GEOMETRIA SUPERIORE 1934 -1935

L'OPERA GEOMETRICA DI CORRADO SEGRE E ALCUNI SUOI ULTERIORI SVILUPPI

Gli indirizzi geometrici nei quali si è svolta l'attività di Segre sono (come ho già accennato) assai vari — Per riassumere il concetto in poche parole, spero Segre (per quanto profonde siano state le sue ricerche) ha forse lavorato in estensione più che in profondità.

Il corso di quest'anno si intitola.....,e prende alme esteriormente occasione dalla circostanza che sono passati proprio 10 anni dalla morte di Corrado Segre, morto dunque nel 1924 (n. a Saluzzo 1863) il quale insegnò in questa Università la geometria superio per 36 anni,dal 1888 in poi.La sua operosità geometri si è svolta in campi e indirizzi diversi,cosicchè riesminandola e trattando contemporaneamente delle premesse che sono necessarie alla sua comprensione e degli sv luppi ulteriori che essa ha avuto,avremo modo d prendere conoscenza di molte parti della geometr

Prendendo come filo conduttore del corso un singolo geometra,si potrebbe te mere un corso poco vario.Il che però non è sopratutto per questo motivo.Ha scritto il Castelnuovo (Comm .di C S,Rendiconti Lincei 2 nov 1924) che "mentre" S. "asp ra ad aprire nuove vie alla indagine geometrica,non si sforza poi di percorrere queste vie fin dove appaiono feconde.La ricerca di semplicità ed eleganza che rende così attraenti i suoi scritti,l'avversione per i ragionamenti complicati ove si riveli lo sforzo,per i procedimenti arditi ai quali talora si è costretti a ricorrere nella fase della scoperta lo hanno forse trattenuto dal troppo inoltrarsi nelle regioni che aveva cominciato ad esplorare...Questa tendenza gli ha forse impedito di raccogliere qualche frutto che era alla portata della sua mano.Ma se ha posto dei limiti alla sua opera,del resto vastissima,ha immensamente favorito l'attività de la scuola che da lui prende il nome.Infatti i discepoli

da lui spinti nelle direzioni che egli aveva segnato e coi metodi di cui si era valso, hanno potuto affrontare e risolvere ardue questioni mettendo così in rilievo la fecondità di quegli indirizzi e di quei metodi". Forse qui il Castelnuovo avrebbe dovuto insistere piuttosto sugli indirizzi che sui metodi, i quali hanno dovuto spesso modificarsi nelle mani dei continuatori. Questo è sopratutto il caso per la geometria algebrica (geom su una varietà). Qui è certamente vero che Segre è stato un fondatore: è vero quanto ha il Fan commemorando S quando (18 5 28) qui si è inaugurato una lapide e un medaglione in suo ricordo che cioè "la larga diffusione e lo slancio massimo della geometria algebrica in Italia prendono le mosse dalle due Memorie Bertini Segre" (sono due Memorie degli Ann di Mat (2). 22. 1894) le quali dopo il primo stadio, Riemanniano -funzionale, e il secondo, algebrico, ne inaugurano il terzo stadio, algebrico geometrico iperspaziale, evoluto poi ancora in senso invariantivo, e questo essenzialmente italiano" Questo è vero, ma non si deve dimenticare che coloro che in Italia hanno proseguito da quel momento nello studio della geom algebrica (per nominare solo questi, Enriques Castelnuovo e Severi) hanno dovuto servirsi di metodi diversi e più riposti. Anche in questo campo è sopratutto l'indirizzo, e non il metodo, quello di cui S ha mostrato la

ripete

fecondità, e ripeto anche che gli indirizzi nei quali si è svolta l'opera di Segre sono stati molti.

Dico subito che non tratteremo in questo corso con eguale larghezza e diffusione di tutti questi indirizzi in relazione con varie circostantze. P.es. avendo trattat nel corso 1933-34 della geometria su un ente algebrico, mi diffonderò meno sulla parte della produzione di Segre che concerne questo campo. Oltre a ques sono particolarmente da ricordare intanto il primo storicamente e cioè la geom proi ipersp., e la geometria delle rette e poi la geometria nel campo complesso e la geometria proiettiva differenziale, oltre a altri minori dei quali pure ci occuperemo.

L'importanza dell'opera di Segre risulterà dal seguito di questo corso. E' riconosciuta da tutti la posizione preminente che l'Italia ha assunto a partire dall'ultimo ventennio del secolo scorso negli studi geometrici Così del 1923 per citare solo questo nell'introduzione al primo volume dedicato alla geometri della grande Enz. der math Wissenschaften, scritta in tedesco, ma dovuta a una collaborazione internazionale e dove appunto l'art. di Geom. iperspaziale (1914) è di Segre si trova scritto (da Franz Meyer e H. Mohrmann, che hanno diretto la preparazione dei volumi dedicati alla geometria) "Sebbene fra gli anni 1865 e 1875 scienziati tedeschi abbian

esto le più belle possibilità per lo sviluppo ulteriore
lla geometria, questi furono ripresi e proseguito col mag
o successo non già in Germania ma in Italia. Così in poch
nni l'Italia si è portata in tutti i campi della geometri
lla posizione di comando (Führende Stellung) e da allora

è pienamente affermata in questa ~~parte di~~ posizione. Or

uno dei matematici che hanno maggiormente contribuito (si

onfrontino anche le date che ho citate) a portare l'Itali

questa posizione preminente è stato senza dubbio il Seg

re. Senza diffondermi, mi limiterò anche qui alla sola cita

zione di J. Coolidge che nella sua biografia di Segre (Bull of the Am. math Soc. 19 ha
(parola scritta in italiano)
scritto che "il risorgimento geometrico in Italia è il ri

sultato degli sforzi di alcuni grandi maestri" fra i quali

egli nomina appunto (oltre a Battaglini e a D'Ovidio) Cre

mona e Corrado Segre"

Cito alcune biografie di S, oltre a quelle di Castelnuovo
Coolidge già citate
Loria Ann di Mat; (4) II 1924
Berzolari, Rend Istituto Lombardo LVII 1924
Fano Annuario R Un di Torino 1924-25
e Suppl ai Rend del Circ di Palermo vol XV 1926-28
Baker Journ of the London math Society vol 1, 1926
Terracini, Jahres ber der deutsch. math Ver. vol 35 1926

La ricchissima produzione geometrica di Segre ne i primi anni, e cioè a partire dal 1883, si è rivolta sop tutto alla geometria proiettiva degli iperspazi nella cui fondazione Segre ha avuto anzi la parte preponde nte. Inizialmente questi studi si sono intrecciati mol strettamente con quelli della geometria della retta, s condo la notissima idea di interpretare le coordinate pluckeriane di una retta nello spazio come coordinate in uno S_5 Una delle epigrafi poste in testa alla Dissertazione di laurea è appunto la frase di Klein c riassume questo fatto con le parole "Die linlengeometr ist wie die Geometrie auf einer M_4^2 des R_5" Prima però di venir a parlare di questo gruppo più importante di lavori, vorrei trattenermi su uno, per quanto di caratte re più modesto che porta per titolo "Su una trasformaz ne irraz. dello spazio e sua applicazione allo studio del complesso quadratico di Battaglini e di un comple lin are di coniche iscritte in un tetraedro" (Giorn. di Battaglini vol XXI) Ciò sopratutto allo sc po di cominciare a impadronirci du qualche concetto di geom della retta, che così avremo già a disposizione quando analizzeremo i lavori iperspaziali, e le loro

applicazioni ~~&&&&~~ ai complessi quadratici più generali.
Del resto anche cronologicamente, per quanto il lavoro si
introduz alla
solo datato ottobre 1883, mentre la diss.ne porta la data
(Segre si è appunto laureato nel 1883)
27 aprile dello stesso anno, le sue origini risalgono a u
momento più lontano. Si teneva allora all'un di Torino u
cosidetto corso di magistero(che sboccò poi sostanzialme
te nell'(attuale di ~~&&&&&&~~ mat comp. ri) e appunto in una
conferenza da lui tenuta a questo corso quando era stude
te del 3° anno(1881-82) Segre ha esposto i risultati con
tenti in questo lavoro)

IL COMPLESSO DI BATTAGLINI

Questo lavoro giovanile di Segre risente, come idea dire
si è andata sviluppata
tiva di una tendenza che ~~ha avuto notevole importanza ne~~
durante il secolo scorso
~~geometria dell'800~~, quella cioè di dedurre proprietà di
figure nuove da quelle di figure note mediante trasforma
ni dello spazio. Naturalmente questa idea si può applicare
bene, e male; nel senso che le trasfomrazioni che si adope
r no possono essere ovvie, e allora tutto si ~~&&&&&&&&&&&~~
riduce a fare delle pure e semplici traduzioni di parole
Ma può invece trattarsi di modi più riposti di ricondurre
una figura a un'altra e allora si tratta di veri e propri
gressi che si conseguono coi risultati così raggiunti. ~~Pre~~
~~[illegible]~~

E' stato Chasles a scrivere nel suo Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géom trie a proposito delle trasformazioni(egli pensava alle omografie e alla dualità,eravamo nel 1837) che mediante tali trasformazioni chiunque può generalizzar (egli diceva) e creare ,aggiungendo così una pietra all'edifizio. Ora bisogna dire che le pietre così portate non posson che essere estremamente mod ste ,e che in tale modo non si crea assolutamente nulla.

~~Naturalmente~~ Il fatto che una trasformazione sia ovvi
oppure sia riposta implica un giudizio relativo a un d
terminato momento. Prendiamo p es la legge di dualità. Q
il progresso è stato ottenuto nel momento che si è giu
a stabilire questa legge su basi sicure. A partire da q
momento l'interesse di ogni singola applicazione della
legge a un caso particolare ha perso ogni interesse. Sa
pendosi già a priori la possibilità di dedurre da ogn
teorema di geom proi un nuovo teor id id, il fare poi m
terialmente la traduzione non dà più nulla di nuovo.
Così, quando Lie ha immaginato la sua trasformazione di
contatto che porta le rette in sfere, ha stabilito un
principio ~~da~~ molto importante collegando la geometria d
la retta con quella della sfera. Stabilito il princip
o fattane se vogliamo nella stessa occasione la prima
applicazione, le ulteriori applicazioni non portano più
un contributo nuovo alla scienza. Il dedurre un teorema
nuovo da uno vecchio mediante una trasf. già ben nota
costituisce quella che D'Ovidio chiamava tic-tac geome
tria. Invece ideare una nuova trasformazione vuol dire c
legare fra loro degli argomenti apparentemente lontani
e vuol dire moltiplicare la portata di ogni singolo risu

tato.Vuol dire inoltre ,per chi abbia sempre presenti in geometria tutte le varie possibili trasformazioni, avere in ogni momento la possibilità di esaminare una problema sotto aspetti diversi,in modo da scegliere fra questi aspetti quello sotto il quale il problema si può affrontare nel modo più facile.Dico incidentalmenye che questa moltiplicità di interpretazioni di uno stesso problema ~~&&&&pa~~ è sempre stata particolarmente famigliare Segre Aggiungo anche incidentalmente che varie osservazioni generali sulle trsf geom. e su parecchie altre questioni si possono leggere in"Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche"dello stesso Segre,Riv di Mat I 1891(tradotto in inglese nel Bull math am soc (2) 10 1904)

Venendo al lavoro giovanile di S sul complesso di Battaglini,la trasf. che vi ha la parte essenziale è sostanzialmente quella che nasce fra due spazi S,S' con le formole

$$(1) \qquad x' = x^2 \qquad y' = y^2 \qquad z' = z^2$$

Se le coord. sono cart. ortogonali ogni punto di S' proviene ~~&&&&&~~ dagli 8 punti di S che avendo le coord. $\pm x, \pm y, \pm z$ si ottengono da uno di essi mediante simme

Ed in generale esistono <u>un gruppo finito</u> Γ_8 (come si diceva sulle (1)). (<u>resta</u> a seguire le notazioni e la terminologia di Segre).

~~nelle omografie~~ $\cancel{I, I_2 \; I_8 \; I_6 \; I_4 \; \Gamma_8}$
~~id. (omol.) (omol. biassiali)~~

trie rispetto agli assi(3) all'origine(1) e ai piani coordinati(3). Se si tratta di coord proi (diciamo subito coord $x_i' = x_i^2$) (come in Segre) il gruppo di 8 punti si ottiene da 1 mediante le 4 omologie ($I_1 \dots I_5$) armoniche che hanno per centro e piano un vertice e la faccia opposta (4) e le 3 omografie biassiali armoniche... ($I_6 I_7 I_8$ cioè complessivamente le 8 omografie $I_1 \dots I_8$ (v. ...))

~~Si hanno in S,~~ in sostanza tanti G_8 formanti un «involuzione», e i G_8 vengono rappresentati mediante le (1) nei singoli punti ~~Però si tratta di un inv che si spezza, altro~~ di S'. Il nome di trasf irrazionale usato nel titolo non è il più appropriato. La trsf. è razionale, ma non birazionale (spiegare) di indici (8,1). Come ogni punto generico di S fa parte di un G_8, così ogni piano fa parte di un gruppo di otto piani, che gli corrispondono nelle 8 omografie $I_1, I_2 \dots I_8$. Avranno tutti una stessa superficie corrispondente in S'. E analogamente per le rette, che a 8 a 8 dànno in S' una stessa curva. Si hanno così dei G_8 aggruppamenti di punti dei G_8 di piani e dei G_8 di rette. Il lavoro di Segre è diviso in 3 parti; la prima studia i G_8 di punti, piani ecc.; la seconda studia la trasf. fra S e S'; l'ultima e più importante studia il complesso di Battaglini.

Per quanto concerne la I parte, ecco alcune osservazioni che essa contiene. I punti di un G_8 si dividono in due quaterne; entro ciascuna due punti qualunque differen

Si riduce piano (coi $I_2 \ldots I_r$) alle $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_n \end{vmatrix}$

vedo che piano di una retta come di quaterne diviene

caratterizzato di rango $\underline{3}$ cond^{te} non compl^{i}; p. es

$p_{12}\; p_{13}\; p_{23}\; - p_{14}\; - p_{24}\; - p_{34}$

o per il segno di 2 coord.te (fra le 4 omogenee) Ho la qua-
terna

$(x_1 x_2 x_3 x_4)$ $(x_1 x_2 -x_3 -x_4)$ $(x_1 -x_2 x_3 -x_4)$ $(x_1 -x_2 -x_3 x_4)$

dove anche i pt successivi al 1° si trovano nella stessa
relazione mutua) e la quaterna

$(x_1 x_2 x_3 -x_4)$ $(x_1 x_2 -x_3 x_4)$ $(x_1 -x_2 x_3 x_4)$ $(-x_1 x_2 x_3 x_4)$

punti di una stessa quaterna provengono uno dall'altro
evid.te
con le omografie biassiali armoniche.... $I_6\ I_8$ (d diverse $I_4 \dots I_5$) ~~...~~ per i
~~...~~ Potremmo anche dire così: $I, I_6\ I_7\ I_8$ costituiscono
un Γ_4 sottogruppo di Γ_8 (come è chiaro da quanto detto nella 1ª
quaterna) Analog.te per i piani si ha una distribuzione in
quaterne entro ogni G_8. E così per le rette. Qui appli-
cando a una retta $r \equiv xy$ le $I_6\ I_7\ I_8$, p es passando a

$x_1\ x_2\ -x_3\ -x_4$

$y_1\ y_2\ -y_3\ -y_4$ si passa evidentemente dalle p_{ik} a

retta cioè p_{12} $\overset{p_{13}\,p_{14}\,p_{23}\,p_{24}}{-p_{34}}$ Quindi in ogni
quaterna si hanno rette che differiscono per i segni di due
coordinate complementari. Prendiamo due rette di una stessa
quaterna, p es le due ora dette; formando la cd di incidenza
1° membro

$$-2p_{12}\,p_{34} + 2p_{13}\,p_{42} + 2p_{14}\,p_{23} \equiv -4\,p_{12}\,p_{34} \neq 0.$$

si vede che essa non è gen.te verificata. Quindi due rette di
una stessa quaterna sono sghembe. Prendo invece due rette di
quaterne diverse con le 2 rette che

$\cancel{p_{12}\,p_{34}}$ $p_{12}(-p_{34}) + p_{34}(p_{12}) + \dots = 0.$ cioè che

Z linee rette di stessa quaterna corrispondente pres. in I_5 stanno in schiera colle due rette unite in I_5 e quindi son sghembe.

ette appartenenti a quaterne diverse sono sempre incide
i. Del resto, siccome rette (come punti) provenienti da qua
erne diverse si ottengono una dall'altra mediante le omo
ie armoniche I_2 I_5 sono appunto incidenti (sul piano
mologia). Quindi le otto rette di un G_8 appartengono a un
uadrica, ~~aaaa~~ quattro in una schiera e quattro nell'altra.

