ~~&&&&&&~~ Viene effettivamente il piano proiettivo Lo mostra la seguente figura . Spezzo b e c nei pt. H e K



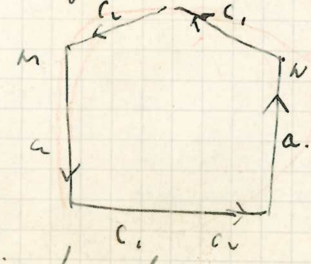
che dividono in b_1, b_2 c_1, c_2 e penso per cerchio = rettangolo identificando il suo contorno all'insieme b e c: v. figura. Lo sovrappongo



sovrapponendo i b_1 ed identificandoli e sopprimo b_1

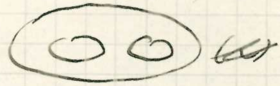


Poi deformo la parte superiore in modo da far coincidere i b_2 e li sopprimo.



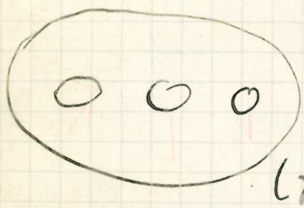
E (piano a quadretti e piccolini) ho appunto nel cerchio l'identificazione di pt. diam. opposti. così ho chiuso nel piano proiettivo

Passsimo ancora in rassegna qualche tipo notevole di superficie. Nella teoria delle funzioni algebriche hanno particolare importanza i modelli topologici-sup . di Riemann;per una curva di genere p:sfera con p manici ,oppure ciambella con p buchi((sfera,toro,ecc.).Vuol dire risp.

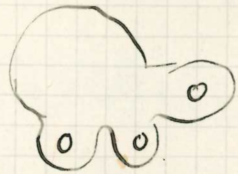


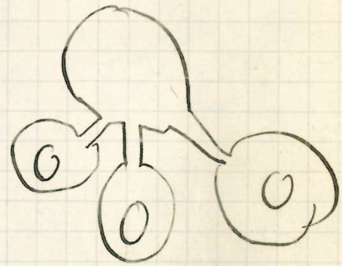
ed è la stessa cosa.P.es. dalla seconda si passa alla prima

con le deformazioni qui accennate (p= 3)



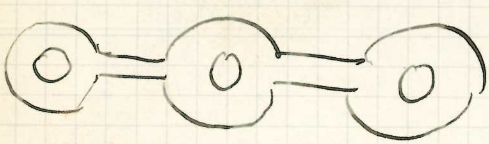
(γ)





È ancora lo stesso [illegible] (p ≥ 1)

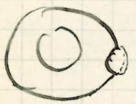
p tori ciascuno in comunicazione col successivo mediante tubo

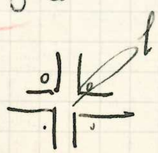


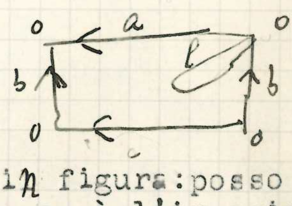
(derivante da γ)

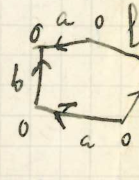
(p. 239)

In estensione a quanto visto per p = 1,ciascuna di queste superficie si può rappresentare su un poligono,coi lati opportunamente identificati. Infatti,facciamo per p = 2, ~~e per p = 3~~.Per p = 2 l'ultima figura mostra che basta prendere due tori,ognuno bucato in un cerchietto e poi saldare i due cerchietti. Per il primo toro lo rappresento col rettangolo ,e posso supporre(figura) che il cerchietto asportato passi per O



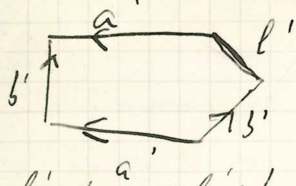




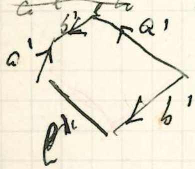


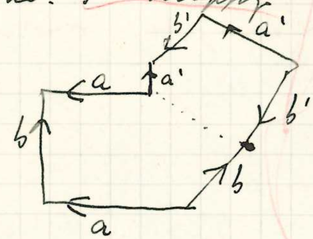
Esso si rappresenta quindi come in figura:posso poi mutarlo nel pentagono di quinto lato l Ho così l'immagine del primo toro bucato.

Analog.te per un secondo toro. Devo poi unire i due tori; creo i 2 pentagoni, sovrapponendo i cerchietti, cioè i lati l e l'

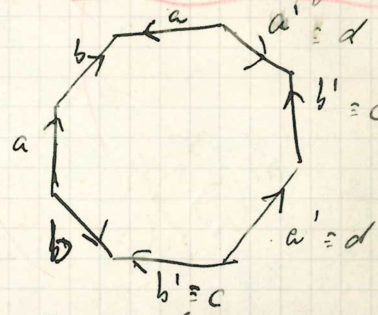


Qui per fare meglio devo ruotare di 180° intorno ~~all'asse~~ a l'asse. Poi sviluppo





Ho così ottagono



Cominciando dal lato orizzontale in alto e chiamando a e b i primi lati a e b che incontro (con le frecce come sono) e così a' b' ~~è l'ottagono a b~~ (e leggerò invece $a^{-1} b^{-1}$ etc. quando procedendo nel verso p.es. antiorario trovo le frecce di a, b ecc. invertite: così viene uno schema fondamentale: pel toro semplice (p. 209 $a\,b\,a^{-1}b^{-1}$)) per l'ottagono $a\,b\,a^{-1}\,b^{-1}\,c\,d\,c^{-1}\,d^{-1}$.

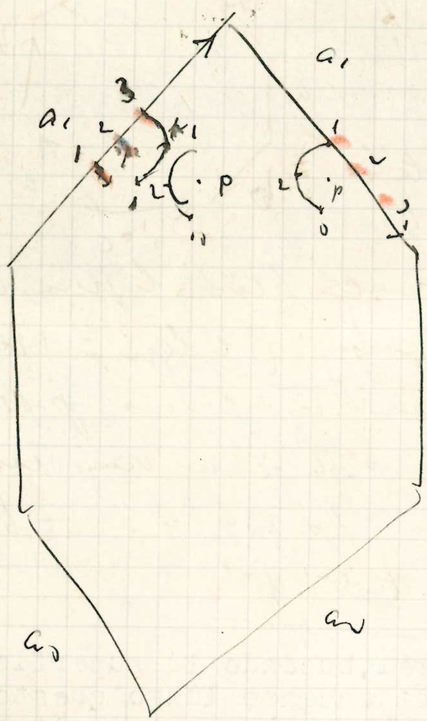
Analogamnte continuerei, bucando la superficie ottenuta secondo un cerchietto, e attaccando lungo questo un toro analogamente bucato. Verrebbe così questa volta un dodecagono

$$a\,b\,a^{-1}b^{-1}c\,d\,c^{-1}d^{-1}e\,f\,e^{-1}f^{-1}$$

In generale per la sfera con p manici troverei un poligono con 4p lati a coppie identificati e lo schema relativo alle identificazioni

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}\, a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}.$$

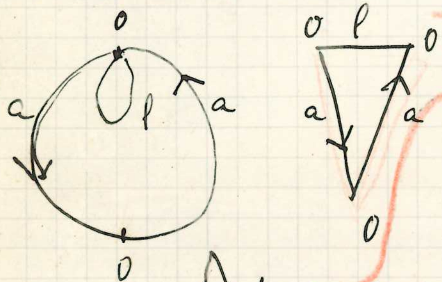
Questi poligoni sono i poligoni fondamentali (di Poincaré) rappresentativi di tutte quelle superficie. Dovuti vengono tutti identificati con contorno "circolare" lungo il quale possiamo dunque di ~~sviluppare~~ attaccarli a analoghi cerchietti di sfere: si [illegible] materialmente (e di ciò dirò poi) mediante identificazione

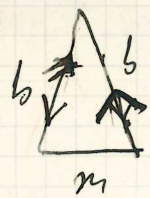


(segnati in rosso: pt. di uscita ed entrata di 1 2 3)

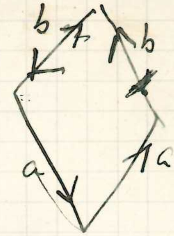
Le sfere con p manici sono dunque superficie(bilatere) che possiamo immaginare di ottenere l'una dopo l'altra a partir dalla sfera,bucandola più volte,e ogni volta attaccandovi un toro parimenti reso ~~pperto~~ mediante un cerhietto.

Proviamo a considerare la costruzione analoga,ma sostitu do ai tori aperti (manici) dei nastri di Moebius,che sono già superficie ~~&&&~~ aperte. Se attacco un nastro di Moebius -considerare la sfera aperta è come considerare un cerchio e allora si arriverà al piano proiettivo,come già visto. Pensiamo dunque a attaccare intanto due nastri di Moebius Posso pensare di cominciare a attaccarne uno,ottenendo così sup. chiusa,e aperta poi questa con cerchietto,attaccarvi il secondo nastro. La prima volta avrò ottenuto il cerchio con identificazione dei punti opposti.Conviene rappresenta selo come un poligono con due soli lati(curvilinei) dati ciascuno da un semicerchio a a .Devo aprire lungo un cer chietto,che posso pensare uscente da O come in figura,di periferia l,poi distendere l in un segmento e ho così come immagine del piano proiettivo bucato il triangolo (vo) aal (è poi,come piano proietti vo bucato un nastro di Moebius). Poi devo prenderne un analogo b b m e attaccare lungo l e m.





(p.254)



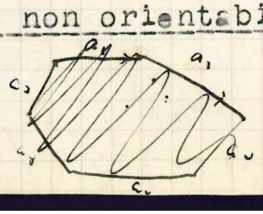
aabb.

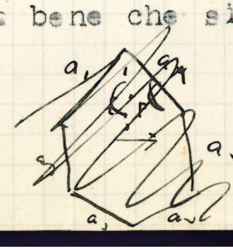
E' questo il poligono fondamentale che rappresenta la superficie chiusa:sfera con due nastri di Moebius attaccati

E così posso proseguire:posso arrivare a una sfera con p nastri di Moebius attaccati, rappresentata da un poligono fondamentale di 2p lati,e precisamente

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots\dots a_p a_p$$

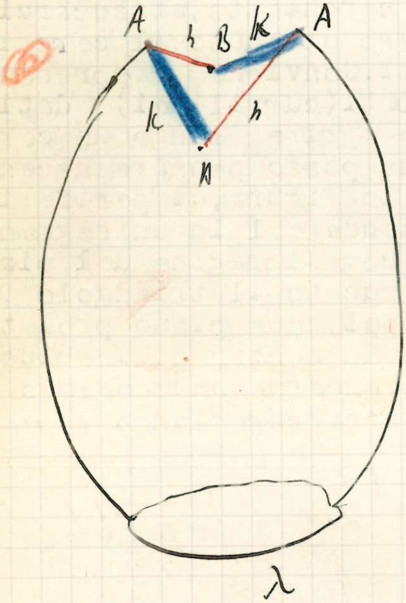
Il modello ottenuto conferma bene che si tratta sempre di superficie non orientabili.





v. cont.

1 mantello "sup. di S_2" senza identificazione



Potremmo anche non accontentarci dal modo piuttosto as

tratto in cui abbiamo attaccto i nastri di Moebius alla

sfera,e cercaredi realizzare questa costruzione in modo

(Hilbert. Cohn Vossen Anschauliche Geom. p. 249) in S_3

più concreto. Per esempio si può fare così.A p. 245 abbi

mo,sotto 2),trovato il nastro di Moebius rappresentato

così:punti interni alla corona circolare C λ &,dove

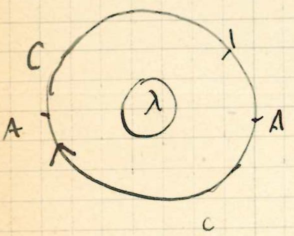
si dovevano identificare i punti opposti sul cerchio c

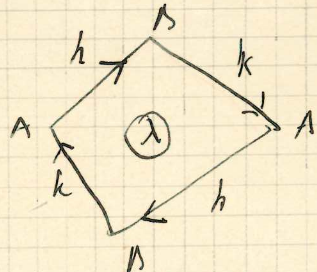
(esclusivamente).Deformo,mantenendo λ circolo e trasfor

mando c in unquadrangolo p es quadrato,sempre identifi

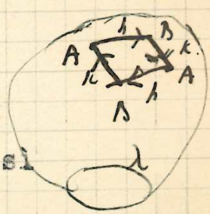
candosi sul suo contorno punti opposti,sui lati h ≡ AB

e k ≡ BA come in figura . Poi passo per continuità a un gruppo di superficie sferica limitato "in basso" dal cerchio λ e "in alto" da un foro col bordo di



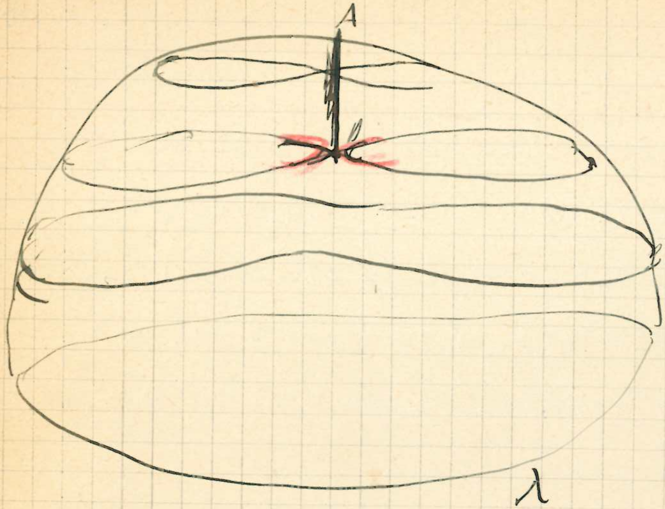


quattro segmenti ... h k h k



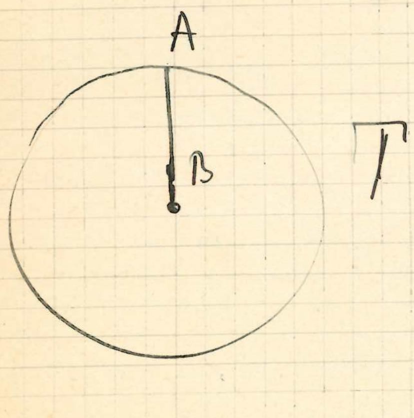
Cerchiamo ora di realizzare materialmen
te le identificazioni degli h e dei k,
chiudendo in alto la sfera.Bisogna cerca
re di far coincidere gli h fra loro e così
i k.Ciò è possibile ALZANDO i punti A ,
mentre si abbassano i punti B,e contemporaneamente avvicinia
mo fra loro i punti A e fra loro i punti B, in modo che gli
h si vengono a sovrapporre fra loro ,e così i k.

v. figura accanto Quando questo processo sarà ter
minato,h e k saranno di fatto sovrapposti in un
unico segmento(verticale) BA lungo il quale (identi
ficazione degli h) si deve pensare di passare dalla fa


A
λ

da posteriore sinistra alla anteriore destra, e dalla posteriore destra (id.ne dei k) alla anteriore sinsitra). La superficie che consideriamo ha cioè una linea doppia, costituita dal segmento AB, lungo le quali si tagliano due falde di superficie (una unica post sin - ant. destra, e un'altra...). Data la genesi della superficie per noi è lecito lungo la linea doppia attraversarla restando però sempre sulla stessa falda Essa non è una linea di passaggio da una falda all'altra! (cioè i punti vicini a un punto dato van sempre intesi su data falda). La forma della superficie ottenuta è all'incirca quella della figura contro, dove sono segnate le intersezion con alcuni piani orizzontali. La si può immaginare come p es una mezza sfera (metà superiore) o calotta ~~che~~ venga compressa secondo una direzione orizzonatele "avanti-indietro", la compressione facendosi sentire poco in basso e molto in alto, dove a partire da un certo momento la metà anteriore e la metà posteriore vengono a aderire lungo il diametro verticole (mentre restano staccate dalle due parti di quecto). In altre parole, la superficie presenta una cavità verso il basso, e a un certo punto questa cavità di biforca in ~~due. Il Dyck~~ Tale sup. e (Kreuzhaube) appare come una "calotta incrociata", come la chiameremo per brevità

Questa calotta ~~&&&&&&&&&&&&~~ incrociata equivale dunque a un nastro di Moebius: essa ha però il vantaggio di mostrare meglio di questo il contorno circolare (la linea λ) lungo la quale potremo attaccarla a una sfera aperta, realizzando così una sup. chiusa (piano proiettivo). Se ne possono attaccare p in altrettanti cerchietti di una sfera e si ha così la sfera con attaccati i p nastri di Moebius della p. ~~&&&&&~~ 253.
Vedremo più avanti che con le sfere con manici si hanno tutte le sup. chiuse
~~La calotta incrociata e le sup. da essa ottenute com~~ ora si è detto hanno però un inconveniente, in quanto tale calotta presenta una linea in cui essa si attraversa. Questa linea in sè, non presenta inconvenienti, purchè resti ben chiaro che lungo di essa NON si deve passare da una delle


A
B
Γ

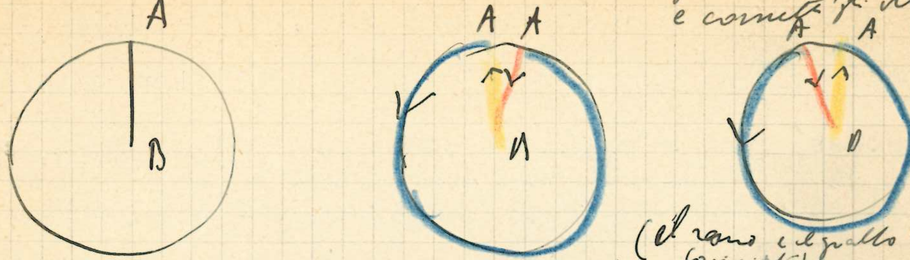
due falde all'altra. Ogni punto anche della stessa linea doppia non dà luogo a complicazioni, purchè resti inteso che esso va considerato sull'una o sull'altra delle due falde: esso possiede allora un intorno circolare. Inconvenienti si hanno invece per ciascuno dei due punti A e B estremi del&&"segmento "doppio. Essi devono essere considerati, ~~[illegible]~~ come punti singolari Su ciò tornerò fra un momento(p.   )

Per ora osservo che avrei potuto svolgere le stesse considerazioni(p.255 e segg.ti) prendendo semplicemente i punti interni a c colla solita identificazione, ma senza limitare internamente la regione col cerchio λ . Sarei così passato invece che a una calotta incrociata a una id id ma chiusa al di sotto di λ.  . E' questa una nuova immagine del piano proiettivo (chiamiamola per intenderci calotta oppure sfera incrociata incrociata chiusa) Su essa faccio due osservazioni

1) Se io proietto ortogonalmente la &&&&&&& incrociata chiusa su un piano perpendicolare&&&&&&&&&&& alla dir zione lungo cui si è operato lo schiacciamento della sfera, è intuitivo che in proiezione si ottiene l'interno di un cerchio T ricoperto due volte; ogni pun o interno a T è proiezione di due punti della sfera(1); vi è poi un segmento AB &&&&&&&&&&& in T (v. figura) proiezione del segmento omoni

(1) pt. contorno ~~per~~ di T, provenienti dal ct. apparente, ogni pt. è proiezione di uno solo

taglio lungo AB appuntato e connetto gli orli

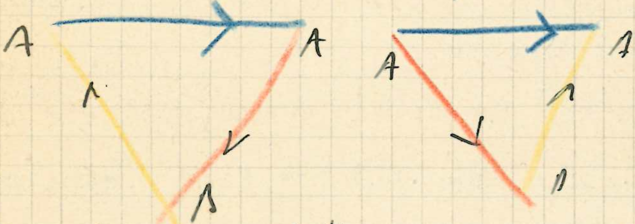


(il rosso e il giallo van percorsi concordi)

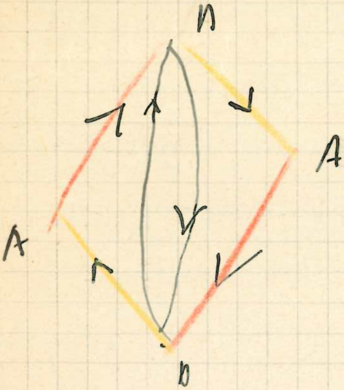
ribalto il cerchio oltre

vi estendi

AA e stesso in lungo



sovrappongo gli AA ribaltando poi il rettangolo di sotto



Poi riunisco BAA in un solo lato e

ho creato a ... proprio

il piano proiettivo (p. 253)

mo della sfera; lungo AB, coerentemente a quanto avve niva per la sfera, dobbiamo immaginare che i due strati che ricoprono T si connettano l'uno coll'altro

Abbiamo in definitiva due fogli che ricorpono T, connessi fra loro in croce attraverso AB; inoltre dall'uno si passa all'altro lungo la periferia di T.
[cioè non è la solita riemanniana da fogli di $\sqrt{z}$].
&&&&&&&&&&& Del resto è facile convicerci direttamente che questo è un modello del piano proiettivo: v. le figure contro dove stacco â due fogli stabilendo opportunamente le identificazioni. Pensando ai due fogli come a due membrane "gonfiando" lo spazio compreso fra esse si ritorna evidentemente alla "sfera incrociata".

2) Un modello algebrico molto semplice della "sfera incrociata" e quindi anche della calotta incrociata si ha così. Considero un punto M di una superficie qualunque (regolare dal punto di vista della geom. diff.) In M considero tutte le sezioni normali coi relativi raggi di curvatura, i quali sono compresi fra un minimo R_1 e un massimo R_2 relativi alle due
aventi però tracce le linee di curvatura
sezioni normali principali, fra loro perpendicolari. Qui più precisamente consideriamo il caso di un punto ellittico, in
che suppongo senz'altro positivo:
cui R_1 e R_2 hanno il medesimo segno (ma li supponiamo diver
e p.es. pure $R_1 < R_2$
si fra loro, cioè che M non sia un ombelico) Per ognuna di quelle sezioni normali immaginiamo il relativo cerchio &&&&&& di curvatura, e la superficie luogo di tutti questi centri di curvatura. Sia S. E' facile scrivere l'equazione di S: si

26 2

[In casi si potrebbe cercare di fare considerazioni analoghe a quelle fatte più sotto per le sup. di Steiner]

entrante ≥ 0 da $K \geq 2R_1$, $2R_2 \geq K$

cioè $2R_1 \leq K \leq 2R_2$

entrante ≤ 0 da $K \leq 2R_1$, $2R_2 \leq K$

contraddittorie poiché $R_1 < R_2$. Resta quindi solo la 1ª possibilità

Infatti la S è luogo del cerchio nel piano di anomalia φ: $y = x\,tg\,\varphi$ del cerchio che posso immaginare interno sulle sfere $x^2+y^2+z^2-2Rz = 0$ dove $\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$

$\cancel{R = \frac{R_1 R_2}{R_2\cos^2\varphi + R_1\sin^2\varphi}}$. Quindi si deve eliminare φ tra le (1) (2) $\cancel{\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}}$ $(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}\right) = 2z$ [*]

~~Dalla $\frac{y^2}{x^2} = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} \ldots \frac{y^2+x^2}{x^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi}$ ... allora (2)~~ è

Ora $\frac{y}{x} = tg\,\varphi$ da $y = \rho\sin\varphi$ con ρ fattore di proporzionalità
$x = \rho\cos\varphi$

$\cancel{R_1R_2}$ $R_2 x$ che vale ovviamente $\sqrt{x^2+y^2}$ e allora [*] (da cui (moltiplicando per ρ^2 propria la (*))

trova(cfr p es l'ind.ne in Kommerell II 173, Hilbert-Cohn Vossen p 277),prendendo per asse z la normale in M,e gli assi x e y coincidenti con le tangenti di curvatura

$$\left(\frac{x^2}{R_1}+\frac{y^2}{R_2}\right)(x^2+y^2+z^2) = 2z(x^2+y^2) \qquad (*)$$

Si tratta di una S4,che ha in M un punto triplo,come evidente sull'eq.,che ha l'asse z-cioè la normale come retta doppia,come anche evidente sull'equaz. La superficie è rappresentata da due modelliesistenti(serie IX e serie XXII),dove si vedono vari cerchi di curvatura,come dirò.Sul modello ~~&&~~ non è evidente che M sia triplo:il fatto è che-v. equazione- il cono cubico tgte è formato dei tre piani di cui due sono immaginari($x^2+y^2=0$) ed è reale solo $z=0$ &.Un segmento della retta doppia,ma solo un segmento è visibile sul modello:ce ne rendiamo facilmente ragione studiando il cono quadrico tgte in un punto doppio $P(z=k)$. La sua equazione si ottiene nel modo più semplice con una traslazione di assi lungo l'asse z che porti in P l'origine:

$$x=X \qquad y=Y \qquad z=Z+k.$$

l'equazione diventa

$$\left(\frac{X^2}{R_1}+\frac{Y^2}{R_2}\right)(X^2+Y^2+Z^2+2kZ+k^2) - 2(X^2+Y^2)(Z+k)=0$$

e il cono quadrico tgte in P (origine) è:

$$k^2\left(\frac{X^2}{R_1}+\frac{Y^2}{R_2}\right) - 2k(X^2+Y^2) = 0 \quad \text{cioè}$$

$$\left(\frac{k}{R_1}-2\right)X^2 = \left(2-\frac{k}{R_2}\right)Y^2.$$

Quel cono quadrico si spezza dunque in due piani: e questi sono reali quando le due parentesi hanno il medesimo segno, cioè v. retro

$2R_1 \leq k \leq 2R_2.$

Precisamente si hanno due piani tgti reali e distinti && quando vale la diseguaglianza(pt biplanari) e invece pti uniplanari per il segno eguale.Vi è dunque un segmento BA sulla normale,i cui estremi sono uniplanari, e i punti intermedi biplanari con piani tgti reali. Gli altri punti generici della normale sono biplanari ma con piani tgti imgri,cosicchè &&&&&& lungo essi la normale appare come una retta doppia isolata,analoga al punto doppio isolato delle curve piane.I punti B e A-v. la loro z- sono la intersezione col minimo e il massimo cerchio di curvatura.Anche geometricamente è chiaro che i punti del segmento BA si ottengono due volte,nel senso che per ognuno passano due cerchi di curvatura,cioè due cerchi generatori della S4.Si vede bene sul modello,ed è anchechiaro dalla formola di Eulero $\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}+\frac{\sin^2\varphi}{R_2}$ secondo la quale si ottiene uno stesso R per φ e per $-\varphi$,cosicchè si hanno due diversi cerchi che vanno a segare la normale in uno stesso punto.

In definitiva i punti di BA sono intersezioni di due falde reali della superficie S_4) Le considerazioni fatte dicono già che la S4 è topologicamente una "sfera incrociata": la cosa si potrebbe controllare ancora meglio stu&&&&& diandone le intersezioni con piani orizzontali, per convincersi che hanno lo stesso comportamento della figuraba p 256. Sul modello si vede poi anche bene l' nico piano tgte nei due punti doppi uniplanari B e A;che coincide secondo quanto precede con l' no o con l'altro dei due piani &&&&& normali princip ali. La sup. algebrica considerata è dunque modello del piano proiettivo

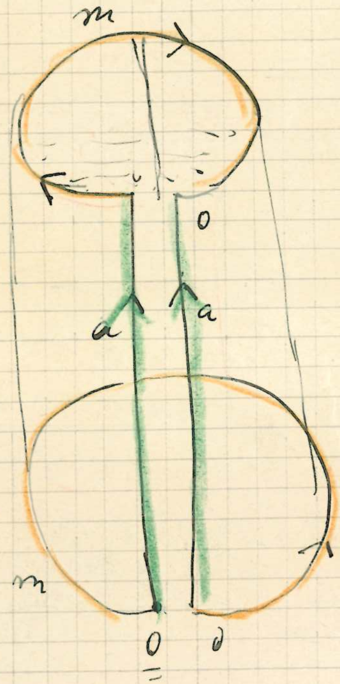
Sia per questo modello algebrico,sia per la sfera in crocista dal punto di vista topologico(o la calotta in crociata)si presenta la circostanza che i due punti A e B come si è accennato si comportano in modo diverso dagli altri,cioè sono punti singolari.La singolarità consiste e diciamolo subito non riguarrda la superficie in sè,ma in in questo &&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& &&&&&&&&&& relazione collo spazio ambienne;cioè non è una particolarià interna della superficie,ma di essa in relazione allo spazio dove è immersa(cfr. quanto si è detto per la orientabilità o meno a p 242) Un punto interno a una superficie 9999-cioè non del contorno se questo vi è -vuol dire un punto tale che i punti ad esso prossimi costituiscano un cerchio topologico:pensare p es a punto qualunque di sfera,o generico della sfera incrociata,o anche sulla linea doppia di questa,in relazione come si è detto a una data falda.Vuol dire dunque che per tale P,interno, è possibile stabilire una corr.za topologica fra un suo intorno sulla superficie e l'interno di un cerchio.Ma ciò può avvenire in due sensi diversi,diciamo pensando a superficie come qui pensiamo dello spazio ordinario

1) in senso stretto.Vuoldire che la deformazione topologica di cui si tratta riguarrda soltanto i punti della superficie,ma non quelli dello spazio ambiente

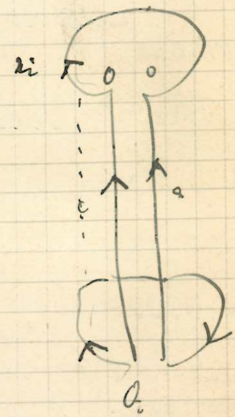
2) in senso largo,vuol dire che que l'intorno si può ridure a un cerchio con una def.ne topologica,cioè opernado per continuità,cioè con una trasformazione continua dello spazio ambiente

La singgolarità di cui parliamo consiste in questo che mentre i punti generici p es della sfera incrociata ,e an

0-0 525 .)

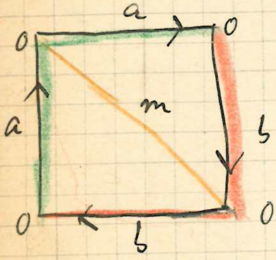


inverse plutons

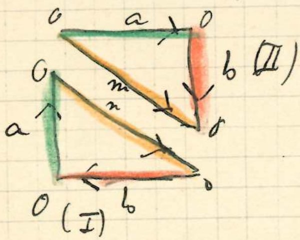


Domandiamoci dunque se del pi no proiettivo si può avere un modello che sia una superffcie (tutta al finit) chiusa e senza punti singolari

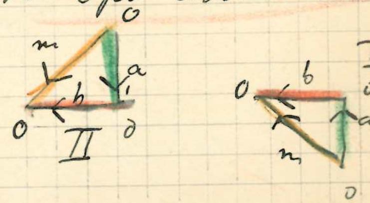
Anzi, vediamo prima anzichè per il piano proiettivo (sfera con un nastro di Moebius, o una calotta incrociata attaccata per la sfera con due nastri di Moebius, cioè per il poligono fondmentale aabb di p 253. Qui è più facile ottenere il risultato. Taglio il quadrato aabb secondo la diagonale segnata

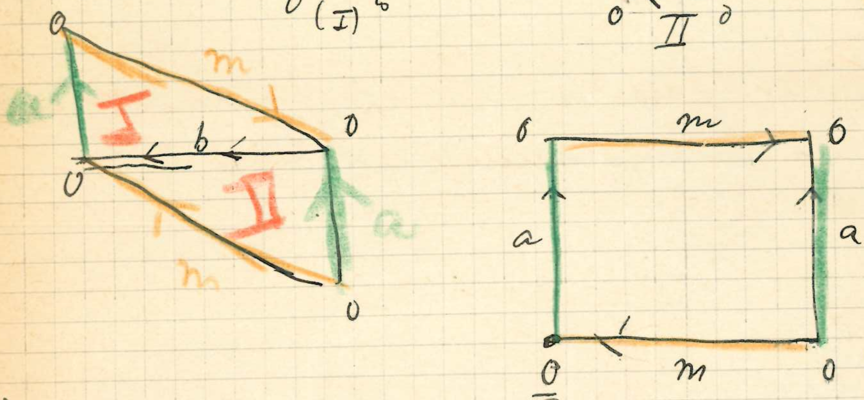


in figura : prima unisco i triangoli lungo b,



(ruotando prima il 2° con rot. di 90° e poi ribaltato intorno b ecc)

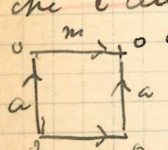




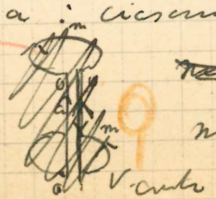
Trovo così il rettangolo

$$a\, m\, a^{-1} m.$$

che è analogo ma diverso dal poligono fond.le relativo al toro

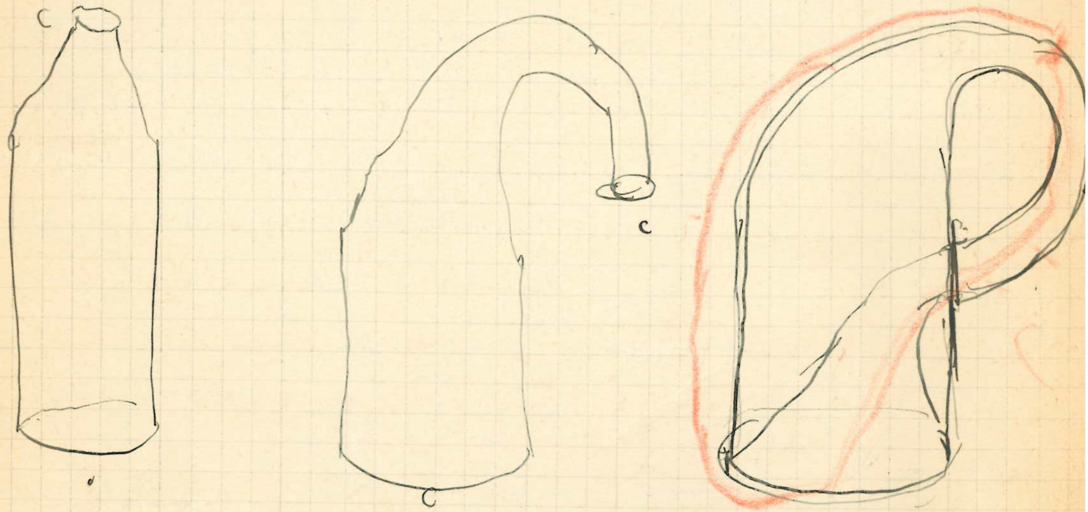


$a m a^{-1} m^{-1}$. La differenza è solo nelle frecce di m. Comunque come le si possono avvolgere su un cilindro, portando a coincidere gli a, in ciascuno dei due segmenti m diventa così un cerchio



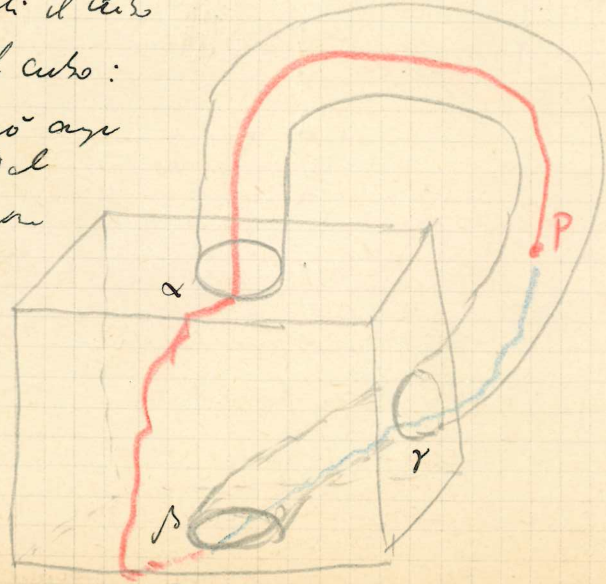
~~ma~~ i due cerchi vanno identificati

(om m con) ma non come avveniva pel toro



(v. disegno modello)

Altro modo per il modello: presenta angolosità che si possono eliminare; lungo ~~[illegible]~~ i cerchi α e β, lungo ciascuno dei quali il tubo si attacca al cubo: lungo α e β si può avere il dover passare dal tubo al cubo: invece lungo γ no (c'è le linee di attraversamento) Le curvilateralità si vede nelle linee (appunto nelle parti "interne" del tubo).



dove,v. figura,vanno identificati punti dei due cerchi m che stanno uno sopra l'altro,cioè su una stessa generatrice.Invece per noi la legge di identificazione è diversa: prima di portare a coincidre i due cerchi in modo che vengano a coincidre punti sovrapposti,bisogna preventivamente rasformare uno(p es il superiore) nella simmetria rispetto al suo diametro per O.Ora ciò si può eseguire materialment così.Pensiamo al cilindro come a un tubo piuttosto & lungo,e al momento terminato sopra e sotto dai due cerchi c.Deformiamo il cilindro restringendolo alquanto nella sua parte superiore e poi capovolgiamo questa,cosicchè per il cerchio c superiore si viene a determinare la simmetria ora detta.Si tratta poi di portare a coincidere i due cerchi.Intanto facciamo ~~&&&&&~~ passare la parte superiore del tubo attraverso la inferiore,in modo che vi entri,e poi l'allarghiamo in modo da dar riprendere al cerchio ~~c~~ m già superiore le sue dimensioni primitive, portiamo a oincidere i punti dei due cerchi che devono coincidre. Sarà poi questione si smussare la superfìcie chiusa ottenuta lungo m e si ha una superficie chiusa senza punti singolari immagine della superficie unilatera "sfera con due nastri di Moebius". Vi è una linea di attraversamento,la quale(come si troverebbe) non si può evitare,ma i suoi punti NON sono singolari;vanno considerati come già visto in caso analoghi uno su ciascuna falda

Su modelli si vede bene la ~~non~~ NON orientabilità.- Per l'analogia col toro questa sup si chiama toro non orientabile ,superficie chiusa,modello ricordiamolo della sfera con due nastri di Moebius.

Per il piano proiettivo(sfera con un nastro di Moebius) la questiore si risolve in modo più complicato. Finchè per la superricie,tutta al finito,chiusa,si ammettono punti singolari,già si è vista una soluzione(la sfera ~~&&&~~ incrociata).E sarebbe facile trovare altre soluzioni dello stesso genere.Una p.es. è offerta dalla superficie di Steiner,di equazione(che interpretiamo in coordinate cartesiane ortogonali;la super icie è però caratterizzata proiettivamente)

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz=0 \quad (1)$$

cfr. modello serie

(v. corso 34-35,p. 44).La superficie,come si vede sull'equazione,ha un punto triplo nell'origine,cosicchè è razionale ha inoltre tre rette doppie uscenti da esso,i tre assi,come anche evidente.E si chiama appunto sup. di Steiner una sup con tali singolarità.Ora la superficie,razionale come già detto, si rappresenta quindi punto per punto sopra un piano π ,&&&&&&&&&&& con corr.za algebrica biunivoca(almeno generalmente:ora preciseremo).Ora è essenziale osservare quanto segue

1) La superficie,pure dando una immagine biunivoca dei punti del piano π ,a differenza di questo è tutta al finito;cioè si può racchiudere p.es. in un cubo.Basta verificare sull'eq.ne che p.es. Z è limitato&&&,cioè che se prendo a p.es. positivo abbastanza grande la sezione $z=a$ non ha punti reali(fuori dell'asse z,che sega certo pt doppio,vuol dire che sarà isolato).Segando ottengo,o&&&&& ~~...~~ $x^2y^2+a^2(x^2+y^2)+axy$ o in coord polari (divido per ρ^2 v. sopra) $\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi+a^2+a\sin\varphi\cos\varphi=0$

Ora se scelgo $a>1$, ~~...~~ $a^2>|a|>|a\sin\varphi\cos\varphi|$. Quindi anche se il 3° termine è negativo, non compensa il 2°; e aggiunto il 1° (≥ 0), la somma è >0 e non $=0$.