Riguardo alla configurazione cui dànno luogo i G_8 d
o aggiungere un'oss.ne. In una nota al suo lavoro, Segre d
e che dopo terminato il lavoro stesso, aveva avuta cono
cenza di una Memoria di Veronese (Sopra alcune notevoli c
figurazioni di punti, rette e piani, di coniche e superfici
....Mem. dei Lincei (3) 9 1881 spec pp 340-1 riassunto
n Transunti (3) 4 1880 in cui, dice Segre Veronese avev
doperata la stessa trasf.ne (1). Devo però aggiungere che
in Veronese (lavoro alquanto ~~aaaaa prolisso~~ diffuso) è rilevato un fatto n
evole per i G_8 di punti, e cioè che se si prendono il tet
dro fond. T dello spazio S, e i due tetraedri che si otte
o prendendo come vertici i 4 punti di ogni quaterna, si h
o tre tetraedri <u>desmicio</u>, come dice Veronese <u>fasciali</u>. Si
gnifica ciò: pochi anni prima Stéphanos (Sur les systèmes
desmiques de trois tétraèdres) Bull. des Sc. math (2) III
1879 si era posto il problema di generalizzare allo spaz
a nozione dei trilateri sizigetici, tre dei quali apparte
gono a un fascio di C^3 (spiegare). Egli si domandò se qual
che cosa di analogo aveva luogo in S3, se cioè qui è

Il risultato si riquadra bene con la teoria dei [t]rilateri sizigetici, due dei quali sono om.ⁱ in 6 modi [d]iversi (cfr. indic.ⁿⁱ in Enc. III C 5 p. 524). Se invece 2, comunque [r]iferiti (dunque in 6 modi) sono abc $a'b'c'$ i pt. aa' [...]i piano) e (bb') id. sono allineati su un 3° piano che non [...]tendo stesso su a si.ⁿ in b ecc. non però che essa cc'

P.S. se consideriamo la Q che so (p. 21) contenere le 8 rette di un G_8, essa è inv.te per Γ_8 (poli...) e quindi certo ha T come autopolare.

possibile che tre tetraedri appartengano a un fascio di F^4 Ha trovato di sì, e precisamente che per tali 3 tetrae due qualunque sono omologici in 4 modi diversi; e che vic versa se si hanno 2 tetraedri omologici in 4 modi diversi i 4 piani di omologia dànno luogo a un 3° tetraedro che coi due prec.ti appartiene a un fascio. Tali tetraedri sono da Stephanos chiamati desmici (dal nome greco δεσμή del fa scio) Ora Veronese ha osservato che appunto i tre tetraed ora detti sono omologici in 4 modi, cioè sono desmici o come dice Veronese fasciali. Si può aggiungere che del resto ~~a rigore~~ nemmeno Veronese è stato il mo a trovare questa proprietà; perchè fin dal 1858 Hermes (Crelle 36) aveva constatao le 4 omologieche pass no fra i 3 tetraedri che stiamo considerando. A propos to dei tetraedri desmici aggiungo ancora che la cond ne p chè lo siano è che ogni coppia di spigoli opposti dell'u si appoggi a una coppia di spig opp dell'altro. Conside elementari di geom proi. per arrivare a tali tetradr. cfr. i Compl. di geom proi di Severi p 43

Torniamo alla 1.a parte del lavoro di Segre. Egli osserva che è invariante per il Γ_8 (egli dice simmetrica rispetto a T) ogni sup. nella cui equazione entrino solta to le potenze pari di ogni singola coordinata (p.es. le quadriche $\sum K_i x_i^2 = 0$ che hanno T per autopolare). Meno im

(e si potrebbe [illegible] [illegible] combinazioni di [illegible] x_i ... [illegible]

dist. è quest'altra osse.ne di Segre. Un complesso ~~quadr~~ di ordine n ~~(pensare che egli ha poi in vista spec.te lo stu dio del cpl. di Batt.ni, che è appunto tale; spiegare~~ ~~quad. dapprima~~ sign.to dell'ordine di un cpl. come grado dell'eq.ne; come n° delle rette di un fascio($\lambda p_{ik}+\mu p'_{ik}$) *pur di n rette, tutto il fascio)* e quindi come ordine del cono formato dalle rette per un *un modo anche* $F(x_i y_k - x_k y_i) = 0$ punto, o classe della curva inv.ta in un piano)) è invari te per Γ_8 se nella sua eq.ne entrano solo le potenze ri delle coord.te. Ma qui non sussiste più il risultato inverso. Segre si ferma ai complessi quadratici (quelli che per lui hanno interesse, volendo poi studiare quello di Batt.ni che appunto è tale) e si domanda tutti quelli che gono inv.ti per un Γ_8 ~~&&&&&& appoggio~~ del tipo considera to (cioè ~~&&& &&&&&&&&&&~~ simmetrici, rispetto a un certo tetraedro T) Egli ~~giunge al risultato che stabilito da~~ *giunge al risultato che tali sono soltanto*
~~Klein, secondo il quale per un dato cpl quadr. si può sempre scegliere il tetraedro di riferimento in modo che nell'eq.ne manchino alcuni termini, e precisamente ci si no solo quelli nelle , e inoltre in~~ (*rispetto a cui è T*

1) il complesso di Battaglini (nella cui eq.ne compaiono i termini p_{ik}^2

2) il complesso tetraedrale (nella cui eq.ne compaiono solo $p_{12}p_{34}$, $p_{13}p_{24}$, $p_{14}p_{23}$ *eq.ne scrivibile in vari modi*
[illegible]

rette che tagliano le facce di un tetraedro secondo un birapporto costante)

Per giungere a questo risultato preferisco non esp re la dim.ne di Segre e sostituirla con la seguente. Intanto è bene aver sempre presente quando si parla dell'eq.ne di un cpl quadr. che essa non è determinata (neppure a meno di un fattore) dal cplesso stesso; e ciò per la possibilità, già rilevata testè per il cpl tetraedrale di servirsi dell'identità fra le p. In modo preciso, se $F(p)$ è l'eq. di un cpl quadr tale è pure

$$F(p) + k(p_{12}p_{04} + p_{14}p_{23} + p_{10}p_{24}) = 0 \qquad (\alpha)$$

con k arbitrario. Possiamo anche aggiungere che non vi sono ulteriori indeterminazioni nell'eq.ne di un cpl quadr. Invero se F(p) = e G(p) = 0 sono due eqni di C, presa una retta p' non appartenente a C determino la costante m in modo che l'eqne $G(p) - m F(p) = 0 \qquad (1)$
sia soddisfatta per p'. Essa è inoltre soddisfatta per tutte le rette di C. Perciò in ogni fascio di cui faccia parte p' vi sono tre rette che soddisfano all'eq (1) cioè p' e le due del fascio che appartengono a C. Dunque (p prec) tutte le rette di tutti quei fasci soddisf a (1), cioè in altre parole vi soddisfano tutte le rett dello spazio appoggiate a p'. Quindi se (1) non è id

tica, rappresenta un complesso quadratico di cui fa parte il complesso lin speciale di direttrice p'. Ora posso supporre che tale complesso lin non facesse parte d C, perchè anche se C fosse spezzato e uno dei cpl lin componenti ~~&n&~~ fosse speciale, scelgo p' che era arbitraria fuori del suo asse. Perciò la (1) ~~non è identica~~ è soddisfatta da tutte le rette di C e ulteriormente da tutte le rette di un cpl lin nonfacente parte di C: ~~e quindi~~ da tutte una dunque è identità cioè soddisfatta le rette dello spazio (se no rappresneterebbe un complesso di terz'ordine mentre è un'eq.ne quadratica). Concludo che (1), essendo soddisfatta da tutte le rette dello spazio non può che ridursi all'identità $p_{12}p_{34}\ldots = 0$ cioè il primo membro è questo stesso salvo un fattore costante. Ho così $G(p) - mF(p) = k(p_{12}p_{34}\ldots)$

cioè $G \equiv mF + k(p_{12}p_{34}\ldots)$.

cosicchè se $F=0$ è un'eq. di un cpl. quadr. e la più generale è la (x).

Chiudendo questa digressione e venendo alla dimostrazione che abbiamo in vista, sia C un complesso invariante per il Γ_8 definito da un certo ~~sistema di coord proiettive~~ ~~con~~ un tetraedro fond T. La sua eq.ne (una) sia $F(p) = 0$

Scindiamo i termini di F $= P + D$ in due gruppi P e D secondo che sono ~~do~~ pari o dispari rispetto a una coppia di coord.

omplementari, prendo p_{12} e p_{34}. Dovendo C essere invariant
per il Γ_8, lo è in particolare (p.19) se cambiamo di segn
ali due p. Allora l'eq. diventa $P - \mathcal{D} = 0$. Cosicchè, s
ando o sottraendo, ho che nei punti di C sussistono entra
e le equazioni $P = 0$, $D = 0$ (non escludendo che qualcuna
i queste sia addirittura identica) Perciò, secondochè D
vanisce o non svanisce id.te

1) o l'eq. ~~del complesso~~ del complesso ~~può scriversi~~ si riduce a $P = 0$ (perchè in
$P + D$, D va a zero) cioè con soli termini pari in p_{12} p_{34}.

2) oppure l'eq.ne si può scrivere in forma tale $(\mathcal{D} = 0)$
che ogni suo termine contiene a fattore p_{12} oppure p_{34}
(uno solo dei due per la disparità)

Se si verifica 1) cioè la presenza di soli termini pari
nell'eq.ne data per tutte tre le coppie di indici complem
tari, arrivo facilmente al risultato perchè quell'eq.ne &&
ntanto si riduce alla forma

$$\sum c_{ik} p_{ik}^2 + A p_{12} p_{34} + B p_{13} p_{42} + C p_{14} p_{23} = 0 \quad (2)$$

perchè la presenza di ogni altro termine, p.es $p_{12} p_{13}$
sarebbe un termine non pari nella coppia p_{12} p_{34})
Inoltre, ragionando ora sulla (2) e pensando alle altre sos
uzioni del Γ_8 che ~~la~~ devono lasciare invariata C, vi è anc
(p.19) p es il cambiamento di segno delle p_{15} p_{24} p
la quale (2) dà

$$\sum c_{ik} p_{ik}^2 - A p_{12} p_{34} - B p_{13} p_{42} - C p_{14} p_{23} = 0 \quad (2')$$

Ora (p. 29) ammesso (1) e (2') eq.^{ni} di uno stesso C, ... vi è una loro comb. lin. che si riduce a $p_{12}p_{34}$ ... $= 0$ ... figurando in essa le p_{ik} se vi è qualche $c_{ik} \neq 0$; non si può ottenere che per sost. tra coppie: quindi vi è una cost. m tale che

$$2A\,p_{12}p_{34} + 2B\,p_{13}p_{42} + 2C\,p_{14}p_{23} \equiv m(p_{12}p_{34} \dots$$

e allora $2A = m$, $2B = m$, $2C = m$; $A\ B\ C$ son eguali e (2) si riduce all'eq. di un compl.^{ss} no di Battaglini. Oppure ... Ogni c_{ik} è già nulla e (2) è un compl. tetraedrale. Con tutto è dimostrato. A meno che per qualche coppia di indici complementari valga la 1). Sia così per p_{12}, p_{34}. Allora la 2) è del tipo

1) p_{12} cb. lin ($p_{13}p_{42}$ $p_{14}p_{23}$) $+ p_{34}$ cb. lin (id.) $=$

in cui qualche termine $\neq 0$ vi è ut. Per fissar le idee supponiamo che almeno la coppia $p_{13}\,p_{42}$ compaia effettivamente.

Cambiando di segno $p_{14}\ p_{23}$ e so... (c.s.) vedo che ... cangiano i termini in $p_{14}p_{23}$ e avrem l'eq. (non id.^{ca}) nella forma

1). $p_{12}(A p_{13} + B p_{42}) + p_{34}(C p_{13} + D p_{42}) = 0.$

... facendo il cambt.^{o} di segno di $p_{12}p_{13}p_{34}$ (p. 19) l'eq.^{ne} ...

$$+ \qquad - \qquad - \qquad +$$

le 2 eq.^{ni} (4) e (4') al solito (mancando invarianti $p_{12}p_{34}$ etc.) dan... ... multipli ... li del ... $A = ?\ D = 0$ ... $B = C = 0$.

Ragiono sulla p con 1 invece 10200 ovunque sempre interno. Quindi ho un'altra soluzione, detta il complesso.

(5) $A\, p_{12}\, p_{13} + D\, p_{34}\, p_{42} = 0$ (oppure $B\, p_{12}\, p_{42} + C\, p_{34}$ o ancora altre permutando altrimenti gli indici)

Devo studiare (5). Le sue eq.ni non sono trattabili né coi cpl.ni Batt.ni né di tetraedrali. Però posso fare un cambiamento di coord.te che rende tetraedrali il mio cpl. tetr. (ma rispetto ad altro tetraedro, che non è più quello rispetto a cui si è rapportata l'invarianza). Per nuove coord.te x'_i ...

$\cancel{\sqrt{A}\, x_1 + \sqrt{-D}}$ $\cancel{x'_4 = \sqrt{A}\, x_1 + \sqrt{D}\, x_4}$

$$x_1 = \frac{x'_1 + x'_4}{2\sqrt{A}} \qquad x_4 = \frac{x'_1 - x'_4}{2\sqrt{D}} \qquad \cancel{x'_2 = x_2} \quad x'_3 = x_3$$

$$x_2 = x'_2 \qquad x_3 = x'_3$$

Quindi (per le p_{ik} che entrano in (5)) ho

$$p_{12} = \frac{p'_{12} + p'_{42}}{2\sqrt{A}} \qquad p_{13} = \frac{p'_{13} + p'_{43}}{2\sqrt{A}}$$

$$p_{34} = \frac{p'_{31} - p'_{34}}{2\sqrt{D}} \qquad p_{42} = \frac{p'_{12} - p'_{42}}{2\sqrt{D}} \quad \text{e (5) diventa}$$

$$\frac{1}{4}(p'_{12} + p'_{42})(p'_{13} - p'_{34}) + \frac{1}{4}(-p'_{13} - p'_{34})(p'_{12} - p'_{42}) = 0 \quad \text{cioè}$$

$$p'_{12}p'_{13} - p'_{12}p'_{34} + p'_{42}p'_{13} - p'_{42}p'_{34} - p'_{13}p'_{12} + p'_{34}p'_{12} + p'_{13}p'_{42} + p'_{34}p'_{42}$$

N.B. Ho sostituito con le dim. di Segre, la quale riconduce a un risultato di Klein (p. tessi l'eq.ne di un complesso ... nella forma (2) di p. 31) che qui ho citato; e so... ...perché con sé porta quel risultato nella forma ... C è ins.te rispetto ~~a ... relativo a T~~ alle ... che hanno con ... opposti di un tetraedro T, ~~o opposto~~ vale rispetto a T la forma canonica (2): ... quanto precede non è vero

$-p_{12}p_{34}+p_{13}p_{24}=0$ eq. di cpl. tetraedale

il teor.a è dimostrato.

II Parte della Mem di Segre. Studio della corr.za fra S e finita

da $x_i' = x_i^2$. Ai piani di S' corrispondono evidentem

S le quadriche che hanno T come tetraedro autopolare. C

ncio a formare la tabella a p. 39. Intanto (1). A una retta

nerica di S' corr.de perciò l'int.ne di due tali quadrich

oè C^4 di 1.a specie, di cui possiamo aggiungere che ciasc

sta su un cono quadrico avente per vertice un vertice

T (spiegare)(invero la $\sum a_i x_i^2 = 0$ $\sum b_i x_i^2 =$ sta p.es. su $b_1 \sum a_i x_i^2 - a_1 \sum b_i x_i^2$

(2). Se prendo in S una quadrica $\sum a_i x_i^2 = 0$ cioè

v.te per il Γ_8, viceversa le corrisponde un piano; ma se n

inv.te? Prendo addirittura φ^n (generica). Ognuna delle C^4

a dette la taglia in 4n punti. Perciò avrò φ'^{4n} (3). Di cui si

ò aggiungere che è circoscritta a T' ossia tangente a ogni faccia di T' secondo

C^{2n} Inverso la sua int.ne p.es. con la faccia $x_4'=0$ proviene dalla

traccia di φ con la faccia omologa $x_4=0$; la quale (ragionando

a piani come testé fra gli spazi : alle rette di $x_4=0$ corr.

ndono C^2 di $x_4=0$, ecc.) le appunto per corr.te C^{2n}. Quindi

...dunque doppia nell'int.ne φ'. $x_4=0$. (Naturalm.

...te φ'^{4n} proviene non solo da φ^n ma anche dalle

...trasf.te nelle $I_1 \dots I_8$). Quindi a una quadrica

...con. un φ'^8 tgte ... ecc! Ma ~~anche più~~ ...

. (4) segue a p. 41

S	S'	
[illegible]uadrica circ. T autopolare	piano	(1)
C^4 inv.^{te} per T^8	retta	(2)
φ^n generica	φ'^{4n} tg^{te} alle facce di T' secondo C'^{2n}	(3)
[illegible]piano generico	φ'^4 tg^{te} alle facce secondo C^2 di Steiner "iscritta in T'"	(4)
[illegible]		
C^n generica	C'^{2n} tg^{te} alle facce di T' in n punti	(5)
[illegible]etta generica	C^2 tg^{te} alle 4 facce di T' "iscritta in T'"	(6)

 Ai diremo "iscritte in Σ'"

Queste φ'^{s} sono superficie di Steiner. Così si chiama
na F^4 razionale (spiegare) rappresent.le su piano in modo che a
sue sezioni piane corrispondano coniche. Ora qui la co
za non biunivoca fra S S' subordina fra il piano φ e
φ'^{s} una corr.za alg.ca biunivoca (perchè preso un pun
di φ, gli altri 7 del G_8 non stan più in quel piano);
cicchè intanto φ'^{s} è una sup. razionale; e quando prendo
sua sezione piana $\varphi'^{s}.\pi'$, i suoi punti provengono da φ
che è una conica.

DIGRSSIONE sulla sup di Steiner. In base alla rapp r
una qualunque SUP. di Steiner contiene un sist. ∞^2 di coniche
tali che per ogni
~~&&&&&&&&&&&&&&&~~ coppia di punti ne passa una (spiegar
Invero a una retta r del piano rappres.vo φ ~~&&&&&&&&&~~
incontrante ogni conica in due punti, corrisponderà su
una curva r' incontrante in 2 punti ogni sez. piana cioè
piano. Inoltre ogni piano tgte di sup di Steiner la
secondo quartica spezzata in due coniche. Invero dà sez
che ha in P un punto doppio; cosicchè altrettanto avver
per l'immagine, che è dunque coppia di rette, ecc. (Che
C con pt doppio in P corrisponda sempre C' id id P' è
tuitivo e si dimostra senza difficoltà pensando alle
ni con le sezioni piane per P, e loro immag. per P' con
tgte arbitraria ecc.)

Possiamo renderci ragione di questa p.tà anche ~~altriment~~ in quest'altro modo, che ci dà alcune altre [illegible] sulle F^3 [illegible].
Osserviamo anzitutto che le φ^{4} da noi ottenute sono duali di F^3 con 4 punti doppi (cioè sono di 3.a classe, con 4 piani tangenti doppi) Invero una ha evid.te per equazione (c.h.)

$$(1) \quad \Phi \equiv \sum k_i \sqrt{x_i'} = 0.$$

Formo l'eq. inviluppo: i piani tg.ti $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i'}$ cioè $\rho \xi_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i'}$
e l'eq. inviluppo elimin.do le x' fra queste eq.ni e (1) (Non [illegible] bisogno di rendere raz.le l'eq.ne) Ora

$$\rho \xi_i = \frac{1}{2} \frac{k_i}{\sqrt{x_i'}} \quad ; \quad \sqrt{x_i'} = \frac{k_i}{2\xi_i} \qquad \text{Quindi eq. invil.}$$

$$\sum \frac{k_i^2}{\xi_i} = 0 \quad \text{cioè} \quad k_1^2 \xi_2 \xi_3 \xi_4 + \dots + k_4^2 \xi_1 \xi_2 \xi_3$$

Eq. appunto eq.ne di 3° grado cioè φ è di 3ª classe. La sua duale (in coord.te di punti)

$$k_1^2 y_2 y_3 y_4 + \dots = 0$$

è evid.te F^3 con doppi i 4 vertici del tetraedro fond. (per A_1 è cono con cono tg.te $k_2^2 y_3 y_4 + k_3^2 y_2 y_4 + k_4^2 y_2 y_3$)
Dualmente cioè per φ^{4} avrò 4 piani tg.ti doppi: sono le facce di T, in ciascuna delle quali ho le ∞ rette tg.ti inv.te conica duale di quella del cono quadrico). (Dal resto che tale F^3 abbia classe 4 si vede dalla formula di Plücker $n' = n(n-1)^2$ $= 4.2 = 4$). Ora confermiamo le p.tà relative ai piani tg.ti di φ^{4}. Per dualità devo considerare a F^3 i piani tg.ti da un p.to P, cioè circoscrivere a F^3 il cono tg.te da P

Aggiungo ancora per F^4 di Steiner che anche a p. 50 le K_i : le cui eq. $\sum \sqrt{x_i} = 0$ viene soddisfatta prendendo
$x_1' = (z_1 - z_2 - z_3)^2$
$x_2' = (-z_1 + z_2 + z_3)^2$
$x_3' = (-z_1 - z_2 + z_3)^2$
$x_4' = (z_1 + z_2 + z_3)^2$

... Ho così rapp.ne (biraz.) su un piano e si vede bene ... le C^2 immagini. Si vede bene anche altre cose. I 2 ... m... di $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$, $z_1 z_2$, $z_1 z_3$, $z_2 z_3$ Coniche per ...
(3°) (3°) (2°) (1°)

$X_1 = 2 z_2 z_3$
$X_2 = 2 z_1 z_3$
$X_3 = 2 z_1 z_2$
$X_4 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

le X_i son cos. ... 2: cioè si possono interpretare come camb.to di coord.te. Ora l'eq.ne della F nelle nuove ... è, a conti fatti (così risc. ... nelle x' e poi sostituendo)
$y_1^2 y_3^2 + y_1^2 y_2^2 + y_2^2 y_3^2 - 2 y_1 y_2 y_3 y_4 = 0$ ... ... si vede che il vertice B_4 è tripla

(Passando a eq. ho 4 pti doppi di cui mai tre allineati : l'aggiustamento avviene certo come si è detto)

e le rette $B_i B_j$ son doppie (p.es. ... centro X_2, X_3 ... 2° ...)