2)Comunque io prenda una sup. algebrica razionale al finito,S essa dembra dare una immagine topologica del piano. Ma vi è l'inconveniente che la corr.za tra i suoi punti e quelli del piano rappresentativo è soltanto generalmente biunivoca,potendo intervenire dei punti <u>eccezionali o fondamentali</u>,ognuno dei quali non ha un corrispondente determinato,m ma infiniti,tutta una linea fondamentale.Quindi una tale superficie non dà una immagine topologica del piano,perdendosi la biunivocità nei punti fondamentali. P.es. pensare alla proiezione stereografisca delle quadriche.Ho qui un punto fond. O sulla superficie,a cui corrispond sulpiano π la traccia del piano tangente in O;e due pt fond su π ,le tracce delle generatrici della quadrica per O.Se provassi a prendere ellissoide per avere immagine al finito del piano proiettivo,mancherebbero i pt fond reali su π ,ma vi è sempre quello sulla quadrica,O.Perciò l'ellissoide non serve:del resto per ellissoide sfera viene così l'immagine del piano con un solo pt all'infinito. Ma la difficoltà cade se si ha a che fare con superficie,per la quale ~~essa le difficoltà relative ai~~ punti non intervengano

Fare a) spiegaz. trasf.ne quadr. piane $\rho z_1 \ldots = y_2 y_3 \ldots$ Sua invertibilità (trasf.ne cremoniana). Rette C^1: a C^2 C^2 con 3 pt doppi; e viceversa. (un po' difficile) v. 278

b) Da O il pt $xyz \equiv x_1 x_2 x_3 x_4$ si proietta su $x_4 = 0$ in $(x_1 x_2 x_3 0)$ che chiamo per chiarezza $y_1 y_2 y_3 0$ e ho $x_i = y_i$ $(i = 1, 2, 3)$ mentre x_4 si ricava da (1) $x_4 = -\frac{\sum y_1^2 y_2^2}{y_1 y_2 y_3}$

Quindi si fanno ~~[illegible]~~

$$\begin{cases} \rho x_1 = y_1^2 y_2 y_3 \\ \rho x_2 = y_1 y_2^2 y_3 \\ \rho x_3 = y_1 y_2 y_3^2 \\ \rho x_4 = (y_1^2 y_2^2 + \ldots) \end{cases}$$

che sono eq. par.che delle F^4 di Steiner. Alla $\sum \lambda_i x_i = 0$ corrisponde la C^4 $\lambda_1 y_1^2 y_2 y_3 + \ldots = 0$

con 3 pt. doppi nei pt. fond. cioè

$$\lambda_1 z_2^3 z_3^3 z_1^2 + \ldots + \lambda_4 \sum y_1^2 y_2^2 y_3^4 = 0$$ con

$\lambda_1 z_2 z_3 + \ldots + \lambda_4 \sum y_1^2 = 0$: Alle $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = z_2 z_3 : z_3 z_1 : z_1 z_2 : z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

Sono dunque C^2: non vi son pt. base (le 1e 3 di $A_1 A_2 A_3$ non nella 4a)

Così: si tratta di far vedere che ogni pt. della F^4 proviene da un pt. z, senza eccezioni. Se il pt. x ha le coord.te tutte $\neq 0$ si vede subito p. es. $\frac{x_2}{x_1} = \frac{z_3 z_1}{z_2 z_3} = \frac{z_1}{z_2}$, onde z_1/z_2 è noto e così z_3/z_2 etc. Anzi per concludere ciò basta supporre $x_1 x_2 x_3 \neq 0$. Resta a studiare il caso di una di queste x_i nulla, cioè di una z nulla. Studio p. es. i pt. $z_3 = 0$. Allora $x_i :: 0 : 0 : z_1 z_2 : z_1^2 + z_2^2$. Quindi vedo che vien in S_1 un pt. ove $x = 0$, $y = 0$.

(segue 276)

fondamentali. Pensando alla rappresentazione

$x_i = \varphi_i(u,v)$ $(i=1,2,3)$

è chiaro che essi mancano sul piano $\pi = (u,v)$ appena &&&&&& le curve $\varphi_i = 0$ non hanno punti comuni a tutte, cioè il sistema lineare

$\sum \lambda_i \varphi_i(u,v) = 0$

rappresentativo delle sezioni piane della superficie è un sistema senza punti base Ciò nonavviene per le quadriche, ma avviene invece per la superficie di Steiner, perchè rappresentandola opportunamente su un piano si ottiene un sistema rappresentatvo formato da coniche senza punti base (per proiezione come sopra si hanno quartcihe con tre punti doppi nelle tracce degli assi; fare poi ~~&&&&&&&~~ trasformazione quadratica coi punti fond. ivi, spiegare, e in definitiva vengono coniche come detto) Provare per iscritto Resterebbe il pericolo di punti fondamentali sulla sup.; ma anchequi si vedrebbe che non vi sono && Si potrebbero peer esempioscrivere le formole effettive di rappresentazione secondo il procedimento indicato, e poi cercaredi ragionare su quelle. Ma la ~~cosa più semplice~~ un modo più ~~semplice~~ istruttivo (è di prendere anzitutto anzichè la sup. di Steiner quella di Veronese (spiegare, rapp; parametrica (Per chi ignora iper spazi, pensare a spazio proiettivo numerico)

$x_1 = u_1^2 \quad x_2 = u_2^2 \quad x_3 = u_3^2 \quad x_4 = u_2 u_3 \ldots \quad x_5 = u_1 u_3 \quad x_6 = u_1 u_2$

Qui si vede & bene che si ha biunivocià sena eccezione nei due sensi: date le u_i (non tutte nulle) non viene mai indetermonazione per i rapporti fra le x_i che non si annullano mai tutte, e viceversa prese le x con p es $x_1 \neq 0$, le $\frac{x_5}{x_1} = \frac{u_3}{u_1}$, $\frac{x_6}{x_1} = \frac{u_2}{u_1}$ fanno conoscere le u_i

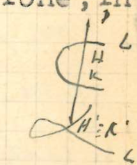
(segue da 275) Si ponga $z = \frac{z_1 z_2}{z_1^2 + z_2^2}$. Effettuata vi sono 2 valori di z_1/z_2 che danno uno stesso punto di $x = y = 0$. Ora dunque parrebbe che la corr.^{za} non sia più biunivoca. Vi è su $z_0 = 0$ una inv.^{ne} ($\frac{z_1 z_2}{z_1^2 + z_2^2} = \text{cost.}$) che a coppie corr.^{no} i pt. di $x = 0, y = 0$. In realtà però si tratta su F^1 di una retta doppia, e i 2 pt. che corrispondono su (z) a ogni suo corrispondono a quello delle due falde. Quindi non cessa la biun.^{tà}. (~~Alle~~ Ai 2 pt. A_1, A_2 che fanno invol.^{te} coppia (cost. dell'eq.^{ne} $= 0$) corrisponde su F^1 il pt. O ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) e per la stessa ragione anche ad A_0. Va bene è il pt. triplo: Le cui corr.^{te} per ognuna delle 3 falde.

(Sono poi rette rapp. piane i pt doppi delle inv.^{ni})

↳ e il pt triplo su tre falde

Spiegare la cosa per F[illegible] sul sist. rappresentativo.

Quindi la sup. di Veronese si rappresenta sul piano senza punti fondamentali in nessun senso. D'altro lato, è notissimo che la sup. di Veronese dç per proiezione generica su spazio ordinario, proprio una superficie di Steiner; e la corr.za che nasce fra la sup. oggettiva e la sua proiezione è biunivoca senza eccezioni. Naturalmente bisogna avere riguardo a una circostanza per noi non nuova. Quando si poretta una curva sghemba L da un centro P in una linea piana L', nascono su questa punti doppi per proiezione, in base alle corde PHK uscenti dal centro di proiezione: la corr.za non cessa di essere biunivoca anche per H' e K'; è vero che a prima vista sembra che così uno stesso punto della L' corrisponda a due punti distinti della L, ma in realtà è origine, come punto doppio di



due rami, e va distinto in base a questi. Ora tra sup. di Veronese e di Steiner ha luogo un fatto analogo, sul quale non posso qui entrare in particolari. La corr.za è biun senza eccezioni; ma lungo ognuna delle tre rette doppie, ciascuna delle quali è intersezione di due falde della superficie bisogna pensare ogni punto due volte, e cioè separatamente su ciascuna falda. (come già a p. 261) E' tuttavia da osservare che, come là entrano in gioco punti singolari, e sostanzialmente per la stessa ragione. Per ogni retta doppia, vi è un suo tratto lungo cui si tagliano falde reali, e un altro falde img coniugate; i punti sono biplanari ma prima con piani tgti reali, e ppi immaginari. Ognuno dei punti dove una retta doppia esce dalla superficie come punto di passaggio fra quelli è uniplanare, e si presenta come un punto singolare, come a p. 262

Sul modello si può vedere che si tratta di una superficie unilatera (come deve essere , almeno in base alla presunzione che si conservi il carattere della non orientabilità). Meglio ancora approssimando il modello col così

(p. 274) Fra $z_i :: y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2$ e inv.

$$y_i :: z_2 z_3 : z_3 z_1 : z_1 z_2 \quad (7)$$

I pt. fond. nel piano y: i corrisp. ind.ti si ottengono come passaggio al limite: come... (ed è plausibile prendere

retta per A_1, $y_2 : y_3 = m_2 : m_3$ ~~[illegible]~~ fond pt

$1, k m_2, k m_3$ e poi $k \to 0$ ho $k^2 m_2 m_3$, $k m_3$, $k m_2$

cioè $(k m_2 m_3, m_3, m_2)$ cioè $(0\ m_3\ m_2)$. Pti fond.ti.

Come si spiega le cose? ho $z_i = R_i(y)$ che dà ragion... [illegible]. Quando z descrive retta, y descrive curva di rete.. Pt. z int. di due rette,, pti base: rete omaloidica

Qui ho appunto id. di C^2 (poiché avere altro con 2 o 3 pt. comuni). Per C^n ancora (n ... pt. base distinti) (1) $n^2 - 1 = \sum r_i^2$, e inoltre (rag.ti genere..)

(2) $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \sum \frac{r_i(r_i-1)}{2}$

(punto con r_i plo $= \frac{r_i(r_i-1)}{2}$ doppi: vedi lav. Bertini) fra

(1) − 2(2) ovvero (3) $\boxed{3n - 3 = \sum r_i}$ e queste viceversa d'accordo

(1)(3) sono nec. e si trova anche suff.ti (purchè non risultino tutte riducibili: es. $n = 5$; $r_1 = r_2 = 3$; $r_3 \ldots r_8 = 1$). Tra le più usate le trasf.ni di de Jonquières (n qualunque; $r_1 = n - 1$ e poi $2n - 2$ pt. semplici; es. $n = 3$.

Sempre pt. fond. costituiscono fond. — Per trasf. Q le (1) vuole che C^n descr. [illegible]: ma se passa per A: si toglie subito da ciò stesse le rette [illegible]: $n' = 2n - s_1 - s_2 - s_3$. ~~Facciamo~~ per cui C quindi ... C^{2}.....

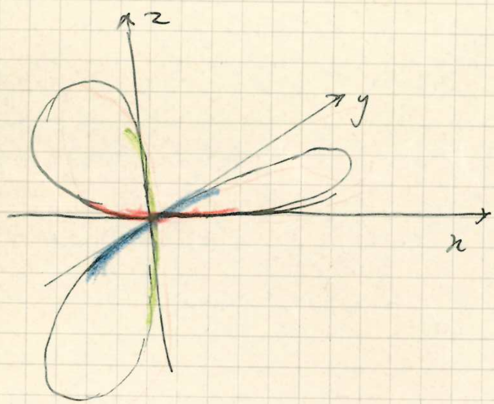
detto <u>ettaedro</u> (V; Hilbert-Cohn Vossen p 266)Esso si ottiene p artendo da un ottaedro regolare,ci cui si mantengono solo qtattro facce così:nella metà superiore asportare due facce non consecutive,e così nella metà inferiore,dove le due facce <u>da asportare</u> sono quelle opposte a quelle <u>conservate</u> sopra.Si aggiung&&& poi ,per ciascuna doppia di diagonali (eguali e perp.)il quadrato che le ha per diagonali.Aggiungiamo così tre nuove facce,che colle 4 di prima,dànno l'ottaedro.Lungo le diagonali non si deve passare da una faccia quadrata a un'altra,ma solo da una faccia alla stessa,come se quella attraversata non esistesse(vanno concepite come linee nodali della superficie.E' intuitivo &&& sui modelli che questa superficie equivale topologicamente a quella di Steiner(ai quattro"bernoccoli"di quella qui corrispondono quattro tetraedri(non regolari) Sul modello(cfr.il mio dove è tracciata una linea azzurra) si vede bene la non orientabilità di questa superficie. Anche per l'ottaedro i vertici già dell'ottaedro sono però <u>singolari</u> per ragioni analoghe a p. 525 (l'intera ~~[illegible]~~ superficie considerata in S_3 presenta linee di autoattraversamento).

Ap Schilling MA 92

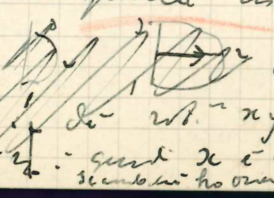
l

G.n.e

Per quanto spontaneo sia il presentarsi della sup. prec. come modello del piano proiettivo, resta a vedere se non la si possa sostituire con un'altra non avente punti singolari. Ciò è possibile, ma ottenendosi una superficie assai complicata (superficie di Boy) -di cui mi limito a presentare il modello (serie) senza altre considerazioni: v.ne figure e considerazioni in Hilbert- Cohn Vossen e l'op. di Boy 1901. La sup. è formata da tre tubi piegati e opportunamente collegati, ciascuno dei quali esce da una delle tre parti in cui il punto triplo O (con tgti p es assi x y z) divide la curva chiusa della figura. Si tratta sempre di una superficie unilatera, la quale attraversa sè stessa, ma i punti della linea doppia non sono singolari, ognuno essendo considerato su una data ~~&&&&&~~ falda (Secondo H.-CohnVossen sarebbe da studiare la sua imgne sferica p 283. Sarebbe anche da studiare p 286 la possibilità di realizzare ~~&&~~ la superficie di Boy mediante una super ficie algebrica)



La ~~sup.~~ curva consta di tre parti, che si [illegible] [illegible] risp. nei tre piani xy xz. yz. — Sul modello è anche tracciata una linea allo scopo di mostrare la non orientabilità, che è messa in evidenza con frecce sulla sup. ⊥ alla linea; partendo da un pto. con freccia vi si torna colla freccia invertita (ciò equivale a considerare le indicatrici



[prendo la curva in dato verso y e la freccia x [illegible] di rot. xy cioè indicatrice. dopo di un giro y è in x-z [illegible]. quindi x è [illegible] o di [illegible] secondo cui ho orientabilità o no.

I Ogni pt. del segm^t xy appare così come baricentro di x, y con masse (parziali) positive (o nulle) e massa totale unitaria. Ovvero per il seg^{to} xy nel piano Ω in S_0 e avrai i pt. del segmt dati da $m_1 x_1 + m_2 x_2$ con m_1 e m_2 c. 1.

concetti quest... ... parte

Dopo queste prime nozioni, veniamo a definire i complessi, che costituiranno l'analogo delle superficie, anzi delle superficie su cui si sia stabilita una triangolazione. Al momento, supponiamo di operare in uno spazio numerico a n dimensioni, di cui chiamiamo punto (proprio) la n.pla ordinata di numeri reali $x_1 x_2 \ldots\ldots\ldots x_n$ (si potrebbero introdurre i punti impropri facendo uso di coordinate omogenee). Per n eguale risp. a 3,2,1 è ben noto che si tratta (a meno di una omografia) dello spazio ordinario o di un piano o di una retta. Lo spazio numerico a n dimensioni è la totalità di quei punti (n.uple). In esso si definisce la distanza di due punti x e y (presa poistivamente) come

$$\sqrt{\Sigma(x_i-y_i)^2}$$

p 523

e come ipersfera di centro y il luogo dei punti che hanno da y distanza eguale a una costante data r (raggio). In un tale spazio definiamo quello che sarà l'analogo del triangolo considerato nel piano, o del tetraedro nello spazio ordinario, o del segmento sulla linea retta, cioè quello che chiameremo un semplice a ℓ dimensioni ($\ell \leq n$): diciamo $\ell \leq n$ perchè p.es. nello spazio ordinario possiamo pensare al triangolo anzichè al tetraedro, ecc. Per farlo, prendiamo come punto di partenza il fatto che sulla retta dove le x sono ascisse i punti del segmento xy (coord.te baricentriche) sono dati da

$$\frac{m_1 x + m_2 y}{m_1 + m_2}$$

o ciò che è lo stesso se prendiamo massa ~~&&&&&&&&&&&&&~~ totale unitaria da

$$m_1 x + m_2 y \qquad (m_1 + m_2 = 1)$$

purchè le masse siano positive (se no vengono punti della retta ma fuori del segmento xy). Invero posto $z = m_1 x + m_2 y$ si ha

$$z = m_1 x + (1-m_1) y \; ; \; m_1 (y-x) = y-z \; ; \; m_1 = \frac{y-z}{y-x}$$

cosicchè m_1 è ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ appunto positivo e minore di uno nell'interno del segmento. Per i valori estremi di m, cioè 0 e 1 si hanno gli estremi del segmento. Così se considero un triangolo di vertici xyz (non allineati) (nel piano o nello spazio) i punti interni sono dati da

$$\frac{m_1 x_i + m_2 y_i + m_3 z_i}{\Sigma m} \quad \text{cioè} \quad m_1 x_i + m_2 y_i + m_3 z_i \quad (m_1 + m_2 + m_3 = 1)$$

se la massa totale è unitaria, purchè le masse siano tutte positive o nulle. Ogni punto interno o sui lati del triangolo appare come baricentro dei tre vertici con tali masse: interno se tutte $\neq 0$; se un lato una e una $= 0$, vertice se due $= 0$.

con gli stessi valori delle m_i

Così infine per il tetraedro di vertici lin.^{te} indti xyzt ho i punti interni o delle facce dati da

$$m_1 x_i + m_2 y_i + m_3 z_i + m_4 t_i \qquad (\Sigma m_i = 1, \quad i = 1,2,3)$$

(su una faccia se una massa si annulla, su uno spigolo se due, vertici se tre)

Definiamo quindi il semplice a r dimensioni adottando come df la estensione di tale p.tà. Parto dunque nello S_n numerico da $r+1$ punti lin. ind. per definizione (estensione&...) vuol dire che la matrice formata colle loro coord e l'unità sia non nulla. Chiamiamoli

$$P_i = (x_{i1}, \ldots x_{in}) \qquad i = 1, \ldots r+1.$$

p. 523

A partire da essi formiamo i nuovi punti "loro baricentri con masse positive m_i o nulle e massa totale unitaria"

$$\Sigma m_i x_{i1}, \; \Sigma m_i x_{i2} \ldots \; \Sigma m_i x_{in}. \qquad (\gamma)$$

L'insieme di questi punti si chiamerà un semplice a r dimensioni. ~~&&&&&&&&punti "interni" &&&&&&&&&& le masse &sono&& &&& nulle&&&&&&~~ Tale insieme di punti è già perfettamente definito se si conoscono i punti P_i : esso si chiama il semplice a r dimensioni avente per vertici i punti P_i. Si chiamano interni i punti per cui nessuna m_i si annulla. Se invece p.es. $m_{r+1} = 0$ vengono i punti del semplice a&&&&&& $r-1$ dimensioni avente per vertici $P_1 \ldots P_r$; se si annullano due fra le m, i punti di un semplice a m-2 dimensioni ecc. fino a arrivare ai vertici. Si hanno così semplici a k dimensioni ($0 \le k \le r-1$) facce del semplice considerato (per $k=1$ chiamate anche spigoli). Conviene per uniformità di linguaggio chiamare il punto stesso un semplice a zero dimensioni; così si includono anche i vertici.

La df. data è, come si vede invariante rispetto alle trasf.ni di coord.^{te} cartesiane (p. 523). Tra le ... ... la materiale: ~~...~~. Nel rif.^{to} adottato un pto del ... è il pt. z dato dalla (γ). ... le trasf.ne

$$x^*_h = \sum_{k=1}^{n} a_{hk} x'_k + a_h \quad (h = 1 \ldots n).$$

+ $a_h \Sigma m_i$ ...

i pt. (γ) ~~...~~ danno per le h^{esime} coord.

$$z_h = \sum_i m_i x_{ih} = \text{(applico le formule per cui le ... ...)} \sum_i m_i \sum_k (a_{hk} x'_{ik} + a_h) = \sum_k a_{hk} \sum_i m_i x'_{ik} +$$

Qui l'ultima sommatoria ... le coord.^{te} Z_k di un pt. del semplice

60 Per contorno di un simplice a r dim. non ridotto a un punto si intende l'insieme delle sue faccette a $r-1$ dimensioni. Il simplice di dim. zero (p. 285) non ha contorno.

(con le stesse masse) nei coord. x'. Quindi $y_h = \sum_k a_{hk} z_k + a_h$ cioè le $z_k = x'_k$. [il sist. di valori dei z_k che forniscono le y_h colla sist. lineare è unico per il non annullarsi del determin.) c.d.d. - In particolare il baricentro del pt. baricentro con masse uguali = centro del simplesso

Così come un segmento viene orientato- in base a un determinato ordine dei suoi estremi P_1 e P_2; così come un triangolo $P_1P_2P_3$ viene orientato (v geom an. segno delle aree) in modo analogo cioè in base a un determinato ordine dei vertici: coincidono ordini che differiscono per una ~~&&&~~ sostituzione circolare così conviene completare la nozione definita del semplice di vertici $P_1P_2 \ldots P_{r+1}$ definendo il semplice orientato $(r \geq 1)$ a r dimensioni

Significa per definizione il semplice associato con una determinata permutazione dei suoi vertici, dove si riguardano come non distinte permutazioni di una stessa classe (pari o dispari). Potremo indicare un semplice non orientato con ~~&~~ τ^r, orientato con T^r; se esso è dato dai vertici e se l'orientamento è quello definito p es dall'ordine $P_1 \ldots P_{r+1}$ scriveremo

$$T^r = +(P_1 \ldots P_{r+1}) \quad \text{(eventualmente sottinteso il +)}$$

Se scambiamo p es i due primi vertici la classe della permutazione cambia, e viene così un complesso orientato diverso che chiameremo $-T^r$ dove T^r era il precedente Si avrà così

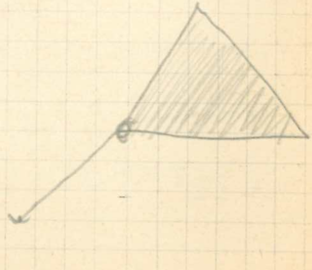
$$-T^r = (P_2 P_1 P_3 \ldots P_{r+1}) \quad \text{o} \quad T^r = -(P_2 P_1 \ldots P_{r+1})$$

Quindi se T^r è il simbolo di un ~~&&&&&&&&&~~ semplice orientato, ha un significat per noi anche $-T^{(r)}$.

Avendo noi definito il pt. come un semplice a 0 dim. (p. 288) - al quale evidentemente non si applica la def. di orientamento

Qui subits f
orientament sub^t
d p 29

Si Il explose non i nec^{té} forme de simplex
à max dim. e lors face pas prise comme



or data (~~nousecom~~ si vede una permutazione) conviene tuttavia distinguere per esso ~~due~~ orientamenti (che come si vedrà, p. 297 si trovano nella doppia possibilità che uno sia 1° oppure 2° estremo di un segmento orientato uscente da esso). I due orientamenti li diremo con apposizione (astratta) del punto geom.co risp. col segno + o col segno −, e li porremo indicati con $+P$ e $-P$

Un complesso C^n nello S_n (ovv.te in spazio più ampio) numerico, ~~si definisce~~ come un insieme di semplici (i punti dei semplici dell'insieme) (quelle semplici di dim. n. ciné) di dimensioni r, con $0 \leq r \leq n$, con cd.ni analoghe a p 241, cio ogni punto di K^n appartenga almeno a un semplice (noi sup poniamo senz'altro i semplici in n° finito) e inoltre due semplici per quanto riguarda i loro punti comuni si trovin necessariamente in una di queste condizioni: o non abbiano punticomuni, oppure uno è faccia dell'altro, oppure abbia no in comune una faccia, la quale esaurisce la loro interse zione.

A p 241 ~~&&~~ si aveva una portata più larga, in quanto si consideravano anche triangoli a lati non rettilinei. Qu si potrebbe fare l'analogo, ma su ciò torneremo poi. I risul tati che troveremo ora si estendono automaticamente al ca più generale.

⊥ [nella qual Df. andrebbe
inclusa la somma.
definire la catena insieme
con la somme]

Veniamo finalmente ai gruppi di omologia

Partiamo da un dato complesso K^n; e consideriamo tutti i semplici che lo costituiscono, da quelli di dimensione 0 a quelli di dimensione n, orientandoli tutti quanti in un modo determinato (arbitrario). Se quelli di ~~&&&&&&~~ dimensione k ~~&&&&~~ ($0 \le k \le n$) sono in numero di α_k, ~~&&&&&~~ assunti i semplici di dim. k in un ordine arbitrario (orientati come si è detto) siano

(1) $T_1^k \quad T_2^k \quad T_{\alpha_k}^k \quad (0 \le k \le n)$

cosicchè i complessi della stessa dimensione k e con l'orientamento opposto a quello prescelto saranno (p 287)

$-T_1^k \; -T_2^k \; - - - \quad -T_{\alpha_k}^k$

Definiamo ora una catena di dimensione k, U^k relativa al dato complesso C^n. Essa è l'insieme di un certo numero di suoi semplici (tutti) di ~~&&&&&&~~ dimensione k, presi con orientamento arbitrario, e con una certa moltiplicità, o considerati uncerto n° di volte, il che in modo preciso vuol poi dire cheinsiemecon ciascuno dei semplici orientati che entrano a costituire la catena si considera un n° intero, la sua moltiplicità. Non vi è nemmeno bisogno per questa di limitarsi a valori positivi, pur potendoci sempre ridurre a questi colla convenzione che prendere un ~~&&&&~~ semplice T^k colla moltiplicità negativa $-k$ equivale a prendere il semplice a orientamento invertito $-T^k$ colla moltiplicità positiva k. Si possono poi considerare anche moltiplicità nulle, dicendosi

I somma di
u_1 volte T_1^k con
ciò per le $u_i \geq 0$ ma
si estende alle altre facendo
intervenire i $-T_i^k$

Per un gruppo abeliano con generatrici $A_1 \ A_2 \ \ldots \ A_\alpha$ e quindi con parole $A_1^{n_1} \ldots A_\alpha^{n_\alpha}$ si conviene spesso di usare un simbolismo diverso e una nomenclatura diversa, e cioè di chiamare __somma__ il prodotto convenzionale di due elementi del gruppo e quindi di scrivere $A+B$ per AB e $-A$ per A^{-1} e quindi di indicare la parola sopra indicata con

$$n_1 A_1 + n_2 A_2 + \ldots + n_\alpha A_\alpha$$

Qui ci troviamo proprio in queste condizioni. L'el.to unità del gruppo che prima si scriveva $A_1^0 \ldots A_\alpha^0$ sarà ora

$$0A_1 + \ldots + 0A_\alpha$$

e conviene quindi indicarlo come elemento __zero__ (come abbiamo già detto per noi __catena nulla__).

__Oss.ni__ (V è a p. 296)

1) Si è definita (p. 293) la __somma di 2 catene__: si parla anche della diff.za $A - B = A + (-B)$ dove $-B$ è defin. da $B + (-B) = 0$ cioè la molt.ne di $-B$ uguale a B cambiata di segno

scrittura 10 ottobre

p. 294 è invece B ecco

che nella catena U^k un certo semplice T^k compare con moltiplici-
tà nulla, se di fatto esso non vi compare affatto.

Di due catene U^k, V^k relative al complesso C^n si definisce la somma, così; è l'insieme dei semplici (1), ciascuno dei quali venga preso con molteplicità $u+v$ se aveva risp. molt.tà u, v per U e per V. Si passa poi ovviamente alla somma di più catene. Catene di dimensione k, p.es. sono già i singoli seplici (1); p.es. il primo è la catena cosituita da questo semplice con molt.tà 1 e le altre nulle. E con la df. data di somma, $T_1^k + T_2^k$ è la catena cosituita di primi due semplici presi ciascuno una volta e basta. E così in generale

$$(2) \qquad u_1 T_1^k + u_2 T_2^k \ldots + u_{\alpha_k} T_{\alpha_k}^k$$

è la catena costituita dal primo semplice preso u_1 volte, dal secondo preso u_2 volte, e così via. E in questo modo si possono evidentemente ottenere tutte le catene di ordine k. Esse sono dunque tutte date da (2), dove i n.i interi u_1, u_2 sono arbitrari, positivi o negativi.

In questo modo le catene di dim. k U^k relative a un dato complesso C^n vengono a apparire come gli elementi di un gruppo nel quale il ~~prodotto~~ corrispondente di due catene venga definito come la loro somma. Infatti è un insieme di elementi, ~~di cui~~ tale che il prodotto (somma) di due catene è ancora una catena; vi è un elemento unità, il cui prodotto o somma con gli altri non li altera: è la catena nulla

formata con molteplicità tutte nulle (in (2) tutti i coeff.
La si indica col simbolo 0 (zero)
nulli). Ogni catena ha una catena inversa cioè a prodotto unità, cioè a somma nulla, quella che si ottiene cambiando di segno ogni molt.tà, o coefficiente in (2). Ovviamente è poi definita come deve esserlo (p 16) una relazione di eguaglianza fra catene: devono corrispondere a simboli (2) coi medesimi coefficienti. Esse costituiscono dunque proprio un gruppo, e anzi abeliano, essendo evid.te la somma commutativa. Possiamo dire di più: esse costituiscono un gruppo abeliano libero avente per base l'insieme delle (1).-base nel senso preciso di p.203. Infatti gli el.ti (1) combinati per prodotto = somma in tutti i modi possibili generano appunto la totalità (2). Ma essi non soddisfano a nessuna relazione

Questa invero si scriverebbe (v. contro)

$$u_1 T_1^k + u_2 T_2^k + \dots = 0$$

la quale esprime che la catena a primo membro coincide con la catena nulla; ma ciò è per noi impossibile (v sopra) a meno che essa abbia tutti i coeff.ti nulli E dire questo vuole appunto dire che si tratta di un gruppo abeliano libero, e precisamente di dimensione (p. 204). I semplici (1) costituiscono evid.te una base di tale gruppo abeliano libero.

Chiameremo $(\mathfrak{U}^k)$ il gruppo abeliano libero, di dim. k formato da tutte le catene di dim. k, del dato complesso C^n. Naturalmente ve ne è da considerare uno per ogni valore del

α_k

(Dato a p. 295)

si sarebbe detto invece se

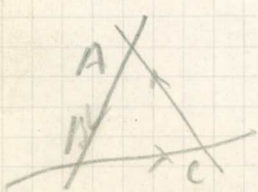
d ~~oppure dire~~ π . in $U = 0$ è $m u_i = 0$

e quindi $u_i = 0$.

dimensione k, da zero a n. 297-

E' da tener presente che essendo il gruppo abeliani libero, nessun suo elemento (salvo l'identità) è periodico; cioè per ogni suo elemento non eguale all'identità, A, non può essere $A^m = 1$, com m intero non nullo. E siccome noi scriviamo ora in modo additivo invece che moltiplicativo, per nussun el.to A <u>non nullo</u> esiste un intiero <u>non nullo</u> m tale che sia $mA = 0$. Quindi se sappiamo che m A è nullo, e che m non è nullo sarà certo A nullo. In altre parole ~~&~~ se A è una catena dall'eguaglinaza $mA = 0$, con m non nullo segue che A è eguale zero.

Per definire i gruppi di omologia, definiamo ancora <u>il contorno di una catena</u>. Definiamo anzitutto il <u>contorno di</u> di un semplice di dim. non nulla (p. 286) orientato (p. 287-), definizione che applicheremo poi ai semplici orientati (1) e quindi alle catene da essi formate e prima ancora gli orientamenti indotti da un T^k su un $T^{k'}$ qualsiasi. Un triangolo orientato ABC <u>induce</u> un orientamento su ogni suo lato, in quanto prendiamo l'orientamento con cui quel lato compare nel perimetro percorso nel verso ABC. Avremo così gli orientamenti AB, BC, CA indotti sui tre lati.



Ancora più semplicemente, un segmento orientato AB induce un orientamento nei suoi estremi (p 289) se conveniamo di prendere il primo estremo col segno + e il secondo col

?

segno $\to$. Generalizziamo così: preso un semplice orientato a k dimensioni T^k e una sua faccia a k-1 dimensioni (p 287) l'orientamento di T^k induce su questa un orientamento così; se tale faccia è quella opposta a un dato vertice, che possiamo ~~chiamare P_0~~ e che possiamo sempre portare opp.te al 1° posto, chiamando poi gli altri in un ordine qualunque $P_1 \ldots P_r$, sia $T^k = \varepsilon(P_0 P_1 \ldots P_k)$ con $\varepsilon = \pm 1$; allora ~~&&&&&&&&~~ l'orientamento subordinato è quello dato da $\varepsilon(P_1 \ldots P_k)$. Si vede subito che nel piano di ricade sul detto, e anch ~~&&~~ per il semplice costituito da un segmento (dove la faccia opposta a un vertice si riduce all'altro vertice)

Fare es.$^{\text{rio}}$ S_3

Ciò premesso, <u>il contorno di un semplice orientato</u> (per df.) T^k è formato da tutte le sue facce (k-1) dimensionali, con l'orientamento indotto in ciascuna di esse. Tale contorno è dunque una speciale U^{k-1}. (per $k>0$) es.$^{\text{rio}}$ c.d.

Definiamo finalmente <u>il controno di una qualunque catena U^k</u> data dalla (2). Esso si ottiene prendendo il contorno di T_1^k u_1 volte, insieme con T_2^k u_2 volte, ecc. Possiamo scrivere

$$\text{cont.}\, U^k = u_1\, \text{cont.}\, T_1^k + \cdots = \sum_{i=1}^{\alpha_k} u_i\, \text{cont.}\, T_i^k . \qquad (3)$$

Ognuno dei cont. U_i^k è una catena U^{k-1}: si tratta di una somma di tali catene, cioè ancora di una <u>catena (k-1)-dim</u>.

La (3) mostra che

$$\text{cont.}\,(U^k \pm V^k) = \text{cont.}\, U^k \pm \text{cont.}\, V^k \qquad (*)$$

(Basta rappresentare U^k e V^k con (2).) Così ricordando le def.ne (p. 296)

$$\text{cont}\,(U^k - V^k) = \text{cont.}\, U^k - \text{cont.}\, V^k \qquad (**)$$

$\text{cont.}^{\circ}(-U^k) = -\text{cont.}\,U^k$ (x x x) (dalle df.)

$\text{cont.}\,(mU^k) = m\,\text{cont.}\,U^k$ $\binom{x\,x}{x\,x}$ per m intero > 0 e poi per le prec. anche < 0.

Inoltre, ricordando p. 297

se m è un intero ≠ 0 e se $\text{cont}\,(mU^k) = 0$ segue

$\text{cont.}\,U^k = 0$ infatti $\text{cont}\,(mU^k) = m\,\text{cont.}\,U^k = 0$, etc.

La df. si è data per k non nullo. Per una catena di dim zero, insieme (somma) di semplici di dim zero, cioè di punti, ognuno dei quali NOn ha contorno (p286) manca il contorno. Qualche volta conviene definire (e nat.te nulla di male) come tale il numero zero .

Particolarmente importanti sono le catene chiuse o cicli Sono le catene ,di dim. qualunque, il cui contorno (come sopra definito) è nullo. Capire bene: vuol dire per k≠0 (il caso che ha interesse) una (il contorno è) U^{k-1} ridotta a catena nulla, e per k=0 lo è già sempre. Ogni catena di dim zero è già sempre un ciclo. Per k>0 no.

Abbiamo così finora i concetti di: catena, contorno di una catena, catena chiusa o ciclo. Esemplifichiamo prendendo come complesso il semplice C^3 di S_3 (orientato) $C^3 = +(P_0P_1P_2P_3)$.

Il suo contorno (p.299) è [1]

$$\text{cont.}\,C^3 = (P_1P_2P_3) - (P_0P_2P_3) + (P_0P_1P_3) - (P_0P_1P_2) \qquad (\gamma)$$

[1] per la faccia opposta a P_1 ~~partendo P~~ scambiando P_1 con P_0 per applicare le regole di p. 299 ho $T \equiv -(P_1P_0P_2P_3)$, e cioè

Intanto, in modo appena un po' più generale, osservo che preso per l^γ un simplesso orientato $(P_0 \dots P_\gamma)$ il suo contorno è una catena chiusa. Infatti il contorno è

$$\underset{(K_0)}{(P_1 \dots P_\gamma)} - \underset{(K_1)}{(P_0 P_2 \dots P_\gamma)} \dots \text{ etc.}$$

Ne formo da capo il contorno. Viene la somma di tanti simplessi orientati a $\gamma-2$ dimensioni. Ognuno comparisce due volte: per es. quello in cui mancano P_0 e P_1 dalle 2 prime parentesi, con segni opposti

$$(P_2 \dots P_\gamma) - \underset{(H_{ij})}{(P_2 \dots P_\gamma)}$$ che si distruggono. E così via.

Perchè quello in cui mancano P_i, P_j $(i<j)$ si ottiene ~~dalla~~ dalle parentesi K_i e dalle K_j. Precisamente dalle i^a $(-1)^i(P_0 P_1 \dots P_{i-1} P_{i+1} \dots P_\gamma)$ per avere H_{ij} devo portare P_j in principio, etc. e viene

$(-1)^{i+j-1}(P_0 \dots P_{i-1} P_{i+1} \dots P_{j-1} P_{j+1} \dots P_\gamma)$. Se parto invece dalle K_j, cioè $(-1)^j(P_0 \dots P_i \dots P_{j-1} P_{j+1} \dots P_\gamma)$ ho poi

$(-1)^{j+i}(P_0 \dots P_{i-1} P_{i+1} \dots P_{j-1} P_{j+1} \dots P_\gamma)$. E i due termini si distruggono i simplici che contiene

C^3 non è ovviamente una catena ~~chiusa~~ U^3 chiusa: la catena ottenuta come suo contorno è $T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2$ (γ') se le facce orientate che richiamano T_1^2 etc. si assumono coincidenti con quelle indicate in (γ). Abbiamo così molt.^{ni} 1.1.1.1 e non 0.0.0.0. Proviamo ora invece a prendere la catena U^2 definita da (γ) per calcolarne il contorno. Ho cont. U^2 = cont cont. C^3 = (per γ').

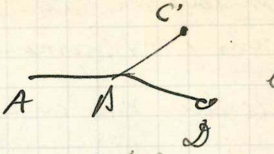
$$(P_1P_2)+(P_2P_3)+(P_3P_1)+(P_0P_2)-(P_2P_3)-(P_3P_0)+(P_0P_1)+(P_1P_3)+(P_3P_0)$$
$$-(P_0P_1)-(P_1P_2)-(P_2P_0) = \text{zero}.$$

Quindi U^2 è una catena chiusa (cioè cont. cont. $C^3 = 0$)

Ora non è questo un risultato isolato, ma ha validità generale "Il contorno del contorno di una catena è sempre nullo" In altre parole, chiamando contornante una catena che sia contorno di un'altra ~~di&&&&&&&&&&&&~~ una catena contornante è sempre un ciclo, cioè è chiusa. Lo dimostreremo fra un momento, ma prima facciamo un'altra osservazione di portata generale.

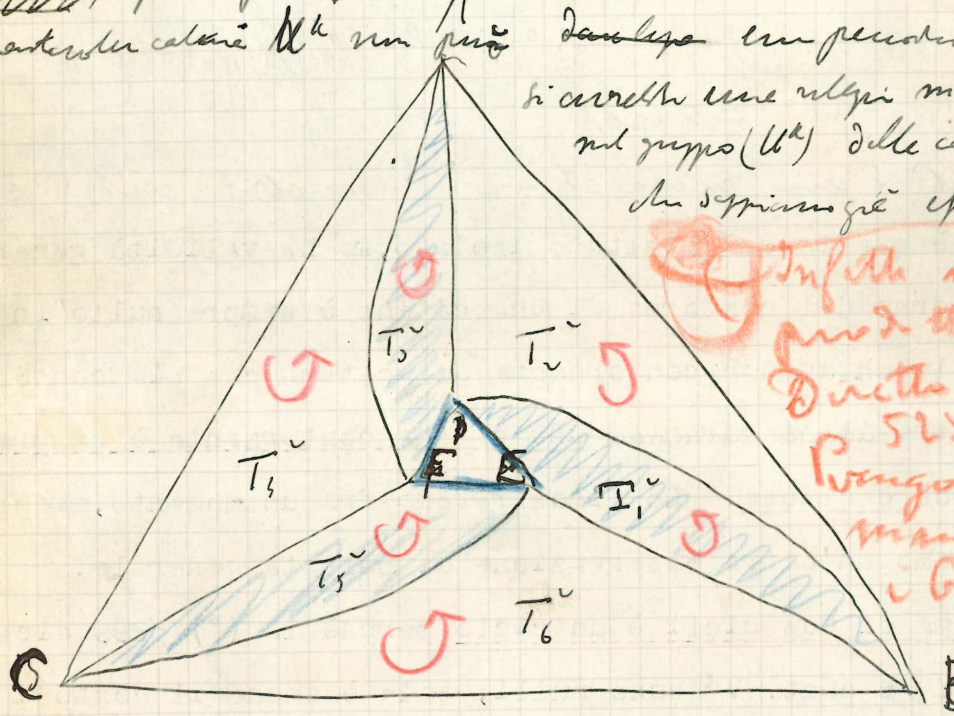
La somma di due cicli è un ciclo, perchè la (°) p299 dice che se cont U^k e cont. V^k sono nulli, tale è anche il cont$(U^k + V^k)$. Inoltre se U^k è un ciclo, lo è anche $-U^k$ perchè p 301 (°°°) dice che se cont U^k è nullo lo è anche cont$(-U^k)$. Quindi, entro il gruppo (U^k) abeliano libero delle catene di dim. k di cui a p 295 le particolari catene che sono cicli formano un sottogruppo, perchè il loro insieme, insieme con una contiene la inversa, e insieme con due la loro somma (ricordare che usiamo qui la nomenclatura additiva). Abbiamo così entro il gruppo (U^k) ~~delle catene~~, abeliano lo

Esso può esistere o no (p. es.