È evidente se prendo F^4 con pt. triplo (O) da cui escono 3 rette doppie proiettando da esso in un piano ho rapp.ne e sezioni C^4 con 3 pt. doppi che con "trasf.ne quadratica" si riducono a coniche.

~~Il tot. ... ... ∞^4~~

le C^2 risultano in T (una qualunque in ogni piano) sono ∞^4, come le rette di S_3 il che rende già presso... mi ... che

Ricordo i teor. di Darboux (sole sup. di S_3 oltre F^2 (F^3 rigata) con ∞^2 coniche; di Picard (id ~~oltre rigate~~ sole sup. non rigate di S_3 a serie piana rap.te), di Kronecker-Castelnuovo (sole sup. n.r. di S_3 con ∞^2 sez. piane riducibili

cono che ha per generatrici le rette tangenti a F condot
da P e per piani tangenti i piani tgti a F condotti da P. È
un cono di quarto ordine ~~(come la sez.ne di ... con un piano~~
(perchè ogni piano per il vertice P contiene 4 generatri
le 4 rette condotte da P a toccare altrove la C3 sezion
per il quale ognuna delle 4 ~~&&&&&&~~ rette PA_1 (dove gli
sono i vertici della piramide fond.le) è gen.ce doppia
(come si vede p.es. prendendo un piano p per OA_1; la sua
zione è C^3 con A_1 doppio; e da P posso condurre solo più
2 tgti distinte da OA_1). Perciò questo cono è necessari
mente riducibile in due coni quadrici. Quindi F^3 ha ques
prop.tà; e si conferma per la sup di Steiner (1) ~~ha~~ dua

Tornando, dopo questa digressione a p 41, si trova
gionando in modo analogo che a una generica curva c^n
S corrisponde una c'^{2n} tangente a ogni faccia di T' in
generiche
punti. In particolare alle rette di S corrispondono coni
tangenti alle 4 facce di T'. Ho così (5) (6) Diremo breve
te queste coniche "iscritte in T'". Viceversa, a ogni con
iscritta in T' corrispondono in S le 8 rette di un G . In 8
in modo preciso
tanto a una tale c'^2, situata in un piano π' corrisponde
una linea della quadrica $\breve{\pi}$ che sappiamo corrispondere a
secondo (1) (quadrica che ha T come autopolare) ~~Se P è un~~

Precisamente, se P' è un pt. della C^2 γ', e P il suo corr.te [sulla] π^2, essendo di ciascuna gen.ce g_1, g_2 uscente da P per ... una conica per P' appartenente alla schiera di ... su Σ', ind.te .... Ho così γ_1', γ_2'. Poichè esistono nella schiera (solo) 2 C^2 per P', ho che γ' coincide con γ_1' o γ_2'.

di un G_8, presa tale conica γ' p es in π' e preso su essa un punto P' e un suo corrispondente P sulla quadrica π^2 ,h che delle due coniche di π' corr.ti a g_1, g_2 una non può che coincidere con γ', cosicchè questa ha proprio per co una (cioè 8) retta di S.

Non mi fermerò qui su tutte le particolarità indicate in questa II parte della Memoria di Segre. Aggiungo soltanto 1) che Segre adopera la sua trsf.ne per dedurre proprietà della sup. di Steiner. Così, egli dimostra un teor. già dim.to da Eckardt, che due sup. di Steiner iscritte in uno stesso tetraedro si segano (in una C^{16} spezzata) in 8 coniche con questa considerazione. Se esse in S' provengono dai piani π_1, π_2 di S, formando i 2 G_8 definiti da questi, ho complessivamente 64 rette d'int ne dei piani di un G_8 con quelli dell'altro, le quali for

(N.B. per gli studenti. Il caso del fascio è [illegible] noto agli studenti del 2° anno. Due fasci [illegible] quando stanno in rete per Q)

mano una totalità(come quei due G_8) invariante per il Γ_8
e quindi si ripartiscono in 8 G_8. A questi corrispondono
in S' a punto 8 coniche comuni alle sup. Un'altra propri
dovuta a Eckardt e ritrovata da Segre è che la sviluppab
circoscritta a due sup di Steiner iscritte nello stesso
triedro(spiegare) è(anzichè di nona) di terza classe (cu
bica sghemba) che ha fra i suoi piani le facce del tetra
(la proprietà è però ovvia per dualità,dove le due F^3 co
punti doppi A_1 contengono gli spigoli e quindi si segan
ulteriormente in una C^3 che dovrà ancora passare per gli
~~A_1,dovendosi qui avere compl.te un punto quadruplo)~~. Segre
però pon[illegible]che complemento ~~a questa proprietà~~.

2) cito anche un risultato di altro genere,anche pe
e senza citazioni
chè è ricomparso come nuovo in un lavoro recente di B.Se
(Sulla possibilità di generare una quadrica mediante due
schiere proiettive di quadriche,Boll U M I 1932).Se tagl
una Q con una schiera di quadriche,viene un sist.a ∞^1 d
Sia Σ
quartiche di prima specie su Q, .E' possibile ottenere ch
due diverse schiere di quadriche seghino uno stesso sist.
ma Σ ? Con la sua trasf.ne Segre ha osservato che ciò
avviene se prendo una prima schiera passante per Q,e poi
una seconda schiera così;per una di quelle C4 traccio co
munque una Q' e prendo la schiera individuata da Q' e da

Risulta da quanto precede il modo di trasformarsi delle
ordinate di un punto,e dell'equazione di un piano .Occor
rà anche sapere come le coordinate di una retta p_{ik} si
asformano nel passaggio da S alla figura corr.te di S'(conica
tratta dunque di dedurre dalle p_{ik} dei n[1] atti a carat
zzare tale conica.Come tali si possono prendere i segueh
na conica è(spiegare)quadrica inv.ppo degenere,e quindi
ssono adottare i coefficienti dell'equazione di tale qua
(i quali nat.te devono dare luogo a un discriminante nul
ranno questi ni le coordinate di una conica.Ora facendo
calcolo segre trova per tali α'_{ik} (coeff.ti in $\sum \alpha'_{ik} \xi'_i \xi'_k$
valori

$$(1) \qquad \alpha'_{ik} = p_{ik}$$

quali effett.te rendono nullo,come si verifica il discr
piano di questa conica risulta avere le coordinate

$$\xi'_1 = p_{23} p_{34} p_{42}, \quad \xi'_2 = p_{14} p_{34} p_{13}; \quad \xi'_3 = p_{12} p_{42} p_{14}; \quad \xi'_4 = p_{12} p_{13} p_{23}$$

complesso di rette di S diventa un insieme ∞^3 diciamo
complesso di coniche(tutte iscritte nel tetraedro T'),en
la totalità ∞^4 delle coniche sicritte in T'.Come un
mplesso di rette in S ha un'eq.ne nelle p_{ik} $F(p)=0$,così
corrispondente complesso di coniche (si intende entro la totalità ∞^4) avrà un'equazione
lle α'_{ik} ,che si ottiene eliminando le p_{ik} fra le (1)
e l'equazione $F(p)=0$. Il grado dell'eq.ne così ottenuta
è chiamato da Segre grado del complesso di coniche. (nelle

Lo crei in relaz. con [illegible] eq. diff.le

] del pt. di vista delle geom. piu. elementari -

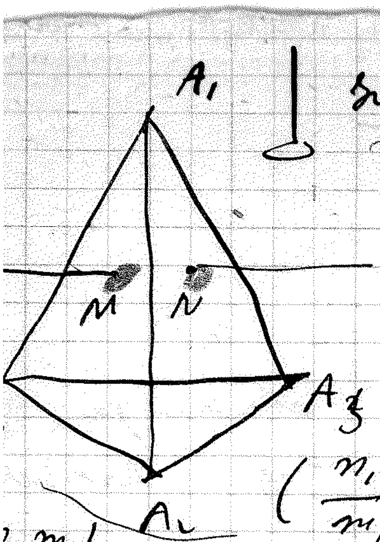
Così, per un complesso di Battaglini $\sum c_{ik} p_{ik}^2 = 0$, si ha che corrisponde un complesso lineare di coniche iscritte in E, come è chiaro si avverte

Prima però di esaminare la III parte della Memoria Segre voglio rilevare che la trsfne oggetto della second anzi la più generale $x'=x^k$ $y'=y^k$ $z'=z^k$ con k arbitrario ~~&&&&&&&~~ non solo si trovava nei lavori già nominati, ma anche stata adoperata da Lie, nelle sue ~~&&&~~ importanti ri che relative al complesso tetraedrale. I risultati di Lie sono stati in parte pubblicati anteriormente a Segre (Übe die Reziprozitätverhältnisse des Reyeschen Komplexes Göt Nachr. 1870& Op I p 68 e sgg ti) ma in forma tale che l tervento di quella trsfne doveva necessariamente sfuggir Le ricerche di Lie si trovano poi esposte per esteso nel la sua Geometrie der Ber.trsfnen (1896). Comunque Segre no cita Lie come è naturale; e nemmeno Lie nella Geom d B, p re dando notizie storiche diffuse, e pure soffermandosi sul caso $k=2$ e sulla sup di Steiner nello stesso senso di Segre non cita Segre - Fermiamoci a studiare

L'importanza della trsf.ne citata in Lie (Sophus) dipende nel senso che accennerò poi da ~~&&~~ Lo quanto ora dirò. Lie ha studiato lungamente il complesso (la cui teoria era già ben nota, soprattutto per opera di Reye) tetraedrale (qui già dfnito anlit.te a p. 25-27). La df.ne geom.ca là data conduce subito alla eq.ne come segue.

A tal scopo per data retta p_{ik} cerchiamo in funzione delle p_{ik} il birapp.to τ secondo cui essa sega le facce del tetraedro; e poi imponiamo

τ : cost.



Individuate p_{ik}: il con $M(m_1\ m_2\ 0\ m_4)$ $N(n_1\ n_2\ n_3\ 0)$ Ciò anche l'int.ne $n_1 m_2 - m_1 n_2$ con $x_1 = 0$ e $n_2 m_1 - m_2 n_1 = 0$ con $x_2 = 0$. Il bir.to dei 4 pt. nell'ordine delle int. con $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ $x_4 = 0$

$$\left(\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, \infty, 0\right) = \left(\frac{m_2}{m_2}\ \frac{n_1}{m_1}\ 0\ \infty\right) = \frac{n_2}{m_2} : \frac{n_1}{m_1} = n_2 m_1 / m_2 n_1$$

Int. quanta ~~...~~ rapporto in f.ne delle p_{ik}: $\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & 0 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 \end{vmatrix}$

$p_{13} = m_1 n_3$ $\quad p_{23} = m_2 n_3$ $\quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_{13}}{p_{23}}$

$p_{14} = -n_1 m_4$ $\quad p_{24} = -n_2 m_4$ $\quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_{14}}{p_{24}}$

Quindi le cd. nec. e suff.te perchè si abbia bir.to τ è

$$\left(\frac{m_1}{m_2} : \frac{n_1}{n_2}\right) \frac{p_{13}\,p_{24}}{p_{14}\,p_{23}} = \tau \quad \text{cioè} \quad \boxed{p_{13}\,p_{42} + \tau\, p_{14}\,p_{23} = 0}$$

cioè proprio un'eq.ne del tipo indicato. (e che possono ottenersi come già detto.) Viceversa data

$a\, p_{12}\,p_{34} + b\, p_{13}\,p_{42} + c\, p_{14}\,p_{23} = 0$ le si sottragga con quella $a(p_{12}\,p_{34} + \dots) = 0$ e ho

$$(b-a)\,p_{13}\,p_{42} + (c-a)\,p_{14}\,p_{23} = 0$$

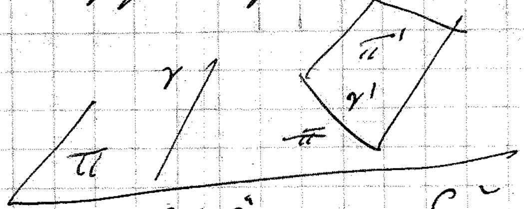
che dà un cpl.no tetraedrale con bir.to $\boxed{\tau = \frac{c-a}{b-a}}$

(Stanno da una retta qualunque e in particolare da una ~~delle~~ retta del cplesso) i vertici del tetraedro si ha lo stesso bir.to.

Si verifichi facilmente che proiettando

Quindi il cpl.no si può generare nel modo duale.

Del resto, che rie cplesso quadratico è chiaro geom.te poichè le rette contenute in piano gen.co π, devono coppiare pt. con gli analoghi, dopo in π', saranno i cpt. di P' di π π' con P alle rette analoghe; [illegible]



poi...., $C^{..}$ in.^{te}.

Aggiungo anche che mentre in piano gen.co ho ∞^1 rette gt. a $C^{..}$..., in ogni faccia del tetr.^{o} per es. in $x_4 = 0$ per le cui rette ho $p_{14} = p_{24} = p_{34} = 0$ [come anche, ~~[illegible]~~ coppie vertici A_1A_2 A_1 A_2] tutte le rette soddisfano all'eq. del cplesso come scritta a p. 55. Ho dunque l'esempio di piani eccezionali le cui rette stanno tutte nel cplesso: si chiamano (Zindler Enz. ...) piani principali (per un cpl^{sso} qualunque). Dualmente punti principali (qui i vertici: $p_{13} = p_{23} = p_{12} = 0$).

Un altro modo elementare per giungere al cpl. tetraedr. è di congiungere le coppie di pti. corr.ti in una omografia generale fra spazi sovrapposti, giacchè nel sem. di avere 4 pti. uniti si ha $x'_i = k_i x_i$ coppie x con y' le rette le quali stanno in $k x' - k_l x = 0$ birapp.to $(k_1 k_2 k_3 k_4)$ = cost.e Così p.e

se di ogni punto dello spazio si prende l'intersezione

piani polari risp. a due quadriche in posizione gener

Q,Q'siccome questi piani si corrispondono in una omog

gia prodotto delle due polarità-per il fatto duale di

quello ora visto-quella retta intersezione descrive u

complesso tetraedrale."in posizione generale"vuol dir

che la omografia nominata abbia quattro punti uniti v

ci di un tetraedro;è quello che avviene per quadriche

con tetraedro autopolare comune.

La teoria del complesso tetraedrale in specie,e qu

la dei complessi di rette in genere ha preso uno svil

po affatto nuovo con Lie,che l'ha posta in stretta re

zione con quella delle eq diff. ~~Lie~~ E più precisament (G.D. n 250 sgg.ti)

con le equazioni-che Lie chiama di Monge- del tipo

$$(1) \qquad \Omega(x, y, z \,;\, dx, dy, dz) = 0$$

omogenee in dx,dy,dz-di un certo grado n.Sono le gene

ralizzazioni delle equazioni di Pfaff(n = 1) lineari omo. in dx,dy dz,cioè del tipo

$$X(xyz)dx + Ydy + Zdz = 0.$$

Il problema dell'integrazione di (1) va inteso nel se di cercare per x,y,z funzioni di un parametro t (ev.te di una stessa fra le x y z) in modo da rendere soddis ta la stessa (1). Lie immagina la (1) come atta a defi ∞^4 fra gli ∞^5 "el. lineari dello spazio" (cart.no xyz) cioè punt e retta appartenentisi, in quanto per ogni dato punto P(x,y,z) la (1) rappresenta un cono di direzioni dx:dy (cono elementare) uscenti dal punto stesso. Il problema dell'integrazione della (1) consiste in sostanza nella ricerca di totali ∞^1 di tali elementi lineari che si ordinino negli el (punto tangente) di una curva (curva integrale). Lie concepisce l'integra (si può [illegible] altro: per i cpl. lett. le sup. integrali sono indicate in [illegible] zione della (1) anche da un altro punto di vista. Con l sa (in quanto non sia di Pfaff) (se non cond.e manca la possibilità) definisce non solo ∞^4 lineari, ma anche ∞^4 el.ti superficiali (punto-piano); gli ∞^1 di ciascun cono (∞^3) fra quelli sopra considerati. Si può allora porre il problema dell'integrazione come la ricerca delle superficie i cui el.ti (punto-pia tangenti) sono fra gli ∞^4 definiti dall'equazione di Mo ge (si [illegible] per ogni sup. z=z(x,y) un eq. a d.p. del 1° ordine da risolvere a partire da (1))

Ora un complesso & di rette conduce a considerare una (particolare) equazione di Monge, ove si adotti per c no elementare uscente da ogni punto dello spazio il co formato dalle rette del complesso in esame.

(Fra cui ho ovviamente le ... Escluse

per una tale linea (G d B 303), in estensione di quanto avviene per il caso ben noto del cpl lineare, Lie trova facilmente che il piano osculatore in P si ottiene dal cono elementare uscente da P, il quale dunque ha fra le s generatrici la tgte t in P, come piano ad esso tangente l go la t (lo applicheremo poi)

Se p es per i pt si prendono coord.cart n h x y z, indica
(con .. l .. nel P_∞)
con l,m,n nl prop ai cos dir di una retta posso prender
e le p_{ik} i minori di $\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ l & m & n & 0 \end{pmatrix}$
allora per il cpl.di eq. om.ea detterà $F(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12}$
questa si scrive $F(l, m, n, yn-zm, xn-zl, xm-yl)=0$
e siccome per la tgte a una curva $l:m:n = dx:dy:dz$ e
q. pu... lmn
l'equazione di Monge relativa al complesso dato è

$$F(dx, dy, dz, ydz-zdy, xdz-zdx, xdy-ydx)=0.$$

Così a ogni complesso si accompagna un'eq. di Monge (ma no
viceversa; perchè non sempre la (1) si può scrivere nella
ma ora detta: del resto in generale per un'eq. di Monge qu
dunque le generatrici dei coni elementari sono in tutto, c
e è plausibile a priori ∞^4 e non soltanto le ∞^3 di
un complesso) Riaccostata così la teoria dei complessi
di rette a quella delle equazioni di Monge, era naturale
che per Lie venisse in prima linea il problema dell'integ
zione di tale equazione, il che come è chiaro geometricame
te vuol dire ricerca delle linee le cui tangenti apparten
gono a un dato complesso di rette. Dopo il caso del co
plesso lineare (dove si hanno p es tra le soluzioni le cu
biche sghembe, l'elica circolare, e dove è facile assegna
re la soluzione più generale, dipendente da una funzione

le quali fa le q.^{te} (rette del cpl.^{ss}) ammette le sue tracce sui 4 piani principali (p. 58): pertanto ho ∞^1 Cⁱ di soluzioni

I coeff.^{ti} b-a ecc. sono omogenei, e a meno nulla: cioè il 1° 1 il 2° k il 3° è $-k-1$). Quindi

cpl.^{ssi} ~~tetr.~~ tetraedr. corrispondenti a valori arbitrari di $k = \frac{c-a}{b-a}$ (p. 55), vuol dire che sono gli ∞^1 in cui si ripartiscono le rette dello spazio in base al birapporto secondo cui segano il tetraedro. In un piano generico π ho una conica inv.^{te} da per ogni complesso arbitraria di una variabile) Lie si è fermato a lungo sul più semplice fra i complessi quadratici, che è appunto il complesso tetraedrale, ed ~~[illegible]~~ ha assegnate esplicitamente le curve del complesso tetraedrale (curve integrali della corr.te eq. di Monge) (G d B 327) dipendenti esse pure da una funzione arbitraria. Ora la trasf.ne $x' = x^k$ $y' = y^k$ $z' = z^k$ (τ) entra in gioco in questa teoria per la ragione seguente (enunciata sotto (1)). Formiamo l'eq. di Monge relativa alla $a p_{14} p_{23} + b p_{13} p_{24} + c p_{12} p_{34} = 0$ di p. 55. Avrò (p. 61)

$$a(x\,dy - y\,dx)\,dz + b(x\,dz - z\,dx)\,dy + c(y\,dz - z\,dy)\,dx = 0$$

cioè

$$(b-a)\,x\,dy\,dz + (a-c)\,y\,dx\,dz + (c-b)\,z\,dx\,dy = 0. \quad (*)$$

Facendo la trasf.ne (τ) ho per. ($x = x'^{1/k}$ etc. e poi)

$$x\,dy\,dz = x'^{1/k}\,\frac{1}{k}\,y'^{\frac{1}{k}-1}\,dy'\cdot\frac{1}{k}\,z'^{\frac{1}{k}-1}\,dz'$$

Qui ~~[illegible]~~ divide in tutto ...

$$\frac{x'^{\frac{1}{k}-1}\,y'^{\frac{1}{k}-1}\,z'^{\frac{1}{k}-1}}{k^2}\left(\cancel{x\,d}\;(b-a)\,x'\,dy'\,dz' + \dots\right) = 0$$

cioè l'equazione è inalterata. Quindi la trasf.ne (τ) muta l'eq. di Monge in sè, cioè ogni curva integrale ~~cioè di cpl~~ o in una curva integrale, cioè ogni curva del cplesso tetraedrale in una curva del complesso tetraedrale. (1)

Anzi si vede che ciò vale qualunque siano le a, b, c che compaiono in $(*)$ cioè per gli ∞^1 cpl.ssi $(*)$ (sono ∞^1 perchè i ...)

Senza poter qui entrare a sviluppare la teoria svolta da
le, mi limiterò, inrelazione con le cose esposte, a ~~xxx~~ accennare
rapidamente
a bella applicazione da lui fatta alla ricerca delle asin
otiche delle superficie tetraedrali. Richiamo del concett
i linea asintotica(tale che il piano osc.re = piano tgte,
ppure rette.Curve della sup. inv te dalle tgti principali
Se la sup. è analitica,nel campo complesso se ne hanno du
sistemi ∞^1.Nel campo ~~reale~~ da ~~xxx~~ ogni punto iperbolic
per limitarci a questi,cioè a una regione (in piccolo) di
uesti-ne escono due.La loro determinazione dipende,per ci
cun sistema dall'integrazione di un'eq. diff. ordinaria d
° ordine;p es per $z = z(x,y)$ è la $r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 =$
he dà i due sistemi.E' un'equazione che non si integra in
ermini finiti che per pochissimi tipi di superficie) Su
erficie tetraedrali(~~xxx~~ de la Gournerie 1867) col nome
iù opportuno usato anche da Lie di superficie tetraedrali
immetriche (qui dirò brevemente sup tetraedr.) ha studiato le
up.cie rappresentate da un'eq. lin in $x^k\ y^k\ z^k$
ioè $Ax^k + By^k + Cz^k + D = 0$

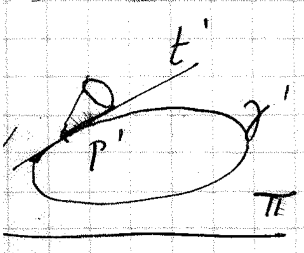
anche le curve tetraedrali intersezioni di due tali, stab
p.es. le C^4 di p. inters. di 2 Q con tetraedro autopolare (è più caso generale, spiegare)
endo per queste che le loro tgti segano i piani coordinat
il piano improprio in punti che danno un bir.costante;ci

In sostanza che tali curve appartengono a un complesso te
Lie G d B ~~325~~ e 33) Esempi; le quadriche, la sup. di Steiner t.
1/1 ,cfr (p 4) (1/a)).Lie ha mostrato, come dicevo, la possibil
ità di ottenere in termini finiti le asintotiche di tali
sup.: prima delle sue ricerche era noto, oltre a quello ovv
delle Q (spiegare) il solo caso della sup. di Steiner(~~&&~~
Clebsch, ~~&&&&~~ Crelle 1867, t 67, Üb die Steinersche Fläche
con integrazione indicatagli da Gordan; e poi subito dopo
geom.te mediante la rappr.ne piana da Cremona nello stess
1867, Rend Ist Lomb(1) IV, Op II p 389 Rappresentazione del
la superficie di Steiner.... sopra un piano. Vengono C4 di
seconda specie).

Il procedimento di Lie è questo. La sua trsfne fa corri-
spondere ai piani di S' le sup tetraedr. di S. Ne fisso un
corrispodente a un piano determinato π', sia Π Ho (v. t
ella) (1). ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ Fisso anche uno deter

S	S'	
sup Π) $Ax^k+By^k+Cz^k+D=0$	piano π'	(1)
in Π ho ∞^1 linee di C	in π' ho ∞^1 rette di C	(2)
linea γ^* di C.	conica γ^*	(3)

minato C degli ∞'cplssi tetraedr.(1) di p. 60 .Ho(2), perch
a ogni retta di C, come linea di C corrisponde per p 60
una linea di C. Poi quelle rette inviluppano una coni
ca γ di π', la quale dunque appartiene essa pure a C. Sicco
me le relazioni di contatto si mantengono nella trasfne
S e S', le ∞ linee ora dette di Π ammetteranno
un inviluppo, che come linea γ di S corrispondente alla
conica γ', di C, appartiene essa pure a C.(1) Orbene, la γ
così ottenuta è appunto un'asintotica della sup. tetrae
drale considerata. Siano invero P, P' punti corrispondent
di γ, γ'. In P', detta t'....., il piano tangente al cono
elementare uscente da P' è (come piano osc.re..p. 60
il piano π'. La trasfne mutando in sè il complesso C, tras
formerà il cono elementare $H_{p'}$ uscente da P' in quello
uscente da P (cioè le direz.ni ~~[illegible]~~ per P' da [illegible]
quello ecc...) : e viceversa direz. tgte a una sup.
si trasforma in id. id. il cono elementare H_p uscente



da P risulterà tgte lungo la dir corr te t
lla sup. .Invero, se no avrebbe in comune un'ulterior
irezione, che darebbe luogo a un'ulteriore direzione comu
e al cono $H_{p'}$ e al piano π'. Dunque il piano tgte al cono H_p
lungo t è tangente alla sup Π in P. Ma (p 60) esso è

nche osculatore alla linea γ in P. Quindi, valendo ciò per
P, la γ è asintotica di Π. Abbiamo così trovato in
ini finiti un'asintotica della sup. tetraedrale Π / Ma sic
quanto si è detto vale per ciascun complesso tetraedrale
), abbiamo così infinite asintotiche di Π. Anzi le abb
ddirittura tutte; perchè ognuno di quei complessi conduce
l piano π' a una conica γ'; e le ∞ coniche γ' così ottenut
~~&&&&&&&&~~ (p 62) appartengono a una schiera, cosicchè riemp
no doppiamente il piano. Perciò le corrispondenti curve
sulla superficie (che sono asintotiche) la riempiono dopp
mente e ci danno così tutte le asintotiche (Quanto ho det
to per non uscire dal campo reale conviene limitarlo a
gioni a punti iperbolici. Nel campo cplesso va sempre ben
~~&&&&&~~ Si hanno così effettivamente tutte le asintotiche
e si potrebbe scriverne le equazioni in termini finiti,
traducendo analiticamente il risultato. Del resto, Dar-
cfr
boux (1.ed p 143) con un procedimento diverso, col calcolo
effettivo ~~h&&&&&~~ - sapendo già dopo Lie che doveva condurr
al risultato ha trovato per la sup. tetraedr. di eq ...

$$\cancel{\left(\frac{x}{A}\right)^k + \left(\frac{y}{B}\right)^k + \left(\frac{z}{C}\right)^k = 1} \qquad \left(\frac{x}{A}\right)^k + \left(\frac{y}{B}\right)^k + \left(\frac{z}{C}\right)^k = 1$$

le asintotiche

$$\sqrt{\alpha}\left(\frac{x}{A}\right)^{k/2} + \sqrt{\beta}\left(\frac{x}{B}\right)^{k/2} + \sqrt{\gamma}\left(\frac{x}{C}\right)^{k/2} = 0$$

ni α, β, γ cost' leg. da $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

E che lo studio di queste sia semplice deriva dal fatto che le cdz. a cui soddisfano le loro C^m sono tutte lineari (anche quelle per d'inviluppo di toccare le 4 facce di Γ) salvo una, quelle che esprime trattarsi di quadrica inviluppo degenere

E sono proprio i complessi di Battaglini quelli a cui si prestò meglio le mie trasfm., perchè sono essi che diremo complessi lineari di C^m iscritte in Γ'

Possiamo chiamarli con lui coppie di piani coniugati rispetto a tali C^m; e lo sono effettivamente pensando le C^m come quadriche degeneri (come si chiama de comune dipend. pure. che ... Traducendo per dualità da questi tra P P' coni rispetto a cono: proiettando dal vertice su piano sarà le PP' coni rispetto a C^m; e così si dice che le coppie d'ogni da PP' determinano sulle C^m coppie armoniche (per per dualità piane ... e invers. sulle C^m ...)

Chiudendo questa lunga digressione,veniamo finalmente
alla III parte della Mem di Segre,cioè all'applicazione
$\Sigma c_{ik} p_{ik} = 0$
lla sua trsfne al cplesso di Battaglini.Come si è detto
a p 53,con la seconda parte è già acquisita l'equivalenz
-a meno della trsfne di Segre- fra i complessi di Battag
ni in S e i coplssi lineari di coniche iscritte in T' in
S'.Quindi Segre ~~&&&&&~~ comincia collo stabilire proprietà
per questi che si trasportano così a quelli.Precisamente
egli,per un dato complesso lin di C^2 iscr.in T',chiamiam
lo Γ',comincia a cercare se vi sono delle coppie di pia
che taglino in coppie armoncih ogni conica di Γ' ;e c
semplici considerazioni geometriche & relative a coniche
e quadriche di S'(e essenzialmente sull nozione di apola
rità),che conferma poi anche col calolo,trova che esis
tono ∞^1 di tali coppie di piani,e che essi inviluppano
una svilupp. di 4a classe Σ',circoscritta a una schiera di
quadriche(cioè duale di quartica di 1.a specie).- Aggiungiamo che le C^2 del complesso sono ∞^3 fra le ∞^4 ~~tipiche~~ iscritte nel tetraedro; e che [illegible] a una di queste ∞^4 di ~~una coni~~ ammettere come coniugati 2 piani prefissati basta già un sist. ∞^3 e già [illegible], e bisogna osservare proprio che, che il cplsso lin. delle C^2 è ~~facile~~ definibile come l'insieme delle C^2 iscritte in T' e rispetto a cui 2 piani (dunque di quelle ∞^1) sono coniugati

Le ∞^3 quadriche iscritte in Γ' rispetto alle quali 2 piani assegnati α' e β' sono coniugati fra loro. Consideriamo bene la ragione di Γ' anche dal pt. di vista geometrico. Facciamo un controllo: i cpl.ri lin. per detto Γ' si basano sulle 4.ª forma ∞^5. D'altro lato potendosi ognuno in ∞^1 modi si basa a 2 piani (cui ^{5}) arbitrarii, contenuto l'a

L'idea che ci proponiamo ... d'un complesso lin. di coniche è dunque quale: so

ò porta ~~aa~~ questa conseguenza. In un piano generico dello spazio λ' esiste ~~ao~~ UNA è conica ~~he~~ del complesso lin: ~~aaaa~~, secondo quanto precede, nella schiera delle ~~ae~~ coniche di λ' tangenti alle quattro rette tracce delle facce del tetraedro (T') quella individuata dall'ulteriore condizione di ammettere come fra loro coniugate le tracce sul piano λ' dei due piani (cond. lin. per C^2 ins. ...) α' e β'. Invece se prendiamo ~~aa~~ come piano λ' un piano della sviluppabile p es $\lambda \equiv \alpha'$, qui l'ulteriore ~~aaaaaa~~ condizione che α' e β' siano coniugati non dà più nulla di nuovo perchè (come per dualità il vertice di un cono è coniugato nella pol.^{a} rispetto a una sua conica a ogni punto dello spazio) così α' è coniugato a tutti i piani dello spazio, e fra essi anche a β'. Perciò in α' e così in ogni piano della sviluppabile Σ', esistono ∞' coniche del complesso lineare: sono tutte le C^2 del piano i(n)scritte in T'

~~Se~~ Immaginiamo di applicare quanto si è detto al comsolin di coniche Γ' di S' immagine di un cplesso di tagliniI Γ di S, ne vengonoproprietà del cplesso di Bataglini. Intanto in corrispondenza agli ∞' piani di Σ' sarà da considerare una ∞' di quadriche aventi T come autopolare (p. 39). Chiamiamo Σ questo sistema. Esso è evidentem te tale che per ogni punto generico di S ne passano 4: inoltre le sue quadriche si riuniscono a coppie (come dianzi i piani α' e β'). α e β Anzi, osserviamo il comportamento delle due quadriche α e β rispetto a ogni retta ...

el complesso Γ di Battaglini. Sulla conica corr.te r' ho
che i due punti $r'\alpha'$ sono armonici ai due punti $r'\beta'$ (p 73)
D'altro lato la corr za spaziale opera biunivocam te fra
r e r', cosicchè sono armonci su r i punti delle coppie $r\alpha$
$r\beta$. Vediamo così che ogni retta del complesso di Batta
glini taglia le due quadriche fisse α e β in coppie ar
moniche. Anzi (prinicpio di p 75) il complesso di Batt. vie
ad apparire come l'insieme delle rette di S che segano in
coppie armonciche le due quadriche fisse α, β.

Così a partire dalla df ne analit.ca che abbiamo
adottato per il cplesso di Battaglini, ne troviamo ora una
geom.ca. Esso è l'insiemd delle rette che segano in coppie
armoncihe due qusdriche fisse α e β. E viceversa, purch
queste siano in posizione generale, nel senso di avere un
tetraedro autopolare comune; perchè allora il ragionamento
si inverte.

Questa generazione del complesso di Battaglini è st
a trovata per la prima volta da Aschieri (Giorn di Batt.
Sipra un complesso di secondo grado, t 8 1868) (2 Note). Si chiama
no armonici (detti quadratici) i complessi formati dalle rette che segano in
coppie armoniche due quadriche in posizione qualunque. Il
caso più generale è dunque quello di un complesso di Bat

taglini;ma vi sono altre possibilità se le due quadri (es. quando le 2 coppie di piani ho evid. a compl. tetraedr. con $\tau = -1$) che di partenza non ammettono tetr. autop comune) Anzi in un lavoro di Segre,che risale alla stessa epoca,fa in collaborazione con Loria(Sur les differentes espèce de complexes du 2^e dégré des droites,qui coupent harmoniquement deux surfaces du 2^e ordre,Math Ann XXIII 1883 i due AA hanno classificato tutti i complessi armonici ~~\&\&\&\&\&\&~~ (in relazione con la class. generale dei cpl. quadr. di cui diremo poi),e ne hanno trovato) ben 23 specie diverse.Ripet che il tipo più generale è dato dai cplssi di Battaglini [di questo lavoro non dirò altro]

Anzi,il rag.to fatto da Segre ~~in questo lavoro~~ (e da noi riportato) prova cheun complesso di Batt.ni è armonico in infiniti modi diversi;perchè le coppie di quadriche α e β rispetto alle quali vale il risultato,sono ∞^1 ,sempre entro il sistema Σ .Quindi vi sono infinite coppie di quadriche rispetto alle quali ilcomplesso si comporta nel modo indicato.

Avverto anche che per dualità,il cplesso di Batt.ni deve apparire con la generazione duale (cioè ...);ma risulta dal lavoro di Aschieri,che si ha allora un sistema ∞^1 di quadriche inviluppo coincidente con Σ ;soltanto per la generazione duale le sue quadriche vengono accoc

(viste

Invece il cpl. quadr. generale dipende da 19 (v. oltre) in modo diverso

La generaz. di Aschieri(se ne hanno,ripeto ∞^1 per ogni
omplesso di Battaglini) fa vedere subito che questi dipe
ono da 17 costanti(due quadriche,ma ogni complesso in ∞
odi)].Battaglini,studiando il suo complesso aveva invece
ffermato che si trattava del complesso quadratico genera
Atti Acc Napoli 1866,ripubbl. in Giorn di Mat t 6 e t 7
L'errore esplicitamente fatt
a Batt. era questo.L'eq. generale quadratica $F(p)=$, ha 21
rmini(contarli).D'altro lato un cambiamento del sist. de
oord proi di punto dipende da 15 costanti(i rappoorti fr
16 a_{ij};o se vogliamo i 5 punti vertici del tetr e unità
uindi,afferma Battaglini,trasformando l'eq. di un comples
quadratico generale con una tale trsf di coord.te,scri
ndo che si annullano i 15 coefficienti dei termini(nuovi
n quadrati perfetti si hanno quindici equazioni in quell
incognite.Risolto questo sistema,l'eq. nuova sarà del t
di Battaglini.Il ragion to non regge affatto:nello stes
do si potrebbe provare p es che ogni quadrica è un piano
ppio.La causa dell'errore è questa.Trattandosi di eq. om
nee è vero che 15 eq. in più di 15 incognite sono sempre compati
li.Ma non è detto per nulla che la soluzione sia ammissib

nel senso che può risultarne $|a_{ik}|=0$; e allora la trasf.ne coordinate che è alla base del ragionamento viene a mancare. Così, pensando p. es. a una sup. di S_3, se io mi propongo di eseguire una trsf ne di coordinate in modo da annullare una espressione polinomio $P(c')$ nei coefficienti c' della sua equazione trasformata; e se p es scelgo come P un invariante, così $P(c') = P(c)|a_{ik}|^r$ se era inizialmente $P(c) \neq 0$ non posso rendere $P(c')=0$ se non con $|a_{ik}|=0$, cioè se la cond.ne non era già soddisfatta inizialmente, non lo sarà nemmeno con un cambiamento di coord.te.

Oltre a questo, vi era anche un altro controllo che avrebbe dovuto subito fare Batt.ni. I Complessi quadratici dipendono da 21-1-1 = 19 costanti. Quelli rappresentabili con la sua equazione per un dato sist. di riferimento (tetraedro e U) dipendono da 5 costanti. Ma, al variare del sist. di riferimento, non si hanno in tutto 5+15 costanti a disposizione; perchè se si ha la forma di Batt. per un certo tetraedro e U, essa è indipendente dal variare di U (per $x_i' = a_i x_i$, $p_{ik}' = a_i a_k p_{ik}$). Cosicchè (al massimo) si hanno secondo questo ragionamento ∞^{17} complessi di Battaglini. Non ostante l'errore rilevato resta a Battaglini il merito di avere data la prima trattazione estesa relativamente a complessi quadratici (prima della Neue Geom. des Raumes di Plücker 1868-69) e della Diss. inaugurale di Klein-1868.

p.essa

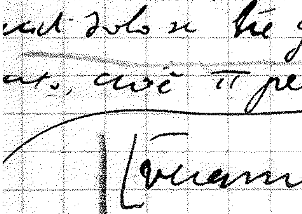
Riprendiamo la Tem di Segre.Ognuna delle ∞^1 quadriche di Σ corrisponde a un piano di Σ';e come in questo ab biamo ∞^1 coniche di Γ' ,e precisamente tutte le conic iscritte in T' (p 75),trasformando (p $^{39(6)}_{41}$)vorrà dire che tutte le rette esistenti sulla quadrica α stanno i Γ .Quindi ognuna delle ∞ quadriche di Σ ha la propri tà che TUTTE le generatrici dei due sistemi apparten gono al complesso di Battaglini

Chiamiamo coniugate due quadriche come α e β (se gate arm. dalle rette di Γ).Esse conducono anche fac mente alla superficie singolare del complesso .Pe un complesso algebrico qualunque di ordine n $>$ 1,un pu to si chiama singolare quando il cono da esso uscente h una generatrice doppia almeno.Così un piano di chiama s golare se la curva inviluppata in esso ha(come invilupp qualche singolarità."In generale" vi è una superficie l go di punti singolari;e ,come si dimostra i piani tang ti singolari sono gli stessi piani tangenti a questa superficie singolare.Dico in genrale,perchè vi sono dei complessi che si comportano in modo eccezionale.Prendia p es il complesso formato dalle rette incidenti una lin sghemba algebrica;qui ogni P dello spazio è singolare,

quadrici si spezza in 2 piani. Piani singolari quelli per cui le C² contengono coppie di punti.
s. per il cplesso tetraedrale in un piano π ho C² formata da rette che segano secondo birapp.to fisso τ (≠ 0, 1, ∞) le $g_1 \dots g_4$ tracce dei piani del tetr. su π. Quando degenera? Finchè g_i sono lati di quadrilatero piano cplto no [cfr per Semi Cplti 205] ma solo se tre g_i concorrono: cioè tre facce incidenti di π in un pt, cioè π per un vertice.