è un K^1 che non contiene C^1, come si vede subito); ma se esiste è, al pari del gruppo (U^k) - p 295 un gruppo abeliano libero. (1) Infatti esso non contiene elementi ~~con~~ non nulli di periodo finito: (~~[illegible]~~ ogni ciclo ~~[illegible]~~ C^k come particolare catena U^k non può ~~[illegible]~~ con periodo, se no si avrebbe una relazione nell' U^k i.e. nel gruppo (U^k) delle catene che sappiamo già essere libero)

(1) Infatti nel prodotto diretto di 525 vengono a mancare i G finiti



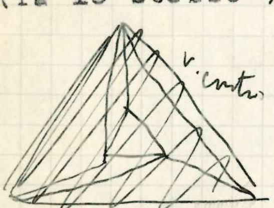
(manca il let pro chiarezza) (i vertici [illegible] dei T_i^u [illegible] come in fig.)

(1) come segue dai teoremi sui gruppi abeliani

bero, delle catene di dim. k, il sottogruppo (C^k) di quelle chiuse, o cicli.

Per quello che intanto serve al nostro scopo, di dimostrare che ogni catena contornante è un ciclo, cioè sta, se è di dim. k, nel (C^k), o diciamo meglio, se è di dim. k-1 nel (C^{k-1}) basta osservare che per df. una catena contornante, cioè contorno di una U^k data dalla (2) è data dalla (3) di p. 299. Ma qui cont. T_1^k, ecc. sono ciascuno il contorno di un semplice orientato, e come tale un ciclo a k-1 dimensioni (p. 302). Quindi cont U^k, el.to del gruppo abeliano (U^{k-1}) appare ivi come somma (prodotto) di el.ti che stanno nel sottogruppo (C^{k-1})(1) quindi è esso pure nel sottogrupp. (C^{k-1}) c.d.d.

Non bisogna però confondere il risultato dimostrato, vero, col suo inverso, che non è vero. Ogni catena contornante è chiusa, ma non viceversa. Cioè una catena può essere chiusa senza essere contornante. Prendiamo p.es. una corona circolare per cui-essendo ben abituati per superficie a triangoli a lati curvilinei-potrei prendere la triangolazione di p. 237. Ma (fa lo stesso) prendiamola invece schematizzata e triangolata



(6)

come in figura. Essa è l'insieme dei sei triangoli, che dopo averli orientati come in figura chiamo $T^2_1, \dots T^2_6$, e dei loro lati e vertici. Considero la catena unidimensionale formata da

$3+3+3+3=12$

(1) stando (cont T_1^k) e quindi (cont $-T_1^k$) (p. 300) vi stanno $\pm N$ (cont T_1^k) con N intero $\gtrless 0$.

Conviene osservare subito che la stessa d.a dim. prova
è consistente ≥ 0
che se $m \neq 0$ anche in C_i^1 non è contraente

$U^1 = (DE) + (EF) + (FD)$. Esso è chiuso sencondo la ns df., perchè il suo contorno è (p.289) $E - D + F - E + D - F =$ zero

(la somma di pt. rientra nella somma di catene, da noi df.ta a p. 293)

Ma non è contornante, cioè non riusciamo a formare una catena U^2 di dimensione due che lo abbia per contorno. Se infatti $U^2 = \sum u_i T_i^2$, quando passo al contorno mediante la (3) di p 299, osservo che solo il termine in T^2_2 può nel contorno portare un termine in (AB) e siccome questa manca nella U^1 considerata, vuol dire che $u_2 = 0$. Così intanto

$$U^2 = u_1 T_1^2 + u_3 T_3^2 + u_4 T_4^2$$

Ma passando ai contorni, sono evidentemente impossibili riduzioni fra i lati contorni dei tre triangoli, cosicchè da un lato p es T_1^2 deve intervenire per portare nel contorno il termine DC, ma allora si creano termini, non altrimenti distrutti in AD, EA. Quindi non esiste nessuna catena bidimensionale avente per contorno $DE + EF + FD$, che chiamiano C^1_i (è un ciclo a una dimensione che costituisce l'orlo interno della corona schematizzata). Analogamente troverei che anche C^1_e è un ciclo non contornante, dove $C^1_e = (AB) + (BC) + (CA)$. Meglio ancora, poniamo $C^1_e = (AC) + (CB) + (BA)$:vuol dire che consideriamo i due C_i C_e &&& orientati &&&&&, come si vede in figura, e i sensi subordinati dagli orientamenti adottati per i T^2 che li hanno come lati.

Osserviamo coll'occasione che mentre C_i, C_e ciascuno è per sè non contornante, lo è la loro somma $C_i + C_e$.

Infatti la catena bidimensionale $T_1^1 + \dots + T_1^6$ (molt.tà tutte più uno) ha come contorno, come si vede, proprio $C_i^1 + C_e^1$ (tutti gli altri lati; vedere p es CE, si distruggono a due a due).

* **Chiarito così la differenza fra catena contornante e catena chiusa**, introduciamo una nuova terminologia e un nuovo simbolo: chiamiamo una catena U^k contornante omologa a zero e scriviamo per essa $U^k \sim 0$ (1). Soltanto dunque per cicli si può parlare di essere omologhi a zero, ma non però tutti (La nozione di omologia va sempre interpretata in relazione al complesso sul quale si opera, nel senso che IN ESSO vi sia una ~~complesso~~ di cui il ciclo che si considera è contorno) Più in generale si definisce la relazione di omologia fra due ~~cicli~~ catene anche non cicli k-dim.li, e si scrive $U^k \sim V^k$, nel seguente significato $U^k - V^k \sim 0$ (la differenza è definita come caso particolare di quello considerato per le ~~catene~~ p. 255)

Anche la nuova relazione ha senso in relazione a un determinato complesso

Due catene omologhe hanno lo stesso contorno, ma non necessariamente viceversa. Infatti se $U^k \sim V^k$, ~~segue~~ $\equiv$ $U^k - V^k \sim 0$ cioè per df. ~~[illegible]~~ $U^k - V^k$ è contornante e quindi (p. 300) chiusa $\equiv$ cont.$(U^k - V^k) = 0 \equiv$ p. 299 cont U^k = cont. V^k c.d.d.

(1) [si potrebbe pensare che solo cicli cioè $C^k \sim 0$. ma tra un momento si considera rel.e più generale di omologia ove possono intervenire anche catene non cicli]

Comunque, dal teor.a diretto segue che se U^k è chiuso, e $V^k \sim U^k$ anche V^k è chiuso (poichè $\text{cont}\, V^k = \text{cont}\, U^k = 0$.)

Infatti 1) se $U^k \sim 0$, $V^k \sim 0$

vuol dire

$$U^k = \text{cont}\; U^{k+1}$$
$$V^k = \text{cont.}\; V^{k+1}$$

e allora $\text{cont}\,(U^{k+1} + V^{k+1}) = U^k + V^k$ cioè $U^k + V^k \sim 0$.

(p. 299)

2) se $U^k \sim 0$ $U^k = \text{cont}\; U^{k+1}$

e $\text{cont}\,(-U^{k+1}) = -U^k$

(p. 301);

Anche ~~Z^k~~ il gruppo abeliano (Z^k), si prova anche è libero per la stessa ragione detta per (C^k) a p. 304

Il rag.to è fondato sul teor di p 303, che come si è visto non è invertibile; quindi si capisce che il risultato non sia a sua volta invertibile. Effettivamente, p es nella fig. di p 304 ~~&&&&&~~ le due catene 1-dimensionali

$U_x^1 = (AD) + (DE) + (EF) + (FD)$ $V^1 = (AD)$

hanno per contorno, entrambe $D - A$, cioè hanno lo stesso contorno, ma non sono omologhe, perchè la loro differenza $U^1 - V^1 = C_1$ non è omologa a zero (non è contornante p 307)

Tornando alle catene (cicli) omologhi a zero, si ha che essi dànno luogo a un nuovo gruppo. Già conosciamo il gruppo abeliano libero (U^k) delle catene k-dimensionali; in esso il sottogruppo (C^k), p 300, dei cicli k-dim. Introduciamo ora il sottogruppo (Z^k) di quelle omoghe a zero. Rientrano tutte fra i cicli, e quindi si tratta di un sottogruppo del sotto gruppo (C^k). Il carattere di gruppo si ha in quanto la somma di due catene omologhe a zero, lo è ancora e l'inversa anche

~~Cioè~~ Più in generale le omologie si possono sommare e sottrarre (da $U^k \sim V^k$, $U'^k \sim V'^k$ p.e.s. sommando $U^k + U'^k \sim V^k + V'^k$ e sta bene perchè le ipotesi in $U^k - V^k \sim 0$, $U'^k - V'^k \sim 0$ e allora $U^k - V^k + U'^k - V'^k \sim 0$ (la somma di due cicli omologhi a zero lo è ancora, come ora visto). cioè p.te ~~sommando~~ $U^k + U'^k - (V^k + V'^k) \sim 0$ cioè $U^k + U'^k \sim V^k + V'^k$. c.d.d.)

Quindi anche una omologia si può moltiplicare per un intero positivo o negativo. Non è invece detto si possa dividere per un tale intero (uno risulta ov

Vi è qui una differenza fra il caso attuale e le oss.ni di p 297, 301. Là, risp. se m è un intiero non nullo, da $mU^k \sim 0$ seguiva l'annullamento della catena U^k; e poi se mU^k è un ciclo, lo è già U^k. Qui invece se mU^k è (non più eguale ma) omologo a zero, non si può concludere che lo sia già U^k (si veda ~~[illegible]~~ [illegible] relativi ai coeff.ti di torsione $\neq 0$)

Osserviamo ancora la transitività della relazione di omologia $\{U^k \sim V^k ; V^k \sim W^k$ segue $U^k \sim W^k$

Infatti le ipotesi si traducono nelle $U^k - V^k \sim 0$, $V^k - W^k \sim 0$ e sommando a membro a membro, come sappiamo ora essere lecito $U^k - V^k + V^k - W^k \sim 0$ cioè $U^k \sim W^k$. c.d.d.

~~[illegible]~~

Visto così che la relazione di omologia fra catene è transitiva, si può pensare a ripartire la totalità delle U^k di un dato complesso K^n in classi, ognuna delle quali è formata da totalità di catene omologhe fra loro. Ma ha particolare interesse fare tale ripartizione per le sole catene chiuse, formare cioè quelle che si chiamano classi di omologia, formate ognuno da una totalità di catene chiuse omologhe fra loro (ricordare l'oss di p 310 che se una catena è chiusa, lo è anche ogni sua omologa).

Nella teoria dei gruppi (p 103) abbiamo considerato le classi di residui a cui dava luogo entro G un suo sottogruppo po g;ognuna era formata da tutti gli el.ti Ag, per A fisso ~~&~~ Qui le classi di omologia sono appunto formate dalle classi di residui date da $G \equiv (C^k)$ e $g \equiv (Z^k)$. Infatti secondo quando ora si è ricordato una classe di residui, conlla ~~&&&~~ scrittura additiva, sarà formato da un ciclo A sommato a un ciclo g cioè Z cioè omologo a zero, cioè ogni el.to di tale classe di residui è $B = A + Z$, il che equivale a scrivere $B - A = Z$ cioè $B - A \sim 0$ per def. cioè appunto $A \sim B$.

D'altro lato, quelle classi di residui combinate fra loro con una certa df. di prodotto non erano altro che gli el.ti del gruppo complementare G/g (p 109). Perciò qui <u>le classi di omologia sono gli elementi del gruppo complementare $(C^k)/(Z^k)$</u>. Precisamente la legge di prodotto là era $Ag \cdot Bg = ABg$ il che qui significa che ~~&& &&~~ come somma di due classi di omolog contenenti risp. i cicli A e B, cioè tra le classi A+Z, B+Z è da riguardare la classe $A + B + Z$: la quale contiene ~~ogni~~ ~~cioè~~ sono le somme di ogni el.to $\sim A$ e di ogni el.to $\sim B$ ~~risp. un elto della prima e uno della seconda.~~

Questo gruppo $(C^k)/(Z^k) \equiv \Omega^k$ si chiama il k^esimo gruppo di omologia del dato complesso K^n $(o \leq k \leq n)$: esso è formato come o detto dalle classi di omolgia dei cicli C^k con la legge di ~~&~~ addizione detta

I gruppi di omologia hanno particolare importanza, perchè <u>risulta</u> che essi sono invarianti dal punto di vista topologico (mentre ciò nonvale dei vari enti studiati. P.es. il

[Si noti a riguardo qui non avrebbe senso neanche parlare non avendo definito che i ~~semplici~~ complessi e simpliciali e non definiti top.te] gruppo (U^k) non lo è, essendo un gruppo abeliano libero con un n° di generatrici dipendente dal n° α_k dei semplici T^k; se p es per un superficie piana adopero una triangolazione con un n° diverso di triangoli, esso cambia)

I gruppi (U^k) (C^k) (Z^k) come si è detto risp alle pp. 295,304,310, sono gruppi abeliani liberi. Invece la natura dei gruppi di omolgia $\Omega^k = \frac{(C^k)}{(Z^k)}$ può variare notevolmente da un complesso a un altro. Comunque, si può applicare il teorema di p 223 secondo il quale ogni gruppo abeliano [sott.so con un n° finito di generatrici, come è certo qui per noi Ω^k, essendolo (C^k) perchè lo è già (U^k)) è prodotto diretto di gruppi ~~abeliani~~ ciclici, alcuni finiti, alcuni infiniti, dove per i periodi dei primi vale una certa relazione aritmetica. Se i gruppi ciclici infiniti erano in n° di b, b si chiamava il n° del Betti. Qui parleremo dunque di un n° del Betti b^k per ciascuno dei valori di k che entrano in considerazione. Poi là si avevano i coefficienti di torsione (periodi dei gruppi ciclici finiti, gonuno dicisore dei precedenti; li chiamavamo là $k_1, k_2 \dots k_\rho$): ora avendo già usato k, chiamiamoli c; poi ce n'è una successione per ogni valore di k, chiamiamoli c^k, e poi il n° ρ dipende da k, chiamiamolo ρ^k. Avremo, così per ogni k, i coefficienti di torsione

$$c_1^k, c_2^k \dots c_{\rho^k}^k .$$

[illegible]

Sui n.i del Betti e coeff.ti torsione relativi ai valori estremi di k, faremo poi ovvie osservazioni generali. Qui vediamo p.es. il caso $k=1$ per la corona schematizzata come a p. 304. Proviamo a cercare tutte le classi di omologia per $k=1$. Un ciclo è C_i^1 ~~e sappiamo (p) che la loro somma è contornante, cioè che ... cioè che Proviamo più ... che~~ : quindi lo sono certamente tutti ~~gli~~ i suoi multipli nC_i^1 con n intero arbitrario ≥ 0.

Anzi vediamo subito che questi multipli appartengono a classi di omologia diverse, cioè $nC_i \sim n'C_i$ implica $n=n'$ cioè il che è lo stesso $nC_i \sim 0$ implica $n=0$ (a differenza dell'om[illegible] di p. 313). Sia infatti $nC_i \sim 0$, cioè $nC_i^1 = \text{cont.}\, U^2$ dove U^2 è una conveniente catena bidimensionale: in essa non possono evid.te comparire i T_2^2 T_4^2 T_6^2. Quindi $U^2 = u_1T_1^2 + u_3T_3^2 + u_5T_5^2$. E si va avanti tale quale come detto a p 305-306. Quindi conosciamo già come classi di omologia quelle rappresentate dagli el.ti mC_i^1 con m intero positivo arbitrario. E non ve ne sono altre, cioè ogni altro ciclo è omologo a uno di quelli (come già p.es. $C_e^1 \sim -C_i^1$ perchè come visto a p 307 $C_e^1 + C_i^1$ è contornante, cioè $C_e^1 + C_i^1 \sim 0$) Infatti, preso un qualsiasi ciclo C^1 che contenga p es h.AB aggiungendogli l'altro C^1 -h. cont T_2^2 che è evidentemente contornante (è cont.(-h T_2^2)) ottengo un ciclo omologo dove AB non compare più. Quindi posso passare sempre a un ciclo omolgo a un C^1 dato dove i lati esterni non compaio ro più. Analog.te i lati diagonali "lunghi" si possono eliminare (cioè passare a cicli omologhi dove non ci sono più) aggiungendo multipli di cont. $T^2{}_1$ e analoghi. Siamo così arrivati a sostituire ogni C^1 con un omologo in cui compaiono solo lati interni e forse i tre lati DA, EB, FC. Ma la cond. che si tratta di ciclà, cioè che il contorno manchi fa sì che questi ultimi tre lati, nella catena costituente il ciclo devono comparire con mol.tà nulla, perchè p.es. se DA compare con molt.tà u, A compare nel contorno con molt.tà non nulla -u. Quindi restano a costituire C^1 solo i tre lati interni. Se $C^1 = u_1(DE) + u_2(EF) + u_3(FD)$ e formiamo il contorno, che deve ridursi a zero per la cond di chiusura, ho che in questo D, E, F compaiono risp. colle $u_3-u_1,\ u_1-u_2,\ u_2-u_3$ molt.tà. Quindi deve essere $u_1 = u_2 = u_3$. Ma allora il C^1 ottenuto è un multiplo di C^1_i, e d d. Quindi in definitiva gli el.ti di $\mathfrak{R}^1$ sono $\underline{m}\, C^1_i$. Essi costituiscono quindi evidentemente un gruppo ciclico infinito a una dimensione. Mancano i gruppi d'ordine finito. Quindi

n° dei Betti = 1. Mancano, per la dim 1 i coeff di torsione.

ws

con le <u>sole</u> relazioni fond.^{li}

$$A_i^{c_i^k} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots \rho^k).$$

A chiamiamo nodi per

A, le classe di omotopia

e 1 ciclo di [illegible]

Prima di altri esempi,fermiamoci ancora su qualche generalità

BASE DI OMOLGOGIA(per la dimensione k)Il gruppo Ω^k è per noi (p 317) prodotto diretto di gruppi ciclici,alcuni finiti (quelli che conducevano coi loro perioodi al& ai coefficienti di torsione) altri infiniti(in n.° eguale al numero del Betti)& b^k. Quelli erano in n.° di ρ^k.Pensando a come è fatto un gruppo diretto come quello nominato,con opportune generatrici,se chiamiamo fra queste $A_1 \ldots A_{\rho^k}$ quelle relative ai gdof e $B_1 \ldots B_{b^k}$ quelle relative ai gruppi infiniti,ogni el.to del gruppo è in modo unico della forma $A_1^{l_1} \ldots A_{\rho^k}^{l_{\rho^k}} B_1^{m_1} \ldots B_{b^k}^{m_{b^k}}$ (V. prob. delle parole)

dove ogni coefficiente l_i varia in un intervallo finito, e precisamente $0 \leq l_i \leq c_i^k$. Attualmente si tratta del gruppo di omolgoia (a combinazioni delle A_i, B_i) i cui enti sono classi di omologia,e poi usiamo la forma additiva.Vuol dire che ogni classe di omologia si può scrivere sotto la forma

$$(1) \quad l_1 A_1 \ldots + l_{\rho_k} A_{\rho_k} + m_1 B_1 \ldots + m_{b_k} B_{b_k} \qquad 0 \leq l_i \leq c_i^k$$

dove è da ricordare cosa vuol dire sommare due classi di omologia (p 315)cioè vuol dire sommare un ciclo estratto dall'una con uno estratto dall'altra e prendere tutti i cicli omologhi alla somma.Quindi dire che ogni classe si può scrivere sotto la

A

Sostituendo ad A_i una classe A_i come ciclo, il che importa che = diviene $\sim$.

} P.es. ogni A_i dipende dallo zero perchè ha per la rel.^{ne} d. p. 322, con notaz.^{i} adottata $c_i^k A_i \sim 0$. Osservo a questo proposito che se abbiamo proprio così cicli non contornanti e multipli contornanti come annunciato a p. 313 la effettiva esistenza appare legata a quella di coeff.^{ti} di torsione; quindi nell'esempio della varietà triangolare vista prima non vi sono tali cicli perchè come si vide i coeff.^{ti} di torsione sono $= 0$. Cfr. invece p.

intendendo ora per A_i B_i multipli ciclici

325

rma (1) significa che ogni ciclo è omologo a un ciclo (1).

(e una volta sola)

I cicli A_i e B_i considerati che per comb lineare (1) dànno già tutti i cicli (a meno d' omologie) si dicono costituire una base di omologia.

Nell'esempio della corona triangolare di p 319 ($k=1$) il ciclo C_i^1 era appunto bade di omologia per la dimensione 1; abbiamo visto che tutti gli eltri cicli erano suoi multipli.

DIPENDENZA O INDIPENDENZA OMOLOGICA._Cicli, (ma poi interessa per cicli) anzi più gen.te catene si dicono omologicamente indipendenti se chiamandoli U_1^k U_2^k U_m^k NON è possibile una relazione

$$p_1 U_1^k + \cdots + p_m U_m^k \sim 0$$

a coefficienti intieri, a meno che questi si annullino tutti. Om.te dipendenti nel caso contrario. Essendo sempre b^k il n.° del Betti per la dimensione k, esso è il massimo n° di ~~catene~~ ora però chiuse omologicamente indipendenti che esista. Invero, tante esistono: basta prendere i cicli $B_1 \ldots B_{b^k}$ della base di omologia prima considerata; essi sono om.te ind. appunto perchè in quegli elementi generatori non soddisfano a nessuna RELAZIONE.

Ma di più non ve ne possono essere catene chiuse om.te ind. Invero ogni ciclo è dato a meno di una omologia dalla (1), cioè ogni ciclo C^k è tale che (2) $C^k \sim$ v.(1). Ricordando il carattere aritmetico dei coeff.ti di torsione (il primo è multiplo fra altro di tutti i successivi) ho, moltiplicando l'omologia (2) per c_1^k (lecito

Invece si tratta di moltiplicare l'analogia scritta e le analoghe per altri cicli ai sistemi con tutte nelle λ^* etc. in modo da ottenere $\lambda c_1{}^k C^k + \dots = 0$

~~Bisogna~~ Basta prendere le λ in modo che $\sum \lambda m_1 c_1^k = 0$

etc. $\sum \lambda m_{b_k} c_1^k = 0$. Sono b^k eq. lin.

om. tra le λ che sono b^{k+1} e quindi il

sist. è certo compatibile (e vi si [illegible]

con valori ~~interi~~ razionali; altri interi e quindi anche

sistema [illegible])

detto a p. 311) e osservando che ~~ecc.~~ $c_1^k l_1 A_1 \sim l_1(c_1^k A_1) \sim 0$

$$c_1^k C^k \sim m_1 c_1^k B_1 \dots + m_{b_k} c_1^k B_{b_k}$$

Se dunaue prendo b^k_{+1} cicli C^k e tratto ciasun o a queato modo ho altrettante omologie. Se posso eguagliare e $C_1^k B_1$ ecc. si potrà eliminare le B_1 etc. ricavandone una sol. ... om.ca per C^k e omologhi. Posso fare lo stesso ottenendo una omologia. Invece si tratta in sostanza di fare il det.te di ordine b^k+1 che ha per el.ti C_1^k, $m_1 c_1^k \dots$ $m_{b_k} c_1^k$ etc., e poi moltiplicare le omologie per i c.ti degli el.ti della 1a colonna (lento). Il risultato è appunto una omologia

$$X C^k + \dots \sim 0.$$

Quindi C^k e omologhi sono lin.te dipendenti. c.v.d.

Gruppo di omologie per la dimensione zero. - Qui (come preannunciato a p. 319) si ha ris.to generale. Se prendo due semplici ~~di dim.~~ di dim. zero qualunque del c. 330 (che sono per def chiusi cioè cicli p. 301) ~~ess~~ essi sono sempre omologhi sotto una cd.ne che dirò subito. Dettili A e B se posso collegqre tali punti mediante a successio e di spigoli"CONSECUTIVI"ALM.....PB tutti appartenenti al

X o come separando da un "cammino di spigoli"

Nat.te è da tener presente che per parlare diomologia bisogna pensare a vertici orientati(come in generale per dim. qualunque a cicli orientati).Qui quanto ho dimostrato prova che chiamando A e B due vertici qualunque non orientati è $+A \sim +B$.Se penso invec a due vertici qualunque comunque orientati chiamandoli T_1^0 e T_2^0 posso scrivere soltanto

$$T_2^0 \sim \pm T_1^0$$

[il passaggio [illegible] partendo dalle omologie $T_1^0 \sim \pm A$ e come è lecito moltiplicarle per -1 e poi come è anche lecito sommarle]

ciò sotto le condizioni di assumere come vertici orientati a cui riferirsi i vertici considerati col segno + (se no per. potrei altro [illegible]). Quindi tale restrizione occorre solo in ciò che segue e [illegible] [illegible] di p. 330.

omplesso come semplici di dim.ne uno,risulta certo $A \sim B$, perchè la catena ~~(AB)~~ (AL)+ (LM)+ +(PB) ha per contorno L-A +M-L+......

B-P dove resta soltanto B-A.Quindi B-A è contornante cioè ~ 0 cioè

$A \sim B$.Per arrivare alla conclusione bisogna dunque poter collegare A con B nel modo indicato.E' quanto avviene se il complesso è ~~CON~~ CONNESSOPer definizione complesso connesso significa appunto ciò, vale a dire la possibilità di connettere ogni vertice con ogni vertice mediante un ~~successione~~ cammino di spigoli(intendiamo in modo preciso ~~per successione~~ con tale parola una insieme di spigoli (semplici a una dimensione orientati)tale che il 2° estremo del primo spigolo coincide col 1° del secondo e così via).Perciò ~~in un~~ complesso connesso tutti i vertici sono tra loro omologhi. Perciò presa una qualunque catena di dimensione zero (in un complesso connesso), sia

$$U^0 = u_1 T_1^0 + u_2 T_2^0 \dots + u_{\alpha_0} T_{\alpha_0}^0$$

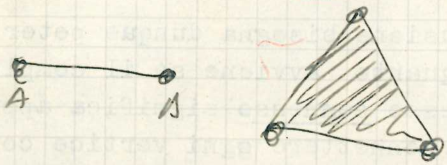
che è la stessa cosa come dire un qualunque ciclo di dim zero,

dove è da ricordare che T_i^0 sono vertici orientati (in modo arbitrario); siccome $T_i^0 \sim \pm A$ (se A è un vertice orientato fisso (p.es. T_1^0)) ne segue $U^0 \sim (\pm u_1 \pm u_2 \dots \pm u_{\alpha_0}) A$ cioè $U^0 \sim mA$ con m intero positivo o negativo. Quindi A (vertice qualunque comunque orientato) è base di omologia. Per concludere in modo preciso è ancora da osservare che per $m \neq n$ mA non è $\sim nA$, cioè che per $m \neq 0$ non è $mA \sim 0$: cioè che mA non è contornante. Effettivamente preso una U^1, in ogni suo T^1 ad p.es. (PQ) con contorno Q-P la somma delle molteplicità dei punti che costituiscono il contorno è $1-1=0$. Quindi ciò anche per cont. U^1: cioè per ogni U^0 contornante cioè ~ 0 la somma

9) Ω^0 è gruppo ciclico infinito a una generatrice

(Non è detto che K abbia dimens. n e non minima

per es.



(AB), A, B è esclu.te un K' isolato, e è solo di dim. 1)

Notiamo dunque esplicitamente: in un K connesso, se si orientano i vertici col segno + (cfr. p. 328) sono ~~nulle le~~ omologhe a zero tutte e sole le catene Ω^0 per cui la somma delle molteplicità vale zero.

delle moltiplicità dei punti che costituiscono tale U° è zero;per ciò mA non è contornante. Le classi di omologia ,tutte distinte sono dunque date da mA.Ed &A è base di omologia. Evidentemente (ricordando le df.ni) il n° del Betti b° vale sempre uno,e mancano i coefficienti di otrsione per la dimensione zero.Tutto ciò se il complesso è connesso.

Se invece il complesso non è connesso,le cose vanno diversamente.Definiamo anzi tutto entro il complesso K^n quello che chiamiamo un complesso K^r isolato:vuol dire un complesso parziale formato da alcuni (ev.te tutti)i semplici di K^n e tale che ogni semplice di K^n che abbia una faccia appartenente a K' appartenga esso pure a K' ~~(dal che segue senz'altro che anche K' ha la dim. n perchè conterrà certo semplici di dim.n)~~ Se K^n è connesso nel senso che precedeva esso non contiene nessun complesso isolato distinto da esso;perchè se K' è un complesso isolato,e A è un vertice di K' e B è un vertice di K collegato ad A dal cammino di spigoli ALM..PB, lo spigolo(faccia) AL di K avendo un vertice(faccia) A in K' vi appartiene,ma allora anche L(1),e poi LM,ecc. e così fino a B.Quindi intanto K' contiene ogni vertice di K;ma anche ogni semplice di K,perchè presone uno e detto B un suo verticenquel semplice appartiene a K'. Viceversa ogni complesso che non contenga complessi parziali isolati è connesso ;[cioè ogni K non connesso contiene complessi parziali isolati]

(1) [[Per questo "ma allora" occorre che se un semplice appartiene a K^n vi appartengano le sue facce. Ciò è ovvio se pensiamo un complesso come insieme dei pt. dei suoi semplici, ma non se stiamo puro aspetto c.nio formale, nel qual caso si potrebbe aggiungere alla df. di isolato nella cd.[..]]

Ciò risulta da quanto segue, che prova anche altro. Preso un complesso K, non connesso, insieme con ogni suo vertice A consideriamo quelli "accessibili" da A, cioè collegati con A da un cammino di spigoli: evidentemente essi sono anche a due a due collegati fra loro da una tale ~~catena~~ cammino (passando per A). Insieme con questi vertici mettiamo poi anche tutti i semplici di K^n che ne contengono qualcuno, i quali semplici coi loro vertici non introducono nessun vertice nuovo rispetto a quelli già considerati come collegati con A, come è evidente. Allora tutti questi semplici costituiscono un complesso (sono evidentemente rispettate le condizioni di p 289 per un insieme di semplici che deva costituire un complesso, perchè i semplici considerati, appartenendo a K soddisfano già a quelle condizioni). Il nuovo complesso K' non esaurisce K, se K non è connesso, perchè K allora contiene certo qualche vertice B non accessibile da A; d'altro lato K' è isolato in K^n secondo la definizione della p.prec (perchè se un semplice T di K ha una faccia appartenente a K', questa per la costruzione di K' contiene un vertice della classe condierata, ma allora tale vertice è pure vertice del semplice T e percostruzione T appartiene a K')

Così è provato quanto detto alla fine della p prec. Inoltre risulta che un complesso K si decompone, anche se non è connesso, in modo ben determinato, in un n° finito di complessi isolati ciascuno dei quali è connesso. Ho detto inmodo ben determinato, perchè il complesso parziale che contiene A deve appunto contenere tutti i vertici collegati con A e quindi per la condizione di isolamento i semplici che lo contengono, ecc.

$K'_1 — K'_h$

Ciò posto, se h è il n° dei complessi parziali isolati in cui si decompone K^n, due vertici di uno stesso complesso parziale sono fra loro omologhi $A \sim B$ (cioè $A-B \sim 0$ basta considerare un cammino di spigoli che li congiunge come a p 329). Invece due pt A e C di due complessi parziali isolati diversi non sono certo omologhi. (provo infatti a cercare una catena di spigoli che ammetta come contorno A-C. Ogni spigolo appartiene a un complesso isolato parziale K' e a uno solo -quello che contiene l'uno e quindi anche l'altro suo vertice-. Quindi la catena cercata U' avrà i suoi spigoli appartenenti alcuni a K'_1 alcuni a K'_2 - - alcuni a K'_h (supponiamo per fissare le idee che A e C appartengano risp. a K'_1 e K'_2)(1) Il suo contorno è la somma dei contorni di queste catene parziali. Ma per ogni contorno parziale (orientando i vertici col segno +, v p 330) la somma delle molt.tà è nulla. segue p 333 bis

(1) Scrivo con notazioni evidenti $U' = U'_1 + U'_2 - - + U'_h$

338 bis.

Avrò cioè

$$A - C = \text{cont}\, U^1 = \text{cont}\, U'_1 + \text{cont}\, U'_2 \ldots + \text{cont}\, U'_h.$$

Questa è una eguaglianza,cioè il primo e secondo membro devono essere identici .Ma nel 2° membro di vertici di K'_1 compare il cont U^1_1 e basta,con somma di molt.tà nulla,e invece al primo membro compare A con somma di molt.tà eguale a uno.Quindi tale eguaglianza è impossibil c.d.d.

Perciò,se estraggo un vertice da ogni K'_i,siano risp.te $A_1 A_2 \ldots A_h$ essi individuano h classi di omologia distin te.Inoltre è impossibile una omologia del tipo

$$m_1 A_1 + \ldots + m_h A_h \sim 0$$

cioè le A_i danno cicli omol. ind.

dove le m_i sono n.i interi non tutti nulli:si vede ripetendo tale e quale il rag.to con cui or ora abbiamo provato che NON era $A \sim C$ .Finalmente ogni catena(ciclo) U^0 in un mod. evid.te è $\sim \sum m_i A_i$ (prendendo assieme i pt. h° che stanno in K'_1, etc. ~~verti ci di K'_1, ecc.~~) .Quindi una base di omologia è $A_1, A_2 \ldots A_h$

Inoltre il gruppo di omologia Ω^0 è attualmente un gruppo abeliano libero con h generatrici ($A_1, A_2 \ldots A_h$, non legate fra loro, secondo quanto precede da nessuna relazione)

Per h=1 si torna al caso del complesso connesso.

Mancano torsione

Sempre i coeff. 1

cioè $b^0 = h$

GRUPPO DI OMOLOGIA PER LA DIM $\geq$ n. Veramente si potrebbepensare a

che a Ω^k con $k > n$; ma tutto quello che aui si può dire è che mqncqno

semplici di tqle dimensione, e quindi lq sola catena è quella zero

evid.te chiusa(perchè anche il suo contorno, in base ai va-

lori nulli dei coeff.ti risulta nullo) cioè ciclo. E' questo il

solo ciclo esistente; vi è una sola classe di omologia. Il gruppo

di omolgoia si riduce all'identità. Il caso mqssimo avente inte

resse è proprio il caso $k = n$. Qui è da osservare che di cicli con

tornanti propriamente detti non ve ne sono, perchè dovrebbero

costituire il contorno di una catena U^{n+1} e di tali non ve ne

sono(sqlvo la nulla, con contorno nullo; quindi di cicli C^n

contornanti non vi è che il ciclo zero; perciò ho detto che

di cicli propriqmente detti contornanti cioè omologhi a zero

non ve ne sono). In altre parole scrivere $C^n \sim 0$ vuol dire scrivere

$C^n = 0$. Perciò anche scrivere $C^n \sim C'^n$ (ricordare df.) vuol dire

scrivere $C^n = C'^n$. Ogni classe di omologia qui è formata da un

solo ciclo; dire che cicli sono omologhi vuol dire che sono e

guali. Nel caso $k = n$ il concetto di indipendenzq omologica

coincide con quello di indipendenza lineare, da definire ov

viamente fra catene U^k_i, nel senso di non esistenzq di n. reali

non tutti nulli p_i tali che sia

$$p_1 U_1^k + p_2 U_2^k \dots = 0.$$

Infatti la dipendenza omologica di p. 325 tra i cicli C_1^n

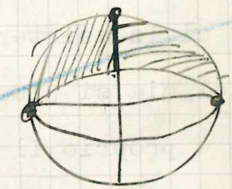
C_2^n si riduce, dopo quanto ora di è detto alla dipendenza li

neare $p_1 U_1^n + p_2 U_2^n \dots = 0.$

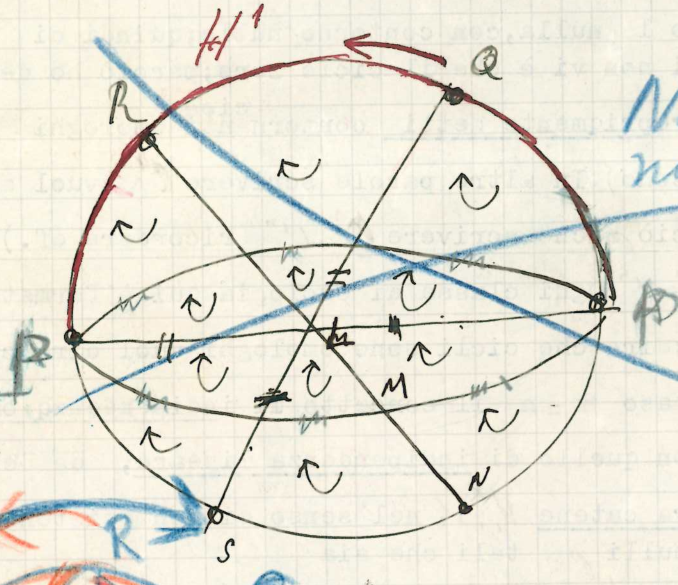
Perciò ricordqndo il significato di b^k (per ogni k) visto a p 325

qui per $k = n$ possiamo dire che ~~b^n è il massimo n.° di cicli di dim. n~~

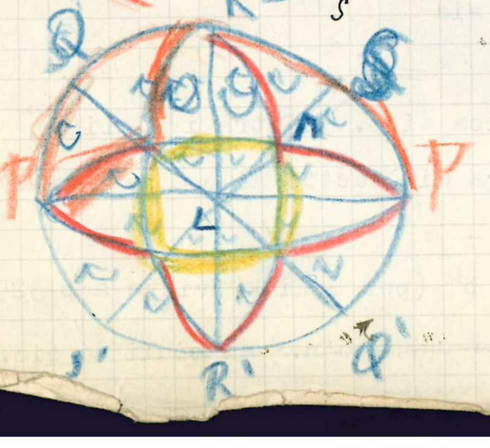
Connessioni prima sviluppate per S^n e le
dette effettive di S^n vedremo tra poco su
esempi



non con-
giunti i 2 Δ
doppi han comun un lato e un vertice)



No
non sono
triangoli!



(non nulli)

linearmente indipendenti. Lo Quanto ai coefficienti di torsione essi mancano certo anche per la dim. n perchè se no si avrebbe qualche ciclo $U^n_{\text{non zero}}$ con $mU^n \sim 0$ (p. 325). Ma siccome ora $\sim$ vuol dire $=$,non è possibile che sia $U^n \neq 0$ e $mU^n = 0$.

Riprendiendo dopo questa generalità lq"ecoronq triqngolqre "di p. 304 di cui a p. 321 abbiamo determinato il b^1 dicendo che per $k=0$ $k=2$ avremmo approfittato delle oss generali possiamo ora aggiungere: per Ω^0 ora il complesso è evid.te connesso e quindi esso è (p. 330_31) gruppo abeliano libero con una generatrice, e $b^0 = 1$. Quanto al grup po di omologia Ω^2 esso è attualmente quello di dim massima, e secondo quanto prece de i suoi e &&&& elementi sono i singoli cicli C^2 distinti. Ma quati attualmente mancano, all'infuori del ciclo $C^2 = 0$, perchè (v. figura a p 304) ogni lato del triangolo esterno e di quello interno appartengono come parte del contorno uno a ciasvuno dei sei triangoli e a uno solo, cosicchè non è possibile formare una cb lin dei sei triangoli in cui venga a mancare il contorno. Quindi Ω^2 si riduce all'elemento zero cioè alla identità, e quindi il relativo n° del Betti $b^2 = 1$. I coefficienti di torsione mancano, secondo i risultati generali sia per la dimensione zzero sia per la dimensione due.