[Veramente non risulta delle cinette in 4 ~~pun~~ risulta da ogni altro che ogni pl. singolare si ottenga così]

Effettivamente allora seguirà p 56. che tutto il fascio delle rette per esso è del cplesso [ci sarà un altro fascio di cui fa parte la traccia del piano opposto: e per il vertice è A_4, ha centro nel pt O di π a, ≡ g_1 lati di $(O\, g_2\, g_3\, g_4)$
pel cpl. tetraedrale



= τ. — E dualmente. Quindi le sup singolari cui luogo è la F⁴ delle 4 facce, e come inv.^ppo degenere in 4 vertici (come si vede, per ogni cpl. quadr. è F⁴) chè il cono che da esso proietta la curva ammette sempre le generatrici multiple, in corr.za di ogni corda della c. Pei cpl quadratici i punti sing sono quelli per cui il co uscente (a P.) Ora, per il cplesso di Batt.ini, se P è co mune alle quadriche coniugate α e β, pensando le rette c complesso come quelle ~~aaa~~ che segano armon te le stesse α β, se una tale esce da P, dei quattro punti che su essa d vono formare un gruppo arm. due coincidono in P e quindi cess. un terzo; perciò essa deve essere tgte in P a α o β E viceversa. Quindi ~~aaa~~ ogni punto comune a due quadriche coniugate di Σ è singolare. La superficie singolare del c plesso di Batt.ni appare dunque come il luogo delle ∞^1 C comuni a due quadriche di Σ fra loro coniugate.

Inoltre chiamiamo singolari pel cplesso quadratico le rette sing. ogni (ono ∞^2) retta costit.ne dai due piani a cui si riduce il cono uscente da un P singolare, ~~tutte~~ le coppie delle rette singolari è formate dalle tgti alle ∞^1 C' considerate.

Diciamo subito che, per queste (∞^2) rette singolari Se mediante la sua trsf ne mostra che appartengono a un cplesso tetraedrale relativo allo stesso T.

Ma, per rimanere alla superficie singolare, Segre rico ancora allo spazio S', in cui si ha, come corrispondente di essa una sup. F', luogo delle intersezioni dei piani c niugati. Dunque F' è una superficie rigata. Cercandone

equazione, Segre la trova come inviluppo nella forma (7

$$c'(c_{12}\xi'_3\xi'_4 + c_{34}\xi'_1\xi'_2) + c''(c_{13}\xi'_4\xi'_2 + c_{42}\xi'_1\xi'_3) + c'''(c_{14}\xi'_2\xi'_3 + c_{23}\xi'_1 ...$$

dove le c_{ij} sono i coeff.ti dell'eq del complesso di Ba quali appaiono a p 7) ;mentre

$$c' = c_{13}c_{42} - c_{14}c_{23}\,; \quad c'' = c_{14}c_{23} - c_{12}c_{34}\,; \quad c''' = c_{12}c_{34} - c_{13}c_{4...}$$

(cosicchè $c'+c''+c'''=0$) H" al grado di Batt... per dedurne l'eq della superficie

Ora se ho la quadrica luogo $\Sigma a_{ij} x'_i x'_j$ l'eq inviluppo è

$\Sigma A_{ij} \xi'_i \xi'_j$ - che si scrive anche
$$\begin{vmatrix} 0 & \xi'_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \xi_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \xi_2 & & & & \\ \xi_3 & & & & \\ \xi_4 & & & & \end{vmatrix} = 0$$

(sviluppo secondo la 1ª verticale e la 1ª orizzontale)

e dualmente. Perciò qui si può formare a partire dalla (*) l'equazione della ~~~~ F' locale; e poi trasformandola col passaggio allo spazio S, $x'_i = x_i^2$ si ha finalmente per la superficie F singolare del complesso di Battaglini) l'equazione

$$(1') \quad \begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^2 & 0 & c'c_{34} & c''c_{42} & c'''c_{23} \\ x_2^2 & c'c_{34} & 0 & c'''c_{14} & c''c_{13} \\ x_3^2 & c''c_{42} & c'''c_{14} & 0 & c'c_{12} \\ x_4^2 & c'''c_{23} & c''c_{13} & c'c_{12} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & 0 & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & 0 & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & 0 \end{vmatrix} \quad (+)$$

[ges. Schrim III, 117]

Si tratta dunque di una F^4 e più precisamente di un tetraedroide (di Cayley), così chiamandosi la sup. di 4 ordine di eq.ne come la precedente dove il suddeterminante A_{11} è ... v. contro $\perp$. Dalla trasf.ne di Segre questi duce subito che la F^4 da lui ottenuta (tetraedrale) ha 16 punti doppi situati a 4 a 4 nelle facce del tetraedro T. Invero l'eq. inviluppo di F' -(*) a p 89 dove mancano i termini nelle $\Sigma_i^{\prime 2}$ -mostra che per la F' ognuno dei piani $x_i'=0$ è tangente, cioè la incontra in una coppia di rette. A ognuna di queste (p.es $x_4'=0 \quad a x_1' + b x_2' + c x_3'$) corrisponde (con $A_1 A_2 A_3$ autop...) $x_4=0 \quad a x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2$, cioè una conica in $x_4=0$. Quindi la faccia $x_1=0$ sega la F^4 in una coppia di coniche. Sia P dei 4 punti comuni a queste due coniche, quindi corr.te al punto P' comune a quelle due rette. Possiamo dedurne che P è doppio per la F^4 così. Condotta per P una retta generica a segare altrove la F^4, sia r, ad essa corrisponde una conica per P' che essendo iscritta in sarà tangente al piano $x_1'=0$ in P', cioè ivi tangente a la quadrica F', cosicchè avrà solo più due ulteriori intersezioni con F'. Perciò la r, fuori di P avrà solo più intersezioni con F, cioè P è doppio per F.

Il rag.to vale per ogni sup. (?) ; potendosi essa considerare come trasformata di una quadrica

La non esistenza di linee doppie nulle del fatto che ~~ogni~~ pt. doppio di F' fuori delle facce di T conduceva a pt doppi di F' (p.es. posto ivi $F = f(x_1^2 \dots x_n^2)$ di $F_i = 2x_i f_i$ e per tutte le $x_i \neq 0$ vengono tutte le f_i nulle).

Ma F' è ^generale^ quadrica irriducibile [da (*)].

Il tetraedroide, come F^4 con 16 punti doppi rientra fr le superficie di Kummer - così appunto chiamandosi le F^4 col massimo n° di pt doppi senza linea doppia ($n' = n(n-$ $-2d$. Quindi per $n = 4$, $n' = 36-2d$. Non posso avere 17 pun doppi, perchè verrebbe quadrica). Qui i punti doppi pres tano una speciale configurazione, avendosi 4 punti dopp in ciascuno di 4 piani; e anzi i 4 di ciascuno formano
il triangolo diagonale, come autopolare, deve coincidere.
(pag. prec.te:) un quadrangolo completo avenate per punti diagonali le facce del tetraedro.

Viceversa, possiamo aggiungere che ogni F^4 avent tanti e tali punti doppi è un tetraedroide. Infatti, posto p es $x_1 = 0$, l'eq. della F^4 deve dare quella di una C^4 con 4 pt doppi, cioè una coppia di coniche per essi, e siccome il triangolo diagonale del loro quadrangolo, che è aut rispetto a esse, è $A_2 A_3 A_4$ hanno eq.ni del tipo $\varphi \equiv l_2 x_2^2 + l_3 x_3^2 + l_4 x_4^2 = 0$ e $\psi = $ analoga. Quelle C^4 è $\varphi\psi$; cosicchè in definitiva nell'eq della C^4 entra solo potenze pari di $x_2\ x_3\ x_4$; Sono dunque esclusi nell'eq della F^4 termini del tipo $x_2^3 x_3$, e $x_2^2 x_3 x_4$. Cosicchè in tutto si avranno (in $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$) solo termini del tipo scritto, oltre a $k x_1 x_2 x_3 x_4$. Però questo è escluso perchè, se $F(x_i) \equiv$
$\alpha x_1^4 + \beta x_1^2(\ldots) + \ldots (x_2^2 x_3^2 x_4^2) + \varphi\ldots + (\ldots) + k x_1 x_2 x_3 x_4$
ogni termine, annullato, da F^4 con questi P doppi, tolto l'altro. Onde $k = 0$. Ho dunque $F = f(x_1^2\ x_2^2\ x_3^2\ x_4^2)$, e per di più

solo appartenenti di 6° grado
(liberando dai denom.) perchè il termine
$(x^2+y^2+z^2)^3$ resta a 1° e 2° membro

$(x^2+y^2-c^2)\left\{x^2(x^2+y^2-b^2)+y^2(x^2+y^2-a^2)-\cancel{(x^2+y^2-b^2)}(x^2+y^2-a^2)\right\}$

...cioè eliminando $(x^2+y^2)^2$

$(x^2+y^2-c^2)\left(-b^2x^2-a^2y^2+a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)-a^2b^2\right)$

...ossia

$(x^2+y^2-c^2)\left(a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2\right)=0$

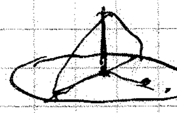
c.v.d.

le che per $x_1 = 0$, la f si decompone nel prodotto di due
rme lineari. Quindi $f(x_1', \dots x_4')$ = è in S' una quadrica tan
nte alle quattro facce di T', cioè ha un'eq. inv. del ti
o (*); cioè la F^4 è un tetraedroide.

Il tetraedroide non è che una generalizzazione di un
uperficie già studiata parecchio tempo prima; la cosidetta
uperficie delle onde di Fresnel, da questi considerata a p
osito dei mezzi birifrangenti, e geometricamente definita
osì. Dato ellissoide O, per ogni ~~sua~~ ellisse, sezione con un piano pe
l centro, portiamo sulla perpendicolare a questo in O le l
unghezze degli semi assi dell'ellisse sezione il luogo delle lo
stremità è la superficie delle onde. Per l'ellissoide
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, la sua eq.ne risulta (p es Rep. II 86 ~~Salmon III~~ ~~p 2~~)

$$\frac{a^2x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2} + \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} = 1 \qquad (1)$$

a sezione con un piano principale p es $z=0$ si spezza in
ue coniche, anzi in un cerchio e un ellisse, come si vede
etricamente pensando a piano segante per l'asse z, varia
e. Qui l'ellisse sezione ha un asse costante, ~~caaaaaaaa~~
il che conduce a un cerchio, e l'altro coincide ~~aaaaaaaa~~
on un semidiam. dell'ellisse traccia su l piano xy; così
hè oltre al cerchio predetto si ritrova tale esllisse ru
o di 90° (v figura)



~~$b^2y^2(x^2+y^2-a^2)=0$~~

Del resto anche da (1) per $z=0$ ho $a^2x^2(x^2+y^2-b^2)+$

$r^2 = \sum x^2$

$\sum x^2 (r^2-b^2)(r^2-c^2) \qquad = (r^2-c^2)(r^2-b^2)(r^2-c^2)$

[illegible]

$\cancel{r^6} + \sum x^2(-b^2-c^2)r^2 = \cancel{r^6} - r^4 \sum a^2$

[illegible]

$r^2 \left\{ (b^2+c^2)x^2 + \cdots - (a^2+b^2+c^2)\, r^2 \right\} = 0$

$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2) = 0$

Inoltre il piano all'infinito sega una linea di cui i ot
ne l'equazione annullando i termini di quarto grado nell
quazione resa intiera, cioè

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)=0$$

In definitiva, ogni piano faccia del tetraedro fond. sega una coppia di coniche, e inoltre manca nell'eq. della F^4 termine $x_1x_2x_3x_4$ (avendosi solo termini pari), cosicchè il ragionamento fatto prima prova trattarsi di un caso parti colare del tetraedroide. Dei 16 punti doppi soltanto 4 so reali. Nessuno evid.te (anche) all'infinito ~~Nel piano z=0~~ no
se $a^2>b^2>c^2$, nel piano $z=0$ no perchè il cerchio
$x^2+y^2=c^2$ è tutto interno all'ellisse $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$; nel
piano $x=0$ analogamente; nel piano $y=0$ invece il cerchio
$x^2+z^2=b^2$ sega in 4 pt l'ellisse... . Ho quindi 4 pt.
doppi reali nel piano xz

Ritornando al tetraedroide quale è ottenuto nella M di Segre, il fatto che il complesso di Battaglini è autodua dice già che tale F^4 è anche di 4. classe, e che dovrà a re 16 piani tangenti doppi (ognuno lungo una conica). Eff tivamente Segre giunge a questi piani così. In S' p.es. da A'_1 circoscriviamo alla quadrica F' un cono quadrico. Siccome essa è iscritta in T', in particolare ammette come

Per i piani incidenti in $A_2 A_3 A_4$ ho eq.

$$x_1^2 - 2p x_2 x_3 + p^2 x_3^2 - 2q x_2 x_4 + q^2 x_4^2 + 2l x_3 x_4 = 0$$

con $l^2 = p^2 q^2$ cioè $l = \pm pq$; ~~[illegible]~~ $l = \pm pq$ perchè se fosse $l = pq$ avrei $(x_2 - p x_3 - q x_4)^2 = 0$.

$x_1^2 - \quad - \quad - \qquad\qquad - 2pq\, x_3 x_4 = 0$

... l'eq. del piano è $a_2^2 x_2 + a_3^2 x_3 + 2 a_2 a_3 \sqrt{x_2 x_3} = a_4^2 x_4$

...

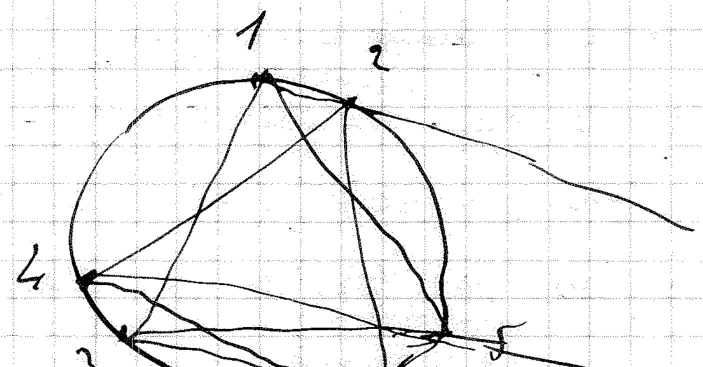
$$(a_2^2 x_2 + a_3^2 x_3 - a_4^2 x_4)^2 = 4 a_2 a_3 x_2 x_3 \quad \text{cioè}$$

$$a_2^4 x_2^2 - 2 \sum a_2^2 a_3^2 x_2 x_3 = 0 \quad \text{che coincide con la prec.te}$$

piani tgti da A'$_1$ le tre facce che ne escono. Perciò - come
ulta da cons di geom anal element piana - la sua eq invi
so è del tipo $a\sqrt{x_i'} + a_0\sqrt{x_0'} + a_5\sqrt{x_5'} = 0$
Perciò ancora trasformandola in S si ha la quaterna di pi
$\pm a_i x_i \pm a_0 x_0 \pm a_5 x_5 = 0$
corrispondenti. Ognuno di questi piani ha a comune con la
una quartica che - pensando o alla figura corr.te di S' dov
si ha l'intersezione di F' con un cono circoscritto, curva
(C2) contata due volte - sarà pure una curva doppia, cioè
una conica doppia. Si hanno dunque per il tetraedroide 16
piani tangenti doppi, 4 uscenti da ogni vertice di T (come
va bene per dualità: avevamo 4 punti doppi in ogni faccia
di T).

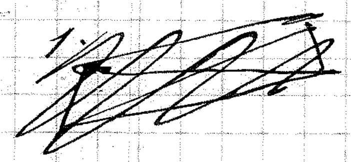
~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ Segre poi deduce anche altre partico
rità della cfgrz dei 16 punti e piani doppi, p.es. che ogni
piano contiene ~~&&&&~~ 6 dei 16 punti. Ciò del resto avviene
per tutte le sup. di Kummer. Mi limito poi anche a accen
re che Segre ha anche osservato che il tetraedroide è su
singolare non per uno ma per due complessi di Battaglini

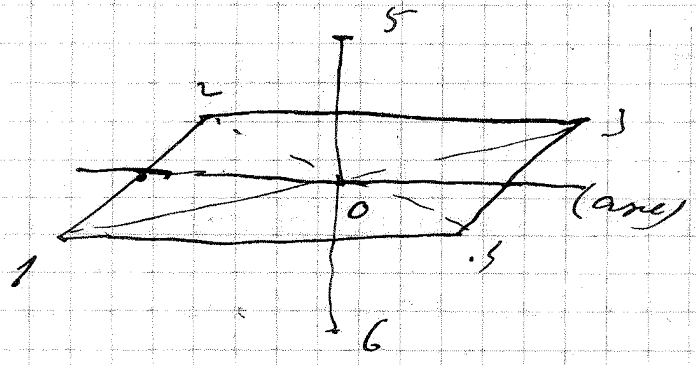
Il tetraedroide compare poi anche in un altro la
ro di Segre, di poco successivo (Sur un cas particulier de
la surface de Kummer, Lettre a M. Rohn, Leipz. Ber. 34 1884
Rohn aveva considerato le sup. di Kummer che si possono


1
2
4
3
5
6

considerare come tetraedroidi in più modi, trovando la possibilità di tali sup 2,3,4 volte tetraedroidi. Segre ha fatto vedere che vi è ancora l'ulteriore possibilità di una sup. che è tetraedroide in 6 modi diversi. Accenno molto rapidamente che la questione è stata (non si sa dire come) cfr. pur p. 245 da Rohn ricondotta all'altra: in quali casi è possibile che 6 elementi di una forma di prima specie si ripartiscano in più modi in coppie di un'involuzione? Così, si possono prendere p.es. 3,4,5,6 arbitrari, e cercare 1 2 come coppia comune alle due inv.no 45 36 e 35 46. Avrò così due ripartizioni in coppie di involuzioni; e una sup. due volte tetraedroide. Ma si hanno altre possibilità: se prendiamo come sostegno un cerchio, e vi iscriviamo due triangoli eq. 135, 246, le terne 12, 45 36 ; 34 16 25 ; 56 23 14 appartengono a involuzioni (terne di rette parallele) *) Si potrebbe enunciare proiett.te parlando di due cicli d una proiettività ciclica del terz'ordine. Nasce superficie tre volte tetraedroide. Di più, si può prendere il 2° triangolo simmetrico del primo rispetto al centro, p es simmetrici 1 e 2, 3 e 4 5 e 6, e allora si ha una nuova involuzione (polo nel centro) e superficie 4 volte tetraedroide. Questi i casi che erano stati riconosciuti da

*) perchè ciascun △ sono individuati da 1, 2 tutte le figure [illegible]




5
2
3
0
(axe)
1
6

Rohn;ma Segre ha osservato che vi è ancora(solo)questa possibilità.Rappresentiamo i punti complessi della retta sostegno nei punti reali della sfera di Gauss;e prendiamo qui i punti 1,2,3,4,5,6 nei vertici di un ottaedro regolare.(ottenuto p.es. dal quadrato 1234 iscritto in cerchio massimo....)Se faccio ruotare la sfera di 180° intorno alla perp. dal centro a 12,34,il quadrato va in sè,e quindi anche l'ottaedro(e 5,6 si scambieranno fra loro).Ora,come si vedrebbe in modo preciso e come è plausibile,la rotazione (trasfne biun. della sfera complessa in sè,il che però non basta alla deduzione) si traduce in una proi.tà sulla r, e questo è ovvio certo involutoria.Si ha così un'involuzione in cui quei sei punti si riuniscono a coppie.Di tali ne ho una a partire da ogni spigolo dell'ottaedro e dal suo opposto;ho 12 spigoli e 6 involuzioni.Così Segre trova una sup. 6 volte tetraedroide.

Al complesso di Battaglini Segre è tornato molti anni dopo "Su una generazione dei complessi quadratici di rette del Battaglini,Rend. Palermo 42 1917" trovando quest'altra nuova generazione.Partiamo da due schiere
A, B ~~che suppo~~ α, β che si possono supporre ~~supposizioni~~ nulle, tale "pos. g
(regoli) -di quadricge distinte- e imponiamo a una retta

Per capire bene la dm.ne seguente premetto:

a) la generazione di Chasles del cplesso lineare. Fi ta una schiera S, e in essa un'involuzione, le ∞^1 c ze lineari aventi per direttrici coppie di questa scrivono un complesso lineare[1]. Infatti per a re le rette del complesso così ottenuto in piano generic devo congiungere le coppie di un'inv. su una conica. poi ho un fascio. Quindi in un piano un fascio; cioè ordine complesso UNO. Possiamo anche aggiungere che ogni cples lin si può ottenere così. Invero dato un tale C, e preso una schiera S' e poi retta h e ulteriore k in C (queste ultima fuori della crza S'h), se prendo le due rette di S incontrate da h, e le due incontrate da k, individua in S un'inv. che genera c a un cpl lin C', il quale ha comune S', h e k e quindi coincide con C

b) Consideriamo ora una schiera A e un'altra schiera B. Per ciascuna con la coniugata B' e A e A' passa una rete di compl Lineari (e anc delle loro int. , cgrze lineari). Considero la corr za la 1.a come rete di cplessi L, e la seconda di cgrze L' che nasce così. Fissato L, esso ha in comune con B due rette s,t che individuano una cgeza (per B') L'. Viceve sa partendo da L', cioè da s t queste due rette sono c giunte ad A da un cpl L. Questa corr.za biun. dico che una reciprocità (nel solito senso per forme di 2.a spe cie). Infatti, faccio descrivere a L un fascio nella sua rete; cioè prendo gli L per una cgrza lin fissa. Allora ho coppie s,t in B tali che data s, è individuato e quindi t; è corr.za biun e algebrica, cioè proi. involtoria evid.te; quindi le s,t si corrispondono in un'inv zione. E allora la gen di Chasles mostra che L' descriv un complesso lin., cioè una forma di 1 a specie[2] c d d

[1] che contiene anche la schiera coniugata di S'.

[2] [Non occorre il viceversa: se per 2 piani ho corr.za biun.ca fra i pti che mette r di π e r' di π', mostro il viceversa: se una retta è proiettiva da C^n, segando C^n con r devo avere 1 pto comune per C' e r': cioè n = 1]

in sostanza che la quaterna di punti di incontro con le
le quadriche sia proiettiva a quella dei piani tangenti
alle quadriche stesse, ma per fissare bene l'ordine delle
quaterne diciamo con Segre così) che la quaterna dei punti

A, B

ove essa incontra le rette delle due schiere sia proietti-
va alla quaterna dei piani che da essa proiettano le rette

che sono appunto piani tg. per r

stesse. Questa costruzione porta a un complesso di Battaglini
e viceversa ogni complesso di Battaglini si può generare

gen.te i due modi da S. "persuadersene su due schiere"

risultano poi

così. Le quadriche che entrano in gioco ~~sono~~ sempre quelle

accoppiate

del sistema Σ di p. ma ~~ordinate~~ in modo diverso. Le
dimostrazioni di Segre sono in parte sintetiche e in parte

Anal

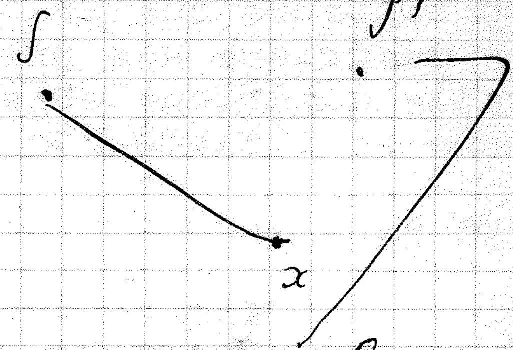
analitiche, in parte poi ancora si svolgono in S_5. ~~Mi~~ lim-

ampliata sinteticamente

iterò qui ~~a~~ ~~indicare la prima dim. fra quelle~~ Cir Segre, che
la generazione conduce a un complesso di Battaglini. Siano
m, n le rette di A incontrate da r; s, t quelle di B. L'ipo-
tesi è che i 4 punti $r(m, n, s, t)$ formino quaterna proi. ai
piani omonimi; cioè, ricordando come sono disposte le rette

relative alla retta r,

di una ~~congruenza~~ lin. spec., l'ipotesi è poi che le 4 rette
m n s t appartengano a un cgr lin spec avente r come unica
direttrice. E l'ipotesi si trasforma ancora così. Se esis-
te la cgrza lin spec., io posso fare passare un cpl lin per
essa e per un'ulteriore retta gene.ca, p es per una retta
di A: allora questo complesso lin ~~spec~~. ha in comune con
schiera A tre rette, cioè questa oltre a m, n. Quindi vi è



] Ricordare p.es. quello che si fa ~~per~~ la gen. proi. delle Q con stelle reciproche date con centro. la $\sum a_{ij} \lambda_i \mu_j = 0$

pst. $\sum_j a_{ij} \mu_j = \rho_i$ ci si riduce a $\sum \lambda_i \rho_i = 0$. E poi.

x è un pt. del luogo, ~~se~~ r è la retta della 1ª stella per esso
deve essere certo dire che un piano della prima passa per la retta corrispte oppure che passa per
cui corrisponde nella 2ª il piano (per x) $\sum \rho_i \Phi_i = 0$ le Σ
g. di quelle λ $\sum \lambda_i \rho_i = 0$ e $\sum \lambda_i \Omega_i = 0$ ~~devono~~ coincidere (le 1e dei piani
per r: le 2ª i piani per x, sopra nella 1ª stella). cioè

$\rho_i = \Omega_i(x)$ e siccome x $\sum \rho_i \Phi_i = 0$ è anche $\sum \Omega_i \Phi_i = 0$.

Viceversa, se in x è $\sum \Omega_i \Phi_i = 0$ per le $\rho_i = \Omega_i(x)$ esso
ta sul piano della 2ª stella $\sum \rho_i \Phi_i = 0$: ~~ne consegue~~ i piani
la retta r corrisp^te sono quelli per cui tali sono tali che
$\sum \rho_i \lambda_i = 0$ per i valori λ cioè $\sum \lambda_i \Omega_i(x) = 0$; e questi sono
sono proprio i piani per x.

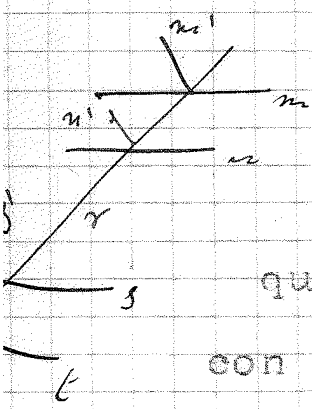
ol lin contenente A r s t.E viceversa allora le sue rette
ppoggiate alla retta a r del complesso stesso appartengo
una cgrza lineare ~~aa~~ speciale di asse r.

Consideriamo allora l'ipotesi sotto quest'ultima for
a:le rette r sono dunque quelle per cui esiste un cplesso
in L che contiene la schiera A,oltre a r,s,t. Se per le
chiere A e B' consideriamo la corr.za di p. 104,dove a L
orrispondeva proprio la L' di direttrici s,t vediamo che
a r sta in L e sta contemporaneamente nella L' appoggiand
i a s,t).Quindi le r del complesso che studiamo appaiono
ome rette comuni al complesso L e alla schiera L' che de
crivono due reti reciproche. Allora,con rag.to noto si c
lude che r descrive un complesso quadratico,rappresentan
e due reti(di cplessi lineari) con $\lambda_1\Omega_1+\lambda_2\Omega_2+\lambda_3\Omega_3=$, $\mu_1\Phi_1+\mu_2\Phi_2+\mu_3\Phi_3=$
appiamo che se $\sum\lambda_i\mu_i=0$ è l'equazione della rcprc.
ome si può supporre,il luogo dei raggi comuni a L,L' è

$$\Omega_1\Phi_1+\Omega_2\Phi_2+\Omega_3\Phi_3=0$$

he è appunto un'eq. di 2° grado. Qui naturalmente L e L
corr.ti hanno in comune una schiera;e di queste se ne h
∞^2 . Precisiamo ora il risultato dimostrando
che quel complesso quadratico C è di Battaglini.Intanto
~~da~~ il complesso generato per incidenza sulle schiere A,B

Fin qui questa ipotesi [ovvero da tipo?] non entrava in gioco



si può anche considerare generato per
incidenza sulle schiere incidenti A'
Infatti chiamando m' ecc come in figura, la
quaterna di punti $r(mnst)$ coincide ovviamente
con la $(m'n's't')$. Quanto alla quaterna di piani
$(m'n's't')$ osservo che p es il piano rm' deve segare una
retta di A, che risultando incidente a r sarà la n. Perciò
quat. punti $r(m'n's't') \equiv$ quat. punti $r(mnst)$
quat. piani $r(m'n's't') = r(nmts) \barwedge r(mnst) \barwedge$
quat. pt. $r(mnst) \equiv$ e quindi $\barwedge$ quat. pt. $r(m'n's't')$.

Ciò premesso, e supposte ora le due quadriche α e β
in posizione generale" cioè con tetraedro autop. comune
. Ognuna delle due quadriche è invariante per il Γ_8 relativo a questo tetraedro (basta pensare alla sua equazione)
precisamente le 3 omografie biassiali del Γ_8 (mutando una
retta in una non incidente) mutano A in A e B in B, e quindi
il complesso C definito per incidenza su A e B in sè; le 4
omologie armoniche del Γ_8 mutando una retta in una incidente
mutano A in A'; B in B', e C definito a partire da A e B
nello stesso C definito a partire da A' e B', che è sempre
la stessa cosa. Quindi il complesso C è invariante per
il Γ_8 e come tale (p. 25) è di Battaglini. Veramente resta

rebbe il dubbio che possa essere tetraedrale. Ma da successive consideraz. di Segre ~~che~~ su cui qui non mi fermo risulta che la C^4 comune ad α e β è luogo di punti singolari. Quindi non si può certo trattare del cplesso tetraed. ... la superficie singolare non contiene parti non piane.

Non si trovi contraddizione tra il fatto che la quartica (attuale) $\alpha\beta$ e di p. singolari aventi sta sul tetraed. come la $\alpha\beta$ di p. 87 e il fatto che si è detto (p. 105) non essere gli accoppiamenti $\alpha\beta$ gli stessi di (cioè le attuali quadriche $\alpha\beta$ non sono le coniugate ...) allora. Il fatto è che il tetraedroide contiene questi due distinti sistemi di quartiche: pensando alla trasf. ne tra S e S' delle pp prec ti e in particol. alla quadrica F' (p 89) omologa del tetraedroide F, le generatrici di ciascun sistema dànno (p 89) quartiche di 1° specie che vengono così a ripartirsi in due famiglie ∞'.)

Non sto a dimostrare con Segre (sint.te) che viceversa ogni complesso di Battaglini ammette questa generazione.

Darò piuttosto un'idea della conferma per via analitica, limitandomi anche qui al teorema diretto. Riferiamo naturalmente le due quadriche α e β al loro tetr. autopolare comune T, che supponiamo esistente, e siano

$$(1) \quad \Sigma a_i x_i^2 = 0 \qquad \Sigma b_i x_i^2 = 0$$

le loro equazioni. Si tratta allora in sostanza ~~...~~ per una retta $r = p_{ik}$ di valutare in funzi

$$\Sigma a_i (y_i + \rho z_i)^2 = 0 \quad ; \quad \Sigma a_i y_i^2 + 2\rho \Sigma a_i y_i z_i + \rho^2 \Sigma a_i z_i^2 =$$

$$(\Sigma a_i y_i z_i)^2 = \Sigma a_i y_i^2 \, \Sigma a_j z_j^2$$

~~$\Sigma a_i y_i \ldots \Sigma a_i a_j$~~

$$a_1^2 \cancel{y_1^2} z_1^2 + 2a_1 a_2 y_1 y_2 z_1 z_2 \ldots = a_1^2 \cancel{y_1^2} z_1^2 + a_1 a_2 y_1^2 z_2^2 + a_1 a_2 y_2^2 z_1^2$$

$$a_1 a_2 (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + \ldots = 0$$

Perciò, applicando ciò alla quadrica del fascio ind.to da α, β $\quad \Sigma (\lambda a_i + \mu b_i) x_i^2 = 0$ riconosciamo che si ha contatto con la retta p_{ik} per $\Sigma (\lambda a_i + \mu b_i)(\lambda a_k + \mu b_k) p_{ik}^2$

(2) $\quad \lambda^2 \Sigma a_i a_k p_{ik}^2 + \lambda\mu \Sigma (a_i b_k + a_k b_i) p_{ik}^2 + \mu^2 \Sigma b_i b_k p_{ik}^2$

eq. che dà 2 valori per λ/μ. Segre riconduce in sostanza il calcolo del birapporto $r\alpha, r\beta$ a quello delle 4 coppie dell'inv.te in r rispetto al fascio $\alpha\beta$ provenienti risp. da α, β e delle 2 quadriche (2). Questo passaggio, sottile in Segre, si può spiegare così.

..ne delle sue coordinate il birappo to dei 4 punti $r\alpha$ $r\rho$...
.. così peril birapporto ~~analogo~~ duale,e poi di imporne l'uguag..
..nza e di constatare che la condizione che ne risulta per
.. p_{ik} ha la forma dell'eq del complesso di Battaglini.
Ora a ciò Segre giunge molto rapidamente con un calcolo
.. spiega così, in base alle seguenti premesse

1) per una quadrica riferita a un tetraedro autopola..
p es per la (1) la cond^ne che una retta p_{ik} sia tangente
..a

$$\sum a_i a_k p_{ik}^2 = 0$$

Basta scrivere che la retta $p_{ik} \equiv y^2$ ha intersezioni coin..
cidenti con la quadrica,per avere ilrisultato (Oss. Le
tangenti a una quadrica formano dunque un -particolare-
complesso quadratico :ciò è evidente a priori pensando
p es al cono uscente da un punto.Qui viene precisata l'..
del complesso)

2) Si abbia in una punteggiata una coppia PQ di pun..
e poi un'altra coppia P'Q'.Sia $(PQP'Q') = m$. D'altro lat..
consideriamo l'involuz. definita dalle due coppie, e in
essa la coppia formata da un punto doppio e quella form..
ta dall'altro.Nasce così nella I una quaterna di copp..
..iegan: birapporti in fascio) - nell'ordine PQ, P'Q', pt. doppio, pt. doppio
che dànno luogo a un birapporto n.Che relazione vi è fra
sto e m? Si prende per. ~~PQ~~ $\begin{matrix} P & Q & P' & Q' \\ \infty & 0 & 1 & m \end{matrix}$ si ha poi
..m: PQ $x=0$ coppia P'Q': $x^2-(1+m)x+m$. I pt. doppi

[illegible] di Poncelet sono $+\sqrt{m}$, $-\sqrt{m}$ e danno le coppie $(x+\sqrt{m})^2=0$ cioè $x^2+2\sqrt{m}\,x+m=0$ e analoga
[illegible] coeff. di x^2+m e x: fanno il rapp. di $\frac{\text{coeff. } x}{\text{coeff. } x^2+m}$ e

$n=\left(\infty, -(1+m);\ 2\sqrt{m}, -2\sqrt{m}\right) = \left(+2\sqrt{m}, -2\sqrt{m}, 1+m\right)$ [illegible]
invert. e cambio segno

$$n=\frac{1+m-2\sqrt{m}}{1+m+2\sqrt{m}}$$ (Vede [illegible] il valore di n [illegible] circoli[illegible]

[illegible] in che ordine si devono considerare i due pt. doppi e [illegible] di circolette fra un valore e il suo inverso aritmetico)
Perciò se P, Q e $P'Q'$ sono dati risp. dalle eq.ni di 2° grado $\varphi=0$, $\psi=0$ mentre le coppie circ.ci (i pt. doppi) sono dati da $k_1\varphi+\psi=0$ e $k_2\varphi+\psi=0$ sarà $n=(\infty, 0\ k_1, k_2)=(k_2\ k_1, 0\infty)=\frac{k_2}{k_1}$ cioè $\frac{k_2}{k_1}=\frac{1+m-2\sqrt{m}}{1+m+2\sqrt{m}}$. E se fissiamo k_1 e [illegible] si conoscono soltanto attraverso un'eq.e di cui sono radici

$$c_0k^2+c_1k+c_2=0 \quad \text{avrò}$$

$$\boxed{\frac{c_1+\sqrt{c_1^2-4c_0c_2}}{c_1-\sqrt{c_1^2-4c_0c_2}}=\frac{1+m-2\sqrt{m}}{1+m+2\sqrt{m}}}$$

Però se ho 2 quaterne con $P, Q, P'Q'$ e coppie simili che sono proiettive ~~[illegible]~~ applico quanto sopra e ponendo uguali le fun.

$$\frac{c_1+\sqrt{c_1^2-4c_0c_2}}{c_1-\sqrt{\ }}=\frac{c_1'+\sqrt{c_1'^2-4c_0'c_2'}}{c_1'-\sqrt{c_1'^2-4c_0'c_2'}} \qquad (1)$$

dove per la 2.a quaterna ho not. analoghe alla prima

…i posto $H = \frac{c_1^2 - 4c_0c_2}{c_1^2}$ che, $\frac{1+\sqrt{H}}{1-\sqrt{H}} = \frac{1+\sqrt{H'}}{1-\sqrt{H'}}$

…cui $\sqrt{H} = \sqrt{H'}$ cioè $H = H'$. Se i (3) al 2° modo

…no scambi num. den. cui $\sqrt{H} = -\sqrt{H'}$ e sempre $H = H'$!