Vediamo ora qualche altro esempio.

IL PIANO PROIETTIVO. Regione ineterna a un cerchio con identificazione dei punti opposti. Lo triangoliamo come in figura in 12 triangoli (triangoli a lati
dove è da osservare che sugli spigoli &&&d"interni"sono ind.or.tiopposti
curvilinei) ,ma non imposta) Qui abbiamo intanto (visto che è connesso)
Ω^0 gruppo abeliano libero a una generatrice

$$b^0 = 1, \quad \text{mancano i } c^0.$$

Veniamo subito a Ω^2. Sono da considerarsi i C^2

a anche in questo esempio, come già nel precedente, mancano C^2 non nulli
Volendone infatti ottenere uno, cioè ottenere una catena U^2 con contorno
nullo, devo comporla coi tirnqgoli Ora_v. figura_ ogni lato interno ~~che~~
compare come lato di due triangoli adiacenti, e come si è detto coi
due versi opposti. Ora se i tirnagoli orientati come in figura sono
T^2_1 T^2_2 (questi adiacenti) ecc.) e $U^2 = u_1 T_1^2 + u_2 T_2^2 + \ldots$
il lato comune -con l'orientamento che ha in T^2_1 viene a comparire
$u_1 - u_2$ volte; quindi per scomparire deve essere $u_1 = u_2$ Sicocome da un
dato triangolo posso passare a ogni altro attraverso triagoli che
abbiano lati comuni adue a due, segue che tutte le u_i sono eguali fra
loro. Chiamando m il comune valore, il contorno è pertanto la somma
dei segmenti lungo la circonferenza, ognuno m volte, tutti coll'orienta
mento subordinato, cioè in definitiva la circonferenza, in verso ~~an~~
~~an~~orario, m volte o se vogliamo, la semicirconferenza rossa PP col
l'orientamento segnato -che chiamerò $\underline{H}^1$, 2m volte. Ma ~~questo~~ il suo contorno
$\overline{2mH^1}$ non è eguale a zero (è la somma dei ~~tre~~ semplici distinti
(1) (PQ)+ (QR)+(RS) +(SP) come in fig.), a meno che sia m nullo. Ma allora U^2
$= \Sigma m T_i^2$ è nullo. Abbiamo dunaue mancanza di C^2 non nulli e quin
di Ω^2 ridotto all'identità.

$b^2 = 0$

Veniamo finalmente al gruppo Ω^1. Qui anzitutto è da osservare che
$2H^1$ è contornante e H^1 è ciclo ~~non è~~ contornante. Per $2H^1$ esso è secondo
quanto precede il contorno di ΣT_i^2 (m = 1). D'qltro lqto H^1 è ciclo
(perchè il suo contorno in base alla espressione (1) vale

$$Q - P + R - Q + S - R + S - P = 0 \quad + P - S = 0$$

ma non è contornante. Infatti se io provo a costruire unacatena U^2
che lo ammetta come contorno, e tale quindi che nel suo contorno
manchino lati interni, il rag.to fatto nella prima metà di questa pa
prova che tutti i coeff.ti sono eguali fra loro.. Ma allora, come

|| Poi posso eliminare (sempre con aggiunzione di contorni cioè passaggio a cicli omologhi) alcuni segmenti radiali sostituendoli con altri radiali e con segmenti al contorno: così elimino p. es. LS e LP sostituendo con LP (e contorno) ~~e elimino LP e LQ sostituendoli con LR. Viene così~~

$\Sigma \cancel{u_i (LN) + \alpha(NP)} + \beta(PQ) + \gamma(QR) + \delta(RP) + \cancel{\varepsilon(PS)} + \eta(SN)$

Così LP' LQ'!

sistemi

~~il contorno è fatto da~~

L con molt.$^{\text{à}}$ $-\Sigma u_i$

Poi elimino gli LP

(ricordare le identificazioni)

R ≡ N e con u.$^{\text{à}}$ $u_1 - \cancel{\alpha + \eta + u_2} + \gamma - \delta$

Tutti i coeff. devono risultare uguali a zero. ~~Sarebbe il 1° già~~

~~costruzione degli altri (sommando)~~

Poi

(inutili i dettagli)

$u_1(LN) + u_2(RL) + \alpha(NP) + \beta(PQ) + \gamma(QR) + \delta(RP) + \varepsilon(PS) + \eta(SN)$

dove per la chiusura cioè mancanza di contorno devono annullarsi le relative molt.$^{\text{à}}$. Ad istanti

molt.$^{\text{à}}$ L è $\cancel{-(u_1+u_2)} = 0$ $u_2 - u_1$ (I)

" P " $\alpha - \beta$ (II)

" Q ≡ S " $\beta - \gamma + \varepsilon - \eta$ (III)

" R ≡ N è $u_2 + u_1$ cioè zero $-\alpha + \gamma - \delta + \eta$ (IV)

II dà $\alpha = \beta$; anche $u_2 + u_1 = 0$. Cioè i 1.i due termini si compongono in $u_2(RLN)$. Ma aggiunto il contorno di semicerchio lo elimino. Allora ho solo più lati di contorno esterno, che posso riportare tutti (per le identificazioni) nel semicerchio sup.re

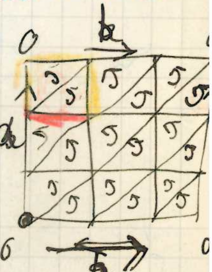
II. $\beta(PQ) + \gamma(QR) + \delta(RP)$ $+\varepsilon(SP)$ con contorno $(\delta-\beta)P + (\beta-\gamma)Q + (\gamma-\delta)R$ $+(\delta-\varepsilon)S$

Quindi $\beta = \gamma = \delta$. Quindi il ciclo è $\sim \beta H$. ~~M~~ (torna così) visto sopra, il contorno è $2mH^1$: il coeff.te di H^1 è dunaue un n° pari, e non può essere eguale a uno come occorrerebbe. Quindi H^1 non è contornanteCi triviamo quindi intanto in presnza di un ciclo non omologo a zero il cui doppio è omologo a zero, il che(p.324) significa esistenza di coefficienti di torsione. Comunque, volendo il gruppo di omologia Ω^1, cioè le relative classi, si ha che ogni C^1 è nec.te omologo a zero oppure ad H^1. Infatti (in sostanza an.te a quanto si fece a p. 319) faccio così: nella catena che costituisce il C^1 posso prima i rossi poi gli [illegible] far scomparire ognuno dei ~~sei~~ lati curvi interni(segmenti) mediante aggiunzionedi contorni di triangoli, e allora compaiono solo più lati esterni e lati "radiali": data la chiusura ho che p.es. lungo il raggio LMN $=$ (LM)+(MN) dovendo scomparire M dal contorno LM e MN compaiono con la stessa moltiplicità (v. contro). Quindi il ciclo C^1 è $\sim \mu H^1$: ma se μ è pari, siccome $2H^1 \sim 0$ viene $C^1 \sim 0$, se μ è dispari, viene $\sim H^1$. c.d.d. Perciò il gruppo Ω^1 consta di due soli elementi esso è un G_2 d'ordine finito. Nella sua cposizione come prodotto diretto mancano i gruppi ciclici infiniti (cosicchè $p^1=0$), si ha inveve un coefficiente di torsione(e uno solo) eguale a due. Concludo così

$$p^1=0 \qquad c^1=2$$

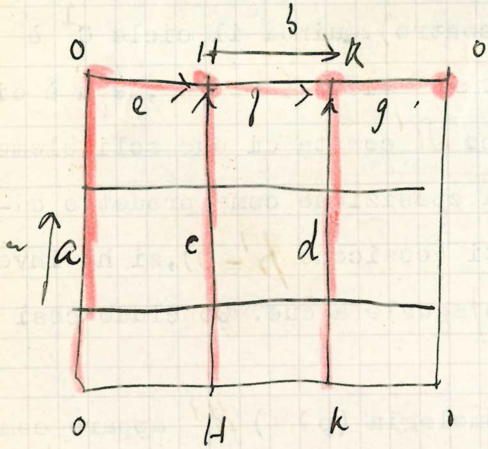
Inoltre ricordando la df. di base di omologia (p 325) H^1 appare come base di omologia.

TORO, che prendiamo, $(a\,b\,c^{-1}\,b^{-1})$ come a p 241 colla triangolazione stessa



Per Ω^0 si ha direttamente g. ab. libero con 1 gen.e e $p^0=1$.

Per Ω^2 abbiamo che, a differenza degli esempi prec.ti vi sono C^2 non nulli: basta prendere lo stesso quadrato, come somma dei triangoli della triangolazione orientati concordemente,



0
H
b
k
0
e
g
g'
a
c
d
0
H
k
1

cioè in modo che su ogni lato interno(orizz. o verticale o diagonale) vengano subordinati orinetamenti opposti (v. figura,va bene)Allora il contorno viene a ssere (v. figura) a+b-a-b cioè zero.Abbiamo così un ciclo C^2 non nullo.Allora anche mC^2 è un ciclo non nullo (distinto da quello e fra loro per i vari valori di m,e auindi anche omologi_ camente distinto,p.335) E coi soliti ragionamenti si vede subito che non vi sono altri C^2. Quindi il gruppo Ω^2 è un gruppo abrliano libero con una generatrice.Abbiamo ora così non più $b^2=0$ come prima ma

$b^2 = 1$. (nat.te continuano però a mancare i coeff di torsione come sempre).

7 Quanto ad Ω^1, vista la identificazione dei 4 vertici, il lato a(orientato come in figura,p es lato sinistro) appare come un ciclo,il suo contorno essendo O-O= zero. Così b. 8 Possiamo intanto vedere che ogni C^1 è omolggo a una cb lin (a,b).Invero,mediante aggiunzione di contorni di triangoli,posso intanto passare a cicli omolghi dove non compaiono lati "diagonali" ;poi posso eliminare i lati interni orizzontali aggiungendo contorni di quadratini;poi per la idemtificazione posso eliminare segmenti lungo l'a destro e il b inferiore.Ancor per i segmenti posti lungo le verticali interne,essi per la condizione di chiusura,cioè di mancanza del controno devono intervenore,per una di quelle verticali uno stesso n° di volte. Lo stesso per il lato a. Quindi al momento posso scrivere (notazioni come nella fig. contro) $C^1 \sim$ cb lin (a e f g c d

~~[illegible]~~

In generale RISULTA (Seif.Th p.145,cfr anche p 141) che per il gruppo di omologia di dimensione UNO il n.° del Betti b^1 vale:

. per la sfera con p manici 2p,

per la sfera con p nastri ~~2p-2~~ p-1

Nel primo caso mancano i coeff di torsione,nel 2° ve n è uno che vale DUE.

Per Ω^0,(sono sup.connesse) sempre $b^0=1$ e mancano i c^0.Per Ω^2 si ha risp. $b^2=1, b^2=0$,e sempre mancano i coef di torsione(S.Thr.,p.145)

Riassunto

	b^0	b^1	b^2
corona	1	1	0.
piano pr.	1	0 ($c^1=2$)	0
toro	1	2	1

~~Ma~~ qui si elimina ancora c aggiungendo il contorno del rettangolo alto di sinistra, così d; i nuovi lati orizz. inferiori si riportano sui superiori per la identificazione. Finalmente e f g compaiono uno stesso n° di volte. Ho dunque per ogni C^1 $C^1 \sim u_1 a + u_2 b$

Potremo concludere che a, b costituisce una base di omologia se controlliamo che essi sono omologicamente ind. (p. 325, 325) Effettivamente supposto $u_1 a + u_2 b \sim 0$ cioè $u_1 a + u_2 b$ contornante, sarà contorno di una catena U^2 formata dai triangoli di p 341 con certe molt.tà: anzi per ogni triangolo che compaia nella catena con una certa molt.tà u, la quale porta un contributo di u volte ogni lato al contorno, deve comparire ciascuno dei triangoli adiacenti con la stessa molt.tà per distruggere dal contorno i lati interni. Ma allora la catena U^2 è $m \sum T_i^1$, e il suo contorno si riduce a zero, cioè perchè $u_1 a + u_2 b$ contorni, deve essere $u_1 = 0\ u_2 = 0$.

ricordo molt.

Perciò riassumendo ogni C^1 è $\sim u_1 a + u_2 b$, e queste classi di omolgia sono tutte distinte. a, b è una base di omologia; Ω^1 è un gruppo ab libero con due gen.ci a, b; $b^1 = 2$ e mancano i coeff.ti di torsione.

Tornando ora al caso generale, si tratta di dare un procedimento generale il quale permetta, in ogni caso, cioè per ogni complesso K^n di arrivare alla determinazione ~~della~~ dei n.i di Betti e dei coefficienti di torsione (e anche delle basi di omologia) per ogni valore della dimensione k. È quanto ora andiamo a esporre: il procedimento che troveremo ha appunto valore generale (per quanto risulti assai lungo) ma vedremo poi come si possa abbreviare.

Esso è fondato sulla nozione delle matrici di incidenza relative a un dato K^n: queste danno, mediante un simbolo numerico, che ora vedremo, una indicazione precisa sul complesso nel senso che esprimono quali ~~[illegible]~~ sono ~~[illegible]~~ i semplici T^k facce di ogni T^{k+1} del complesso e anche precisano gli orientamenti: Per ogni k $(0 \leq k \leq n)$ siano come a p. 291

$$T_1^k, \ldots \quad T^k_{\alpha_k}$$

tutti i semplici di dim. k del complesso K^n, assunto ciascuno con un orientamento fisso. (per $k=0$ orientiamo sempre col segno +) ~~Il [illegible]~~ Preso un qualsiasi T_i^{k+1} (e per poterne parlare sarà $k+1 \leq n$, cioè

$$k \leq n-1)$$

dician T_i^{k+1} con $1 \leq i \leq \alpha_{k+1}$) il suo contorno è formato da alcuni fra i T^k. Possiamo scrivere

$$\text{cont.}\, T_i^{k+1} = \sum_{h=1}^{\alpha^k} \varepsilon_{hi}^k \, T_h^k \qquad (1) \quad (i=1, \ldots \alpha^{k+1})$$

purché si prenda $\varepsilon^k_{hi} = 0$ se T_h^k non fa parte del contorno T_i^{k+1}
$= 1$ " fa parte del contorno con lo stesso or.

$\varepsilon^k_{hi} = -1$ ~~se~~ fa parte del contorno con or.te opposto.

Se per ogni valore di k che entra in considerazione conosco tutti i n.i ε^k_{hi} $(h = 1, \dots \alpha^k;\ i = 1, \dots \alpha^{k+1})$ so effettivamente quali T^k ~~facce~~ ~~sono facce~~ (e per T^{k-1} che fino ai vertici sono vertici di ogni T^{k+1} ~~; conosco cioè in~~ (oltre che quanto riguarda gli or.ti); conosco cioè in sostanza com'è costituito il complesso. Quindi si capisce come la conoscenza effettiva dei valori delle ε deve permettere di determinare anche gli Ω^k.

Ripetiamo che per ogni valore di k $(0 \le k \le n-1)$ il significato del simbolo ε^k_{hi} è: il T^{k+1}_i e il T^k_h si trovano nelle seguenti relazioni:

$\varepsilon = 0$ $\quad T_h$ non è faccia di T_i

$\varepsilon = 1$ $\quad$ " è faccia con id. or.to (cioè quello subordinato)

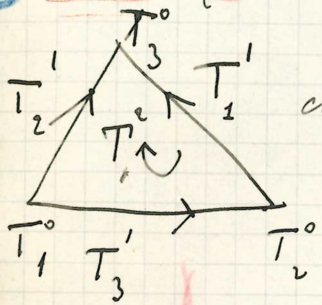
$\varepsilon = -1$ $\quad$ " " " con orient.to opposto

D'altro lato per ogni valore di k ~~la conoscenza~~ i valori dei coeff.ti ε^k_{hi} si ~~può eseguire~~ possono dare ~~fatta~~ come el.ti di una matrice formata appunto con quei coeff.ti. Essa ha tante orizzontali quanti sono i valori di h, cioè α^k orizzontali e α^{k+1} verticali. Ogni orizzontale corrisponde a un valore di h cioè a un T^k; ogni verticale corrisponde a un T^{k+1}. Esse si chiamano matrici di incidenza.

Matrici di incidenza ve ne sono parecchie, una per ogni valore di k $(0 \leq k \leq n-1)$; cioè vi sono n matrici di incidenza. Le chiamiamo

$$E^0, \quad E^1, \ldots \ldots E^{n-1}.$$

Per esempio (mi limito a un caso estremamente semplice) triangolo che chiamiamo T^2 coll'or.to segno coi lati orientati p. es. come in figura e i vertici che orientiamo, come detto, col segno $+$. Allora



$$E^0) \quad \begin{array}{c|ccc|} T_1^0 & 0 & -1 & -1 \\ T_2^0 & -1 & 0 & +1 \\ T_3^0 & +1 & +1 & 0 \\ \hline & T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 \end{array} \quad ; \quad E^1) \quad \begin{array}{c|c|} T_1^1 & -1 \\ T_2^1 & +1 \\ T_3^1 & +1 \\ \hline & T_1^2 \end{array}$$

~~Si tratta~~ Si tratta di vedere come la conoscenza dell'insieme delle matrici di incidenza permetta di arrivare alla conoscenza dei gruppi di omologia per ogni singolo complesso

A tale scopo cominciamo col dimostrare che il prodotto di due matrici di incidenza consecutive ($E^{k-1} \cdot E^k$) eseguito combinando le orizzontali di E^{k-1} con le verticali di E^k (cfr p 350) è sempre ~~una~~ le matrice nulla (nel senso che ha tutti gli elementi zero./

$\forall\ (k \geq 1)$

Effettivamente partiamo dalle (1) di p. 347 che ci ha condotto alle ~~...~~ def. dei n. ε. e prendiamo il contorno dei 2 membri : ~~...~~ : a primo membro viene cont cont T_i^{k+1} che è zero (ogni contorno è chiuso, v. p. 305). Quindi

$$0 = \sum_{h=1}^{\alpha^k} \varepsilon_{hi}^{k} (\text{cont. } T_h^k).$$

Ma a $(\text{cont. } T_h^k)$ posso applicare nuovamente le stesse formule (1): queste valevano per $0 \le k \le n-1$; quindi ora occorre (al posto di k c'è $k-1$) $0 \le k-1 \le n-1$, cioè $1 \le k \le n$, che si riduce a $k \geq 1$. Quindi quanto diciamo vale per

$$k \geq 1.$$

Allora

$$0 = \sum_{h=1}^{\alpha^k} \varepsilon_{hi}^{k} \sum_{l=1}^{\alpha^{k-1}} \varepsilon_{lh}^{k-1} T_l^{k-1}. \quad \text{Cioè}$$

$$\sum_{l=1}^{\alpha^{k-1}} T_l^{k-1} \left(\sum_{h=1}^{\alpha^k} \varepsilon_{hi}^{k} \varepsilon_{lh}^{k-1} \right) = 0 \quad (i = 1, \dots \alpha^{k+1}).$$

D'altro lato la catena U^{k-1} che compare a 1° membro non si può ridurre a zero (secondo le nozioni generali di eguaglianze di 2 catene, p. 291) se i coeff. non sono tutti nulli. Quindi $k = 1, \dots n-1$

$$(2) \quad \sum_{h=1}^{\alpha^k} \varepsilon^k_{hi}\, \varepsilon^{k-1}_{lh} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1 \dots \alpha^{k+1} \\ l = 1, \dots \alpha^{k-1} \end{pmatrix}$$

Abbiamo così tante relazioni del tipo (2), in ciascuna delle quali – a norma degli apici k, $k-1$ – compaiono elementi di due matrici E^k, E^{k-1} consecutive (sempre per $k \geq 1$).

Precisamente le (2) esprimono che ~~il~~ ~~risultato~~ ~~il~~ la matrice prodotto, $E^{k-1} E^{k}$ è nulla nel senso di essere le matrici nulle, con tutti gli el.ti nulli: il prodotto a sin. delle (2) è fatto (si somma rispetto a h, 2° e risp. 1° indice ~~[illegible]~~ ~~di E^k~~ ~~[illegible]~~ ~~di E^{k-1}~~: se si legge prima il fattore ε^{k-1} e poi ε^k ~~combinando~~ ~~delle~~; cioè si mantenga fissi l 1° indice in E^{k-1}, e i 2° in E^k) combinando ogni singola orizzontale di E^{k-1} con ogni singola verticale di E^k: effettivamente il n° degli elementi che in esse compaiono è lo stesso perché è il n° delle verticali di E^{k-1} e quello delle oriz.li di E^k: ~~che~~ quest'ultimo (p. 349) è α^k, e quello è anche (v. le dove con $k+1(k)\,\alpha^k$. ~~Così nell'esempio di~~ p. 351 il ~~prodotto è~~ La matrice prodotto non è generalmente quadrata (v. nelle (2) i valori di i ed l, diciamo di l e di i; l ha α^{k-1} valori, e i α^{k+1})

Così nell'ex. di p. 351 la matrice prodotto corrisponde a $l = \alpha^0 = 3$; $i = \alpha^2 = 1$. Viene ~~Matrice~~ $(k=1)$ la matrice $|0 \ 0 \ 0|$ Va bene.

Ora fondandoci sulla nozione delle matrici di incidenza e su tale teorema, indicherò come si può dimostrare il seguente teorema che risolve la questione posta a P 347. Indicando come abbiamo già fatto con α^k il n.° dei semplici di dim. k chiamiamo γ^k la caratt. della matrice di incidenza E^k (a p 509 si diceva C, ma ora le c sono per noi i coeff di torsione) Nat.te per parlare di tale matrice si suppone, come a p. 347, $0 \leq k \leq n-1$, cosicchè ha senso parlare di $\gamma^0, \ldots \gamma^{n-1}$. Nella formola che scriverò compaiono anche i simboli γ^n γ^{-1} che non rientrano in tale df. e che definiamo così $\gamma^n = \gamma^{-1} = 0$. Ebbene, in ogni caso il n° del Betti β^k è dato da

$$\beta^k = \alpha^k - \gamma^k - \gamma^{k-1} \qquad (k=0,1,\ldots n)$$

(appunto per $k=0$ compare γ^{-1} e per $k=n$ compare γ^n). Inoltre i coefficienti di torsione per la dim k sono i divisori elementari diversi dall'unità della matrice E^k (sempre per $0 \leq k \leq n-1$) Essi invece mancano per $k=n$, come sappiamo già (p.333). La determinazione dei n.i del Betti e coefficienti di torsione è così ricondotta al calcolo delle caratt. e divisori elementari di certe matrici, tutte operazioni più o meno lunghe ma che sappiamo eseguire (p es trasformando quelle matrici nella forma canonica diagonale p. 509.)

(1) [E siccome sappiamo già p. 333 bis che mancano anche per $k=0$, vuol dire che la E^0 ha certo tutti i divisori el.ri eguali all'unità. Es.: con le E^0 di p. 357 diverse e valore]

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Per dimostrarlo, ricordiamo che le catene U^k costituiscono (p 295) un gruppo abeliano libero con α^k generatrici, cioè (p 204) di dimensione α^k. I semplici $T_1^k, \ldots T_{\alpha_k}^k$ ne costituiscono una base (p. 205) ma sappiamo che ve ne sono (nello stesso n°) infinite altre. Possiamo perciò pensare per il gruppo (U^k) &&&&& relativo alla dim. k di prendere una base qualunque

$$U_1^k, \ldots U_{\alpha_k}^k$$

Se facciamo questo, si può procedere per la nuova base, anzi per le nuove basi, come si è fatto a p 342 nel caso particolare in cui erano semplici, cioè esprimere il cont U_i^{k+1}, per ogni valore di i sotto la forma

$$\text{cont}\, U_i^{k+1} = \sum_{h=1}^{\alpha^k} \varepsilon'^k_{hi} \; U_h^k \qquad (i=1,\ldots \alpha^{k+1})$$

dove le ε' sono convenienti n.i interi (non nec.te eguali come prima a zero o ± 1). Con questi interi si possono formare delle nuove matrici di incidenza E'^k $(0 \leq k \leq n-1)$. E tale e quale come prima si dimostra che $E'^{k-1} E'^k$ è una matrice nulla (tale e quale perchè quella dm. era fondata sul fatto che il contorno di un contorno era zero e ciò continua a sussistere)

Che vantaggio vi è nella modificazione introdotta, la quale a priori sembra complicare, anzichè semplificare le cose? Il vantaggio è questo, che colla maggior latitudine che abbiamo ora nella scelta della base si può sperare di ottenere per la matrice E'^k una forma più semplice che per E^k. Effettivam

Dalla quale forma più semplice si legge più facilmente il risultato che vogliamo provare.

te si controlla che, con convenienti cambiamenti di base si può sempre da una data matrice di incidenza dedurne un'altra che ne differisca per le trsf.ni elementari di p. 503, per ogni possibile trsf.ne elementare (cambi di segno in linea, somma di linee ..) Non sviluppo questo controllo (Seifert e Thr. p. 73, 74, in part. p. 74 lin 14)

6 D'altro lato, abbiamo visto (p503) che con trsf.ni elementari ogni matrice si può ricondurre alla forma diagonale; cosicchè si può pensare che ciò avvenga anche attualmente, cioè che si possano scegliere le basi dei gruppu (U^k) per le varie dimensioni in modo tale che le matrici di incidenza si presentino tutte sotto la forma diagonale. Ho detto " si può pensare" perchè qui ci troviamo di fornte a un caso più complicato di quello trattato a suo tempo; in quanto là si trattava di una sola matrice. Qui abbiamo invece parecchie matrici

$$E^0, \; --- \; E^{n-1}$$

da considerare simultaneamente, e i problemi di riduzione a forma diagonale relativi a esse interferiscono fra lòro, perchè la scelta di una nuova base per (U^k) interessa contemporanemanet due matrici di incidenza consecutive, la E^{k-1} e la E^k dove gli el.ti della base (U^k) intervengono per la prima inrelazione con le colonne, e per la seconda in relazione con le linee. Ma effettivamente la cosa riesce, come segue.

Si comincia a oeprare sulla matrice E°, che si riduce con trasf.ni elementari a forma diagonale per conto suo. Introduciamo soltanto questa variante, che dopo avere ottenuta la forma diagonale, cioètutti gli el.ti nulli salvo i primi sulla diagonale che esce dall'angolo alto sinistro, trasportiamo questo pezzo di diagonale con el.ti non nulli verso l'angolo destro, fin dove è possibile-nat.te mediante scambi di verticali. La diagonale in questione si przsenterà così

Ricordiamo che in essa compaiono complessivamente tanti elti non nulli quanto è la caratt. di E° cioè γ°, (a p. 509 erano in n° di c che ora si chiama appunto γ°).

Per ottenere questi risultati, cioè per realizzare le trsf.nielri che consentno la riduzione della E° a questa forma, si saranno dovute scegliere nuove basi per i gruppi (U°) e (U^1)

già accennato

Passiamo ora alla matrice E^1. Allora a prima vista si presenta questo inconveniente, che per realizzare analogamente le trsf.ni elementari atte a mutarla nella forma diagonale saranno da scegliere nuove basi per (U^1) e per (U^2) il che rischia di guastare di nuovo il risultato ottenuto per E°. Ma è appunto qui che interviene a risolvere la difficoltà la proprietà trovata per il prodotto $E'^{k-1} \cdot E'^{k}$ = matrice nulla. Infatti qualunqu sia il sistema di basi adottato, ciò sussiste, in particolare dunque nello stadio in cuitroviamo ora. Ora quando io moltiplico una linea di E'° (nello stadio attuale) per una colonna di E'^1

e precisamente una delle prime γ° orizzontali di E'° (se no vien già tutto zero) per una verticale qualunque delle E'^1, il prodotto si riduce a un solo termine: un termine di quella diagonale (unico non nullo nella orizzontale considerata di E'^0) situato in uno degli ultimi γ^0 posti moltiplicato per l'el.to che porta lo stesso n° di ordine, dunque uno degli ultimi γ^0, in una verticale qualunque di E'^1. Ma questo prodotto deve essere nullo, per la proprietà ricordata, il primo fattore è non nullo, quindi è nullo il secondo. Quindi le ultime γ^0 orizzontali di E'^1 hanno tutti gli elementi nulli. Ora, quando cerchiamo di ridurre E'^1 alla forma diagonale (modificata come a p prec.te) appunto in base a questa circostanza si possono abbandonare, salvo a riintrodurle alla fine le ultime γ^0 orizz.li, perchè sono già costituite di zeri. Ciò significa che è da operare soltanto sulle prime $\alpha^1-\gamma^0$ orizzontali - il che vuol dire modificare soltanto gli el.ti dall'1° fino a quello di posto $\alpha^1-\gamma^0$ della base di $\mathcal{U}^1$ e sulle verticali, cioè sulla base di $(\mathcal{U}^2)$ - il che non interessa più la E'^0. E quanto a quegli el.ti della base di $(\mathcal{U}^1)$, essi corrispondono alle $1^a, \dots (\alpha^1-\gamma^0)^{esima}$ colonne di E'^0, le quali sono costituite da tutti elementi nulli, cocicchè i nuovi cambiamenti da fare non modificano più la forma diagonale già raggiunta per E'^0. Quindi quando si fa assumere alla E'^1 la forma diagonale, la E'^0 non si modifica più.

Anche nella forma diagonale di E'^1 si portano gli el.ti non nullli a occupare i posti in alto a destra (γ^1 posti). E poi così si procede. In questo modo si arriva intanto a ridurre tutte le $E'^0 \dots E'^{n-1}$ a forma diagonale [ ]

Chiamiamo ~~F~~ $F^0, \dots F^{n-1}$ queste forme diagonali: relative alle nuove basi di vari $(U^{(k)})$: lungo la diagonale non nulla di F^k stanno ~~tutte tensi~~ i divisori el.ri, ~~che~~ di cui alcuni eguali all'unità e altri no con carattere aritmetico che conosciamo: questi ultimi risulteranno poi i coeff.ti di torsione (e allora saranno ρ^k con valori $c_1^k \dots c_{\rho^k}^k$), ma con ~~seguenti~~ prescindendo ancora quest part diciamo sono in n° di σ^k e li chiamiamo

$$d_1^k \dots d_{\sigma^k}^k .$$

~~Ragioni~~ Chiamiamo poi $U_1^k \dots U_{\alpha^k}^k$ le nuove basi.

Fissiamo un singolo valore di k; allora le catene della base di dividono generalmente in tre tipi.

Intanto, badando a F^{k-1} (quindi per $k = 1,2,\dots n$) dove le colonne rispondono alle U_i^k è chiaro che le ultime γ^{k-1} U_i^k hanno ciascuna un contorno, formato da una ~~delle~~ U_h^{k-1}, contata un certo n° di volte (ε'^{k-1}_{hi}, ricordare che è un intero ≥ 1), [cioè se il corrisp.te divisore el.re è 1, se no > 1), e basta. Invece le prime $\alpha^k - \gamma^{k-1}$ tra le U_i^k (per ragioni analoghe) hanno contorno nullo, cioè sono cicli. Quelle ultime U_i^k le chiamiamo $N_1^k \dots N_{\gamma^{k-1}}^k$

Quanto alle "prime" considerate, in n° di $\alpha^k-\gamma^{k-1}$, esse si dividono ancora in due classi. Come si disse sono cicli; ma, badando ora alla matrice F^k (dunque ora per $k = 0, \quad n-1$) dove a esse si intitolano le orizzontali, si vede che le pri me γ^k sono, ciascuna presa una o più volte (dipende anche qui dall'essere uno o maggiore un divisore elementare) contorno di una U_i^{k+1}. Queste le chiamiamo

$$L_1^k \; - - - \; L_{\gamma^k}^k$$

~~L&&&&&&&&&&&&~~ Non è dunque detto che siano omologhe a zero sono però sempre cicli con multipli omologhi a zero; li possiamo chiamare cicli "divisori di cicli omologhi a zero" o per dirlo più brevemente, ma con frase impropria perchè non si parla più di omologia "cicli divisori dello zero". Le [potrebbero pure mancare] successive fra le U, dunque in n° di

$$\sigma^k - (\alpha^k - \gamma^{k-1}) - \gamma^k \text{ che chiamiamo } g^k \qquad (1)$$

le chiamiamo

$$M_1^k \; - - \; M_{g^k}^k$$

Sono ancora cicli, ma non più "divisori dello zero", cioè nessun loro multiplo mM_i^k è contornante, perchè badando alla matrice F^k si vede subito che non si riesce a formare una catena U^{k+1} che abbia per contorno mM_{ik} $(m \neq 0)$

Aggiungiamo che la distinzione che abbiamo fatta è ben giustificata, una catena della base non può mai stare in due categorie diverse (le N sono le sole a non essere chiuse, e fra le rimanenti le L sono le sole a essere divisori dello zero). E' poi da osservare che quanto abbiamo detto regge integralmente se valgono contemporanemanete le due cond. verdi per k, cioè per $k = 1, \ldots n-1$. Restano il caso $k=0$ e $k=n$. Nel 1° caso si può solo parlare della matrice F^k e non

V È facile ne assegnare

i C^k

i $C^k \cup e$

le classi di soluzioni

e arriviamo così al risultato

della F^{k-1}; ma del resto è chiaro che in questo caso nella base di (U^k) mancano le catene non chiuse, perchè ogni U^k è chiusa; mancano dunque le γ^{k-1} catene L. Possiamo mantenere quanto sopra cioè la (1) chiamando $\gamma^{k-1} = 0$, come è già fatto. E per $k = n$ manca F^k; resta F^{k-1} colla distinzione fra le catene N (non chiuse) e le altre; vuol dire che fra queste, cicli, non vi è luogo a distinguere gli L, divisori dello zero e gli M non divisori dello zero.

Qui è chiaro che i divisori dello zero non vi possono essere (ricordare che qui le omologie sono eguaglianze); cioè mancano i cicli L, e anche qui si può mantenere quanto sopra pur di adottare il n° dei cicli L cioè γ^k eguale a zero, come si è già fatto. Quindi si può mantenere sempre la (1) e la distinzione fatta.

Si è detto che le L^k e le M^k sono, entro la base di (U^k) i cicli: di più, Cicli sono tutte (come è ovvio) ma sole le loro combinazioni lineari. S invero prendo la più generale U^k che scrivo brevemente

$$U^k = \sum \lambda L^k + \sum \mu M^k + \sum \nu N^k$$

segue

$$\text{cont}\, U^k = \sum \nu \,(\text{cont}.\, N^k)$$

Ora – in base della F^{k-1} i (cont N^k) sono degli el.ti delle basi di U^{k-1}, quindi lin.te ind.ti: quindi se cont $U^k = 0$ è ogni ν nulle.

E, fra i cicli ora determinati

$$(2)\quad C^k = \sum \lambda L^k + \sum \mu M^k$$

quali sono quelli omologhi a zero? cioè contorni di catene U^{k+1}? Sarà dunque

$$\sum\lambda L^k + \sum\mu M^k = \text{cont.}\left(\sum l L^{k+1} + \sum m M^{k+1} + \sum n N^{k+1}\right)$$

cioè per la chiusura delle L^{k+1} e delle M^{k+1}, e poi tenuto conto delle indicazioni fornite dalla matrice di incidenza F^{k+1} per il contorno di ogni catena N^{k+1} ~~della~~ base di (U^{k+1})

$$\sum\lambda L^k + \sum\mu M^k = \sum n \,\text{cont}\, N^{k+1}$$ che scrivo più precisamente

$$= \sum_{i=1}^{\gamma^k} n_i \,\text{cont}\, N_i^{k+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{\gamma^k} n_i\, d_i^k\, L_i^{k}$$

(quest'ultimo passaggio si legge sulla F^k: a p. 367 si sono appunto chiamati d_i^k i divisori el.ri delle F^k le limitate a quelli $\neq 1$ le cui n° di σ^k: qui abbiamo anche gli [illegible])

Abbiamo qui così dedotto che per le somme risp.te [illegible]

$$\lambda_i = n_i\, d_i^k \qquad \mu_i = 0. \qquad (*)$$

Quindi se il ciclo (2) C^k è ~ 0 le μ sono nulle e come mostra le uf. ora trovate ogni λ_i è multiplo ~~di uno~~ della corrispond.te d_i^k. Quindi i C^k ~~multi~~ ~ 0 sono dati tutti da

$$(3).\quad Z^k = \sum_{i=1}^{\gamma^k} \lambda_i L_i^k \quad \text{con} \quad \lambda_i \equiv 0 \pmod{d_i^k} \quad (i = 1 \dots \gamma^k)$$

Oss. Nella deduzione della (3) ci siamo serviti -linea 4 di pag prec & e seguenti della matrice di incidenza F^k il che limita il risultato a $k \le n$. Ma per $k = n$ le catene L^n mancano (p 371) e sappiamo già che di $C^n \sim 0$ vi è solo la catena nulla (p 335). Possiamo dunque dire che si rient[ra] in quanto detto sulle (*) che si riducono ora alle $\mu_i = 0$.

Veniamo finalmente, ora che conosciamo tutti i cicli (v.(2) e tutti i cicli omologhi a zero (v (3)) alla determinazione delle classi di omologia. Due cicli dati uno da (2) e l'altro an.te da $C'^k = \sum \lambda'_i L_i^k + \sum \mu'_i M_i^k$ sono omologhi se $C^k - C'^k \sim 0$, cioè ~~se~~ a norma di (3) se:

$$\lambda_i \equiv \lambda'_i \pmod{d_i^k} \qquad ; \quad \mu_i = \mu'_i .$$

Quindi per ogni classe di omologia si trova un ciclo che la rappresenta in modo ben determinato, con le stesse μ_i e prendendo per le λ_i il resto (mod d_i^k)... Questo ciclo è cioè:

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{\gamma^k} \lambda_i L_i^k + \sum_{i=1}^{g^k} \mu_i M_i^k$$

con la limitazione per le λ_i $\quad \boxed{0 \le \lambda_i < d_i^k}$

Avuto riguardo a tale limitazione e ricordando che le d_i^k sono i divisori el.ti di F^k, alcuni 1 altri no la limitazione ora scritta mostra che quelli unitari ~~non~~ si possono trascurare (danno coeff.ti nulli). Quindi (4) si sostituisce con

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{\sigma^k \text{ (v. p. 367, 373)}} \lambda_i L_i^k + \sum_{i=1}^{g^k} \mu_i M_i^k \qquad (0 \le \lambda_i < d_i^k)$$

dove ora la somma è limitata ai divisori el.ti $\neq 0$ di F^k.

La (5) mostra che il gruppo di omologia Ω^k è prodotto diretto di σ^k gruppi ciclici d'ordine finito coi periodi

$$d_1^k, \ldots \ldots \quad d_{\sigma_k}^k$$

(soddisfacenti alla nota cd° aritmetica) e di g^k gruppi ciclici infiniti a una generatrice. Ma sappiamo che (p 511) la decomposizione di un gruppo abeliano in un gruppo diretto di tal fatta è unico; quindi g^k è proprio il numero del Betti per la dimensione k, b^k, giusta la sua df. (p 317) e le d_i^k non possono che coincidere con i coefficienti di trosione c_i^k relativi a Ω^k, che soddisfano a quella stessa cond. aritmetica. ~~perciò possiamo~~ Quindi 1) il n° definito a p 369 come g^k è il n° b^k, e allora quella (1) diventa

$$b^k = \alpha^k - \gamma^{k-1} - \gamma^k$$

cioè proprio uno dei risultati ~~da~~ enunciati a p. 357; appena si osservi che le γ si calcolano indifferentemente per le E o le F p. 502; poi il n° σ^k dei $d_i^k \neq 1$ deve coincidere col n° ρ^k dei coeff.ti di torsione c_i^k; e perciò guardando ogni c_i^k è un $d_i^k \neq 1$ cioè, avendo le disp. alle d_i^k le c_i^k sono i div. di $\neq 1$ di F^k. Ma partendo da questo (p. 502) o da quelli di E è lo stesso. Segue così **tutto** l'enunciato di p. 357.

Le pp precedenti forniscono anche qualche cosa di più che la dm del teorema enunciato a p 357. Infatti, dopo assunte le nuove basi che dànno alle matrici di incidenza le forme diagonali, la (4) p 375 mostra che le L e M costituiscono una base di omologia (p 323) Quindi quando dei vari gruppi (U^k) si sono trovate le basi, e quindi in particolare le L, M si hanno anche le basi di omologia per le varie dimensioni. Ora, sappiamo che ogni trasf.ne elementare delle matrici di incidenza, come si è enunciato (p.361) si realizza con determinati cambiamenti nelle basi, e basterà seguire con questi quelle per raggiungere il risultato. Per essere più concreto aggiungo che -come si controlla- :

basta cambiare l'el.to base U_i^k in $-U_i^k$ per cambiare di segno la i^a colonna di E'^{k-1} o la i esima orizz di E'^k. (come è evidente);

come non è evidente ma si controlla: per ottenere in E'^{k-1} la somma di due colonne, basta sostituire (lecito) nella base di (U^k) $U_i^k+U_j^k$ a U_i^k (lasciando il resto invariato). Per ottenere la somma di due orizzontali in E'^k: cambiare di segno la i^a orizzontale di E'^k, poi sottrarre come sopra detto $U_i^k+U_j^k$ a U_i^k, poi ripristinare il segno di quella orizz. (se non si facessero la 1^a e 3^a trasf.ne si sottrarrebbe invece di sommare) cinicln

$$\delta^{K} = \bar{\alpha}^{K} - \bar{\gamma}^{K} - \bar{\gamma}^{K\cdot\cdot} \quad (*)$$

Risolto così completamente il problema posto a p. 347 dall'enunciato di p. 357, indico ora (senza dm) un modo col quale pu riuscire di abbreviare l'applicazione del metodo. Effettivamente se il n° dei semplici è grande, le matrici di incidenza vengono a avere moltissimi elementi, cosicchè sono quasi inservibili. Ma le cose si semplificano perchè il teorema di p 357 continua a sussistere quando invece che la totalità dei semplici di ogni data dimensione, si considerino ~~&&&&~~ degli insiemi di semplici ~~&&&&&&~~ e più precisamente delle catene chiamate blocchi (di dim k) le qualisoddisfino a condizioni che ora dirò Se queste sono soddisfatte, si verifica (v. Seifert & T. p 78) che si può applicare quel teorema dove ora invece di α^k si consideri il n° $\bar{\alpha}^k$ dei blocchi di dim. k ;

si considerino le matrici di incidenza relative a questi blocchi (i coefficienti che compaiono nell'espressione lineare formatica con del contorno di ~~&&~~ ogni bloddo di dim. k come comb lineare di blocchi di dim k-1); e dove si chiamino $\bar{\gamma}^k$ le caratt. di queste matrici di ($\bar{\gamma}^{-1} = \bar{\gamma}^n = 0$) incidenza, e dove finalmente si considerino ~~&&~~ i divisori elementari di queste matrici di incidenza. Le condizioni a cui devono soddisfare i blocchi di semplici perchè valga tale risultato sono le 4 seguenti

1) i blocchi di dimensione k

$$B_1^k \;-\;-\;-\; B^k_{\bar{\alpha}^k} \qquad (1)$$

siano lin ind. cioè non possa sussistere nessuna relazione

$$l_1 B_1^k \;-\;-\;-\; + l_{\bar{\alpha}_k} B^k_{\bar{\alpha}^k} = 0 \qquad (2)$$

senza che i coefficienti siano tutti nulli. Può essere comodo di riconoscere questa condizione così (cond. suff.) che i blocchi (1) a due a due non abbiano incomune nessun semplice a k dim del complesso considerato. Invero se i semplici che entrano a formare i blocchi (1) NON hanno a due a due semplici di dim k comune, una relazione lineare come (2) si sviluppa in una relazione tra le T_i^k ove non avvenogno riduzioni tra le T_i^k, relazione che non può sussistere a meno che i coeff siano tutti nulli.

2) sia stabilito per così dire un collegamento fra i blocchi adottati per la dimnesione k+1 e quelli per la dim k nel senso che il contorno di ogni B_i^{k+1} sia una comb lin. (a coeffti interi) dei blocchi di dim. k. Possiamo chiamare queste comb lineari catene di blocchi di dim k (ogni tale è evid.te una U^k, ma non viceversa; p es ci potranno essere già dei T^k che non sono catene di blocchi) e allora la 2) dice che ogni cont B_i^{k+1} è una catena di blocchi di dim k. (Naturalmente allora anche il contorno di una catena i blocchi di dim. k+1 è ancora una catena di blocchi di dim k)

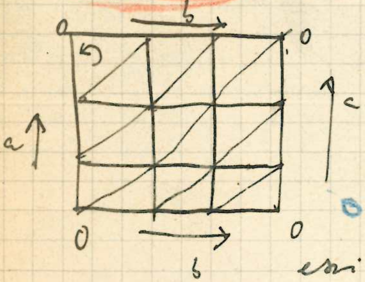
v. 3) 4) Per ogni valore di k, se V^k è una catena di blocchi di dim. k, la scrittura $V^k \sim 0$ si può interpretare a priori in due sensi diversi; e cioè nel senso che tale catena sia contornante, cioè contorno di una catena di dim k+1, la quale può essere una catena senz'altro, oppure una catena di blocchi ... cond. 4) esprime la coincidenza di queste due condizioni, cioè essa esige, che se una catena di blocchi di dim k è ~ 0, tra le ha esistenza per $k < n$. Per $k = n$. sappiamo già che $U^k \sim 0$ vuol dire (p. 335) $U^k = 0$ e quindi non c'è altro.

catene U^{k+1} di cui essa è contorno, vi sia qualche catena di blocchi V^{k+1} [. Se questa condizione è soddisfatta, qualunque relazione di omologia tra (blocchi di dim) C^k, cioè $C^k \sim C'^k$ vale già con riferimento alle catene di blocchi di dim k, cioè $C^k - C'^k$ è contorno di una catena di blocchi di dim k]. Nat. ^{k} 4)

3) ~~Finalmente,~~ Le catene di blocchi, per la dim. k, offrano già campioni di ogni classe di omologia del complesso, cioè per ogni catena chiusa C^k si possa sempre trovare una catena di blocchi V^k a cui essa è omologa [come a p. ... 31].

Soddisfatte queste cond. si dimostra il risultato di p. 381.

Esempio. Considero p. es. il toro di p. 341



e scelgo come B^0 O

" B^1_1, B^1_2 a e b.

" B^2 la somma Σ dei triangoli Δ.

1) è verificata perché solo per $k=1$ ho 2 B^1 e essi non hanno T^1 in comune.

2) cont B^0 = zero, cont B^1_i = zero $(i=1,2)$ cont B^2 = zero (visto a p. 350) quindi ~~ole~~ cont A^{k+1} essendo zero è una V^k.

3) Per ogni classe di omologia: se di dim. zero è mA con A vertice qualunque (p. 331); quindi in particolare mO che è una V^0: se di dim. 1 ogni C^1 è $\sim u_1 a + u_2 b$ (p. 351) che è una V^1: se di dim. 2, di C^2 vi sono solo gli $m\Sigma$ (p. 350) che sono V^2.

4). Per $k=0$ $V^0 \sim 0$ ~~sia $V^0 \sim mO$ ...~~ sia V^0 è un multiplo di O vuol dire $mO \sim 0$ il che esige $m=0$ (p. 329) ma oltre la V^0 è catena nulla e come tale contorno p. es. di a che è una catena di blocchi, aggiungi già un blocco di dim. 1. Per $k=1$ $V^1 \sim 0$ vuol dire $u_1 a + u_2 b \sim 0$ e ciò p. 355 implica $u_1=0$, $u_2=0$, $V^1=0$ ed è contorno ad es. p. es. di Σ. Per $k=2$ ~~$V^2 \sim 0$ vuol dire $m\Sigma \sim 0$~~ cioè ~~(p. 335) $m\Sigma = 0$, cioè $m=$~~ v. p. 384.

Fatte queste constatazioni preliminari si fanno

$$E^0 \quad B^0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ B_1^1 & B_2^1 \end{vmatrix} \qquad E^1 \quad \begin{matrix} B_1^1 \\ B_2^1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B^2 \end{vmatrix}$$

(tutti n.i zero perchè le B sono tutti cicli).. Sono già ridotte forme diagonali: ho

$\gamma^{-1}=0)$ $\quad \gamma^0=0 \quad \gamma^1=0 \quad (\gamma^2=0)$.

$\alpha^0=1 \quad \alpha^1=2 \quad \alpha^2=1$.

$p^0=1-0-0=1$.

$p^1=2-0-0=2$ e mancano i coeff.ti di torsione

$p^2=1-0-0=1$ confermando p. 351-35..

Si ha così un calcolo assai breve, che però esige la ver... preliminare delle cd. 1) -4) la quale è sempre più o meno ...gs. almeno in alcuni casi. Vedremo poi la possibilità di procedimenti indiretti ... la det.ne dei n.i del Betti e coeff di torsione.

Ranchi di connessione di un complesso. Finora abbiamo a partire da un dato complesso K^n, orientati i suoi semplici e formate delle catene combinando linearmente questi. Si potrebbe svolgere una teoria analoga, che qui accennerò rapidamente, considerando semplici NON orientati. Si arriva così a dei n.i analoghi nella nuova teoria ai n.i del Betti, che chiameremo i ranghi di connessione (alcuni come Severi chiamando così i ranghi, chiamano poi ordini di connessione i n.i del Betti). Avendo noi già sviluppata la teoria relativa a semplici orientati, passiamo nel modo più rapido da questa all'altra, introducendo il concetto di una catena U^K considerata mod. 2. Vuol dire una catena U^K, nella quale si ammette la possibilità di alterare ogni coeff.te per un multiplo del 2 (Si considerano cioè equivalenti catene in queste condizioni). Così, in particolare, ~~.......~~ la catena T_i^K e la catena $-T_i^K$ non vengono più a differire tra loro, cioè la nozione di orientamento si viene a trascurare. Se indichiamo con $\overline{U}^K$ una catena mod. 2, si capisce come vanno modificati i concetti di somma e di contorno. Per la somma $\overline{U}^K + \overline{U}'^K$ si sommano ancora i coefficienti, ma si prendono i resti mod. 2 (cosicchè se un semplice p. es. compare una volta in ciascuna delle due catene sommate, scompare facendo la somma). Per il contorno si applica in sostanza ancora le (3) d. p. 255 $\quad 2\ U^K = u_1 T_1^K + \ldots \qquad$ ct. $U^K = u_1$ ct $T_1^K + \ldots$

Se una catena nel senso ordinario è chiusa, essa lo è anche mod. 2 [se così $U^k = 0$, anche prendendo i resti mod. 2 delle catene nulle a 1° membro, si ha sempre zero] ma non viceversa.

dove è da rilevare che 1) al solito i m.i coefficienti si considerano mod. 2 ,o in altre parole si possono ridurre sempre a valere zero o uno; 2) la df. presuppone una df del contorno dei semplici T^k_1 ,nella nuova teoria delle catene mod. 2,e che questa df. è la seguente;il contorno è lo stesso della vecchia teoria,dove sempre i coeff. si considerano mod 2,il che vuol poi dire :prima cont T^k era l'insieme di certi T^{k-1} alcuni col segno più alcuni col segno meno ora tanto vale assumerli tutti col segno più,cioè considerare come contorno di un semplice non orientato k-dimensionale i semplici non orientati che ne sono le facce (k-1) dimensionali . Ciò per $k>0$;per $k=0$ ogni $\overline{U}^o$ è ancora chiusa(v. ora la df)

Catena mod 2 chiusa ,per ogni k,vuol dire cat mod 2 il cui contorno si riduce a zero(si intende come cat mod2

Ogni catena mod 2 contornante è chiusa (come a p 305) perchè è data dalla ultima formola di p 389,e al secondo membro vi è la somma dei ct di tanti semplici,la quale come catena prop detta è chiusa(p.302) e quindi anche come catena mod 2(p 390)

Le cat mod 2 contornanti (e quindi come ora detto chiuse) si dicono omologhe a zero; e due catene(ev.te anche non chiuse) mod 2 $\overline{U}^k, \overline{T}^k$ si dicono omologhe se la loro $\overline{U}^k - \overline{T}^k$ differenza è omologa a zero.

Allora anche colle catene mod 2 chiuse si possono formare gli analoghi delle specie 1ª gruppi di omologia, collocando in una stessa classe tutte quelle che sono omologhe fra loro, e combinando le classi per somma (prodotto) & in piena analogia a quanto già fatto. I gruppi così ottenuti si chiamano gruppi di connessione: se ne ha uno per ogni valore di $k = 0, 1, \ldots, n$. Li indicheremo con $\overline{\Omega}^k$.

Vi è però da rilevare un differenza essenziale. Qui il numero delle catene mod 2, per dato k, è già finito, perchè su ha un n° finito di coefficienti, ognuno dei quali si può supporre valere zero oppure uno; quindi è anche finito (e non superiore al precedente) il n° delle catene chiuse e poi il n° delle ~~classi~~ ~~&&&&&&&~~ diciamo pure di omologia in ciascuna dlle quali si collocano catene chiuse omologhe. Quindi il gruppo di connessione non contiene che un n° finito di elementi, cioè è un gruppo d'ordine finito. Naturalmente Ω^k è ancora un gruppo abeliano (pensare p. es alla df di prodotto = somma): ogni gruppo ~~&&~~ di connessione è dunque un gruppo abeliano ~~ma~~ questa volta di ordine finito. ~~&&&&~~ ~~può dirsi qualche cosa~~ Quindi, quando lo consideriamo come prodotto diretto di gruppi abeliani con una generatrice, queste saranno tutte periodiche. Ma si può dire qualche cosa di più. Qualunque catena mod 2, $\overline{U}^k$ ha il suo doppio $2\overline{U}^k$ eguale a zero, perchè i coefficienti risultano tutti pari; ciò vale in particolare delle catene chiuse, quindi nel gruppo $\overline{\Omega}^k$ ogni cl.

* Un'altra analogia fra ranghi di connessione e n.i del Betti è questa. Anche per le cat mod 2 si possono definire (si capisce come) i concetti di indipendenza lineare e di indipendenza omologica (è questione di considerare nelle combinazioni lineari da fare i resti mod 2). Allora si trova che il n° r^k indica proprio il massimo n° di cat mod 2 chiuse di dimensione k omologicamente indipendenti (cfr per b^k, p 325.)

T° Nat^te il calcolo della δ essendo fatto mod. 2 si può fare sulle E invece (è lo stesso +1 o −1)

([illegible])

mento è periodico, con periodo due. Ciò dunque vale in particolare per gli elemti generatori dei gruppi ciclici con cui si costituisce il prodotto diretto; tali gruppi ciclici sono dunque ciascuno d'ordine 2, e ogni Ω^k appare come prodotto diretto di un certo n°, diciamo di r^k G_2; il n° r^k si chiama rango di ~~di~~ connessione per la dim k. Questo r^k si può in certo senso riguardare come analogo al n° del Betti b^k (per quanto quello servisse a contare il n° dei G ciclici infiniti) L'analogia appare meglio dal seguente risultato (che si dimotrerebbe come a p 357 e seguenti). Formiamo le matrici di incidenza mod 2, partendo dall'espressiondel contorno di ogni T^{k+1} (non or) come cb lin dei T^k id id; servono le stesse formole che ci hanno condotto alle matrici di incidenza, ma ove ora nei coeff. si possono prendere i resti mod 2 delle ε^k, si hanno così coeff.ti $\bar{\varepsilon}^k$ eguali a zero o uno. Di questa matrice si può considerare la caratt. mod 2, cioè massimo ordine di determinanti estraibili da essa non multipli del 2. Sia $\int^k$ tale caratt mod 2, (ponendosi $\int^{-1} = \int^n = 0$)
Allora si ha la formola analoga a quella per il n° del Betti (p 357)

$$r^k = \alpha^k - \int^{k-1} - \int^k. \qquad (*)$$

la quale esprime il rango per la dimensione k. [Si capisce che invece i coeff di torsione non abbiano un analogo nella teoria mod 2 perchè erano divisori el. diversi da uno ma quando si prendono i resti mod 2 non restano resti non nulli diversi da uno]

Sulle relazioni tra i ranghi di connessione e i numeri del Betti sono da fare due osservazioni

Anzitutto

1) Una disuguaglianza Paragoniamo l'ultima relazione con la $b^k = \alpha^k - \gamma^{k-1} - \gamma^k$. Se dalla matrice E^k si possono estrarre det. di ordine $\cancel{\beta}\,\delta^k$ non divisibili per 2, questi stessi det. non sono nulli (ma non viceversa) quindi $\gamma^k \geq \delta^k$. Perciò $\cancel{\gamma^k}$ $\gamma^k \geq b^k$.

2) La differenza $\gamma^k - b^k$ è dunque positiva o nulla. Possiamo cercarne una valutazione esatta. Consideriamo i divisori elementari di una matrice di incidenza (che diciamo poi in quanto >1 i coeff. di torsione); ricordando la df. voleva dire; per ogni valore di p considerare il M.C.D. D_p (p 502) dei det. d'ordine p estratti dalla matrice e poi porre $d_p \mathscr{D}_{p-1} = \mathscr{D}_p$ e $d_1 = \mathscr{D}_1$. (Ogni d divideva le altre successive) Prendedno i resti mod 2 abbiamo

$$(\text{rest}\, d_p)\,(\text{rest}\, \mathscr{D}_{p-1}) = \text{rest}\, \mathscr{D}_p$$

Quindi se una d_p è pari, ~~tutti~~ i D_p lo ~~sono~~ è e fosmo tutti i det$_p$; bisogna scendere a valori minori per p per trovare det$_p$ non divisibili (del resto siccome le d successive sono divisibili per d_p sono esse pure pari coi relativi D_p e i relativi det.^{ti}). Perciò se indichiamo con h^k il n.° dei div.^{ri} elementari pari di E^k – sono gli ultimi fra le $d_1, d_2 \dots$, per la ragione già detta – bisogna tra i valori ~~di~~ $1, 2, \dots \gamma^k$ di p (che conducano a det$_p$ non tutti nulli) scartare gli ultimi h^k se vogliamo ottenere det$_p$ dispari.

E ~~allora effettivamente~~ la cond. è anche sufficiente

Sulla (2) è anche da osservare quanto segue. Se $h^k = h^{k-1} = 0$ risulta $r^k = b^k$. Ciò dunque avviene, in particolare, per ogni valore di k se mancano addirittura tutti i coefficienti di torsione (per tutte le dimensioni) cosicchè mancheranno in particolare quelli pari. Perciò se per un complesso K^n mancano i coefficienti di torsione per tutte le dimensioni, i ranghi di connessione coincidono coi numeri del Betti. Così per un K^1, k ha solo i valori ... (pp 333 bis, 337) mancano i coeff. di torsione e $r^i = b^i$ $(i = 0, 1)$. Così (p. 355) per la corona circolare e per il toro $r^i = b^i$ $(i = 0, 1, 2)$.

un coeff.te di torsione c^1

Per il piano proiettivo diversamente, come diremo

In generale, per ~~...~~ un K^2

$$r^0 = b^0 + \cancel{h^0}$$

$$r^1 = b^1 + \cancel{h^0} + h^1 \quad . \text{ Ma }$$

$$r^2 = b^2 + h^1 + \cancel{h^2}$$

i coeff.ti di torsione mancano per le dim. 0 e 2 (pp 333 bis, 337) quindi $h^0 = 0$, $h^2 = 0$ e resta quanto sopra. Per il piano proiettivo (p. 355) $b^i = 1, 0, 0$; $c^1 = 2$ (h^1 = n° coeff. torsione pari = 1)

$$\begin{cases} r^0 = 1 \\ r^1 = 1 \\ r^2 = 1 \end{cases} \quad (h^{-1} = 0)$$

Perciò: K^n manca c^0 cioè $h^0 = 0$, cosicchè $r^0 = b^0 = 1$ ...

perchè se d_p è dispari, l'ultima formola dice che se D_p fosse pari (cioè se non vi fossero dei $\det_p$ dispari) sarebbe pari anche D_{p-1}, ma allora per la stessa ragione anche i precedenti fino a D_2 e poi a D_1; ma $d_1=D_1$ e sarebbe pari anche d_1 e tutte le d successive, mentre dopo aver scartate le ultime h^k fra le d quelle che le precedono sono come si è detto dispari. Ciò prova che δ^k: caratt. E - n° div. d. pari

$$(1) \qquad \delta^k = \gamma^k - h^k$$ dove h^k è il n° div. d. r pari d. E^k

Quindi sostituendo nella (°) di p 395

$$r^k = \alpha^k - (\gamma^k - h^k) - (\gamma^{k-1} - h^{k-1})$$ cioè

$$(2) \qquad \boxed{r^k = b^k + h^k + h^{k-1}}$$

che precisa appunto la differenza $r^k - b^k$. Ciò per $1 \le k \le n-1$. Ma (2) si applica anche per $k=0$, $k=n$: basta evid. definire h^{-1}, h^n dalla (1) che dà $h^{-1}=h^n=0$.

Dalla (2) dove oltre alle b e alle r compaiono le h si può dedurre una relazione dove compaiono solo più le b e le r; basta sommarle a segni alternati. Allora tutte le h intermedie si elidono, restano una sola volta h^{-1} dalla prima formola, e h^n dall'ultima; ma sono quantità nulle. Quindi

$$r_0 - r_1 + r_2 \dots + (-1)^n r_n = b^0 - b^1 + b^2 \dots + (-1)^n b^n \qquad (3)$$

Questo n° cambiato di segno $(-N)$ si chiama la caratteristica del complesso.

(K')

La caratt. per una sup. può servire a calcolare b^1 noti b^0 e b^2 visto che $b^0 - b^1 + b^2 = -N$ (calcolando N dalle $\alpha^0 \alpha^1 \alpha^2$): ~~se b^0 è sempre calcolabile e coincidendo~~ (p.) anche $b^2 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ (1 per sup. connesse)

se per sup. connesse $b^0 = 1$ e coincidendo (p. 421) $b^2 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

E così r^1: poiché (sempre per sup. connesse) $r^0 = 1$ (p. 398), e $r^2 = 1$ (p. 423) -

Quindi ho χ^2.

Ma esso ha ancora un'altra espressione, che troviamo ope rando ancora per somme a segni alternati sulla

$$b^k = \alpha^k - \gamma^{k-1} - \gamma^k$$

(o sulla analoga per r^k). Segue evidentemente ancora

$$\alpha^0 - \alpha^1 + \alpha^2 - \dots + (-1)^n \alpha^n = b^0 - b^1 \dots + (-1) b^n = -N.$$

Abbiamo così tre diverse espressioni della caratt. N del complesso

Anche la teoria dei blocchi si estende alle catene mod 2 e allora con notazioni chiare la (+) di p. 300 diventa

$$\gamma^k = \bar{\alpha}^k - \bar{\delta}^{k-1} - \bar{\delta}^k$$

da cui col solito procedimento si ha ancora

$$\bar{\alpha}^0 - \bar{\alpha}^1 \dots + (-1)^n \bar{\alpha}^n = -N.$$

Un significato della caratteristica per n = 1.- Vediamo come esempio il seguente significato di N per i K^1. Consider un K^1 connesso (p. 329) Allora N ha il seguente significato geometrico

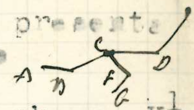
Premettiamo ~~qualche~~ una df. un K^1 (connesso) si chiama un albero(1) quando non (cioè $b^1 = 0$) possiede catene U^1 chiuse salvo lo zero. Allora due suoi vertici, A e B i quali si possono connettere con un cammino di spigoli nel senso preciso di p. 329 si possono connettere con uno solo perchè se no il primo seguito dal secondo invertito darebbe un cammino di spigoli che conduce da A ad A, cioè una U^1 evite chiusa. (Contorno A-A) Per un complesso connesso il cammino di spi ~~...~~ . Si prova (intuitivo, non sto a far il controllo esatto: così sotto.) goli AB ora detto ~~si dà già~~ evid.te un ~~esempio~~ riduce a di un albero

(1) Un altra forma Reidemeister Einf. p. 102 (Soppri... ...)

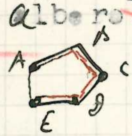
qualcuno dei quali intervenga in un eventuale [?]

7 Le cond. di chiusura di che ~~gli~~ spigoli dei ciascun dei 3 cammini DA, DC, DB devono intersecare ~~uno~~ stesso n° di volte una alcuni vertici A, C, E e quindi zero volte]

sebbene non nelle cond. più generali, perchè non presenta diciamo così ramificazioni come p es il seguente

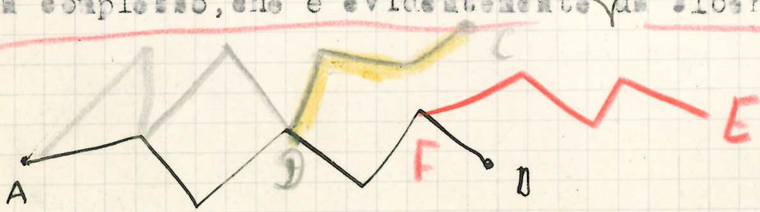


che è pure un albero. Ora intanto si ha la p.tà che se K^1 è un complesso connesso, anche non ~~albero o no~~, si può sempre costruire un suo complesso parziale L^1 che sia un albero e che contenga tutti i vertici di K^1 (si può ottenere in più modi). Lo controlliamo così. Sia A un vertice, B un altro che colleghiamo ad A con un cammino di spigoli, che assumiamo non ~~il quale come già detto è evid.te un~~ albero L_1. Se esso contiene già tutti i vertici di K^1 (esempio



) esso è già L^1. Se no, sia C un vertice di K^1 che non compare nell'albero L_1, e consideriamo (senz altro) un cammino di spigoli, certo esistente, che congiunga A con C (segue

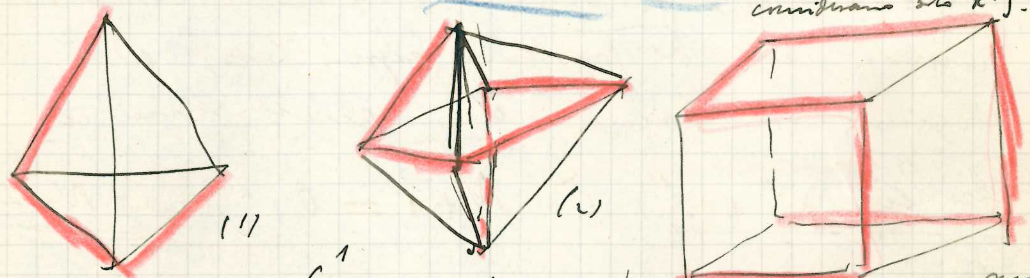
Può darsi, che anche al di là di A esso abbia ancora qualche vertice (e magari lati) in comune con L_1, in tal caso sia D l'ultimo vertice del cammino AC per cui ciò avviene; abbandoniamo la parte del cammino che precede D e manteniamo solo il cammino di spigoli DC: questo in aggiunta al cammino AB costituisce (v. avvertenze a piè p. 401 (1)) un complesso, che è evidentemente un albero. Se esso contiene



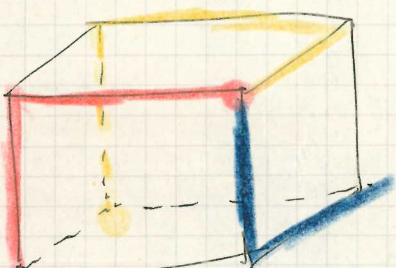
(1) [Anche verifica] tabella. $\Sigma \alpha_i \Gamma_i$ calcolo pt. contorno etc.

tutti i vertici di K^1, esso dà L^1, se no è un altro L_2 che si sviluppa in modo analogo. (cammino AE con E primo di esso, ultimo (in esso) pt. comune con l'albero L_2 sia F; mantengo FE che con L_2 dà l'albero L_3 ecc. ecc.

Naturalmente per ogni dato K^1 connesso, si possono così avere anche alberi diversi. Esempi tetraedro (reg. ma non ha importanza, e così per gli altri) ottaedro, cubo [non ha importanza che le facce non siano △ qui si considerano solo K^1].


(1) (2) (3)

esempi senza ramificazioni (cammino di spigoli) ma p. es. per il cubo ho anche l'altro seguente


(4)

Nel teorema che segue, e che dà un significato geom per la caratteristica N di un dato K^1 connesso, parlo brevemente di ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ tracciare un albero su un K^1 connesso nel senso preciso del teor prec. Ebbene, comunque si tracci un albero su un K^1 connesso, il n° degli spigoli di K^1 che non compaiono in L^1 è la caratteristica ~~diminuita~~ aumentata di un'unità, cioè N+1. Controlliamo prima di dimostrarlo, sugli esempi che precedono $(-N = \alpha^0 - \alpha^1;\ N = \alpha^1 - \alpha^0)$

	α^0	α^1	N	$N+1$	controllo
(1)	4	6	2	3	sì
(2)	6	12	6	7	sì (un vert. 3 di sopra 3 di sotto)
(3)	8	12	4	5	sì (2 di sotto, 3 verticali
(3)	8	12	4	5	sì va bene idem

Le dimostrare il teor. in questo caso partic. considerando come tracciato sull'altro l'altro stesso avviato come è da scartare nessun lato, ed è in questo caso da provare che per un altro [illegible] caratter. α^0 e α' è $N+1=0$, cioè $N=-1$

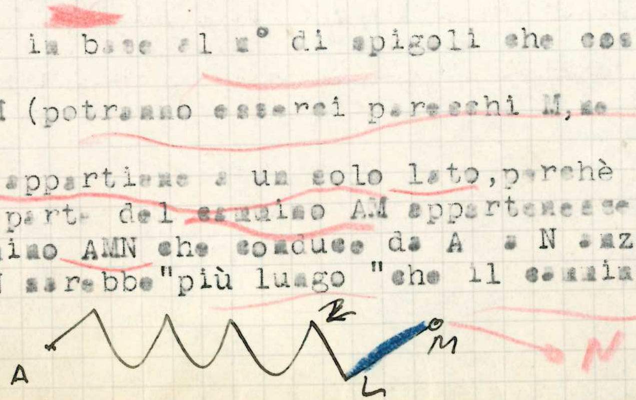
Si può

Per la dm. conviene trattare prima di tutto un K^1 che sia esso stesso un albero, con α^0 vertici e α^1 lati, e dimostrarlo per ricorrenza quando si aumenta di UNO il n° dei lati. Inizialmente per un cplesso con UN lato è vero, perchè

$\alpha^0 = 2$, $\alpha^1 = 1$, $N = -1$; $N_{+1} = 0$

Sia dunque vero per un certo α^1 [non importa quale valore e ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ di α^0 (che nel primo caso è nec.te 2 ~~xxxxxxxxxxxx~~: di fatto, per il sussistere della formola stessa α^0 è sempre determinato da α^1)

Lo vogliamo dimostrare per un albero K^1 avente α^1+1 lati. L'idea è di sopprimere possibilmente un lato e un vertice; e intuitivamente la possibilità di ottenere un albero in queste condizioni si vede sopprimendo "l'ultimo segmento di un ramo dell'albero" col che si passa appunto a un albero di soli α^1 lati, per il quale la formola è vera, e siccome si è soppresso un lato e un vertice la differenza e quindi N è rimasto invariato. Non accontentandoci della conclusione intuitiva si può dire così: fissato un vertice qualunque A, sia M "il più lontano possibile" misurando la lontananza in base al n° di spigoli che costituiscono il cammino AM (potranno esserci parecchi M, ne scegliamo uno). Un tale M appartiene a un solo lato, perchè se oltre a quello che fa parte del cammino AM appartenesse a un altro MN, il cammino AMN che conduce da A a N anzi è il solo cammino AN sarebbe "più lungo" che il cammino AM. Quindi



[Si potrebbe cercare altre dopp. utilizzando
$N+1 = p^1 - b^0 + 1$ = (per la connessione $b^0 = 1$) $= b^1$.
= p. 325 n.° max dei cicli C^1 lin. ind.ti
n.° indice di Superf. n T. p 87.]
Dunque per K^1 ho $N+1 = b^1 - b^0 + 1 = b^1$. Quindi
(connesso)
N ha ~~un~~ ciò anche significato per i K^1 di n.° ~~b^1~~ del Betti.
[γ o anche di γ^1 poli. per i K^1 ~~…~~ $\gamma^1 = \gamma^1$ S.J. p 398].
[Vedere K^2 qualche a. significato di r^1 in S. e T.^{ll} p. 152
(max n.° dei cammini chiusi di spigoli senza pt. doppi (equivale a dire quale sia n dei spigoli) che si possono tracciare senza rompere la connessione].

⊥ gli Ω^K sono sempre gli stessi
e invarianti ognuno

per M passa un solo lato LM, e se lo sopprimo sopprimo il so lo vertice M e per quanto precede non rompo la connessione: resta dunque un K^1 connesso, con un vertice e un lato di meno ecc. Dopo di che, quando traccio un albero su un K^1 connesso qualunque ho per questo e per quello risp.

$$N+1=\alpha^1-\alpha^0+1$$

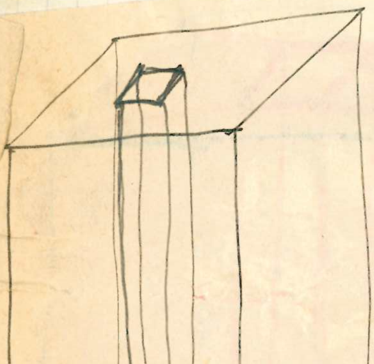
$$N+1=\text{zero}=+\alpha'^1-\alpha^0+1$$ con lo stesso α^0 e α'^1 e il n° di let. di K' usato per L, di p. 405

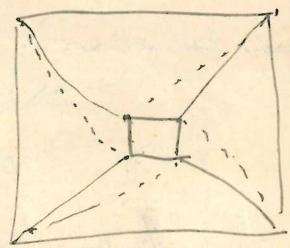
da cui sottraendo

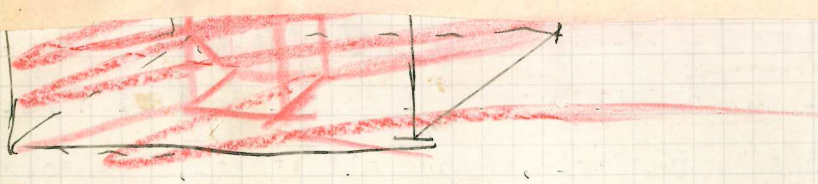
$$N+1=\alpha^1-\alpha'^1$$ formula che tratta l'enunciato

c.d.d.

LA CARATTERISTICA E LE SUPERFICIE.- Se consideriamo i poliedri di p 405 come K^2 - al momento perciò solo tetraedro e ottaedro per avere facce Δ e ne calcoliamo la caratt. mediante $N=-\alpha^0+\alpha^1-\alpha^2$, abbiamo nei ~~tre~~ due casi $-4+6-4=-2$; $-6+12-8=-2$ ~~[illegible]~~ cioè sempre $N=-2$. E ciò è ben naturale ricordando la formola di Eulero che lega il n° degli spigoli, vertici e facce dei poliedri. $\alpha^0+\alpha^2=\alpha^1+2$ In realtà non di tutti i poliedri, ma soltanto di quelli che sono topologicamente equivalenti alla sfera. 411 Limitandoci qui ora a parlare di superficie, comunque si triangoli una superficie, è essenziale il fatto (che solo enuncio) che i numeri di Betti e i coefficienti di torsione sono, per una data superficie, sempre gli stessi, e ne sono per di più invarianti topologici; quindi anche la caratteristica (ciò che non è invece evidente prendendo la caratt. data da $-N=\alpha^0-\alpha^1+\alpha^2$). La caratteristica dunque, è un invariante topologico di una superficie, indipendente dalla sua





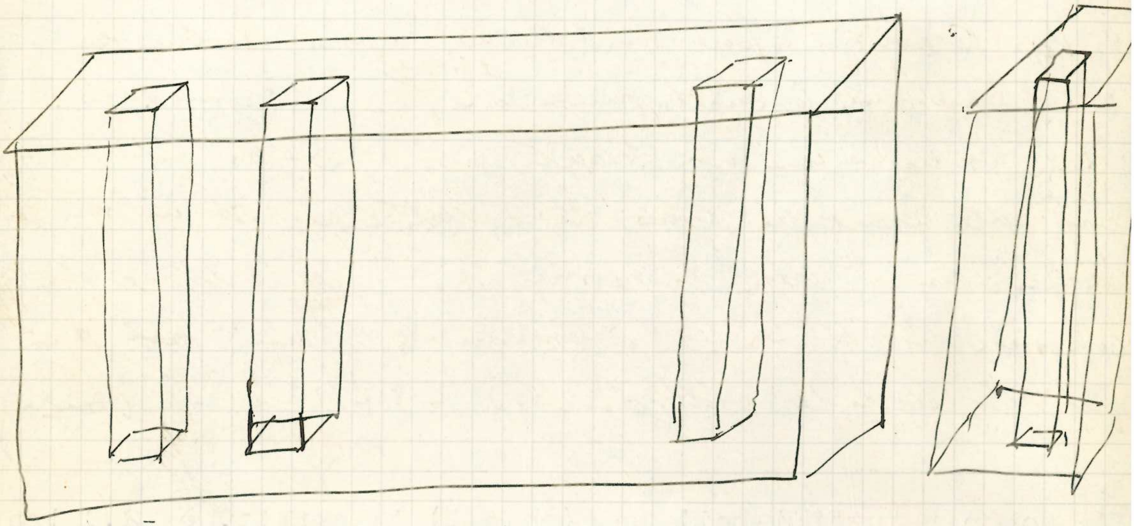


triangolazione; il teorema di Eulero sui poliedri equivale a dire che la caratteristica della sfera (e delle superficie topologicamente equivalenti) è $N = -2$. – ~~In realtà è~~ (che qui entrano in conto)

409 Per poliedri a facce non tutte Δ, si può calcolare ~~la~~ egualmente la caratt. prendendo le facce (il n° delle) (polig. curvi) così come sono: perchè se io ho una non triangolare ma di $3+m$ lati, con m rette uscenti da uno stesso vertice la divido in m triangoli: così α^2 cresce di m ma anche α^1 e la differenza che compare, cioè $\alpha^0 - \alpha^1 + \alpha^2$ è immutata. Quindi ~~per~~ p. es. pel cubo calcolo la caratt. come c. s. $-8+12-6=-2$ (~~come~~ già [illegible])

Ma non per tutti i poliedri (chiusi) la caratt. è -2. Calcolo la p es per un "prisma perforato", cioè prisma con cavità come in fig. accanto. Qui per il computo, le facce "verticali" si possono lasciare come sono, per la ragione detta sopra; non così la superiore e la inferiore, dove triangolando come nell'altra figura si aggiungono $4+4=8$ spigoli e si aggiungono invece solo $3+3$ facce. Quindi per avere la carat[t.]

$-N = 16 - 24 + 10 - 2.1 =$ zero. Qui la caratt. è **zero** e non più -2. Il fatto è che la nuova sup. poliedrica non equivale più alla sfera, ma a un toro (prima a cilindro perforato, ~~toro~~ deformando i quadrati delle 2 basi in cerchi, e poi plasmandolo opportunamente in toro). – In generale ~~considerata~~ per una sfera con p manici p. 251) è



$\boxed{N = 2p-2}$ (va bene, come ora visto per $p = 0, 1$)

Procedo come per $p=1$, prendendo un prisma forato p volte (o p. 259) ossia con p manici = ciambelle con p buchi e questo si deforma poi nel prisma con p buchi): figura contro. Ragiono per ricorrenza. Suppongo d'averlo dimostrato (come è) fino a un certo valore di p: prisma di sinistra, triangolato sopra e sotto in modo opportuno; per le facce laterali lascio p.es. come no. ~~Aggi~~ Poi prisma di destra con 1 foro: come noto. Evidentemente ho

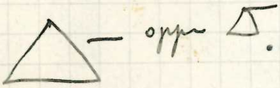
$$\alpha^0_1 - \alpha^1_1 + \alpha^2_1 = -2p+2$$
$$\alpha^0_2 - \alpha^1_2 + \alpha^2_2 = 0$$

~~sommando a membro a membro~~ ho

$$\alpha^0 = \alpha^0_1 + \alpha^0_2 - 4 \quad \text{(i 4 vertici delle facce due supposte)}$$
$$\alpha^1 = \alpha^1_1 + \alpha^1_2 - 4 \quad \text{(i 4 lati idem)}$$
$$\alpha^2 = \alpha^2_1 + \alpha^2_2 - 2 \quad \text{(si perdono le facce comuni)}$$

$\alpha^0 - \alpha^1 + \alpha^2 = -2p+2-2 = -2p$: cioè la nuova N è tale che $N = 2p = 2(p+1)-2$, va bene.

COMPLESSI REGOLARI. - Riguardando gli esempi di K^2 di cui abbiamo determinato i n.i del Betti e i coeff. di torsione si vede che essi hanno alcuni caratteri comuni, di cui ci siamo serviti nelle deduzioni, p.es. che i semplici a una dimensione che intervenivano e così a zero erano esclusivamente lati e vertici di triangoli, semplici a due dimensioni, ciò che non avverrebbe p.es. per il complesso

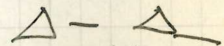


. Inoltre ogni lato era (almeno per le triangolazioni del toro e del piano proiettivo, superficie chiuse, non per la corona superficie aperta) lato di due e non più, nè meno triangoli; restando escluso p.es. in S_3 un comportamento come questo

. Inoltre due triangoli qualunque si potevano unire con una successione di triangoli di cui due consecutivi con un lato a comune.