E viceversa. Non si scriva $H = H'$ posso invece scrivere p. es. $\frac{c_0c_2}{c_1^2}$

Ciò premesso scriverò le relaz. di proiez. in questione

…do ~~$H = H'$~~ dove H è calcolato nella (2) e H' in …

…olo analogo dall'eq. ne duale. Quale è nell. (11) in … si

$\frac{z_i}{a_i} = 0$) (scritte le $p|q$)

$$\lambda^2 \sum \frac{p_{12}^2}{a_0 a_4} + \lambda\mu \sum \left(\frac{1}{a_0 b_4} + \frac{1}{a_4 b_0}\right) p_{12}^2 + \mu^2 \sum \frac{1}{b_0 b_4} p_{12}^2 = 0$$

…ando ~~[illegible]~~ $\frac{c_0c_2}{c_1^2}$ che ho

$$(\alpha) \quad \frac{\sum a_1 a_2 p_{12}^2 \cdot \sum b_1 b_2 p_{12}^2}{\left[\sum (a_1 b_2 + a_2 b_1) p_{12}^2\right]^2} = \frac{\sum \frac{p_{12}^2}{a_0 a_4} \cdot \sum \frac{p_{12}^2}{b_0 b_4}}{\left[\sum \left(\frac{1}{a_0 b_4} + \frac{1}{a_4 b_0}\right) p_{12}^2\right]^2}$$

…uente è la cond. a cui deve soddisfare la retta r; cioè

~~[illegible]~~ ovvero che $\sum \frac{p_{12}^2}{a_0 a_4} = \frac{1}{a_1 a_2 a_0 a_4} \sum a_1 a_2 p_{12}^2$,

… e che cui posso sopprimere fatt. dei 2 membri

$$\left[\sum \left(\frac{1}{a_0 b_4} + \frac{1}{a_4 b_0}\right) p_{12}^2\right]^2 = \frac{1}{a_1 \dots a_4 b_1 \dots b_4} \left[\sum (a_1 b_2 + a_2 b_1) p_{12}^2\right]^2$$

…strando le radici

$$\sum \left(\frac{1}{a_0 b_4} + \frac{1}{a_4 b_0}\right) p_{12}^2 = m \cdot \sum (a_1 b_2 + a_2 b_1) p_{12}^2 \quad \text{dove } m = \dots$$

H. due valori per m. A ognuno corrisponde una coppia
di Battaglini. Effettivamente ~~avevamo~~ scritto (α) proviamo
~~che le 2 ipotesi~~ $\cancel{\sqrt[m]{H} = \sqrt[m]{H'}}$ $H = H'$ ~~corrispondenti a diversi~~ ordine
~~nost della~~ ~~coppie~~ che è indip.te dell'ordine di pt. P Q, P' Q'
~~delle copp~~ entro le 1a o 2a coppia; cioè si scelga non tiene conto
della ~~teoria~~ precisazione di p. 105.
Anche qui una [illegible] a correzione

Vengo ora a parlare delle due grosse Memorie che hanno costituito la Dissertazione di laurea di Segre,strettam te connesse fra loro.Esse soni"Studio sulle quadriche i uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni Mem Acc Torino (2) XXXVI 1884 e Sulla geometrua della r ta e delle sue serie quadratiche,ibid.

La 1.a Memoria ,pure ess ndo concepita in modo auton mo,èredatta in modo da servire di preparazione alla sec da;in quanto Segre cerca di mettervi particolarmente in evidenza quanto servirà per la geometria della retta.Co munquenrestiamo per ora alla prima Memoria.Essa si divi in due parti;nella prima di studiano singole quadriche uno S_r;nella seconda i fasci di quadriche,e altri argom ti relativi a sistemi di quadriche,destinati a trovare poiapplicazione nella geom della retta. Queste due part sono precedute ,oltre che da una Prefazione,dove si dànno notizie sul contenuto delle due Memorie,da una Introduzione ,dove Segre richiama generalità di carattere elementare che si dovev no già allora ritenere note di geom proi iperspaziale,quali si trovavano più o meno esplicitamente in lavori di Jord D'Ovidio,Veronese e altri.La geom;proi ipersp. era appu allora si può dire al suo nascere,sebbene si avessero g alcuni lavori,oltre che degli AA citati,di Cliff di Klein,di Cayley e di altri dove comparivano delle nozioni ipers ziali

Gli studenti del 4.o anno conoscono già un modo per giungere alla nozione di S_r, spazio proiettivo a r dimensioni, che richiamo brevemente. Prendiamo un sist. lin. di forme, p. es di curve piane, che sia ∞^r, individuato da forme lin ind. $f_0, f_1 \ldots f_r$. Allora vi è una corr.za biun senza eccezione fra le forme del sist.

$$(1) \qquad \lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_r f_r = 0$$

e i mutui rapporti delle $\lambda_0 \ldots \lambda_r$. Possiamo concepire il sist. ∞^r come la totalità delle sue forme, e adottare per ciascuna, entro al sistema, le $r+1$ coord. om. $\lambda_0 \ldots \lambda_r$.

Possiamo anche convenire di chiamare convenzional. S_r (spazio lineare a r dim.) il sist. lin. e ~~queste~~ le forme i punti dello S_r. Ogni punto ha così $r+1$ coord. (proi.) omogenee. Potremmo individuare lo S_r (come sistema (1)), con altre $r+1$ forme $g_0 \ldots g_r$ lin. ind. ciascuna delle quali è comb. lin. delle $f_0 \ldots f_r$. E allora ogni ulterior forma del sist. (1) sarebbe una comb. lin delle g, invece che delle f, e avrebbe rispetto a queste delle coordinate μ. Pongo

$$g_i = a_{i0} f_0 + \ldots + a_{ir} f_r \quad \text{ecc} \quad \text{con } |a_{ij}| \neq 0$$

$$\sum \mu_i g_i = \sum_i \mu_i \sum_h a_{ih} f_h = \sum_h f_h \sum_i a_{ih} \mu_i \quad \text{cioè}$$

$$(2) \quad \boxed{\lambda_h = \sum_i a_{ih} \mu_i} \quad \text{che lega le coord.te } \lambda \text{ alle coord.te } \mu.$$

Abbiamo così una trasf.ne di coordinate, relativa lin. delle coord. [illegible] dei punti dello S e ricevere

Fissato un sist.° di coord.te in questo i pt (1, 0 -- 0,

.... che si chiamano i vertici della piramide fond.le

sformazione di coord. espressa come nello spazio ordina
o da una sost. lin . om. a determinante non nullo.
– Se entro (1) si prende un sist. lin meno ampio, ∞^h
sso ~~&&&&&&&&~~ (che ha dunque la stessa natura dello S_r
ioè è come questo uno spazio lineare a h dimensioni)
(spazi subordinati)
i chiama uno S_h appartenente (immerso nello) allo S_r . In particolare
er $h=1,2$. si hanno spazi lineari che vengono chiamati
ette, piani dello S_r Ognuno di questi S_h (si enuncia
osì solo con nomi nuovi fatti noti sui sist. lineari)
uò venire ottenuto così. Due o più punti dello S_r si
icono lin.ind. se tali sono, entro (1) le forme corrispon
enti. ~~&&&&&&&&~~ Risulta subito che la cond. perchè lo sis
che la matrice delle loro coord. non sia nulla (caso di
punti, 3 ecc.; casi ovvi dello S_3) Presi due punti lin
x y (di coord. x_i, y_i)
nd. esiste UNA retta che la contiene ed è $\lambda x+\mu y$ (indeterminato) ; 3
unti lin ind x y z S_2 $\lambda x+\mu y+\nu z$, e così via. Presi $h+1$ punti
$x^0\, x^1 \ldots x^h$
in ind esiste UN S_h che li contiene ed è

$$\mu_0 x^0 + \ldots + \mu_h x^h$$

n particolare se prendo $r+1$ punti lin ind (massimo nume
o possibile, pensare alle forme) i punti ottenuti per cb
in sono TUTTI i punti dello S_r $\mu_0 x^0 + \ldots + \mu_r x^r$
si ritorna alla trasf. delle coord prima accennata.

In particolare per $h=r-1$ si hanno iperpiani; e si tro

Tra gli spazi notevoli conviene anche includere il punto come $\underline{S_0}$ (pertanto o da r - § c.s.)

Si estende con questi spazi (ciò che ha fatto particolarmente Veronese) il concetto di

<u>proiezione</u> e di <u>sezione</u>: si spiegano: p. es. proiettare da S_p (in S_r) cioè sezione con S_{r-p-1}.

va subito allora che un tale iperpiano è rappresentabi
(fare)
con un'equazione lin om. in coord proi.ve $x_0 - - x_r$
$\Sigma \xi_i x_i$ --
(le ξ si possono adoperare come coord. di iperpiano)

Accenno anche la relazione, non immediata, che segue. Presi due spazi subordinati S_h $S_{h'}$ essi possono dare luogo a uno spazio di intersezione (luogo di tutti i punti comuni, che è ancora uno spazio lineare) S_i e uno spazio di appartenenza S_c, minimo spazio subordinato di S_r che li contiene entrambi, e che può coincidere con S_r. Si ha allora

$$h + h' = c + i$$

relazione valida in tutti i casi, anche se manca lo spaz di intersezione, pur di assumere in tal caso convenzionalmente $i = -1$. (esempi reali)

Si può parlare secondo quanto precede dello spazio che congiunge alcuni punti dati $x^0 - x^h$; sarà uno S_h se quelli sono lin ind.; se no sarà uno spazio di minor dimensione, che si ottiene prendendone fra quelli un sistema ampio al possibile di lin ind., e conterrà di conseguenza tutti gli altri. Così, si può parlare dello spaz (minimo) che congiunge due spazi dati; ~~e si può include questo caso nel precedente, considerando un punto come u~~

Ult L. Finalmente, si trova che estesa agli iperpiani la nozione di indipendenza lineare

] lineare esclude appunto che questo contenga quelli

P. es. posso chiamare pt. le r+1 ple ogni (λ_0 ... λ_r) appunto per la possibilità di l'aspi corrispondere in modo biunivoco la [illegible] (1). Allora lo S_r numerico o astratto, insieme di tutti questi pt (λ_0 ... λ_r).

in base alla matrice formata con le loro coord. due iperpiani lin ind (cioè distinti) hanno a comune uno S_{r-2}, tre cui s'intersecano lo S_{r-1} dei primi 2 e il terzo: l'ins. ~~lin ind uno S_{r-3}~~, e così p lin ind uno S_{r-p} cosicchè uno S_h subordinato appare contemporaneamente come sistema dei suoi punti (∞^h), e come insieme degli iperpiani che passano per esso; che sono $r-h$ lin ind e poi tutte le loro comb. lin. (∞^{r-h-1}).

Chiarita così la nozione di S_r in modo puramente nominale e concreto (sono sempre ancora i sist. lin di forma) si può passare a un'idea più astratta degli iperspazi chiamando così ogni totalità di enti (punti) che siano in corr.za biunivoca senza eccezioni coi punti degli S_r già definiti, e estendere ai nuovi S_r con lo stesso trasporto la nomenclatura introdotta coordinate dei pt., iperpiani ecc. (~~rette~~, ec

Allora tutto quanto si è detto vale per i nuovi S_r astratti di cui ora si è detto. Ancora ~~P.es.~~ se prendo nello S_r già definito gli iperpiani, ognuno di questi con le sue coordinate omogenee $\xi_0 \ldots \ldots \xi_r$ viene appunto a descrivere uno S_r, diciamo per chiarezza Σ_r avente per elemento generatore (punt.) gli iperpiani dello S_r iniziale. ~~Ad~~ A Σ_r come spazio di iperpiani si applicano dunque le p.tà valide per tutti gli S_r come spazi di punti. Si ha così in sostanza una

I sottocapitoli come un insieme di enti in com.e e basi con i valori delle coordinate [illegible] di Medellin, in cui ci corrispondono S_0 e S_{r-1} e così [illegible] volte e S_{r-2}, ... S_h e S_{r-1-h}. La nozione d appartenenza viene conservata ecc. X Sono appunto all'I circa queste e alc ne altre le genralità contenute nel- l'Introduzione di Segre;dove però lo S_r non viene co struito prima in modo concreto,riferendo poi gli altri a tale modello;ma direttamente in modo ~~astratto~~ generale. Alcune su ~~pposizioni~~ par[illegible]i dovrebbero essere precisate.P es si comin cia a parlare di un"insieme continuo di enti il cui nu mero sia m volte infinito(cioè fra i quali ve ne sia in generale un numero finito che soddisfino ad m condiz ni semplici& qualunque date) dicesi formare uno spazio ad m dimensioni,di cui quegli enti diconsi elementi".O anzitutto bisognerebbe precisre ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ alcune cose;per dirne una cosasi tende per condizioni semplici .Così,dopo si vuol preci sare fra tali spazi qualisi chiamino "lineari";e vi si dice prima quando si può porre una corrzsbiun senza e cezioni f fra i loro elementi e le r ple di ni;e poi c me se fosse la stessa cosa fra i loro el.ti e le r+1 p di n.i omogenei.Ora si tratta di cose che si assomigli o ma sono diverse.P es per r= 3 una volta si definisc lo S_3 cartesiano (aperto) e l'altra lo S_3 proiettivo (chius

) sommini arbitrarie. L'int.^{e} di V_k^n a propria e quindi V_{k-1}^n ~~[illegible]~~, con S_{r-l} quindi è V_{k-l}^n (per $l = k$ vien n pt.).

Avverto poi che in questo [133] lavoro si chiama piano l'iperpiano; e che definendo la ipersup. d'ordine n, (spiegare) la chiama invece superficie d'ordine n. Si trova anche la ~~&&~~ considerazione di quella che noi oggi chiamiamo una V_k^n, varietà algebrica a k dim d'ordine n(in Segre spazio algebrico ....)sulla cui df.ne precisa mi sono trattenuto l'anno scorso;è in sostanza una totalità ∞^k di ~~p~~ punti definita algebricamente(cioè ponendo le loro coord. eguali a funz algebriche di k variabili ind.ti);d'ordine n nel senso che ha comuni n punti con ogni S_{r-k} generico. per k=1 curva, k=2 sup. k=r-1 ipersuperficie c.s. [illegible]

L'argomento della 1.a parte "Geometria di una quadrica" è oggi da riguardare in complesso come troppo elementare perchè valga la pena di trattenervisi. La def V_{r-1} sulla equazione $\sum a_{ij} x_i x_j = 0$ (chiamiamo ora x le coord.) contenente $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$ termini, cosicchè le quadriche formano una totalità $\infty^{\frac{r(r+3)}{2}}$; la teoria della polarità, in cui in particolare a ogni punto x della V_{r-1} corrisponde l'iperpiano tangente (cioè contenente le rette ivi tangenti, spiegare); la possibilità di considerare la quadrica come inviluppo di iperpiani; la possibilità che la quadrica si specializzi. Cioè an.te il discriminante si annulli, con varia caratteristica; se questa è r ho Q spec.ta una volta ed è cono proiettante da P una quadrica non spec. di S_{r-1} ;se la

) e poi con caratt. 1 e ip.^mo b ...

ogni Q per $r \geq 3$ è rigata e ...

Intanto per ogni P di Q (appena $r > 3$) passano infinite rette di Q. Sono le int.^ni della V^2_{r-1} con lo S_{r-1} tangente in P (e basta). Se invero A è un punto (fuori di P) di tale int.^ne la AP ha già 3 int.^ni e quindi giace su Q. L'int.^ne è una V^2_{r-2}, luogo di rette per P, ~~cioè~~ cui conta di ∞^{r-3} rette.

Per P passano dunque ∞^{r-3} rette di Q; e in tutto le rette son $\infty^{r-1+r-3-1} = \infty^{2r-5}$.

a caratt. è r-1, ho Q 2 volte spec.ta, insieme dei piani c

a r^{pla} proiettano Q non spec. di S_{r-1} ; e così via, fino a ar

are al caso ~~estremo~~ di caratt. 2, quadrica r_{-1} volte specia

lizzata, che (secondo quanto ora detto proietterà da S_{r-2}

una quadrica di $S_{r-(r-1)\text{-}upla}$, cioè coppia di punti ed) è perciò una

coppia di iperpiani.) Non mi fermo nemmeno, trattandosi

sempre di estensioni ovvie da S_3 sulla possibilità, che se

re sussiste di ridurre l'eq di Q non spec.ta, prendendo

come piramide di rif.to quella formata da una piramide au

polare, alla forma $\sum_{i=0}^{r} a_i x_i^2 = 0$. Per quelle ~~aaa~~ specializzat

si ha forma canonica analoga con alcuni coeff.ti nulli

per le non spec.te ne deriva la loro equivalenza a meno

di trasf. lin sulle coord.te o come possiamo dire senz'a

tro (definendo le omografie come in S_3) a meno di omografi

una quadrica non ha cioè inv.ti assoluti. ~~Miiiiiiii~~ D

ò invece qualche parola sugli spazi lineari esistenti s

una Q (non specializzata; alle altre si estendono facilmen

risultati per proiezione). Questi spazi erano già stati c

siderati da Veronese, ma in modo meno completo. Il modo pi

semplice è di ricorrere alla proi. stereografica, estensio

ovvia. Partiamo da punto O della Q, e congiungiamolo con

tutti i punti della Q, segando poi con un iperpiano generi

π .Allora ogni punto P della Q dà luogo a P',e viceversa cosicchè si ha corr.za gen te biunivoca fra i punti di Q e quelli di π .Per P' è eccez. ogni posizione per cui la retta OP' venga ad avere compl.te più di due int.ni con Q,cioè a giacere per intero su Q,cioè se P' è traccia su π di una retta uscente da O e giacente per intero su Q. Effettivamente (p 134) esistono queste rette e formano un cono V^2_{r-2} il quale dunque sega π int una quadrica V^2_{r-3} di questo spazio,la quale anzi sarà immersa nello spazio σ_{r-2} traccia π dell'ip.no ω_{r-1} tgte in P,cioè sarà una $\gamma = V^2_{r-3}$ di σ_{r-2} .Sono dunque eccezionali (fond.li) tutti i punti di questa V^2_{r-3} ,ognuno avendo infinito corr. ti sulla Q Nel senso inverso non ha corr.te determinato (cioè i fond.li) il centro di proi. O,per continuità si avranno per raggi proiettanti le tangenti in O,cioè come proi.ni di O tutti i punti dello σ_{r-2} traccia già considerata(richiamo S_3 9. Ora c questa proi.ne si possono cercare gli spazi lineari esistenti sulla Q .Se uno è S_l ,si proietterà evid/te in S'_l di π_{r-1} ;ma non viceversa.Precisamente,se S_l sta sulla Q,esso sega ω_{r-1} in uno S_{l-1} ,situato (com S_l) sulla Q e quindi sul cono V^2_{r-2} ; pertanto questo S_{l-1} si proietta in uno S'_{l-1} della $\gamma = V^2_{r-3}$ .Così,ogni S_l generico della Q si proietta in

Ho così nella V_3^n le ∞^2 rette (formanti un sistema continuo) che hanno per immag.ni in π_0 le rette app.te a γ

uno S'_l di π_{r-1}, che passa per uno S_{l-1} della
V^2_{r-3} (caso $r=0$). Viceversa, ~~[illegible]~~ ogni
S'_l è proiez. di uno S_l della Q. Infatti lo spazio per
S'_l è uno S_{l+1} per O, che contiene lo $S_l = O.S_{l-1}$,
[illegible] nel cono V^2_{r-2} proiettante da O la V^2_{r-2}. Tale S_{l+1} ha
tale S_l comune con Q, [illegible] risulta
un altro S_l che dunque si proietta da O in S'_l.

Pertanto si ha così un modo per ottenere tutti gli
spazi lin. di Q. (e spazi max) Caso $r=4$: rappresent. in $S_3 \equiv \pi_3$ due curve
[illegible] fond. [illegible] (in piano σ). Le rette di V^2_0 saranno
($l=1$) saranno rette per S_0 di γ, cioè appoggiate a γ.
[illegible] punti a π_3 dunque avere S' per rette di γ.
[illegible] V^2_0 di S_2 contiene solo rette.