Imponendo ora a un K^n condizioni analoghe a quelle che ora enuncerò in modo preciso, si vengono a rendere possibili per esso certe deduzioni generali. Consideriamo dunque un K^n ~~chiuso~~ al quale imponiamo intanto

1) ogni suo T^k è faccia (non importa con quale orientamento) di almeno un T^n. Esso allora si dice <u>puro</u>. Questa condizione serve appunto per escludere le fig.



(Si usa [illegible] il cont. d'una catena)

Per contorno di un K^n puro, intendiamo possiamo dire il suo contorno considerandolo come catena mod 2 dei suoi T^n: vuol poi dire come insieme delle facce T^{n-1} dei suoi T^n, ma escludendo quelle che vi presentano un n° pari di volte (che sarà poi due, in base alla ulteriore condizione 2)) La condizione di purezza interviene in quanto per un complesso non puro come  questa df. di contorno non corrisponderebbe alla nostra intuizione di un contorno, dove sarebbe da mettere p e essneora il punto A)

Un K^n puro è chiuso se manca di contorno.

Occupiamoci ~~per ora solo~~ di K^n chiusi. Allora poniamo ancora le condizioni

2) Ogni T^{n-1} è faccia di due (nè più né meno, come negli esempi ricordati) T^n (e altro manca il ct?)

3) Due T^n si possono sempre collegare con un insieme di T^{n-1} di cui due consecutivi hanno una faccia T^{n-1} in comune.

Chiamiamo complesso chiuso regolare un K^n che soddisfi alle condizioni 1) 2) 3) e che sia chiuso. Si può definire un K^n regolare anche non chiuso, lasciando cadere la cd di chiusura (e allora ci sarà un contorno definito e s) con le stesse cd., solo che ora cade ovviamente la 2) (perchè così come sta implica la mancanza di contorno) e va sostituita con la (connesse) (orientabili o no)

Quando si triangola una superficie, come abbiamo fatto da principio, chiusa o no, si ottiene appunto un K^2 regolare, secondo le def. cui date. [si applica tutto quanto si dirà alle superficie connesse] — Invece i K^2 connessi a p. (~~spi~~ incidenti di tutti gli spigoli di poliedri) non sono regolari: nel senso di quelle def. per ogni vertice ($T^{..}$) si hanno più T^n. [Si potrebbero dare altre def. di K^2 regolare ~~in cui~~ p. es. che per ogni T^0 passi uno stesso n.° (anche >2) di tali: Reidemeister Einf. p. 100].

2')Ogni T^{m-1} è faccia, al massimo di due T^m, e anzi vi è qualche T^{m-1} che è solo faccia di un T^m (per non avere ch sure) La attuale df di complesso regolare si ricopre con quella di pseudovarietà di Seifert e Th.; e sostanzialmente con quella di reticolato regolare su una M_m delle Lezioni di Severi (p 110)

Introduciamo anche per un K^m regolare il concetto di orientabilità e non orientabilità dato ~~da~~ per le superficie a p. 242 Per un K^m regolare chiuso si dice che esso è orientabile, se si ~~può~~ possono scegliere per i suoi T^m orientamenti (orientamenti diciamo concordi) tali che ~~[illegible]~~ che su ogni suo T^{m-1} gli orientamenti indotti dai due T^m che lo contengono siano opposti (come avveniva in esempi trattati). Se il K^m invece ha contorno si ha una df analoga, ma limitatamente alla considerazione di quei T^{m-1}, che ora non sono più tutti, che sono comuni a due T^m. In tutti due i casi il K^m si dice non orientabile se è impossibile ~~[illegible]~~ adottare orientamenti che soddisfino alle condizioni dette.

Ammettiamo come intuitivo che triangolando sup. or. o no ([illegible] intuitivo di p. 242) viene K^2 orientabile o no in questo senso badare che (per questo Σ come <u>insieme</u> di pt $\equiv X$)

ciò è una cosa diversa

(v. <u>def.ni</u>) dalla chiusura

del K'

421 Veniamo ora alle deduzioni generali accennate a p 415 relative ai complessi regolari K ~~pure~~ chiusi .Intanto si può precisare per essi il valore dell'ultimo n° del Betti b^n e dell'ultimo rango di connessione λ^n (di b^n sappiamo solo che è determinabile come m x n° dei cicli C^n lin ind p. 335)Intanto per un K^n chiuso regolare orientabile, e coi T^n orientati concordemente ~~...~~ VOGLIAMO tutti i suoi cicli C^n;se in un tale il semplice T_1^n entra m volte ,perchè manchi il contorno della catena ,bisognerà prendere altrettante volte tutti i T^n contigui e così via si arriva così a dire che TUTTI i T^n vanno presi m volte, in virtù della cd 3) di regolarità.Quindi C^n non può che coincidere con un multiplo della somma Σ di tutti i T^n orientati concord mente; (effettivamente Σ è chiuso (cond. 2) e orientabilità) Σ è base di omologia, e $b^n=1$ .Quindi per un K^n chiuso regolare orientabile è sempre $b^n=1$. Sia invece K^n regolare chiuso ma non orientabile;qui se cerchiamo di costruire un C^n diverso da zero non vi riusciamo:infatti se (orientati per ora comunque i T^n) T_1^n vi entra m volte,i suoi adiacenti,per distruggere il contorno vi devono entrare,in valore assoluto altrettante volte,cioè $\pm m$;~~quindi~~ anche qui in base alla cd 3) si estende la conclusione a tutti i T^n cosicchè il ciclo cercato è l'insieme di TUTTI i T^n presi ~~...~~ con molt.tà $\pm m$,possiamo dire tutte $+m$ prendendo convenientemente gli orientamenti dei T^n ~~n~~ cioè sarebbe m

L'ipotesi della chiusura è superflua:
basta riferirsi alla corona circolare (orientabile)
v. p. 344 - dove $b^2=0$. Ma è questa!

volte la somma Σ dei T^n conv.te orientati. Ma tale somma NON è un ciclo, perchè se lo fosse, su ogni T^{n-1} comune a due T^n, segue dalla cd di chiusura che sarebbero subordinati $\partial_i \Sigma$ (v. p. 410) orientamenti opposti, contro l'ipotesi della non orientabilità. Quindi attualmente mancano i C^n non nulli, cioè per ogni complesso K^n regolare chiuso NON orientabile è sempre $b^n = 0$. Si ha così una distinzione ben netta, in relazione a b^n tra i K^n chiusi regolari orientabili o non orientabili (Riguardando le superficie chiuse note, per il toro e il piano proiettivo risultava effettivamente risp. $b^2 = 1$, $b^2 = 0$ p. 344).

Invece, in entrambi i casi (K^n regolare chiuso, orientabile oppure no) l'ultimo rango di connessione vale sempre $r^n = 1$. Intanto se K è orientabile, il C^n già rilevato (cioè Σ) essendo catena chiusa è nat.te catena chiusa [non nulla] mod 2 Se K^n è non orientabile, anche qui la catena Σ formata da tutti i T^n_i, pure non essendo chiusa come catena p d, è chiusa come catena mod 2, perchè le facce T^{n-1} a due a due comuni di T^n se non si distruggono per differenza, si distruggono ora per somma. Quindi in entrambi i casi vi è una catena mod 2 non nulla e chiusa. Perciò, se non vi sono ulteriori catene mod 2 chiuse, omologicamente ind.ti da quella (p. 394) è proprio $r^n = 1$. Ma senza fare tale verifica direttamente, ciò che sarebbe immediato ciò seguirà da quanto dirò adesso, in relazione con altro risultato relativo ai K^n regolari chiusi.

Per ogni K^n regolare chiuso, orientabile o no, si può precisare come segue la natura dell'utlima matrice di incidenza E^{n-1}, scritta sotto forma diagonale. Essa è rispettivamente per complessi orientabili, oppure non orientabili

$$(1)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & - & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & & & & 1 & \\ 0 & 0 & & \cdot & - & 0 \; 1 \\ 0 & 0 & \cdot & - & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & - & & & 0 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & - & - & 0 \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & - & - & & - & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & - & & - & 0 \\ 0 & 0 & - & - & & - & 0 \end{vmatrix}$$

dove è da osservare che, siccome essa ha le stesse dimension[i] che E^{n-1} contiene α^n verticali e α^{n-1} orizzontali; ora ogni T^{n-1} è comune a due e due soli T^n, mentre un semplice T^n ha parecchie (più di due) facce T^{n-1}; quindi il n° α^{n-1} ~~dalle~~ dei semplici T^{n-1} è certo ~~inferiore~~ superiore a quello dei sempli[ci] T^n, α^n, cosicchè $\alpha^{n-1} > \alpha^n$ e E^{n-1} ha un maggior numero di orizzontali che di verticali[1], cosicchè sta bene che sopravanzino orizzontali costituite da zeri. Per dimostrare tale risultato, partiamo dalla E^{n-1}; ogni sua orizzontale, corrispondendo a un T^{n-1} che è faccia esattamente di due T^n, contiene (in relazione alle ~~orizzontali~~ verticali provenienti da questi) due elementi ± 1, mentre in quella orizzontale tutti gli altri

[1] cfr. p. es. l'es.mo a p. 551, dove E' è $\begin{vmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \end{vmatrix}$.

~~p.es. se ho~~ $\cancel{\left|\pm 1 \quad 0 \quad \pm 1 \quad 0 \;\ldots\; 0\right|}$ ~~in una linea prolunga, le 1ª e 3ª colonna sono collegate~~

<u>vi sono tutti zeri</u>

$$\left|\begin{array}{cccccccc}
\pm 1 & \pm 1 & 0 & - & - & & 0 & \\
* & * & \pm 1 & 0 & - & - & 0 & \\
* & * & * & \pm 1 & 0 & - & - & 0 \\
\hline
* & * & & & & * & \pm 1 & \\
* & * & & & & * & * & \\
\cdot & - & - & - & & - & - & \\
* & * & & - & - & * & * &
\end{array}\right| \qquad (5)$$

elementi sono nulli. Osserviamo inoltre che in base alla df di matrice di incidenza, due colonne immagini di T^n aventi una faccia a comune hanno certo entrambe un ± 1 in una stessa orizzontale. Ciò premesso dimostriamo intanto che ordinando convenientemente i T^n e i T^{n-1} si può dare alla E^{n-1} la forma dove $*$ indicano el.ti indeterminati (± 1, 0) ma a destra del ± 1. Lo verifichiamo per ricorrenza; intanto nella prima orizzontale possiamo ottenere quella dispozione portando, con sostituzione sulle colonne, i due ± 1 ai primi due posti.

Suppongo allora di avere realizzato quella dispozione fino ~~alla i.esima orizzontale inclusa~~ dove il ± 1 scritto si trova dunque al posto $(i+1)$esimo .: allora nelle orizzontali rimanenti ve ne è certo qualcuna dove dei due ± 1 uno si trova in una delle prime $i+1$ colonne e l'altro no. Infatti se così non fosse nessuna delle prime $i+1$ colonne, insieme con nessuna delle restanti avrebbero un ± 1 in una stessa orizzontale, cioè (v. sopra) i relativi T^n non avrebbero mai una faccia T^{n-1} in comune. Avremmo così un primo sistema di T^n e poi un secondo, staccati fra loro nel senso che mai un T^n del primo e uno del secondo ~~hanno~~ avessero una faccia in comune il che contraddice alla condizione 3) di regolarità, p 417 in base alla quale da ogni T^n si può passare a ogni T^n mediante una successione di T^n di cui due consecutivi sempre con una faccia comune. Prendo dunque una delle orizzontali ove si verifica la p.tà detta, e la porto al primo posto disponibile (cioè $i+1$), e lasciando il suo primo ± 1 dove sta, porto il

521

$$
\left|\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 0 & - & - & - & 0 \\
0 & \times & 1 & 0 & - & - & 0 \\
0 & \times & \times & 1 & 0 & - & 0 \\
0 & \times & \times & \times & - & - & 1 \\
\times & \times & \times & - & & & \times \\
\times & & & & & & \times \\
\times & & & & & & \times \\
\times & & & & & & \times
\end{array}\right|
$$

(sono zero ± 1).

secondo, che sta oltre la $(i+1)^a$ colonna, proprio nella $(i+2)^a$ colonna (con spostamenti di colonne che non turbano la forma già ottenuta); e così via . Si tratta ~~tra~~ di passare con trasformazioni elementari dalla matrice (3) a una delle (1), (2).

Teniamo presente che il n° delle prime orizzontali, cioè di quelle dove abbiamo ottenuto l'ordinamento chiarito dei ± 1, è di un'unità inferiore al n° delle verticali, cioè vale $\alpha^n - 1$.

Faccio intanto questa modifica; faccio in modo che in ognuna delle prime $\alpha^n - 1$ orizzontali dei due el.ti ± 1 uno sia un $+1$ e l'altro un -1. ~~Ecc~~. Cambiando di segno una delle prime due colonne, se occorre, posso ottenerlo nella prima orizzontale. Nella seconda, vedo che segno ha il ± 1 rappresentato da una ~~delle~~ delle due prime * e poi dispongo del segno della terza colonna in modo da raggiungere la cd. E così ~~via~~ via).

Ora alla prima colonna addiziono tutte le successive. In tal modo in prima colonna, per ciascuna delle prime $\alpha^n - 1$ orizzontali, vengono sommati tanti zeri e poi un $+1$ e un -1 e risulta così zero. Invece sempre in prima colonna ma nelle ultime orizzontali vengono sommati dei ± 1, e ~~forse~~ quindi si sono ~~ottenuti dei~~ o degli zeri oppure dei ± 2. La forma ~~ecce~~ della matrice è ora

In ognuna delle 1e orizz. ho scritto (prima degli zeri) 1 oppure due ± 1 con eventuale cambiamento di segno alle orizz.ni stesse.

Ora in 2.a orizzontale,dovce ho la *, se è zero ,lascio come sta,se ho 1 sottraggo la prima,se ho -1 aggiungo la prima e cheì rendo nulla la * .Analog.te della terza,con opportuna somma o sottrazione delle due prime . E così via fino alla orizzontale di posto α^n-1. All ra nelle prime α^n-1 orizzontali le * di un momento fa rappresentano ora tutte degli zeri. Finalmente,ne approfitto ancora in modo analogo per sommarle o sottrarle dalle ULTIME orizzontali (dove così non viene mai toccata la prima colonna ove si aggiungono o levano zeri) dove rendo nulli tutti gli el.ti salvo quelli della prima colonna. In questa,dove non sono zeri sono dei ± 1 ,e (se ve ne sono effettivamente) mi riduco al caso in cui ne ho un solo sommando o sottraendo queste ultime orizzontali fra loto. Resterà così alla fine in questa parte inferiore della prima colonna o tutto zero(se non vi erano ± 1) e allora ho già la (1) o un solo ± 1 che posso supporre $+1$ .In quest'ultimo caso porto la orizzontale in questione al primo posto e ottengo la (2). Quind ottengo sempre la (1) o la (2). Resta da chiarire che esse corrispondono alle due ipotesi di K^n orientabile oppure no. Se ho la(1) ,la sua prima colonna rende evidente la esistenza di <u>un</u> ciclo C^n non nullo ~~(cioè nella [illegible])~~ cosicchè paragonando colle due possibilità di p.421-3 si vede che siamo nel caso della orientabi lità. Invece se ho la (2) ~~[illegible]~~ non ho cicli C^n non nulli, e lo stesso paragone con p. 521-3 dice che siamo nel caso della ~~ori~~ non orientabilità. Così il teorema è dimostrato.

Osserviamo che nei due casi si ha risp.

$$\gamma^{n-1}=\alpha^n-1\ ;\quad \gamma^{n-1}=\alpha^n$$

cosicchè la $b^n=\alpha^n-\gamma^{n-1}-\gamma$ ~~conferma~~ dà i valori $b^n=1$, $b^n=0$ che p. 521-3 corrispondono ai 2 casi.

Inoltre di divisori el.ri pari ne ho risp. zero e uno cosicchè

$$h^{n-1}=0,\quad h^{n-1}=1 \qquad (h^n=0)$$

ed è effettivamente nei due casi $r^n = b^n + \cancel{h^n} + h^{n-1} = \begin{cases} 1+0=1 \\ 0+1=1 \end{cases}$

come detto a p. 531.

Finalmente aggiungiamo ora in base alle (1) (2) per un K^n regolare chiuso orientabile mancano i coeff. di torsione di dimensione $n-1$; se il K^n è non orientabile ve ne è uno e vale 2.

Tutto ciò permette per le sup.ni chiuse connesse (cioè triangolate con l'connesso) di ~~precisare~~ aggiungere nuovi risultati ai noti (riassunti a p. 400 per i b^k, r^k). Ora per i coeff.ti di
sup. orientabili ~~$b^0=1$ manca coeff. torsione p. (331)~~ sup. non orientabili $b^0=1$ manca coeff.ti tor.ne (p. 331)
torsione, che già sapevamo mancare per $k=0$, $k=2$, e
~~$b^2=1$ (p. 421) mancano i c.t. (p. 331)~~ $b^2=0$ (p. 415) manca i c.t. p. 331.
test per ci rispetto nel caso rimane $k=1$, ove ci sono $\begin{cases} \text{nessun coeff.} \\ 1\ \text{coeff} = 2. \end{cases}$

Tornando a n qualunque, l'esistenza del ~~c~~ coefficiente 2 di torsione nel K^n non orientabile ci fa prevedere che deve esistere (p. 325) un C^{n-1} non $\sim$ zero, tale che $2C^{n-1}$ è ~ 0. Esso si può ottenere così. Prendo tutti i T_i^n e la loro somma Σ^n (non importa come siano orientati)

$$\Sigma^n = \sum T_i^n \qquad (*)$$

Ora Σ^n non è chiusa (perchè ne seguirebbe l'orientabilità di K^n), cosicchè ha un contorno non nullo, Lo chiamo U^{n-1}

$$U^{n-1} = \text{cont}\, \Sigma^n \qquad (1)$$

Nel cont Σ^n ogni T_i^{n-1} compare zero volte, oppure ± 2 volte, secondochè i due T_i^n che lo hanno come faccia subordinano su di esso orientamenti opposti o eguali. Perciò U^{n-1} si può scrivere come doppio di un'altra catena non nulla, che chiamo V^{n-1}.

$$(2) \qquad U^{n-1} = 2V^{n-1}$$

Paragonando (2) con (1) vedo che $2V^{n-1}$ è un contorno (e quindi ciclo) cioè è ~ 0 Quindi

$$2V^{n-1} \sim 0.$$

Invece V^{n-1} non è ancora ~ 0. Invero ciò significherebbe l'esistenza di una W^n tale che $V^{n-1} = \text{cont}\, W^n$

Ma allora sostituendo in (2) e poi paragonando con (1)

$U^{n-1} = 2\,\text{cont}\, W^n;$ $\qquad \text{cont}\left(\Sigma^n - 2W^n\right) = 0$

cui $\Sigma^n - 2W^n$ ha contorno nullo, cioè è ~~due~~ catena chiusa, cioè è C^n. D'altra parte per la non orientabilità $b^n = 0$ p. 420 non esistono C^n diversi dallo zero. Quindi sarà $\Sigma^n = 2W^n$. Ma ~~ciò~~ allora in Σ^n (a riduzione fatta) tutti i coeff^ti sarebbero pari, mentre la def. (*) dice di no. Quindi V^{n-1} non è ~ 0.

2 Dalle trattazioni risulterà inoltre

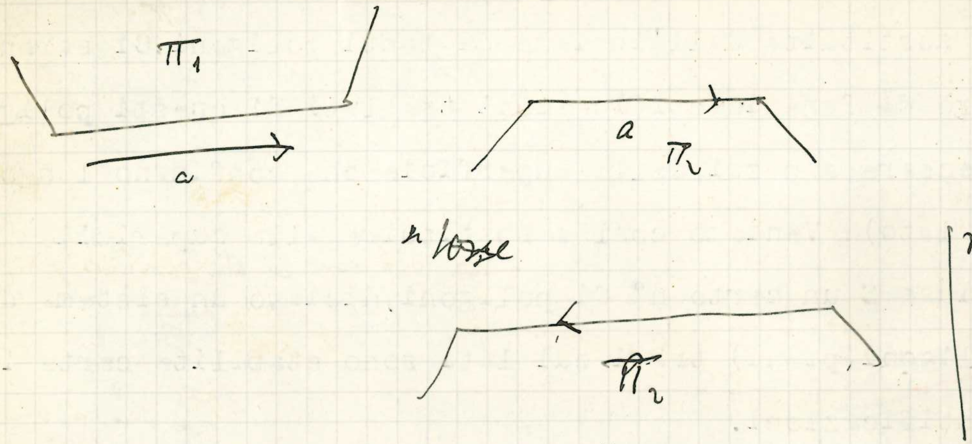
1) le eq.ni di gen. S chiuse a spin, o.D. con p nuovi, o nostre

2) un modo effettivo per trovare queste disp. ~~canonic~~ di tipo canonico equivalent

CONDIZIONI DI EQUIVALENZA TOPOLOGICA(Omeomorfismo) di due superficie chiuse. -Vogliamo ora affrontare tale problema(ricorrendo in parte all'intuizione). Abbiamo già enunciato (p. 409) l'invarianza topologica dei n.i del Betti coeff.ti di torsione,ecc. e aggiungiamo ora quella di orientabilità o meno. Quindi se due superfi cie chiuse (connesse): pr... devono essere omeomorfe ,devono fra l'altro coincidere in orientabilità o meno e nella caratteristi Ca. Ci fermiamo a dimostrare la sufficienza di queste condizioni. Sarà dunque coincidenza nel carattere della orientabilità o meno e nella caratteristica la cd nec e suff per l'omeomorfismo di due sup. Qui dunque tale problema si risolve completamente(mentre il passaggio a dimensione maggiore di due complica parecchio le cose).

In vista di dimostrare quella sufficienza, cerchiamo per ogni sup.chiusa di arrivare a un poligono fond.(p 251) con opportune identificazioni fra i suoi lati. Ricorrendo all'intuizione,vediamo che ogni superrficie chiusa-escluse quelle di carattere più complicato che qui nonconsideriamo- si può dividere in un n° finito di pezzi ognuno dei quali è top. te equivalente a un cerchio(Volendo essere precisi possiamo dire chestudiamo proprio lesup. dotate di questa proprietà).Con deforma zioni topologiche possiamo pensare che ognuno di quei pezzi abbia contorno poligonale. La superficie viene così sostituita dall'insieme di tanti poligoni. π_i Ci saranno però da fare identificazioni tra lati di questi poligoni (pensare a pezzi della superficie che confinano lungo un lato). Veniamo così a sostituire alla superficie chiusa S un certo n° di poligoni, non intrecciati e che possiamo pensare diciamo un sistema di poliggni(piani) tra i cui lati sono stabilite ~~certe~~ identificazioni. (a due a due esattamente)

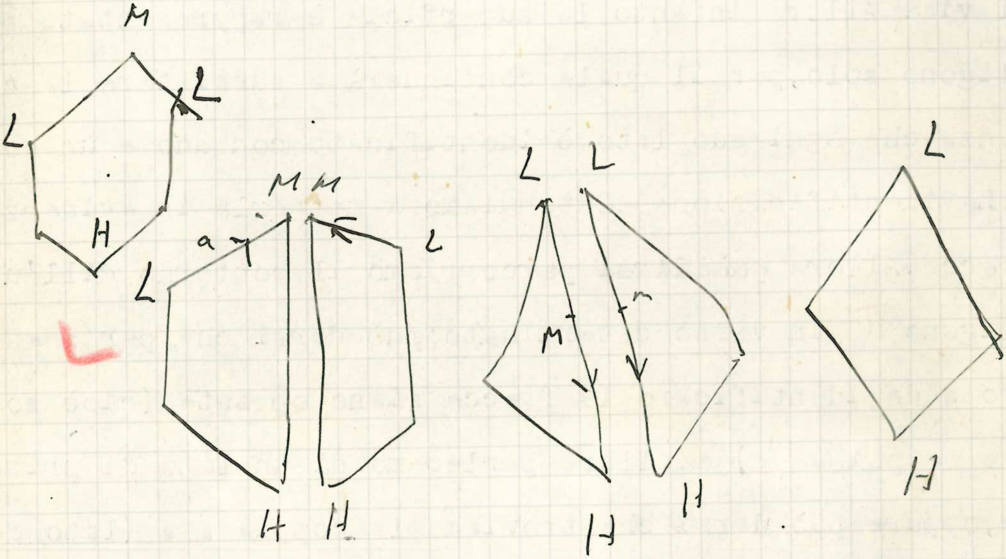
Partiamo allora addirittura da un tale sistema di poligoni π_i ~~che chiamiamo sistema H~~ (costituito da n° finito poligoni n° lati n° vertici), che pensiamo dato arbitrariamente, purchè ogni lato di un poligono sia identificat con unlato di un altro ~~&~~o eventualmente(per includere già le forme a cui arriveremo con successive trsf.ni) anche del medesimo poligono. Dovrà essere però doddisfatta la condizione che-come abbiamo supposta connessa la S la identificazione sia tale ta rendere connesso il sistema H(pes evitare che ~~due~~ solo alcuni poligoni ~~&&~~ [illegible] vengano connessi attraverso identificazioni dei loro lati e altri no). Pnesuado che il sistema H proviene ~~da~~ in definitiva da una triangolazione della superficie S (ottenuta triangolando i suoi singoli pezzi poi trasformati in poligoni e che quei triangoli erano orientati ,p.es. quelli di ogni pezzo poligonale in modo da subordinare sul contorno un dato verso, penseremo nel sistema H che anche qui



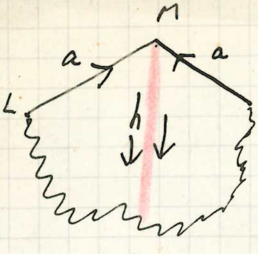
operarei sym. rispetto retta r

La prima cosa che possiamo fare è intanto di "ricucire" nel piano i vari poligoni π_i ;cominciamo a unirne due, lungo due loro lati identificati passando così da essi a un solo poligono(v. figure contro) e poi a questo ne attacco un terz e così via. Allora intanto la superficie è rappresentata su un poligono solo, per il quale continuerà a sussistere la cir costanza che ogni suo lato è identificato con uno e un solo altro. La identificazione continuiamo a metterla in evidenza con frecce. Allora ~~aaaaaaaa~~ percorriamo il contorno dall'unico poligono π in verso determinato; può darsi che per a e l'altro $\bar{a}$ da identificare le frecce siano opposte (cioè so trovi a e poi a^{-1}) e allora parleremo di un lato di prima specie, oppure può darsi che troviamo la coppia a a (lato di seconda specie). A p. 431-3 abbiamo trovato i poligoni fondamentali relativi alla sfera con p manici, o conattaccati p nastri di Moebius. Vogliamo insostanza far vedere che ogni poligono fondamentale rapp. la sup. chiusa o equivalente a una sfera o, si può ridurre a quei tipi (risp.
$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$; $a_1 a_1 \dots a_p a_p$.
e di qui sarà poi immediata la conclusione del teorema enunciato a p 437 . Ciò avverrà mediante alcune RIDUZIONI.

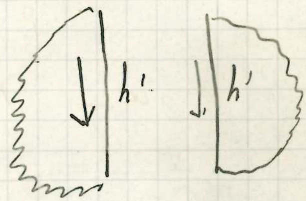
Intanto se si hanno a, a^{-1} consecutivi e il poligono π ha complessivamente almeno 4 lati, si può "sopprimere" la coppia (cioè passare a un altro π con due lati in meno)



(H. però un M. e un L).

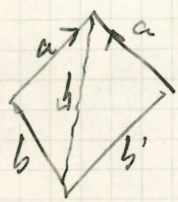


Taglio lungo d'angolo per M, sia h. Poi deformo contin. p.es. il poligono di sinistra finché a e a ~~così~~ vengono a costituire un solo lato h' e così nel poligono di destra.



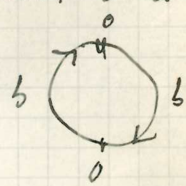
Poi riunisco, e ho così un poligono con due lati di meno del primitivo

Tutto ciò si ha finché i lati erano almeno 6: suppongo 4-angolo. Osservare che data la identificazione il n.° dei lati è sempre pari più tagli che uniscono. Passo a 4-angolo. Se erano 4 va ancora bene: vedi sia che passerò a poligono con 2 lati, già considerato: così



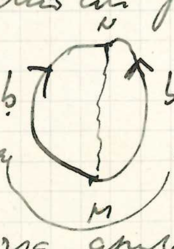
Ho scelto b' che è poi da identificare con b in un modo o nell'altro. È viene un poligono con 2 lati curvi: sarà

$b\,b'$ cioè $b\,b$ oppure $b\,b^{-1}$: nel 1° caso



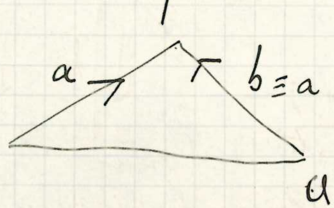
è il piano proiettivo (ricordare a p. 250; del resto ho cerchio con punti opposti identificati)

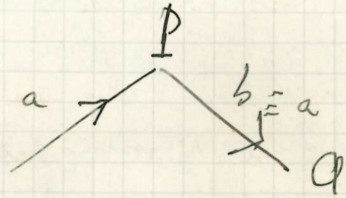
Se ho $b\,b^{-1}$



ho sfera (~~e ricordi~~ pensare a portamonete lasciato a coincidere b^{-1} e b come chiudendo borsa aperta in 2 metà lungo il ferro MN).

Possiamo quindi supporre che non si trovino mai $a\,a^{-1}$ consecutivi ma quando ci si trovino li eliminiamo. Chiameremo brevemente contrazione questo processo di riduzione in relazione col 2° processo. È da osservare che esso non aumenta mai il n.° di vertici equivalenti: si vede (ricordo)

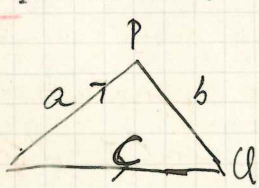

P
a
b ≡ a
a

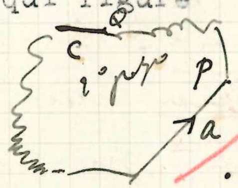

P
a
b ≡ a
a

in definitiva

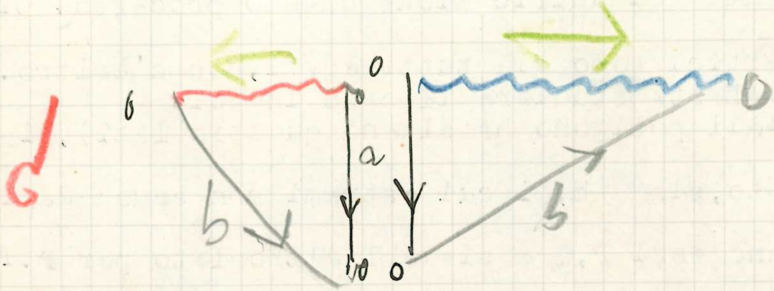
Un altro procedimento di riduzione permette di sostituire al poligono che si ha un altro in cui tutti i vertici risultano identificati tra loro; mentre inizialmente si potevano dividere in parecchie classi di vertici equivalenti. Chiamerò brevemente di unificazione questo processo. Si fa così. Se i vertici sono già tutti eqvti, non c'è altro. Se no(= &&&&&& v. sopra basta studiare il caso in cui il poligono ha almeno quattro lati), vi sarà almeno un lato, sia b, i cui estremi non sono da identificare; siano essi P,Q e sia a l'altro lato per P. Traccio la diagonale che va dall'altro vertice di a a Q e con essa spezzo Π in un triangolo e in un altro poligono

Anzi il 2° lato da identificare con fa parte del poligono, perchè se no sarebbe b, nel quale caso (v. figura contro) o potrei applicare la contrazione ad $a\,a^{-1}$; oppure P e Q come secondi estremi di a dovrebbero essere equivalenti mentre non lo sono. Allora attacco il 2° poligono al triangolo lungo gli a equivalenti; v. qui figure





Il n° dei lati resta così immutato. Come vertice P si perde una volta (prima si aveva una volta su ognuno dei due a che ora sovrappongo, ora si ha oltre uno solo); Q invece ricorre una volta di più (nel triangolo; e poi nel nuovo lato c) [L'altro vertice del △ lo stesso n° di volte: una si perde (a) e una si guadagna (c)].



Così non ho più le coppie di 1ª specie ca a (lontane)

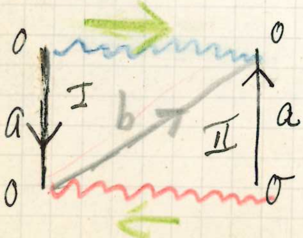
ho invece la . . . SS vicini.

non è detto
Le altre coppie restano della specie di cui erano

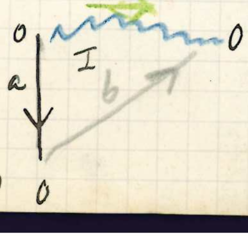
[Vedere le frecce verdi in figura pel senso di percorso del perimetro che si adopera per determinare le specie];
ma una coppia di 2ª specie coi 2 esemplari già ~~sic~~ riuniti è tutta in oppure in e quindi resta di 2ª specie riunita. Così si presenta una quaterna $cdc^{-1}d^{-1}$ ~~disunita~~ riunita (come si vedrà più avanti) ma non viene guastata perchè è certo tutta in oppure tutta in . ~~Perciò, dopo riunite le . . . di 2ª e le coppie di 1ª specie come si dirà più avanti, ogni ulteriore riunione~~

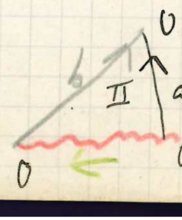
Adunque, colla trasformazione eseguita, se riuniamo i vertici del poligono in classi di vertici equivalenti, vediamo che una classe ha perduto un esemplare, mentre un'altra ne ha acquistato uno. Se per il nuovo pokigono non si presenta la possibilità di fargli subire una contrazione, si prosegue nello stesso modo. Ma anche se si può eseguire una contrazione, inquesta -come dettò a p 443- il n° ~~[illegible]~~ dei vertici equivalenti nonaumenta mai in nessuna classe Quindi in definitiva o applicando da solo il processo di unificazione, o se del caso alternandolo a quello di contrazione si possono eliminare un dopo l'altro tutti i vertici di tutte le classi salvo una. Ci si riduce così a un poligono con vertici tutti identificati.

Fermiamoci ancora su un terzo processo di riduzione, quello di RIUNIONE: vogliamo dire possibilità, per i lati di 2.a specie (a a) di riunirli, cioè di portarli a essere consecutivi. Siano a ed a non tali; e tiriamo una diagonale che
Partiamo da un poligono già a vertici unificati (tutti 0)
(percorrendo al solito il perimetro in un verso) congiunga
in modo opposto('') v. figura ~~si riattacca il 1° e 2° secondo si percorre il perimetro in un verso~~
Un ~~primo~~ vertice di un a con ~~secondo~~ uno dall'altro (vertici ~~...detto male~~



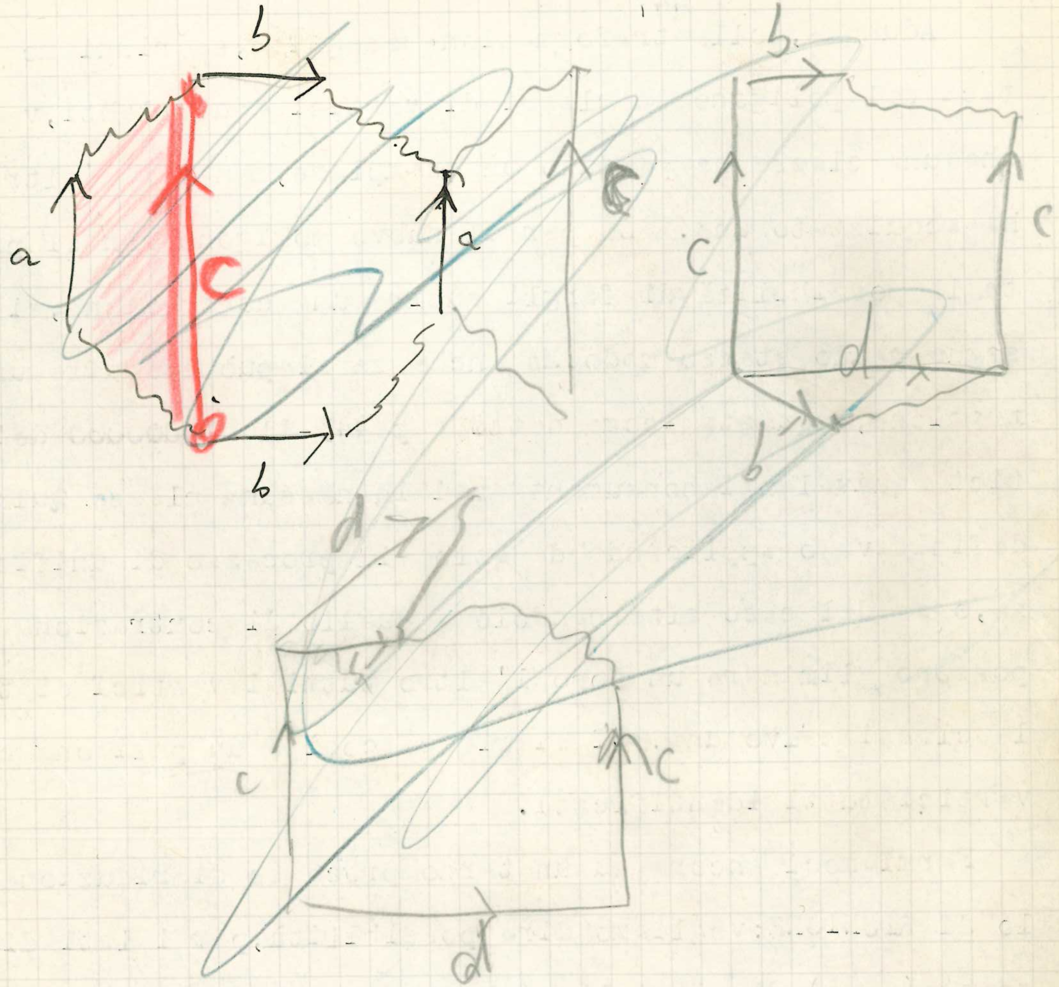
che sono tutti 0). Tagliamo lungo essa (che chiamo b) e riuniamo lungo gli a.





('') (fine con fine
o principio con principio)

per scrupolo ribalto lungo il segmento e poi lo porto a sinistra di 1° v. conto



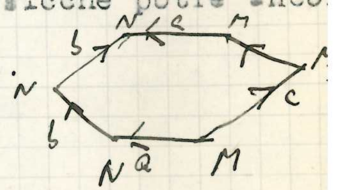
b
a
c
a
b
c
b
c
c
d
b
d
c
c
d

Così continuando, (e per quanto detto a p. 446 nn. 449, guastano mai le coppie a a già riunite) finchè vi sono dei lati di seconda specie, li rendo tutti come la precedente. Se alla fine non vi sono lati di prima specie arriviamo proprio così alla forma già nota

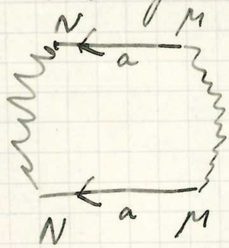
$$a_1 a_1 \cdot a_2 a_2 \ldots a_p a_p$$

per poligoni non orientabili

Resta così dunque da studiare la sola possibilità che col precedente procedimento restino poi ancora dei lati di prima specie, o che addirittura vi siano soltanto dei lati di prima specie. Qui osserviamo anzitutto che (dopo avere ridotto il poligono coi procedimenti che precedono) per ogni coppia a a^{-1} di lati di prima specie ce n'è certo un'altra che "la separa" , b b^{-1} tale cioè che percorrendo il contorno in uno dei due versi si incontrano a (p es) b a^{-1} b^{-1}. Se invero, non fosse così, tra a e a^{-1} ogni lato sarebbe da identificare con un lato della stessa parte di perimetro per quanto riguarda i lati di 1.a specie, e certo anche per quelli di seconda una volta che si è applicato il precedente processo di riunione. In altre parole immaginando il perimetro spezzato in due parti a a ognuna di queste, rispetto alla corrispondenza posta dalla identificazione apparirebbe come un tutto unito (corr. te a sè stesso). Ma in queste condizioni è facile convincersi che dalle identificazioni esistenti tra i lati non seguirebbe come deve nelle nostre ipotesi di avere già applicate le precedenti riduzioni la equivalenza di tutti i vertici (è da tener presente per capire bene questo che la equivalenza di vertici non è un dato a priori, ma che sono da identificare i vertici in quanto punti di lati identificati). Ora se prendo p.es. il poligono seguente, e chiamo M,N i vertici di a e suppongo p. es di avere in una parte aa^{-1} di perimetro ~~aa~~ una coppia di 2.a specie bb e così nell'altra cc, dalla identificazione tra a e a e poi tra b e b e poi tra c e c segue che ho tre vertici M e tre N, ma quelli restano distinti da questi (cosicchè potrei ancora applicare il procedimento di unificazione).

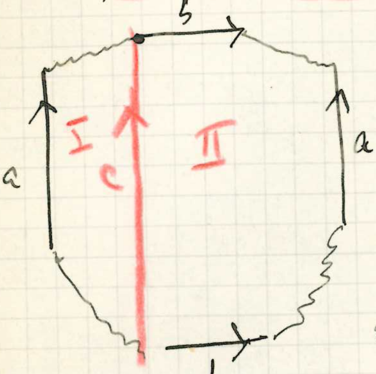


Ora in generale se ciascuna delle due parti aa di perimetro contiene coppie di lati identificati:

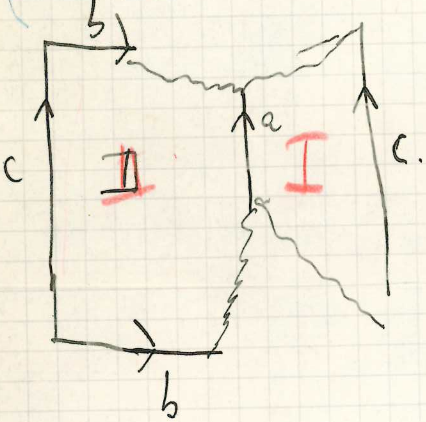


questi identificati non possono confondere, per quanto ancora i vertici: che confondono a identificare vertici d'una parte (richiamo M) tra loro e quelli dell'altra (richiamo N) tra loro. ma non mi separa certo le id.ni di M con N. E ciò contraddice all'ipotesi che i vertici ~~siano~~ risultino già tutti identificati.

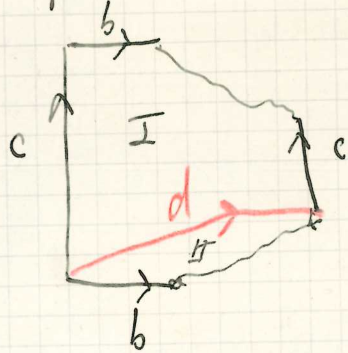
Perciò, vi abbiamo due coppie "alternate" di 1ª specie $a \ldots b \ldots a^{-1} \ldots b^{-1}$



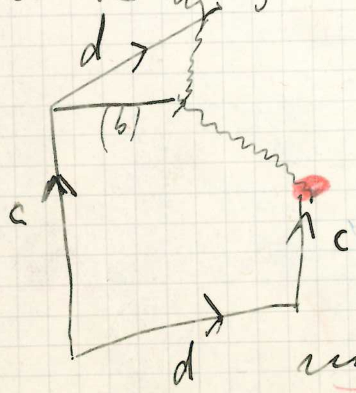
Posso, procedendo come in fig.ª ~~partendo a cura~~ senza guastare i risultati delle considerazioni precedenti sostituire il poligono con un altro dove in luogo di quelle 2 coppie ce ne sono altre 2, sempre di 1ª specie c, d, dove si presentano consecutive $cdc^{-1}d^{-1}$: 1° Taglio lungo c e riunisco lungo a (così ho già tre lati consecutivi)



Deformo in



Poi taglio lungo d e riunisco lungo b.



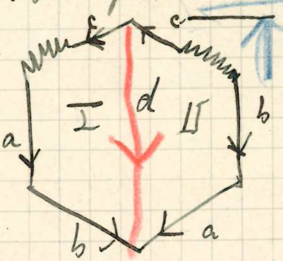
Ho proprio a parte da $c^{-1}d^{-1}cd$. Va bene.

(Si badi che i tratti ~~non~~ sono stati spostati in blocco e quindi non si possono mai disgiungere le coppie non di 2ª specie consecutive). Allora, se vi sono ancor~~a coppie di coppie~~ altri lati di prima specie, si ripete lo stesso procedimento (senza guastare i risultati già raggiunti, come segue da quanto ora osservato sul fatto che i tratti ~ si spostano in blocco). Perciò, se non vi sono lati di seconda specie si arriva alla forma canonica

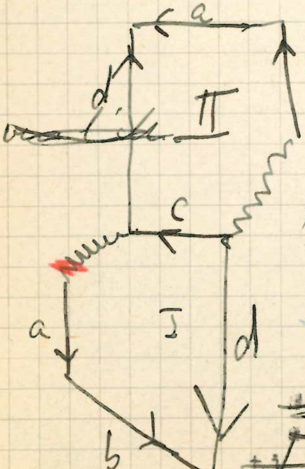
$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$$

già note per la sfera con p manici. Infine, resta la possibilità che si presentino insieme ~~coppie di~~ coppie di coppie di lati di prima specie (già riunite come ora detto) e coppie di seconda specie. A prima vista questa sembra una forma nuova che non rientra in quelle a noi note. Ma in realtà con un'ultima riduzione trasformiamo questi poligoni in altri di specie note. Vi sia per $aba^{-1}b^{-1}$ e poi, ad es. cc

Trasformo come in figura

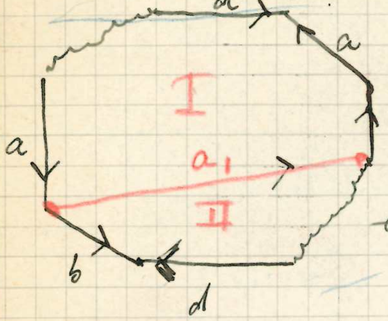


Taglio lungo d e unisco lungo c dopo aver ribaltato II verso l'alto (e spostato a sinistra)



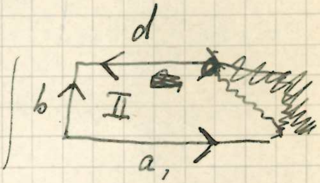
Il nuovo poligono contiene tre coppie di 2ª specie a a b b d d (~~loro~~ lati omologhi contigui)

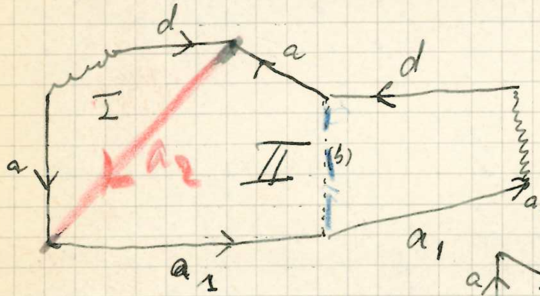
Allora applico ~~a ciascuna di que~~ tre volte ~~ste~~ il processo di riunione (p 447) ~~che non sto più a seguire in figura e così ho eliminati i lati di prima specie a e B. Se ho finito, abbiamo la forma~~ $a_1 a_1 \ldots a_p a_p$ ~~e se no continuo fino a ridurmivi.~~ ; che conviene però seguire nei suoi passaggi perché ognuno di essi può importare cambiamenti di specie di lati: L'ultima figura ottenuta è



operando come a p. 447
riunione ~~per~~ su b (principio)

~~capovolgo~~ ribalto II su risp. e unisco lungo b.

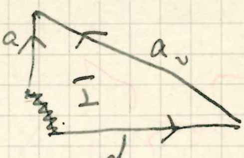


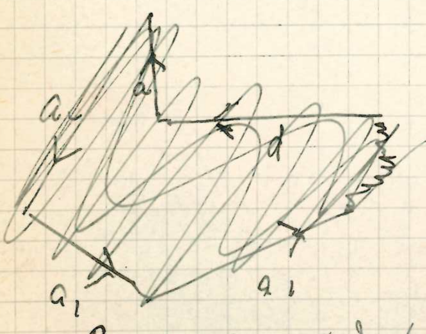


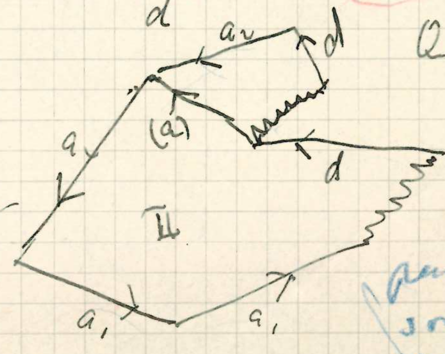
Qui ho a_1 di 2ª specie riunito
a .. .. .. non riunito
d diventato di 1ª specie

riunione op.do come a p. 447-8 su a (fine)

Ribalto I su risp.te e unisco lungo a







Qui ho a_1 di 1ª riunito
a_2 di 1ª "
d di 1ª lontano

perché a, a_1, a_2 sono non separati da d

Resta solo più da fare la riunione su d e questa come osservato a p. 446 non guasta le precedenti. Quindi è inutile disegnare l'ultimo passaggio.

In tal modo, dopo fatte tutte le precedenti riduzioni si trova ~~o~~ $a b a^{-1} b^{-1}$ con $c c$, il poligono si trasforma in altro:

[Possiamo inoltre ampliare
la dim. del teor. sull'omeomorfismo

dove in luogo di a b c si trovano tre coppie di seconda specie, ognuna riunita. I passaggi fatti non hanno scostato le coppie di 2.a specie dd già riunite, nè le quaterne $pqp^{-1}q^{-1}$ già riunite. Quindi nel poligono trasformato, si hanno di nuovo solo coppie di 2.a specie riunite e coppie di coppie di 1.a specie riunite. Se coesistono si continua, fino a eliminare tutti i lati di prima specie. Si arriva così alla forma canonica $a_1 a_1 \quad a_p a_p$ c.d.d

Abbiamo così imparato a trasformare ogni sup chiusa in una sfera con p (ev.te zero) manici o nastri. Siccome le trasformazioni eseguite sono topologiche, hanno conservato l'orientabilità e la caratteristica. Vuol dire che queste erano inizialmente quelle che sono alla fine. Ma per i poligoni fond.li trovati abbiamo

per la sfera con p manici[1] $N = 2p-2$ (p.413, include il caso della sfera per $p = 0$).

Per la sfera con p nastri[1] $N = p-2$ come ora dip. 461)rò; cosicchè tali poligoni canonici sono fra loro top.te distinti, differendo a parità di orientabilità o meno, per la caratteristica. Invece poligoni canonici parimenti orientabili o no, e con le stesse caratteristiche (cioè con lo stesso p) sono ovviamente top.te equivalenti. Quindi cond. nec. e suff. per la omeomorfismo di sup. chiuse è proprio la coincidenza sia orientabilità che caratteristica c.d.d.

1) in entrambi i casi p si può chiamare genere della superficie

I costituenti un sist.^{a} del
2 poligoni per questo
vista Suole f che al moment

$\equiv$ d

Quanto alla valutazione della caratteristica per il caso non orientabile, essa si ottiene così (e anche per il caso orientabile, confermandosi il risultato già noto). Per il polig fond (tenuto conto delle identificazioni) ~~non orientabile ho~~ i n^1 $f^0 f^1 f^2$ di vertici, lati e facce

$$\gamma^0 = 1, \quad \gamma^1 = p \quad \gamma^2 = 1$$

da cui

$$N = -1 + p - 1 = p - 2$$

(e per il caso orientabile $\gamma^0 = 1, \ \gamma^1 = 2p \quad \gamma^2 = 1$

da cui

$$N = -1 + 2p - 1 = 2p - 2$$)

Quindi il risultato si ha subito, se è lecito servirsi delle f^i anzichè delle α^i: la cosa non è la stessa perchè le α^i corrispondono a un complesso K^2 ricoprente la superficie, cioè si riferiscono a facce triangolari. Però di fatto si possono sostituire le f^i alle α^i per la seguente ragione. Partiamo da una sup. chiusa come a p. 437, decomposta in pezzetti, cioè in poligoni, che posso supporre triangoli. Se sono proprio triangoli, la caratteristica della sup. la calcolo, in base a essi, con le f o con le α, che sono la stessa cosa. Trasportati come là i poligoni che ora sono triangoli in un piano con le relative identificazioni, i n.i f restano invariati. Poi a quel sistema H faccio subire varie trsf.ni che, a partire dalla prima di ricucirli, consistono quasi tutte in ciunire due poligoni lungo lati identificati (e ciò fa diminuire γ^2 di uno e anche diminuire di uno γ^1, cosicchè N resta invariato) o nell'operazione inversa di tagliare un poligono in due (e allora succede l'inverso, e N è sempre invariato). Ho detto quasi, perchè c'è anche la contrazione di p 445 dove oltre alle precedenti tresf.ni si sono riuniti due lati consecutivi in uno, con conseguente sparizione di un lato e di un vertice; ma anche ciò va bene. Quindi il n.° N si può proprio calcolare come si è fatto.

(p.es. Kerékjártó p. 155 per sup. orientabili: ove parla di genere e numero di contorni; ma il genere p, n.° contorni r sono legati alla caratt. da $N = 2p + r - 2$ e va bene

p. 162 per non orient.; dove parla anche di genere p: e qui ~~anche~~ $N = r + p - 2$ e va ancora bene.

S. e T.[II] p. 192-4

[Non supponiamo che non si incontrino; se no risulta Avremo (p)]

Ci siamo occupati nelle pp prec.ti di superficie chiuse

Si potrebbe studiare la stessa questione e si troverebb

be qui che la cond nec e suff. per l'omeomorfismo è da

dalla coincidenza nel n° dei contorni, nel carattere di

orientabilità e nella caratteristica & Si possono poi

dare anche per questo caso dei poligoni fondamentali

canonici.

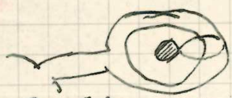
Tornando alle sup chiuse, aggiungo ancora una osservazio-

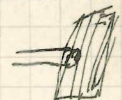
ne. Per la sfera con p manici è di uso comune la circostan

za che si possono tracciare su di essa 2p tagli (linee &&&

chiuse non intrecciate) che non ne rompano la connessione

e non più. Quanto alle &&&&& 2p linee sono p.es. per ogni

manico le due  che permettono di distendere

il manico in un foglio, ecc.  

Così la connessione non resta rotta. Oppure, sul poligono &&

fondamentale &&&&&& posso considerare come tagli le a_1 b_1

(ciascuna linea chiusa avendo sempre &&&&&& estremi identi

da quest 2p tagli

ficati): evidentemente la connession non è rotta. Se pren

do invece sup chiusa non orientabile, ho un sistema di p

(questavolta) tagli analoghi che non rompono la connes

sione nelle linee $a_1, a_1 \ldots a_p$ del contorno del poligono fon

damentale; e come ora dirò non più di p.

Intanto questo n.° di tagli di cui si parla osser

viamo che vi contrasti i cui in $2p = (p-2)+2 = N+2$

$p = (p-2)+2 = N+2.$

[O pel caso non orientabile alla sfera con attaccate p <u>calotte</u> <u>incrociate</u> p. 257; sulla quale saranno eseguiti i p tagli corrispondenti ai lati $a_1, \ldots a_p$ del poligono fondamentale]

D'altra parte $-q^0+q^1-q^2=N$. Ma $q^0=1$ (p. 398) $q^2=1$ (p. 423)

Quindi $N+2=q^1$. Si tratta dunque del n.° q^1!

Quindi le proprietà accennate per una sup chiusa connessa si traducono nel fatto che per una tale superficie si può

costruire un sistema di r^1 e non più tagli che non ne rompano la connessione. E' un significato del rango r^1 [per questo caso; per un altro caso v. sign.to di N per un compl di dim 1 a p 401] Vediamo di enunciare e giustificare in modo preciso la non esistenza di più di r^1 tagli non rompenti la connessione, in modo preciso in base alla nostra teoria combinatoria dei complessi. Faccio cos_. Parto da una sup. chiusa (pensare p es alla sfera con manici) in n.° di r^1 (con altri) connessa, su cui ho i tagli considerati, e poi ~~oppure~~, con una triangolazione "regolare" nel senso di p. 415; cioè partizione di Δ congr... ~~cioè~~ triangolo la superficie. Posso pensare di fare la triangolazione in modo che ognuno di quei tagli venga sostituito da un contorno poligonale chiuso formato con lati della triangolazione (curva) (cosicchè viene a apparire come un cammino di spigoli). Allora i tagli esistenti risultano -parlando ora del complesso K^2- altrettanti cammini di spigoli chiusi. Perciò sul complesso K^2 ho r^1 cammini di spigoli chiusi e aggiungiamo, visto che è così, a due a due senza lati comuni; che -dicevamo prima- non rompono la connessione. Possiamo tradurre questo termine così: la superficie è rimasta di un pezzo solo, cioè triangolatala è possibile andare da ogni triangolo a ogni altro mediante passaggio da un triangolo a uno consecutivo. Ciò dopo i tagli: vuol dire che tracciati questi r^1 cammini di spigoli senza lati comuni

T [si capisce che occorra qualche ecc.: se no potrei prendere uno stesso U' chiuso tante volte che voglio].

è ancora possibile andare da ogni triangolo del complesso a ogni triangolo mediante passaggi successivi a triangoli consecutivi senza che il lato comune a due triangoli checosì interviene appartenga mai a uno di quegli r^1 cammini di spigoli tracciati. Ebbene ,proviamo in modo preciso che il n.° r^1 non si può sostituire con un r maggiore,cioè che non esistono $r > r^1$ cammini di spigoli senza lati comuni tali che sia possibile andare da ogni triangolo del complesso a ogni altro mediante successivi passaggi a triangoli consecutivi senza che il lato comune a due di questi che così interviene appartenga mai a uno di quegli r cammini. Se invero considero r cammini di spigoli,ognuno è una catena chiusa ,cioè un C^1;consideriamola anzi come cat mod 2 chiusa(visto che tanto ogni spigolo che vi interviene vi interviene con molt.tà uno) Ho così le cat mod 2 chiuse $V^1_1, \dots\dots\dots, V^1_r$. Ma si è detto(p.394) che r^1 è il massimo n.° di cat mod 2 chiuse om.te indip. Qui ne ho $r > r^1$,quindi sono om.te dip.ti,cioè una loro cb lin a coefficienti non tutti pari è ~ 0 ;cioè

$$m_1 V'_1 + \dots + m_r V'_r \sim 0 \quad (\text{non tutte le } m_i \equiv 0 \bmod 2)$$

Vuol dire che esiste una cat mod 2, V^2, tale che

$$\text{cont}\, V^2 = m_1 V'_1 \dots + m_r V'_r \qquad (1)$$

Questa cat mod 2 è come sappiamo,un insieme di triangoli del complesso considerati a prescindere dell'orientamento ciascuno una volta.Dividiamo dunque i T^2 del complesso nelle due classi A,B; i T^2 A sono quelli appartenenti a V^2, i T^2 B gli altri. Entrambe le classi contengono effettiavemnte triangoli; di A ve ne sono perchè se no il loro insieme cioé T^2 sarebbe cat mod 2 nulla e allora anche il suo contorno, e allora anche le m_i il che non è. Vi sono anche triangoli B, se no sarebbero tutti A, e V^2 sarebbe l'insieme di tutti i triangoli del complesso, ma questo essendo chiuso (Def. di ct. di K^n regolare) ha contorno nullo (p.415-17) ma il suo contorno sarebbe (ibid) appunto il contorno della catena mod 2, V^2, quindi avrei cont $V^2 = 0$ e per la (1) dimostro

Infatti -interviene qui l'ipotesi che gli r cammini chiusi siano a due a due senza lati comuni- i lati che compaiono p es in V^1_1 noncompaiono nelle V^1 successive; quindi se m_1 zero, si hanno nella catena a secondo membro, immaginata scritta per combinazione dei T^1 del complesso, un T^1 con coefficiente uno, e la catena non può essere zero

Il 2° membro di (1) = 0 e ho già fatto vedere che ciò non è. Finalmente se prendo un triangolo A e un triangolo B, e cerco di collegarli mediante una successione di triangoli di cui due successivi consecutivi, questa successione contiene certo due triangoli consecutivi uno A e uno B; essi confinano lungo un lato che, essendo tale di un triangolo A e quindi di uno solo-perchè è già lato di un A e di un B e il K sulle varietà e [illegible] di dualità

più esattamente. Quest'ultimo è il concetto di un K^2 a facce triangolari p. d. & lati rettilinei, ecc. Il primo è il concetto di una sup. triangolata anche con triangoli curvilinei.

è regolare - fa parte del cont V^2 (a norma della df di con
di una catena mod 2). Quindi ~~&&~~ tale lato (un certo T^1 con
molt.tà uno) fa anche parte del 2° membro di (1) cioè entr
in uno e un solo (come sappiamo a priori) dei V^1. Perciò
avviene priprio che quel sistema di triangoli successivi
non è più possibile se io mi precludo la possibilità di
avere lati ~~&&~~ comuni a due triangoli successivi lungo un V^1
c d d

~~[illegible] .- In relazione ai n.i del~~

~~[illegible] accenno ancora (senza dm) a questo importante [illegible]~~

~~[illegible]~~ CENNO SUGLI SPAZI TOPOLOGICI .- Nel caso delle superficie, su cui ci siamo particolarmente intrattenuti, ci siamo trovati di fronte a due concetti, vicini tra loro quello di una superficie, da noi considerato come preesistente e quello di un complesso di dimensione 2 che la triangola. Si capisce che ~~&&&&&&&&~~ qualche cosa di simile deve presentarsi anche in relazione a un K^n con $n > 2$.- In sostanza si potrebbe dire così (come ~~&&~~ abbiamo considerato K^2 a lati curvi), che non ci obblighiamo a considerare K^n come insieme dei T^n, semplici p. d., e più generalmente dei T^k p. d., ma che ammettiamo la possibilità di deformare quei T^k con deformazioni topologiche, cioè biunivoche e continue ~~nello spazio ambiente~~. Ma conviene stabilire con maggior generalità il concetto di [illegible] quello che si chiama spazio topologico. a cui accenno in modo rapidissimo

T, Così in uno S_n n.co si ~~possono~~ più definire come intorno di ogni punto x i ~~punti di~~ questo: le totalità dei punti ~~di una~~ degli interni a una ~~sfera~~ ipersfera (p. 280) di raggio ε (pt. y tali che $\Sigma(x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2$), con ε arbitrario; o con $0 < h$ dove h è una quantità positiva [raggio variabile con x].

Esso si può definire in modo astratto così:è un insieme di enti(chiamati convenzionalmente punti,e che possono essere p.es. i punti dello spazio numerico a n dimensioni S_n)per i quali sia definita una nozione di vicinanza .Si capisce,perchè poi vorremo parlare di una trasf.ne topologica,cioè biun e continua fra gli enti dell'insieme e altre totalità,e allora si dovrà parlare di enti (punti) abbastanza vicini.Nozione di vicinanza:è come dire che sia definito unconcetto di intorno per ogni punto dell'insieme.Questo concetto può essere definito caso per caso,ma per poter fare una teoria bisogna che tale concetto di intorno soddisfi ad alcuni requisiti generali,cioè per dire la cosa in modo logico,a un qualche sistema di assiomi . Di tali sistemi,come in ogni teoria geometrica, se ne possono formulare diversi (p.es. assiomi di Haussdir v Alexandroff,Hilbert p 8;altri in Seifert & T.11 p. 316)

Non sto a riportare questi sistemi di assiomi,ilche qui si ridurrebbe a una elencazione;mi limito a dire che essi precisano ,con maggiori o minori esigenze,la nostra nozione di intorno,come la possediamo p es sulla retta o ~~nel~~ piano o nello spazio.

Fatto questo,se abbiamo una corr.za univoca tra i punti x di uno spazio topologico S e punti x' (non nec.te tutti[1]) di uno spazio topologico S' mediante la nozione di intorno si può definire la continuità nel pt. x

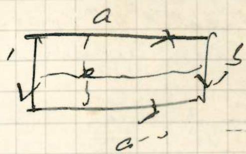
[1] (e gli intorni mandati allora in S')

imitando sostanzialmente la df. di funzione continua in un punto. E possiamo addirittura arrivare a una rappresentazione o corr.za continua(non più in un punto ma dappertutto)se essa è continua in ogni punto x. In particolare si potrà avere una rappresentazion biunivoca e continua dello spazio topologico S su una S' o una sua parte. Si ha così quello che si chiama una rapp.ne topologica

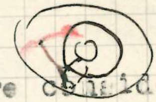
Allora si può generalizzare la teoria dei K^n,cioè creare un analogo dei K^2 a triangoli curvi ,&&&& sostanzialmente così;chiamare K^n,più in generale,ogni spazio topologico che sia top.te equivalente ,nel senso spåegato,a un K^n come lo abbiamo considerato fin qui. Ci limitiamo al caso di K^n connessi (cioè K^n connessi)

Si badi che un tale K^n può essere formato da punti di uno S_a numerico ,ma anche di punti che sono tali solo in un senso più astratto,conformemente alla nostra df astratta di spazio topologico. Così,se parto da &&& m circonferenze,posso chiamare convenzionalmente punto $P \equiv (P_1, \dots P_m)$ una m-pla di punti estratti uno P_i da ciascuna.Con tali punti formo uno spazio topologico,chiamando intorno di un tale punto ,le m-ple estratte da altrettanti intorni di $P_1, \dots P_m$ (sarebbero soddisfatti gli assiomi per gli intorni) Ho fatto così quello che si chiama il prodotto topologico di m circonferenze.Che esse costituiscano effettivamente un complesso(qui sarebbe un K^m)risulta da un teorema più

⊥ o avente il toro a b a' b' b'

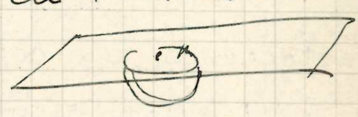


dove ogni ~~copia~~ pt. si riproduce
più volte e quest aggiungere a cerchi.

generale(Seifert & T.11 p 55)secondo il quale proceden
do in modo analogo a partire da un certo n° m di comple
si si ottiene ancora uncomplesso. Questo nuovo compless
si chiama il prodotto topologico dei dati. P.es. il
prodotto topologico di due segmenti è ~~xxxxx~~ top.te equi
(cerchio 0)
valente a un rettangolo-pensare p.es. a disporre i due
segmenti uno sull'asse x ,uno sull'asse y. Il prodotto
topologico di tre segmenti - unparallelep.;di unsegment
sup. lat. 2
e di una circonferenza è evid.te un cilindro,anzi,dicia
mo bene è equivalente a un cilindro,considerandolo qui
noi da un punto di vista astratto  Il prodotto
topologico di due cerchi è un toro (posso riferire i
punti di questi mediante parallelo e meridiano a merid
no e parallelo fisso) 

Ma tornando alle nostre considerazioni generali di
p.prec.,estendendo solo come fatto il concetto di K^na,non sia
mo ancora all'analogo di una superficie,il che esige che si
limiti in qualche modo la classe dei complessi.Per le sup.in
tuitive,limitandoci alle sup. chiuse ,è da tener conto della
circostanza che ogni punto possiede sulla superficie intorni
topologicamente equivalenti a un cerchio. Quindi se voglio
definire la suP come un K^2 ,la definirei come un K^2 omogeneo
(sempre nel caso chiuso),cioè tale appunto che sul K^2 ogni

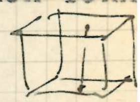
Per i pti nulli fanno l'intorno c



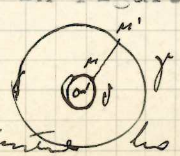
Il regione compresa fra due tori coassiali uno interno all'altro: si può chiamare toro a tre dimensioni punto possiede intorni top.te equivalenti a cerchi. Allora

& l'analogo a più dimensioni della sup. chiusa, cioè la varietà chiusa (chiusa già per df.) si può definire come un K^n (nel senso generale prima chiarito) (qui limitato al K^n connesso) **OMOGENEO** (tale cioè che sul K^n ogni punto ha intorni top.te eq.ti a totalità dei punti di una ipersfera a n dimensioni (Per varietà aperte, v. il rinvio in Seifert p 237, 324. Qui non ne parliamo)

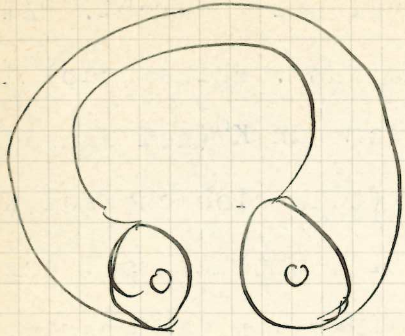
[Si trovano altre df.ni di varietà chiuse che non fanno capo alla omogeneità (p es Seifert p 236)

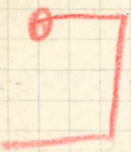


&& Esempio: in ordine di idee analogo a cose più volte viste, cito: i punti di un cubo (di S_3) dove si identifichino punti di facce opposte, e precisamente punti di una && perp. alle facce. Qui i "punti" sono i punti interni, e in più le coppie identificate sulle facce; la nozione di vicinanza è quella per punti di spazio n.co per punti interni, e la stessa applicata all'uno o all'altro per i punti identificati. Che sia un K^n si vede decomponendolo ed è omogeneo, come si vede subito] Ecco un esempio di varietà chiusa a tre dimensioni. Si vede facilmente che equivale top.te alla regione sferiche interna a due tori generati da due cerchi come in figura, , dove si identifichino punti come in figura.



(Tagliando le figure lungo superfici meridiane e distendendo ho regioni tra due cilindri coassiali, che colloco p.es. a assi verticale: ho le

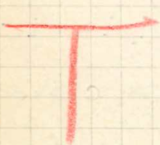


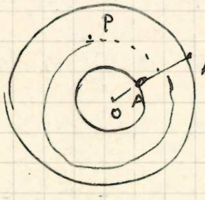


Dal parallelepipedo con D^{ue} ho il prodotto di 3 segmenti ognuno con estremi D^{e} ≡ cerchi

Questa dim. colle successive rende inutile le prove

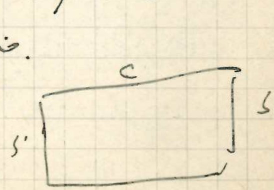
C. S.





1° modo esse è il prodotto di un cilindro per il segmento AA' a estremi identificati: e questo è ancora un cilindro.

2° modo. aprire lungo AA': viene rettangolo



$a\, b\, a^{-1}\, b^{-1}$

identificazioni &1) proveniente dal taglio che fa associa re punti delle basi superiore e inferiore su una stessa v verticale;2) quella proveniente dalla identificazione ini ziale che fa identificare punti posti su una perp. all' asse dei cilindri(da una stessa parte)Taglio finalmente i il cilindro cilindro lungo una sezione meridiana e lo distendo& in un prisma;ho la identificazione proveniehte dal nuovo taglio che insieme con le due preesistenti dà appunto le identificazioni tra facce ~~&&&&p&~~ opposte del parallelepi pedo. Si otterebbe ancora la stessa varietà chiusa come prodotto topologico di tre cerchi; invero ogni pun to del toro tridimensionale ,conducendo per esso il "para llelo" di vede che provi ne da un punto di questo paral che si può sostituire con parallelo fino a punti di [illegible] lelo e da un punto della sezione dip 479,corono circola re con identificazione dei due cerchi (punti su uno stes so raggio);il toro trid. è ~~&&&&&&&&&&&&&&&~~ parci: prodotto topologico di un cerchio per tale regione;ma tale regione come subito si vede equivale a un toro ordinario, o prodotto di due cerchi;quindi il toro trid/le è prodotto di tre cerchi.

Ai complessi K^n nel significato più largo ora esposto si estendono i gruppi di omologia con le loro conse guenze,quindi n.i del Betti,coefficienti di torsione,ranghi di connessione. E sono invarianti topologici. Ma il fatt nuovo a cui voglio accennare riguarda le varietà, chiuse e più precisamente orientabili. Ha senso parlarne perchè risulta (Seifert e T.ll lez I p. [illegible]) che ~~esse~~ le varietà chiuse def.ta a p. 479 sono &&&&&&&&& top.te equivalenti a complessi regolari, cosicchè si può parlare di orientabilità (p. 519) Ebbene vale per esse un teorema di dualità: per una varietà chiusa orientabile M^n :

1) il n° dei Betti b^k coincide col n° b^{n-k} (invece se non orientabili) ~~(k = 0, 1, ...n)~~

2) i coeff di torsione per la dim . k coincidono con quelli per la dim $n-k-1$

3) (anche se la M^n non è orientabile) coincidono fra loro i ranghi di connessione r^k e r^{n-k}. (Seif.-Thr. p. 245-6)

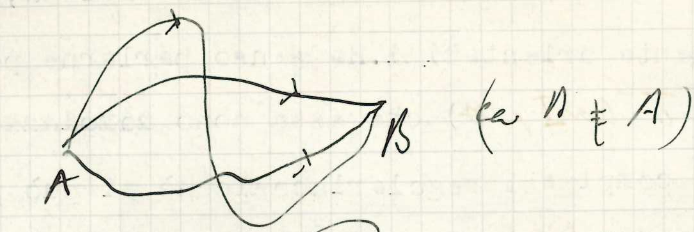
Senza nemmeno accennare alla dm. ne osserviamo soltanto

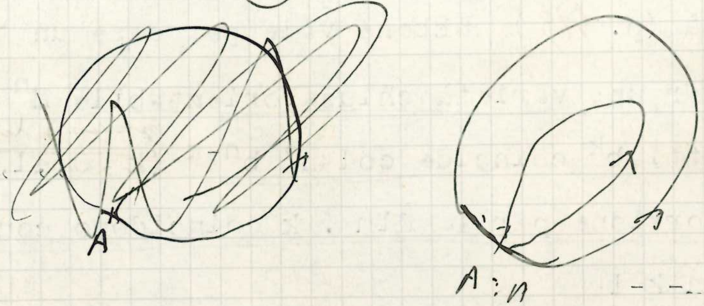
a) Per 1) sappiamo già per un complesso connesso regolare orientabile $b^o = 1$ (p.331) e $b^n = 1$ (p.421) il che è d'accordo con 1)

b) Per un tale complesso sappiamo (p.433) che mancano i coefficienti di torsione c^{n-1}. Per 2) è come dire i c^o, e ciò è vero (p.331)

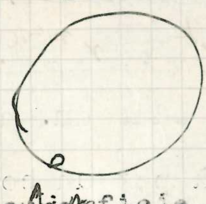
c) per un tale cplesso orientabile o no sappiamo che $r^o = 1$ (p 398) e anche che $r^n = 1$ (p 423) il che è d'accordo con 3)

d) Aggiungiamo ora che per n dispari la caratteristica di una M^n chiusa è sempre zero. (ib. 286). La verifica p. es. per $n = 3$ dunque $-N = \cancel{q^0 - q^1 + q^2}\ r^0 - r^1 + r^2 - r^3$ ma $r^0 = r^3, r^1 = r^2$





~~ce~~



qui

Stando al caso delle superficie, alla base della questione sta un gruppo, il gruppo fondamentale a cui si arriva così. Per due curve chiuse AA, siano c e c' chiamiamo loro prodotto cc' la curva chiusa AA che si ottiene percorrendo c e poi c'. In questo prodotto la curva chiusa ridotta al punto A funge da unità (percorrere c da A in A e poi stare in A equivale a percorrere la c da A in A). ~~Come in~~ ~~vorremo considerare~~ Formo allora un gruppo così come suoi elementi prendo le classi di curve chiuse AA fra loro omotope; prodotto di due tali el.ti, classi (c) e (c') prendo la classe (cc') effettivamente tutta formata da curve omotope. Come classe unità prendo (1) quella che contiene le curve AA omotope a zero. L'esistenza dell'inverso si ha così. Per una curva AA c definiamo la c^{-1} come la stessa curva percorsa in senso inverso. Allora la classe prodotto (cc^{-1}) è quella che contiene la curva c seguita dalla curva c^{-1}, la quale curva è omotopa a zero (p 529) Si ha così il gruppo fondamentale. Si osservi subito che non è generalmente abeliano, come poi vedremo meglio (p. 591) ~~però~~ (p. 15) ~~gruppo dei cammini~~. Si vede facilmente che cambiando il pt A il gr. fond. della superf.^e invariato (cioè isomorfo a sè stesso; ...

in base a 3) (Conviene servirsi delle r anzichè delle b per includere il caso non orientabile, in cui appunto vale 3)).

GRUPPO DEI CAMMINI (GRUPPO FONDAMENTALE). -

Partiamo dal concetto intuitivo di una ~~curva~~ arco di curva AB orientato che si deforma in modo continuo continuando a possedere gli estremi A, B, e ~~restando~~ su una superficie. P. es. che pensiamo p es) - il caso di B = A. curva chiusa (orientata) e che deformiamo per continuità p es in un piano, senza escludere che in stadi intermedi (o anche al principio e alla fine la curva possa incrociarsi). E' come un filo chiuso materiale che materialmente deformiamo nel piano e che possiamo far incrociare.

Due curve AB, ottenute sulla sup. a estremi fissi per deformazione continua si dicono omotope

In particolare, nel caso di una curva chiusa AA, può darsi che essa sia -restando sempre sulla superficie, deformabile per continuità a una ~~ojes~~ linea ridotta al solo punto A. Allora quella linea si dice omotopa a zero.

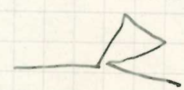
Fissato il punto A sulla superfcie si possono studiare le varie classi di curve chiuse uscenti da A e deformabili una nell'altra; le curve di una stessa classe sono omotope (con punto A fisso). Più in generale, anzichè superficie si potrebbe prendere un complesso. La questione si studia in modo (connesso) particolarmente semplice sostituendo alla superficie una sua

triangolazione. ~~Ciò intuitivamente questo si può pensare tant~~
luogo
~~[illegible]~~ e considerando, in ~~[illegible]~~ delle curve di prima dei cammi
(cammini nel senso preciso di p. 329, che [illegible] in detto verso
ni di spigoli che partano da un vertice A e vi ritornino. Ci
limitiamo a considerare cammini~~&~~ di spigoli e quindi non si
può pensare di trasformarli per continuità. Vuol dire che li c
in condizioni che tengano conto di ciò e quindi
sideriamo equivalenti ~~nelle condizioni che dirò adesso~~.

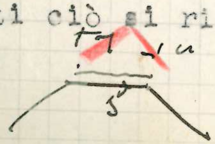
Il risultato è poi che come si proverebbe il nuovo grupp
a cui arriviamo nel caso di un K^2 e che chiameremo ~~chiamiamo~~ gruppo
dei cammini coincide (Seifert p 160) col relativo gruppo dei
fondamentale
cammini (tutto ciò più in generale per K^n). I cammini di spi
goli li consideriamo uscenti da un vertice fisso A e li con
sideriamo equivalenti in queste condizioni:

1) in un dato cammino, se ~~[illegible]~~ vi compaiono ~~[illegible]~~ consecu
tivamente due spigoli che siano uno stesso spigolo percorso
nei due sensi, li si possono sopprimere. E viceversa

2) Se in un cammino ~~[illegible]~~ compare in un certo momebto il
contorno (intero) di un T^2 percorso in un verso qualunque,
sopprimerlo ~~&~~. E viceversa.



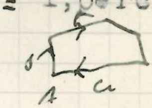
Quindi in particolare è lecito il seguente cambiamento;
se in un cammino compare lo spigolo s che fa parte di un T^2
sostituirlo con gli altri due lati presi opportunamente. In
fatti ciò si riduce ~~a~~ ai seguenti passaggi



aggiungi $s^{-1}tu$; sopprimi le coppie ss^{-1}.

Quindi anche intuitivamente quest'ultima considerazione fa capire bene come la nozione di equivalenza che adottiamo possa sostituire le trasfromazioni per continuità che avevamo prima ~~(pensare p es a una triangolazione molto fitta)~~

Comunque, prendiamo per un K^2 connesso (superficie) tale definizione di <u>cammini chiusi di spigoli equivalenti</u>. Consideriamo i cammini chiusi uscenti da un vertice A, possiamo riunirli in classi di cammini equivalenti, e mediante queste definire un gruppo, il <u>gruppo dei cammini relativi al K^2</u>, con considerazioni perfettamente analoghe a quelle di p 484 Qui l'elemento unità è il cammino costituito dal solo punto A (o se vogliamo un segmento s uscente da A seguito da s^{-1}) Cammini inversi. Si vede anche qui bene che $c\,c^{-1} = 1$, perchè se $c = s\,t \dots u$ sarà $c^{-1} = u^{-1} \dots t^{-1} s^{-1}$ e quindi $c\,c^{-1} = s \dots \underline{u\,u^{-1}} \dots s^{-1}$



Ma posso sopprimere $u\,u^{-1}$ e poi ecc ecc.

Ed an.te quanto detto a p. 484 si vedrebbe che tale gruppo è, a meno di isomorfismi, indipendente dal vertice scelto A.

Ora il gruppo $\mathcal{G}$ dei cammini si definisce in modo semplice mediante generatrici e relazioni fondamentali, come spiego. Considerismo i T^1 del K^2, con dati orientamenti e siano $a_1\, a_2 \dots a_l$.

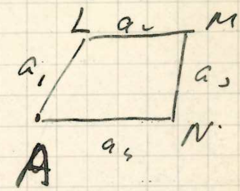
Poi, siccome il complesso è connesso, possiamo, forse anche in più modi formare un cammino di spigoli da A a ogni vertice; formiamolo in modo determinato (comunque scelto per ogni vertice).

← cammini 1 ridotti

Abbiamo così per ogni vertice del complesso un cammino ausiliario che permette di raggiungerlo da A. Allora
in particolare per A prendiamo come ausiliario il

ogni spigolo a_i del complesso dà luogo in modo ben determinato a un cammino chiuso AA, lo chiameremo il cammino A_i relativo a tale spigolo così: si parte da A diretti al primo vertice di a_i lungo il cammino ausiliario, poi segue a_i e poi si torna ad A per il cammino ausiliario che congiunge A al secondo vertice di a_i percorso naturalmente in senso inverso. Questo A_i appare così come formato dalla successione di spigoli che ho indicata. Scrivo brevemente (1) $A_i = \varphi_i(a_1 a_2 \ldots)$ nel senso che A_i è la successione di spigoli che ho spiegato prima, già ben definita per ogni valore dell'indice i. ~~dalla conoscenza dello spigolo a_i~~

Ora intanto le A_i sono generatrici del gruppo dei cammini. Infatti se per fissare le idee prendo un cammino chiuso che sia (v. figura)



Ho. $a_1 a_2 a_3 a_4 = A_1 A_2 A_3 A_4$

Infatti nel 1° membro p. es. A_1 è:

$A_1 = (\cancel{\text{camm. aus.}}\ A)\ a_1\ (\text{camm. aus. } L)^{-1}$

$A_2 = (\ldots\ L)\ a_2\ (\ldots\ M)^{-1}$

$A_3 = (\ldots\ M)\ a_3\ (\ldots\ N)^{-1}$

$A_4 = (\ldots\ N)\ a_4\ (\ldots\ A)^{-1}$

e facendo il prodotto $A_1 A_2 A_3 A_4 = (\cancel{\text{camm. aus. }} A)\ a_1 a_2 a_3 a_4\ (\cancel{\text{camm. } A})^{-1}$

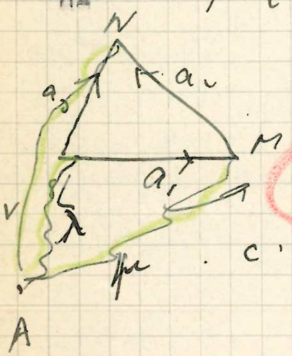
Abbiamo così per G un sistema di elementi generatori. Ora questi (Seifert p 166), come si vede soddisfano alle seguenti relazioni :

a) un primo tipo si deduce dalle (1) ed è

$$A_i = \varphi_i(A_1, A_2 \dots)$$

(sostituendo nei secondi membri le A alle a)

b) un secondo tipo è questo. Per ogni triangolo del K^2 ~~che abbia p.es. come lati~~ il cui contorno, visitato verso dx p.es. $a_1\, a_2\, a_3^{-1}$, si ha una relazione $A_1 A_2 A_3^{-1} = 1$ Verifico p es questo fatto.



~~Ho cammini $a_1 a_2 a_3^{-1}$ eq. v. (v. fig.) cammini. e un punto da A ma non occorre p. 381~~
~~$\lambda a_1 \mu \; a_1(\mu\mu^{-1}) a_2 (\nu\nu^{-1}) a_3$ 1) di p. 381 1) di p. 381~~
~~$= a_1 \mu \mu^{-1} a_2 \nu \nu^{-1} a_3^{-1}$~~
~~Prendo~~

(v. figura). ~~Ho~~ Ho cammino chiuso AA dato da

$\lambda a_1 a_2 a_3^{-1} \lambda^{-1}$ è equivalente per 2) p. 381 a $\lambda\lambda^{-1} = 1$ e per 1) cioè al cammino nullo 1.

Ma è anche equivalente sempre per 1) a

$$\lambda a_1 \mu \mu^{-1} a_2 \nu \nu^{-1} a_3^{-1} \lambda^{-1} = A_1 A_2 A_3^{-1}$$

Quindi $\underline{A_1 A_2 A_3^{-1} = 1}$

~~Ma camm. aug. 0~~ 590

Ebbene, le relazioni nominate risultano un sistema di relazioni fondamentali.

Risulta così un procedimento per avere il gruppo dei cammini di una qualunque superficie (pensiamo senz'altro chiusa) attraverso la sua triangolazione. Se questa ha molti vertici ecc. restano molte generatrici e relazioni. Ma i risultati hanno una portata più generale, perchè quanto detto continua a valere se più generalmente la superficie chiusa si decompone (come a p 501–) in poligoni top equivalenti a cerchi, e poi anche per i sistemi H di poligoni di p. 495. Quindi se prendiamo p.es. la sfera con p manici, possiamo pensare al suo poligono fond.le coi 2p lati

$a_1 \; b_1 \; - - - \; a_p \; b_p$ Qui abbiamo un solo vertice A, il cui cammino ausiliario si riduce a uno. vi alti parl ogni l. coppia A con A Quindi le (1) si riducono alle $A_i = A_i$ e non dànno nulla. Si ha poi che

$a_1 \; b_1 \; a_1^{-1} \; b_1^{-1} \; - - -$ sono lati dell'unico poligono che interviene. In definitiva si ha il gruppo fond.le della sfera con p manici: è il gruppo con generatrici $A_1 B_1 \; . \; A_p B_p$

(2p generatrici)

e l'unica relazione fond.le $A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \ldots A_p B_p A_p^{-1} B_p^{-1} = 1$

Per $p = 1$ la relazione è $A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} = 1$ o

$$A_1 B_1 = B_1 A_1$$

ho un gruppo con 2 gen.ri permutabili: cioè abbiamo: il gruppo abeliano libero con 2 gen.ri

$\perp$ cioè lo stesso A_i e ad

[illegible]

$$A_i A_j A_i^{-1} A_j^{-1} = 1$$

Invece per p maggiore di uno la unica relazione scritta non dà più la permutabilità delle generatrici, cosicchè non si ha più un gruppo abeliano. E per il caso ~~&&&&&~~ non orientabile si ha ungruppo con p generatrici $A_1 \dots A_p$ e l'unica relazione $A_1^2 A_2^2 \dots A_p^2 = 1$. Per le sup. chiuse allora in 24. vengono da sfere (G:1) e piani proiettivi

Finalmente, enuncio che (per una sup e più gen.te per un K^n) passa una stretta relazione tra il gruppo fond e il gruppo di omologia di dimensione, Ω^1; questo coincide congruppo fondamentale reso abeliano. Al qual proposito mi limito a due oss.ni:

1) per il toro, dove come detto il G fond è già abeliano, dovrà coincidere con l'Ω^1. E effettiavemnete (p. 345) per il toro si è trovato che $b^1 = 2$, ~~cioè~~ ~~III~~ e più precis ibid. il suo Ω^1 era proprio il gruppo abeliano libero con due generatrici come si trovato per il gruppo fond.

2) Se due cammini sono equivalenti nel senso di p. 481 sono anche omolghi, considerati come catene. Infatti le trasformazioni di equivalenza considerate si ottengono attraverso trefbiel.ri 1) che evidentemente dà omologia (sommo e sottraggo un T^1) e 2) che id id (perchè aggiungo il contorno di un trangolo, cioè un ~~M~~ $C^1 \sim 0$). Pensando a sup diciamo il fatto analogo; linee chiuse omotope sono omologhe. Ma non ~~&&&&&&&&&~~ necessariamente viceversa. In altre

non più d'ordine = 1 appunto la rel. poi

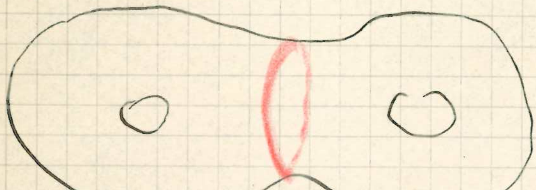
$A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} A_2 B_2 A_2^{-1} B_2^{-1} = 1$. In altre parole

la $A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} = 1$ non è vera nella

diventa vera nel lo sdoppiato cioè in Ω!

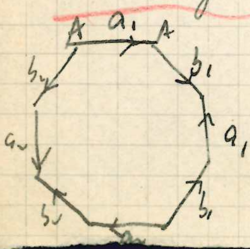
((Dove es.ni sono più le stesse cose. p. 257)) parole se un cammino è omotopo a zero, esso è sempre ~~&&~~ (come catena) omologo a zero, cioè contornante; Ma non viceversa, cioè ci sono catene contornanti che non sono riprendendo il linguaggio iniziale riducibili per continuità a un punto. Sul toro non ~~&&&&trova~~ sto a cercarne esempi, perchè abbiamo già ~~&&&&&&~~ già constatato la coincidenza del gruppo fond., formato dalle classi di omotopia, con quello formato ~~dalle~~ dalle classi di omologoia (Tanto meno sulla sfera, dove p 495 per $p = 0$, il G è un le generatori cioè ridotto all'el.to unità, e Ω' ~~......~~ ($N = -2$, $b^0 - b^1 + b^2 = 2$ cioè $1 - b^1 + 1 = 2$; $b^1 = 0$ manca i C^1; $\Omega' = 1$)

Invece passando alla sfera con p ~~&&&&~~ 2 manici, si vede facilmente un esempio di linea omologa a zero, e non omotopa. Prendo la ciambella con due buchi e la linea che in figura "separa i due buchi uno dall'altro".



Essa è contornante delle sup. di toro bucato a sinistra ma è evidente che non posso ridurla per def.ne continua a un punto.

In modo più preciso nel poligono fond. prendo



il cammino AA dato da $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$, come catena è $a_1 + b_1 - a_1 - b_1 = 0$ cioè catena nulle $U = 0$ e quindi anche ~ 0; ma non è omotopo a zero poichè $A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1}$

Da p. 203

Per non interrompere l'esposizione successiva, premettiamo qualche nozione sulla teoria dei divisori elementari di una matrice, insistendo soltanto sul punto di vista che qui ci interesserà.- E' una teoria che si presenta formalmente nello stesso modo, ma in campi diversi. Considero una matrice

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\beta 1} & a_{\beta 2} & \dots & a_{\beta\alpha} \end{vmatrix}$$

e mi fisso sul caso, che qui ci interesserà più da vicino, in cui i suoi elementi sono dei numeri interi. Considereremo allora, quando in seguito parleremo di divisibilità, la ordinaria divisibilità per un numero intero. Ma si potrebbero invece assumere per elementi a_{ij} dei polinomi in una variabile x, e parlare allora di divisibilità per un ~~ordinario~~ polinomio nella stessa variabile; in particolare si potrebbero considerare gli elementi polinomi lineari nella variabile x e si avrebbe così, se la matrice è quadrata, la teoria dei divisori elementari, quale compare nella classificazione dei fasci di quadriche, in un iperspazio e delle omografie tra spazi sovrapposti (cfr corso 1934-35). Stiamo, comunque, al caso della ordinaria divisibilità.

501

Per le applicazioni che dovremo farne, a noi interessa soprattutto questo teorema: Sia c la caratteristica della matrice M è possibile ~~da~~, operando sulla M con trasformazioni elementari (cioè sommare o sottrarre linee parallele, cambiare di segno gli elementi di una

Definire subito le trsfni elementari. Poi definire i <u>divisori elementari</u> della M così: dalla M estraggo tutti i det
Detti anche <u>fattori invarianti</u> (terminologia un po' incerta)
ti di ordine p (basta limitarsi a fare per p $\leq$ e; se no vengono tutti nulli) Sono intieri positivi o negativi, per ogni p considero il loro MCD D_p (positivo). Pensando allo sviluppo di un det. p secondo una sua linea, esso è sempre divisibile per D_{p-1}, cosicchè D_p è divisibile per D_{p-1}; si può porre

(df. d_p) $$D_p = d_p D_{p-1}$$ nat.te solo per $p = 2, \ldots$

si pone invece $d_1 = D_1$

le quantità $d_1 \ldots d_p$ si chiamano (Weierstrass) divisori elementari della matrice M

Ebbene, <u>caratteristica e divisori elementari di una matrice sono inv.ti rispetto alle traf.ni elementari</u>. Se ci si limita a fare cambi di segno, e ~~scambi di parallele~~, l'insieme dei det. p è a meno di segni invariato, cosicchè il teorema è evidente. Resta a vedere cosa avviene sommando a una linea una paral lela (~~o sottraendole~~): i det p della nuova matrice sono allora somme di prec.ti. Quindi se quelli erano tutti divisibili per D_p, lo sono anche i nuovi, cioè la nuova D_p sia D'_p è divisibile per la vecchia. E scambiando come è lecito la parte delle due matrici, anche viceversa, cosicchè $D_p = D'_p$. Lo stesso rag.to prova l'eguaglianza delle caratteristiche.

Per sottrarre basta sommare dopo cambiato segno.

(1) due basta dire: <u>cambiar segno, sommare e sottrarre</u>.

X Anche scambiare le parallele si possono ... porre

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & & \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11}+a_{21}, & a_{12} & \cdots \\ a_{21}, & -a_{11} & \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11}+a_{21} & -a_{11} \\ a_{21} & a_{11} \end{vmatrix}$$

linea (orizzontale o verticale), scambio di due linee parallele) trasformarla in una matrice M', con lo stesso n° di linee e di colonne di tipo particolarmente semplice (forma diagonale ~~[illegible]~~), dove tutti gli elementi sono nulli, salvo alcuni e precisamente i primi c situati sulla diagonale che parte dal posto a_{11}, i quali sono numeri intieri, positivi, ciascuno dei quali ~~ammette~~ è ~~per~~ divisore del successivo; ciò lungo la diagonale considerata e fino al c^esimo^ ~~un certo~~ suo elemento, al di là del quale se vi sono ancora elementi lungo la diagonale, sono tutti nulli ~~possono risultare zero anche gli elementi della diagonale stessa~~. Inoltre per una data M, la corrispondente matrice sotto forma diagonale è unica. ~~Finalmente, se c è la caratteristica di M, sono precisamente i primi c elementi della diagonale considerata~~ Nella dm.ne posso supporre la c non nulla; se no ho una matrice a el.ti tutti nulli: essa ha già la forma diagonale; posso aggiungere riche ecc. l matrice non cambia più

Sia dunque c positivo; vuol dire che vi è almeno una a non nulla: mediante scambi di linee e colonne la porto al posto 11, e la chiamo ancora a_{11}. Posso supporlo > 0 mediante cambio di segno 1^a^ linea. Ora cerco di ridurmi mediante trasformazioni elementari al caso in cui tutte le a della prima linea e della prima colonna sono divisibili per a_{11}. Se lo sono già tanto meglio; se no, se trovo p es nella prima linea a_{1k} non divisibile per a_{11}, ma che lasci resto $r_{1k} \neq 0$ ($a_{1k} = Na_{11} + a_{1k}$), con ripetute sottrazioni della prima colonna dalla k-esima (oppure addizioni se N è negativo), che sono sempre trsfni elementari mi riduco al caso in cui a_{1k} è sostituito da r_{1k} $(\neq 0)$, e poi scambiando la prima colonna con la stessa k-esima faccio comparire questo r_{1k} $(\neq 0)$ al posto di a_{11} e lo chiamo ancora a_{11}. Se allora è realizzata la condizione richiesta (prima linea e prima colonna divisibili per il nuovo a_{11}) tanto meglio; se no ripeto il procedimento. In ogni successiva applicazione a_{11} è sostituito da un numero intero positivo più piccolo. Quindi il procedimento ha certo un termine, perchè se non avremo ottenuto prima il risultato voluto, arriveremo a sostituire una certa a_{11} eguale a uno e allora la condizione voluta è certo realizzata. Dopo di chè ~~xxxxxx~~ sarà per ogni k,

$a_{1k} = Na_{11}$ cosicchè sottraendo dalla k-esima colonna k volte la prima, e aggiungendola, porto tutti gli a_{1k} distinti da a_{11} a essere eguali a zero. E ~~xxxx~~ dopo faccio lo stesso per tutti gli el.ti della prima colonna; nè questo (da ogni orizzontale successiva alla prima sottrarre la prima oppure aggiungerla) guasta ilrisultato già raggiunto per la prima). QQuindi intanto con trsf.ni elementari ottengo che fra gliel.ti della prima linea e colonna a_{11} sia un n° positivo non nullo, e sia il solo; tutti gli altri sono nulli. Posso anzi ottenere ancora qualchessa di più, e cioè che, oltre al valere la p.tà detta, tutti gli altri a_{ik} della M siano divisibili per a_{11}. Se infatti uno non lo è, p.es. a_{ik} gggiunge la sua orizzontale alla prima -senza preoccuparmi che guasto il risultato già ottenuto- e trovo in prima orizzontale un el.to non divisibile per a_{11}. Allora applico il procedimento prec.te con cui a_{11} viene sostituito da un n° più basso e continuo a applicarlo fino a avere dinuovo resi nulli 1.a linea e colonna. Se allora tutti gli el.ti di M sono divisibili per la a_{11} che così di viene a adottare tanto meglio. Se no ricomincio e anche questa volta il processo terminerà perchè ogni volta si viene a impiccolire a_{11}, ~~xxxxxx~~senza che mai si an nulli, cosicchè se ilrisultato non si sarà raggiunto prima, in un certo momento a_{11} diventerà eguale a uno e allora tutto andrà bene. Quindi in uncerto momento ~~lo~~ avrò le edzioni dette per le prime linea e colonna, e tutti gli el.ti della matrice divisibili per a_{11}.

Ottenuto questo, procedo nello stesso modo sulla matrice M' ~~che~~ si ottiene dalla M cancellandovi le prime linea e colonna (se questa non ha già tutti gli el.ti nulli). Allora è vero che si devonoeseguire trafni elri su di essa, e non su M, p.es. scambiare due sue linee ecc. ma questi scambi si possono immaginare estesi alla M, facendovi intervenire anche la prima linea e colonna di M, dove tanto

$$\begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & b_{cc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{vmatrix}$$

tutti gli el.ti sono nulli. Rendo così nella seconda linea e colonna il solo a_{22} non nullo, e tutti gli altri el.ti divisibili per esso. E' essenziale notare che in queste trsf.ni elementari che si fanno subire alla M', non si perde la proprietà che tutti gli el.ti erano divisibili per a_{11} : essi lo restano perchè cambiando di segno, o sommando ecc. si ha sempre ancora a fare con n.i divisibili per a_{11} . Anche lo stesso a_{22}, in particolare èdivisibile per a_{11} .

E così continuo fino a che posso; cioè fino a quando dovrei passare a ridurre una matrice che ha già i suoi elementi tutti nulli, e allora si è effettivamente ottenuta la riduzione della matrice a forma diagonale; oppure fino a quando la diagonale inquestione ~~&&&&&&&&&&&&&&~~ ha incontrato l'ultima orizzontale o verticale della matrice. Ma anche allora tutti gli altri el.ti sono già nulli. o si possono rendere [illegible] alle divisibili

Così, colle trsfni elementari considerate abbiamo ridotto la M alla forma diagonale, E' da osservare che gli el.ti non nulli della diagonale sono precisamente in n.° di c(c era la caratteristica& della M, perchè le trsfni elementari considerate non alterano la caratt. della matrice (p. 502) e la nuova matrice sotto forma diagonale ha precisamente una caratt. eguale al n° dei suoi el.ti non nulli.

Resta a provare l'unicità della forma diagonale. Ora, ottenutane una, M', su di essa con le not. di p 502 si ha evidente

~~$\mathcal{D}_1 = b_{11}, \mathcal{D}_2 = b_{22}, \ldots \mathcal{D}_c = b_{cc}$.~~

$\mathcal{D}_c = b_{11} b_{22} \ldots b_{cc}$ (unico det$_p$ $\neq 0$)

$\mathcal{D}_{c-1} = b_{11} \ldots b_{c-1,c-1}$ (minimo fra i det$_p$ $\neq 0$; ogni altro è divisibile per esso poichè se manca b_{ii} invece di b_{cc}, b_{ii}, il nuovo ha b_{cc} in luogo di b_{ii} e b_{cc} è diviso da b_{ii})

. . .

e così

$\mathcal{D}_{c-2} = b_{11} \ldots b_{c-2,c-2}$

$\mathcal{D}_1 = b_{11}$.

Ma per l'invariaznza delle D rispetto alle trsf.ni elementari (p. 502) esse si possono già calcolare sulla M, e allora dopo questo calcolo eseguito sulla M, conosce già gli el.ti b_{ii} che sono dati dalle

$$b_{11} = \mathcal{D}_1 ;\ b_{22} = \frac{\mathcal{D}_2}{\mathcal{D}_1} , \ldots b_{pp} = \frac{\mathcal{D}_p}{\mathcal{D}_{p-1}} \qquad b_{cc} = \frac{\mathcal{D}_c}{\mathcal{D}_{c-1}}$$

cioè (Def. divisori el.ri p. 502)

$$b_{11} = d_1 ;\ b_{22} = d_2 \ldots \quad b_{cc} = d_c .$$

<u>Gli el.ti della diagonale sono perciò univocamente determinati, e si chiamano coi divisori elementari della M.</u> Osservare coll'occasione che ne risulta (come visto per le b_{ii}) che <u>ogni divisore elementare è divisibile per il precedente</u>. (ordinati nell'ordine $d_1 d_2 \ldots d_c$)

Un altro modo sarebbe: cercare diret.te i D_i, d_i.
Qui l'ultima riga dà $D_1 = 1$. Poi poi i det. ci

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$ M.C.D. 1. Ora $D_2 = 1$.

~~Poi i D_3 sono~~ Poi i det.$_3$ invarianti (D_3) sono $2 \cdot 3 \cdot 5$, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5$ M.C.D. 2

Ora $d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 2$. Ha

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Esempio. Ridurre a forma diagonale la matrice

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ forma diagonale!

Con scambi di parallele si può invertire lungo la diag. considerata l'ordine delle k_i non nulle. e dunque alle [illegible] la nuova forma diagonale

$$\begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & & & \\ 0 & & k_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & k_r \end{vmatrix}$$

dove ogni k_i è diviso dalla successiva (cioè ognuna divisore della prec.^{te}) — Se

sempre i divisori el.^{ri} non [illegible]

6)

Si trattava ora di equivalenza di due matrici M e M' a mez
di trsf.ni elementari. Ma si possono definire degli altri e
criteri di <u>equivalenza</u> fra due matrici M,M',dimostrando poi
che la cd.ne nec e suff.te di equivalenza è ancora quella.
~~Consideriamo la matrice M come relativa a una sost. lineare~~
omogenea fra α variabili x e β variabili y,anche in n° di
verso,cioè

$$y_i = \sum_{h=1}^{\alpha} a_{ih} x_h \quad (i=1 \dots \beta)$$

Allora possiamo pensare di sottoporre le x per conto loro a
una sost. e precisamente unimodulare,e le y per conto loro a
una sost. anche unimodulare.Le x si trasformino così nelle x
x' e le y nelle y'.Ne nasce una sost. lineare dello stesso
tipo prima considerato ma ora fra le x' e le y' .Essa pure h
una matrice M'. Se definiamo come equivalenti due matrici M
e M' in queste condizioni,si prova che la cd. nec e suff è
sempre la coincidenza dei divisori elementari.
(Enz. Vahlen I B 2 p 583-84 ,4) e 6))

O p. 519

Naturalmente, nel nuovo ordine ($d_p, \dots d_2, d_1$) <u>ognuno è divisibile per il successivo</u>

sorvegliando

Per quanto a noi bastino le cose dette, aggiungo ancora a) cond nec e sufficiente perchè due matrici con lo stesso n di orizzontali e verticali siano <u>equivalenti</u> per trsf.ni elementari è che esse abbiano la stessa caratteristica e ~~la~~ gli stessi divisori elementari. Si vede subito, sostituendo a ciascuna delle due matrici la corrispondente matrice sotto forma diagonale . Le forme diagonali devono risultare identiche, quindi...

 # Anche qui si possono poi accennare alle equivalenze per trasf. elementari definite altre colle stesse d.ni

c) i risultati esposti # si estendono, nello stesso modo, ai casi accennati a p. 501#. Accenniamo p.es . -per matrici quadrate- al caso di el.ti polinomi lineari in una vriabile . Qui si possono definire delle <u>trasformazioni elementari</u> analoghe (con qualche differenza)(1) a quelle qui considerate, e quindi una equivalenza a meno di esse. Ora è notevole il fatto che tale nozione si ricopre con quella di <u>equivalenza</u> per trsf.ni di altro tipo.(2) Fissiamoci sul caso tipico seguente; che la matrice sia quella (quadrata, cioè det.te) che ~~egugliataaaaaaaaaa~~ si eguaglia a zero per cercare i punti uniti di una omografia tra spazi sovrapposti, p es. tra S_3 sovrapposti. Omografia

$$\rho x'_1 = a_{11} x_1 + \dots + a_{14} x_4$$

$$\rho x'_4 = a_{41} x_1 + \dots + a_{44} x_4$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & \\ & & & a_{44}-\lambda \end{vmatrix}$$

[(2) Bôcher l.c. 25-6: per a_{ik} = pol.i in λ (matrici quadrate) $A \equiv A'$ vuol dire $A' = MAN$ con M, N con det.e $\neq 0$ e el.ti costanti.]

Ebbene , qui si troverebbe che la <u>equivalenza</u> nel senso prima considerato (cioè eguaglianza dei divisori elementari; la caratt.ca che interessa è qui sempre 4) dà una cond nec e suff.te perchè due omografie siano <u>proiettivamente equivalenti</u> (spiegare; p es generali, o omologie, omografie assiali o biassiali, ecc.).

---

(1) Cfr per. Bôcher . Introd. to higher Algebra. cap. XX, XXII. La differenza è che qui (pol.i) tra le trasf.ni el.ri è da includere la moltiplicazione ~~[illegible]~~ d'una linea per una cost.; e che sommando una parallela, la si può moltiplicare per un pol.o in λ.

Come si dirà a p. 228, un tale gruppo (che vale per il più generale gruppo abeliano) si chiama <u>prodotto</u> <u>diretto</u> dei G ciclici generati da $A_1 \dots A_m, \dots A_n$

(parole ridotte ecc)

Risolviamo così il problema delle parole nel G abeliano considerato che è poi (come si vede p.) il più generale gruppo abeliano

(202) Si tratta dunque di provare che nel gruppo abeliano libero con gen.ci $A_1, \dots A_\alpha$, nessuna parola $A_1^{p_1} \dots A_\alpha^{p_\alpha}$ si riduce a 1, a meno che gli esp.ti siano tutti nulli. Dimostriamo un risultato un pò più generake, che include anche quanto detto a p 199 sui gruppi finiti e anche altri casi. Considero un gruppo abeliano con generatrici

$$A_1, \dots A_m, A_{m+1}, \dots A_n$$

di cui suppongo che le relazioni fond.li siano quelle che esprimono la permutabilità, e inoltre quelle che esprimono che alcune (le ultime) generatrici sono periodiche, con dati periodi. Secondochè queste mancano, o sono tutte, si hanno i due casi. Saranno dunque quelle rel. fond.li

$$(1) \qquad A_i^{e_i} = 1 \qquad (i = m+1, \dots n)$$

Dimostro che una parola in tale gruppo G (definito dalle rel. fond. dette)

$$A_1^{p_1} \dots A_m^{p_m} A_{m+1}^{p_{m+1}} \dots A_n^{p_n}$$

dove gli espo.ti $p_1 \dots p_m$ sono qualunque, e gli esponenti $p_{m+1} \dots p_n$ sono tali che

$$0 \leq p_i \leq e_i - 1.$$

non può ridursi a 1, salvo chè

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0.$$

Perciò, considero ~~dalla~~ anzichè un gruppo astratto, un gruppo G' di sost. lineari con n variabili, generato dalle

Non sono esposto!

$$x'_i = x_i + a_i \qquad (a_i = \text{cost.}^{\text{e}} \neq 0 \;;\; i = 1 \dots m)$$
$$x'_j = \omega_j x_j \qquad (\omega_j^{e_j} = 1 \text{ rad. prim.} \;;\; j = m+1 \dots n)$$

(estende il gruppo di traslazioni di p. 11) Interpretando come sost. A_i quella che opera come la prec.te sulla variabile x_i, e come l'identità sulle altre, le $A_1, \dots A_n$ sono evidentemente generatrici del gruppo G'. Si vede subito che è abeliano, inoltre le A_i soddisfanno alle relazioni (1). Ora se da quelle assunte per il gruppo astratto di cui sopra seguisse come loro "applicazione" una relazione, essa dovrebbe valere anche per il gruppo G' concreto ora considerato: vi era invece il 1° membro de

$$A_1^{p_1} \dots A_m^{p_m} A_{m+1}^{p_{m+1}} \dots A_n^{p_n} = 1$$

$$\begin{cases} x'_i = x_i + p_i a_i \\ x'_j = \omega_j^{p_j} x_j \end{cases}$$

che non è l'id.tà salvo $p_i = p_j = 0$.

c. d. d.

da p. 514. Sia M una data matrice, p. es. la data, con β orizzontali e α verticali. Diciamo è una matrice (β, α), ad el.ti a_{ij}. Se N è un'altra matrice, ad el.ti n_{ij}, posso definire il prodotto MN (che ha p. es. orizz. di M e verticali di N) con le matrici delle

$$l_{rt} = \sum_{s=1}^{\alpha} a_{rs}\, n_{st}.$$

Nat.te bisogna che il 1° indice di n vari tra 1 e α. cioè N deve essere una (α, γ). Il prodotto è allora una matrice (r tra 1 e β, t tra 1 e γ)) (β, γ).

Moltiplicando (β α) per (α γ) ho (β, γ).

Potrei moltiplicare (β α) a sinistra per una (δ, β). ottengo una (δ, α).

In particolare posso moltiplicare (con la legge suddetta) per matrici quadrate (a sin.) K_β e (a destra) H_α. (β β)(β α)(α α) il prodotto è una nuova matrice $M' = (\beta, \alpha)$. ($M' = K M H_\alpha$)

Ebbene diamo una nuova def. di equivalenza di due matrici M, M' chiamandole tali se

$$(1) \quad M' = K_\beta M H_\alpha$$

dove K e H sono determinanti (a el.ti interi) che valgono ±1. ~~E dimostriamo~~ Ebbene la nuova def. di equivalenza coincide con le prec.te. Dò una idea della dimostrazione.

1°. Valga (1). ~~le M e la MH hanno la stessa caratt~~ e gli stessi divisori el.ri (ogni. Allora diciamo K^{-1}, H^{-1} le matrici inverse di H e K (tali che $HH^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$ … etc.) ~~t~~ risulta anche

(1). $M = K^{-1} M' H^{-1}$ $\quad (K^{-1} = \pm 1,\ H^{-1} = \pm 1)$

Allora ~~caratt. e suoi divisori el.~~ i D_i relativi a M dividono anche M' e viceversa; quindi $D_i = D'_i$. Come dunque i divisori el.ri, e anche la caratt. di M e M'. Quindi essi sono equivalenti nel senso che ~~prima~~ precede.

2°. Siano M e M' eq.ti nel senso che precede ~~Quindi~~ cioè a meno di una successione di trasf.ni el.ri. Ognuna di quelle si può ridurre a moltiplicare a destra o a sinistra per ~~matrici~~ det.ti costanti: quindi il loro risultato, che porta a M', dà appunto $M' = KMH$.

Verifica p. es. quando in M cambio di segno la 1a colonna, vuol dire moltiplicare per $\begin{vmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{vmatrix}$
~~facendo Δ_t di segno $= -1$ per t~~
$= 1$ ~~per~~ t (va bene).

e passare da $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots \\ \end{vmatrix}$ a $\begin{vmatrix} a_{11} + a_{12}, & a_{12} \cdots \end{vmatrix}$

vuol dire moltiplicare per $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cdot & 0 & \cdot & \end{vmatrix}$.

Eccetera

(Tratt. in Bôcher cit. per det.ti polin.

Vedi Scorza Corpi numerici … Aleinat)

(da p. 514). Sia M una data matrice (α verticali, β orizzontali)
Posso definire il suo prodotto con le note leggi, per una matrice quadrata ~~HK~~ H, prendo il prodotto ~~M~~ MH dove
$H = |h_{ij}|$. el.^{to} del prodotto: e_{rt}

$$e_{rt} = \sum_{s=1}^{\alpha} a_{rs} h_{st}$$

(prodotto combinando gli orizz.li di M con le verticali di H)

Ana.te per K ~~definisco~~ ho $KM = |g_{rt}|$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \downarrow & \downarrow \\ k & a \end{bmatrix}.$$

$$g_{rt} = \sum_{s=1}^{\beta} k_{rs} a_{st}.$$

Le def. hanno senso se le h_{st} sono date per s (e quindi per essere matrici quadrate) tra 1 e α, e le k tra 1 e β.
Quindi è da intendersi che quelle matrici quadrate H e K sono risp. $H = H_\alpha$, $K = K_\beta$. Allora da M posso passare a ridotta a

$$M' = KMH$$

Qui indicando con (β, α) una matrice di β orizz. e α vert., ho M è (β, α), H è $(\alpha, \alpha$

383

La teoria risulta in modo un pò diverso secondochè si prendono le coord. omogenee o no. In ogni caso, in vista di sviluppare un determinato tipo di geometria, risp. proiettiva oppure affine, conviene liberare la nozione del punto da quella di una particolarizzazione del sistema di coordinate (quello che è dato inizialmente) definendo delle trsf.ni di coordinate. In geom. proi. -usandosi coord. proiettive, conviene definire come trsf.ne di coordinate la

$$y'_i = \sum_{r=1}^{n+1} a_{ir} y_r \qquad (i=1 \ldots n+1) \quad \text{(coord. proiettive)}$$

(y coord. omogenee) a determinante non nullo, e chiamare anche le y' coordinate del punto y. In geometria affine conviene invece definire come trsf.ni di coordinate quelle che in S2 S3 fanno passare da assi cartesiani a id id (sia pure con cambiamenti di unità, e si intende in assi anche obliqui) cioè le

$$x'_i = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} x_r + a_i \qquad (i=1 \ldots n)$$

sempre a determinante non nullo. Le x sono coord.te cartesiane

Non posso qui nemmeno accennare ai primi el.ti della geometria iperspaziale, salvo per quanto ci interessa. Dico solo due parole sugli spazi subordinati (l'analogo delle rette in S2, delle rette e piani in S3). Df di indipendenza lineare di h punti p es in coord. proi om.

$$y^{(1)} \; y^{(2)} \ldots \; y^{(h)}$$

.....Allora S_1 definito da due punti , S2 da tre lin ind. S_i da lin ind ecc. Si trova che uno S_m e uno S_n che abbiano come spazio congiungente S_c e inters. S_i dànno

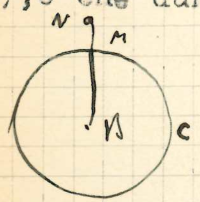
$$m+n = c+i$$

Si possono definire le operazioni di proi. e sezione, ecc.

da p 267 -che quelli doppi, <u>interni</u> al segmento AB sono evid&.te interni alla superficie in senso largo(possiamo dire che intorno a tali punti un pezzo di superficie [un foglio solo dunque] (si deforma per continuità in un cerchio, prendendo posizioni "successive"nello spazio ordinario), invece i punti A e B che abbiamo chiamato <u>singolari Non sono certamente interni in senso largo, pure essendolo in senso stretto</u> . La prima cosa è evidente, sia sula sfera incrociata, sia sul modello piano che le abbiamo sostituito a p 261.P.es. su quest'ultimo il punto B ha i suoi punti prossimi in parte sull'uno in parte sull'altro foglio dei due che ricoprono il dis (perchè basta prendere punti di AB prossimi a B sull'uno o sull'altro foglio).L'intorno di B sulla superficie è dunque una superficie a due fogli, cioè tale che unsuo punt generico nello spazio coincide sempre con un punto della superficie distinto da esso.Se voglio operare topologicamente nello spazio, la proprietà che punti coincida o si conserva e quindi non potrò mai ottenere un cerchio (semplice) Analogamente si ragiona sulla sfera incrociata, dove&&& dell' intorno di ~~B &&&&&&&&&&&&&&&~~ fanno parte punti di entrambe le falde che si tagliano lungo AB, quindi è una figura che presenta una linea di autointersezione, e una def.topologica dello spazio conserva tale linea doppia e non può

Segue 5 bis

quindi portare quell'intorno in uno circolare. Nonostante questo A e B sono veri e propri punti interni della superficie in senso stretto, cioè con def top limotata alla sup. un introno di B si riduce a un intorno circolare. Basta verificarlo per il disco piano di p 260, trattandosi di p.to interna ed essendo quel disco equivalente alla sfera incrociata. Ora là la cosa si vede così. Pensiamo p.es. che B sia il centro di un cerchio (interno a quello là considerato), e che dunque dovremo pensare come avente due fogli che

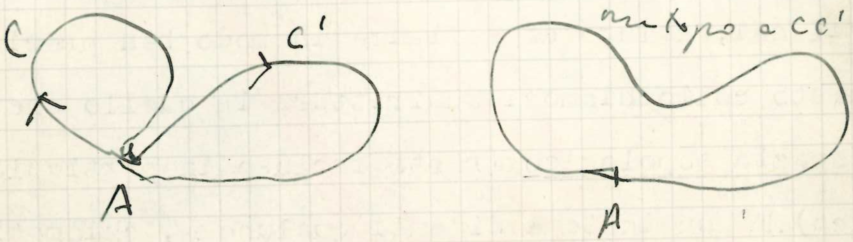


si incrociano lungo il raggio BM uscente da B. In sostanza è la stessa figura di là, salvo la differenza sostanziale che ora i due fogli sono connessi soltanto lungo il raggio BM (e non più secondo il contorno). Allora questo intorno delpunto B si può pensare come intorno del punto B su una riemanniana a due fogli, avente come punti di diramazione B e un altro punto N (sulla retta BM, oltre N, p.es. il punto all'infinito del piano di Gauss) Ora (v Fano, Complementi di geometria § 6) una tale superficie di Riemann (relativa p.es. alla fz a due valori $\sqrt{z}$) notoriamente si può trasformare top.te in una sfera, e allora il punto B col suo ibtorno considerato si porta inun pto B' con un intorno sulla sup sferica, cioè su cerchio.

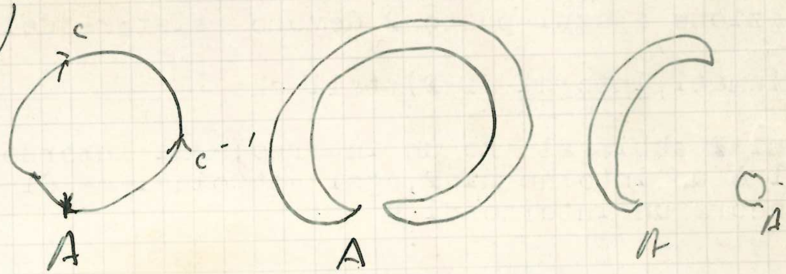
torn a p. 269

de p. 583

1 6. ~~Il prodotto~~ Tenuto presente che ottenuti il prodotto C C' posso definirlo tenendo fermo A come suo origine e suo pt. di arrivo (non nec.te con pt. di arrivo di C, e partenza di C')



2 (V. sopra)



In questo modo abbiamo, almeno schematicamente, costruito in S_n numerico l'analogo del triangolo piano, cioè l'elemento primo di quello che sarà il complesso n-dimensionale, l'analogo della superficie decomposta in triangoli. Ma questi potevano essere curvilinei, cosicchè bisogna che abbiamo a nostra disposizione anche qualche cosa di analogo ai triangoli a lati curvilinei, analogo da definire in modo ben preciso.

Per questo collochiamoci addirittura in quello che chiameremo uno <u>spazio topologico</u> (resta incluso in particolare lo S_n numerico). E' un insieme S di enti qualunque, chiamati <u>punti</u>, il quale soddisfi (per df.ne) alle seguenti condizioni; in relazione a ogni punto P devono esistere dei sottoinsiemi (chiamati <u>intorni</u> di P) tali che

ogni P abbia almeno un intorno; ogni intorno di P contiene P se I è un intorno di P, ogni sottoinsieme di S contenente I è ancora un intorno di P