$r=5$. Rappresent. in S_4: quadrica σ_3 e in $\gamma = V^2_1$.
Rette di Q sono ancora rette di π_4 appoggiate alla quadr.
Piani? Avrò in π_4 piani incontranti γ in
rette. [illegible] ~~[illegible]~~ vi sono dunque rette V^2_1 di
piani (S_0 [illegible], punti [illegible]) questi piani, sulla rappr.ne si
vidono in due famiglie, secondochè i piani immagine in
ssano per l'una o l'altra schiera di γ. Si potrebbe ritene
la suddivisione legata alla rappr.ne: essa invece à cara
re intrinseco, in quanto due piani di una stessa famiglia

in realtà proprio solo in un punto: se nostrassimo in uno S_3 che sarebbe il σ_3, ... altre non sono sing. d'piani delle V_4

ho dunque comportamento opposto rispetto a quello delle V^2 di S_3.

Estendere subito: in S_r gli S_q per S_p $(q>p)$ sono $\infty^{(r-q)(q-p)}$: segandoli con S_{r-p-1} (non incid. a S_p) ho tanti S_{q-p-1} (in modo biunivoco) e mi riduco a contare gli S_{q-p-1} (diciamo S_h) di S_{r-p-1} (diciamo S_R). Ogni è det.° dagli $h+1$ pti. tra ... della S_{R-h}, e cui dà $(h+1)(R-h)$ ... Là ho $(q-p)(r$ ...

segano in un punto almeno (i piani immagine in un punto
i Π_4 V, ma non di γ dove le loro tracce come rette di
a stessa schiera sono sghembe) ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~; si
atta dunque di un punto non fond., e gli S_2 della V_4^2
nno in comune la sua immagine. Invece se applico lo stess
g.to a due piani di sist. diversi, il punto comune risult
ond.le e quindi i due piani oggettivi non hanno generalme
intersezione. Si può dire di più; se i due piani oggettiv (A' mix. Nm
anno in comune un punto, hanno in comune una retta, perchè
loro immg. avranno a comune A' fuori di γ, oltre un
nto di γ e quindi una retta (appoggiata a γ). In de
initiva ho due famiglie di piani: piani di una stessa fami
lia risultano sempre incidenti in un punto; di famiglie op
oste o non incidenti o inc.ti in una retta. Ogni famiglia
omprende ∞^3 piani (per ogni retta di γ, in Π_4 passano ∞
iani; pensare a sezione con piano generico e ~~a due~~ ne ∞^2
punti)

Così si va avanti per ricorrenza; per avere gli spa
i lineari massimi su V_5^2 di S_6 si deve ricorrere in Π_5 agli
pazi lineari massimi della relativa V_3^2 γ di S_4 che sono rette, con
ucendo per queste piani; si hanno così piani, costituenti
olo sistema, e in n° di ∞^6 (per ogni retta di γ ho
i Π_5 ∞^3 piani (~~[illegible]~~). Poi in S_7 trovo ~~due~~,

icorrendo al risultato già acquisito per S_5, due sistem
i S_3, ciascuno dei quali è $\infty^{3+3} = \infty^6$. Qui se cerco l'incide
meno di S_3 di stesso o opposti sistemi, il rag.to viene
rso da prima. Se due S_3 sono di stesso sistema, il loro
mune (unico, in generale) in π_6 sta già su γ, perchè le 1
scce su γ sono piani di stesso sist. cioè incidenti; perciò
e S_3 oggettivi dello stesso sistema sono sghembi (come in
azio ordinario). Due di sistemi opposti risultano invece
denti. Continuando per ricorrenza si trova in definitiv
a) che se r è pari $= 2q$, gli spazi massimi hanno dimen
$q-1$ e che costituiscono un solo sistema; in tutto sono
$\infty^{\frac{1}{2}q(q+1)}$ [a gr. sghembi]
b) se r è dispari ed eguale $= 2q-1$, gli spazi massi
ono degli S_q, i quali si ripartiscono in due sistemi $\infty^{\frac{1}{2}}$
è poi ancora da fare una differenza (come è già chiaro da
anto sopra ho detto) secondochè q è dispari o pari. Nel
imo caso sono gli S_q di sistemi diversi che si tagliano
mpre e quelli di uno stesso no (come in S_3, S_2). Nel secondo
so succede l'opposto (come in S_5)

In Veronese, che si era occupato dell'argomento prima
Segre (in una voluminosa Mem. in Math Ann t. 19, 1882,
redatta in tedesco; Veronese n 1854 a Chioggia, aveva stud

AM

Politecnico di Zurigo, laureandosi poi a Roma. Nel 1880-81
va avuto un posto di perfezionamento a Lipsia, dove inseg
allora Klein; e appunto in quell'occasione è nata la Memo
in que tione, che è particolarmente importante in quel
mo periodo della geom proi ipersp. avendo introdotto s-s
aticamente negli iperspazi i proced.ti della geom proi.
cialmente proiezioni e sezioni) Comunque, per l'arhomen
di cui qui ci occupiamo, in Veronese [cfr. Segre Studio
36, 42, 44] era valutato in modo sbagliato la dim. della to
lità degli spazi massimi; e mancava la distinzione, per
$2q+1$, fra q pari e q dispari.

Il caso $r=5$, in quanto precede, si può dire tuttavia che
a ben noto, grazie alla interpret. nella geom della retta
'idea di considerare le rette di S_3 come punti di uno S_5
in) , e precisamente punti della M_4^2 ...
capo a Plücker e Klein (del primo Neue Geom des Raumes
68). Si tratta di una Q non specializzata (det., che si
rma subito, non nullo). Ora cercarvi spazi vuol dire cerca
rette p, p' ecc. tali che anche le $\lambda p + \mu p' + \ldots$ per valor
bitrari dei coeff.ti siano coord di retta. Ora, dalla geom
lla retta è noto che per due rette ciò avviene quando e
lo quando p e p' sono rette incidenti avendosi così le

te del loro fascio. Pertanto i fasci di rette conducono a
rette della V_4^2. Per tre rette (non di un fascio e per
di tre rette lin ind non avviene poi più) ciò avviene so
sse appartengono a un piano o a una stella, e vengono tut
le rette di quello o di questa. Si hanno così sulla V_4^2
i piani corr.ti, dei due tipi. E risulta chiaro che piani
di una famiglia hanno UN punto comune (perchè....) e di fa
miglie diverse nessuno o una retta (perchè...) Anche le
dim. ∞^3 van bene.

La prima parte si chiude con la generazione di una V_{r-1}^2
n due stelle reciproche, estensione di quella in S_3. Non ne
ferirò. Riporterò invece, benchè in altro lavoro di Segre (Et
des différentes surfaces du 4 ordre à conique double, M A
1884, nota a p 439) un'osservazione molto similare relativa alle quadri
, collegata con quanto ora detto. Per una V_{r-1}^2 di S_r reale
cè con eq a coeff.ti reali, non è detto che fra gli spazi
ssimi prima determinati ve ne siano dei reali (pensare al
so di S_3). Ora la questione si mette facilmente in relazi
col n° dei coeff ti di dato segno nella forma canonica [illegible]
a coeff ti reali) $a_0 x_0^2 \dots + a_r x_r^2 =$ Supponiamo che qui i prim
eff ti siano positivi (i primi k cioè $a_0 \dots a_k$)
gli altri negativi, scriviamoli $-b_{k+1} \dots -b_r$ cosicchè
eq.ne è $a_0 x_0^2 \dots + a_k x_k^2 - b_{k+1} x_{k+1}^2 \dots - b_r x_r^2 = 0$
sso fissare le idee supponendo che il n° dei coeff.ti po

sitivi non superi quello dei negativi (cambiando ev.te tutto di segno) cosicchè $k+1 \leq r-k$. Allora raccogliendo $a_0 x_0^2 - b_{k+1} x_{k+1}^2$ ecc. evidentemente si ha uno spazio reale sulla quadrica come intersezione degli iperpiani $\overbrace{x_{2k+2}=0, \dots x_r=0,}$
$\sqrt{a_0}\, x_0 - \sqrt{b_{k+1}}\, x_{k+1} = 0, \quad \sqrt{a_1}\, x_1 - \sqrt{b_{k+2}}\, x_{k+2} = 0, \dots, \sqrt{a_k}\, x_k - \sqrt{a_{2k+1}}\, x_{2k+1} = 0,$
Questi sono certo lin. ind (perchè facendo la matrice delle coordinate, in ogni colonna c'è UN el;to non nullo), ecc sicchè $\overbrace{\text{si}}^{\text{sono } k+1+(r-2k+1)=r-k}$ segano in uno $S_{r-(r-k)=}S_k$. Concludiamo così intanto che sulla quadrica vi sono degli S_k reali. Ma non degli S_{k+1}. Se invero ve ne fosse uno esso taglierebbe (alcuno) in un punto reale p.es lo S_{r-k-1} $x_0 = x_1 \dots = x_k = 0$ mentre facendo ciò nell'eq.ne [illegible] $b_k x_{k+1}^2 \dots + b_r x_r^2 = 0$ [illegible] reali. Concludiamo così con Segre, che se nell'eq.ne predetta sono $k+1$ i termini positivi, gli spazi massimi esistenti sulla quadrica, nel campo reale, sono degli S_k. Ne segue che se per una data Q reale si eseguono riduzioni varie a forma $a_0 x_0^2 - \dots + a_r x_r^2 = 0$ ~~dd&&&&&&&&~~ (sempre nel campo reale) il n° dei coeff. positivi di questa (ridotta a essere $\leq$ dei negativi) è sempre lo stesso, perchè deve superare di un'unità la dim massima ecc ecc. Si ritrova così attraverso questa ragione geometrica un teorema sulle forme quadratiche che era già stato enunciato da Sylvester (legge d'inerzia) che co

-munque una forma quadratica si riduca alla forma $\sum a_i x_i^2$ mediante una sost. lineare (si intende nel campo reale) il n° dei coeff.ti positivi è sempre lo stesso. Si capisce che la riduzione può farsi in modi diversi. Geometricamente si tratta della individuazione di una piramide autopolare. Anche algoritmicamente si possono immaginare procedimenti vari. Ricordo p.es. questo. Se ho

$$a_{00}x_0^2+2a_{01}x_0x_1 - - +2a_{0r}x_0x_r + \varphi(x_1 \dots x_r)$$

comincio a occuparmi di tutti i termini dove compare x_0 raccogliendoli. Considerando $F =$ se $a_{00}>0$ ...

$$\left(\sqrt{a_{00}}\,x_0+\frac{a_{01}}{\sqrt{a_{00}}}x_1 - - +\frac{a_{0r}}{\sqrt{a_{00}}}x_r\right)^2 + \psi(x_1 \dots x_r) \text{ ; e pongo } y_0=\sqrt{a_{00}}\,x_0 - - - +\frac{a_{0r}}{\sqrt{a_{00}}}x_r$$

e così continuo per ricorrenza. Se $a_{00}<0 = -k$ $(k>0)$ ...

$$F = -\left(\sqrt{k}\,x_0-\frac{a_{01}}{\sqrt{k}}x_1 - - -\frac{a_{0r}}{\sqrt{k}}x_r\right)^2 + \psi(x_1 - x_r)$$

e così via. (Posso partire da altra a invece che da x_0 e ho così qui parecchie riduzioni)

Meno elementare e più notevole è la seconda parte della memoria di Segre. Volendo poi passare nella 2.a memoria ai complessi quadratici, era naturale che la sua attenzione si fermasse sul sistema di due quadriche, che saranno poi in S_5 la M_4^2 e la V_4^2 rappresentata dall'equazione del con-

sso quadratico. Anzi, più precisamente quello che interes
allora sarà la M_4^2 e il fascio $M_4^2\ V_4^2$, perchè al
are e della V_4^2 in questo fascio il complesso quadrati
non cambia. Quindi nell'applicazione ai complessi quadrati
interessa in modo speciale lo studio di un fascio di qua
che, nel quale sia ben fissata UNA quadrica, la M_4^2.
olare di un fascio di quadriche è poi lo stesso che della
di questo fascio ($\sum a_{ij} x_i x_j = 0$ $\sum b_{ij} x_i x_j = 0$) un Φ^4_{r-2} che è (per applicare la no
cf. di p. 1)) pensare a ricavare ~~.....~~ p. es. $\frac{x_1}{x_2}$ $\frac{x_2}{x_2}$
funzione algebrica degli altri $r-2$ rapporti ... $\frac{x_1}{2}$)
a V^4_{r-2}. L'ordine oltre che da considerazioni più generali
sulta p. es. dal cercare il n° dei punti comuni con un pia
no generico, dove le due quadriche segano ciascuna una co
ica, ecc. In S_5 ogni complesso quadratici è rappre
ntato da una tale Φ_3^4 della M_4^2 e viceversa.

Il risultato analitico che è servito a Segre come
punto di partenza è il teorema di Weierstrass sulle condi
zioni di equivalenza (a meno di trasf ni lineari) di due fo
me quadratiche. ~~Due quadriche~~ Dal punto di vista geom. si
tratta di rispondere a questa domanda: sappiamo già che UN
quadrica, non spec.ta, in S_r, è proiettiva a ogni altra id
id. Ma per due quadriche A, B in S_r in generale non sarà

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} a_{00} - \rho b_{00} & a_{01} - \rho b_{01} & \text{———} & \cancel{a_{rr} - \rho b} \\ a_{10} - \rho b_{10} & & & \\ & & & \\ \text{—} & \text{—} & & a_{rr} - \rho b_{rr} \end{vmatrix} = 0$$

[illegible] possibile di trasformarle con una stessa om
rafia in altre due A',B'. Già nel piano per coppie di con
he ,supponiamo pure che non vi siano contatti, ma bisogna
ntanto che la quaterna dei punti comuni su A sia proiett
quella su A',ecc. Quali sono le cond. per l'eq.?

Il teor di Weierstrass è fondato sulla nozione de
ivisori elementari. Partiamo da due forme quadratiche
$a_{ij}x_ix_j$, $\Sigma b_{ij}x_ix_j$ e consideriamo il discriminante di una form
$(a_{ij}-\rho b_{ij})x_ix_j$ del loro fascio, e l'eq. in ρ che si ottiene pone
olo eguale a zero (resta escluso il caso che TUTTE le fo
e del fascio abbiano discr.te nullo. Ne parleremo poi più
vanti)

Per ogni radice $\rho^{(i)}$ dell'equazione $\Delta(\rho)=0$ consideriamo la pos
ilità che essa annulli con $\Delta(\rho)$ anche tutti i minori
i vari ordini, e precisamente con molt.tà μ_1 il $\Delta(\rho)$ e con
[molt]ità μ_2, μ_3 ... μ_h
minori ~~di ordine~~ (tutti) di ordine
r $\quad r-1 \quad \ldots \quad r+2-h$ (i più bassi)

[p]ensando p. es. allo sviluppo di $\Delta(\rho)$ secondo una linea, si vien[e]
[tut]ti i cpl.ti di questa son divisibili almeno per $(\rho-\rho^{(i)})^{\mu_2}$,
[per]ciò $\Delta(\rho)$ almeno divisibile per id. Di cui $\mu_1 \geq \mu_2$ ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ Altrimenti si può dire che $\mu_1 > \mu_2$ pensan[do]
[ch]e il det. formato coi minori d'ordine r $|M_{i1}| = \Delta^2$ ha ogn[i]

4) Questo dim. prova che degli ... ai minimi
max di un ... del ... $P(\rho)$ divisibili per $(\rho-\rho^i)^{\mu_i}$ il ...
... per $(\rho-\rho^i)^{\mu_i+\cdots}$. Applicabile ai minimi, ecc. ...

La ... del ... è $(\rho-\rho^i)^{\mu_i} =$
$(\rho-\rho^i)^{e_1} (\ )^{e_2} (\ \ )^{e_3} \ (\ \ \ )^{e_k}$
il ... del ... quel ...
$D_1, 2, 3$.

4 [Tanto varrebbe dire le ... ρ^i e per ... $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_h$. Cfr. ... Pan Rep I, 109

...ime divisibile per $(\rho-\rho^{(i)})^{\mu_2}$ e quindi $\Delta^r = \Phi . (\rho-\rho^{(i)})^{(r+1)\mu_2}$
...n Φ ... fattore intero. così $r\mu_1 \geq (r+1)\mu_2$
... $\mu_1 \geq \frac{r+1}{r}\mu_2 > \mu_2$ ~~Per ragione analoga~~ $\mu_2 > \mu_3$ ...
...mo posto

$e_1 = \mu_1 - \mu_2$, $e_2 = \mu_2 - \mu_3$, - - - $e_{h-1} = \mu_{h-1} - \mu_h$, oltre a $e_h = \mu_h$
le e_i sono tutti n.i positivi. Ebbene le espressioni
$(\rho-\rho^{i})^{e_1}, (\rho-\rho^{i})^{e_2}$ - - - $(\rho-\rho^{i})^{e_h}$
sono state chiamate da Weierstraß i divisori elementari di $\Delta(\rho)$ corrispondenti alla radice ρ^{i}. Poi, così via per ogni altra radice saranno analoghe le da considerare altri divisori elementari.

Ebbene, il teor di Weierstrass consiste in questo che la cond. nec e suff. perchè due forme quadratiche come quelle considerate si possano trasformare con una stessa so lin omogenea in altre due analoghe è che il det. te $\Delta(\rho)$ e l'analogo det. te $\Delta'(\rho)$ abbiano gli stessi divisori elementari. Ciò si devono avere gli stessi valori per le radici $\rho^{(i)}$, e ognuna di queste deve condurre a uno stesso gruppo di valori degli interi $e_1 \dots e_h$
cosicchè formando coi vari gruppi ~~caratteristic~~ $(e_1 \dots e_h)$ la cosidetta caratteristica
$[(e_1 \dots e_h)(\text{an } r) \dots (\dots)]$
questa deve risultare la stessa per i due fasci di forme.

Osserviamo di passaggio che in ogni $(\ )$ le $e_1 \geq e_2 \geq e_3 \geq e_h$, come si dimostra

] seguente, dove è da osservare che la quadrica al
fascio AB corrispondente a ogni retta $p^{(i)}$ di $\Delta(p)$ è
per questo stesso fatto è specializzata, (e precisa-
mente, siccome $p^{(i)}$ annulla anche i minori
d'ordine $r+2-h$, e non ulteriori, cioè il discr.
e caratt. $r+1-h$, sarà specializzata (p. 135) <u>h volte</u>
cioè con S_{h-1} doppio)

 cioè in ogni gr. caratt.

...siamo anche che in ogni (..) della caratt.^{ca} la Σe_i
$= \mu_1$. Quindi la somma di tutte le e di tutte le (..)
$= \Sigma\mu_1$ = somma delle moltep. per $\Delta(\rho)$ di tutte le r.
... $= r+1$.

...rnando al teor di Weierstrass esso dà dunque in sostanza
...r l'eqv za di due coppie di forme quadratiche la cdz. c...
... relative equazioni $\Delta(\rho)$ abbiano le stesse radici $\rho^{(i)}$
... per ciascuna di queste lo stesso gruppo caratteristico .
...ando invece che le forme quadratiche si considerano le
...adriche, cioè le eqzioni ottenute ponendole eguali a zero,
...nuna di esse si può moltiplicare (una volta per tutte)
...r un fattore costante e allora quello che rimane inalter...
...(passando da un fascio all'altro) ...che con^{te} si alterano per uno stesso fattore
...) non sono le $\rho^{(i)}$ ma i loro ~~mutui~~ rapporti / Segre chiama d...
... stessa specie due Φ^{i}_{r-2} (basi di fasci di quadriche) qua...
... questi fasci corrispondono a una stessa caratteristica;
...ò quindi enunciare il teor. di W. sotto la forma che la
...ond. nec e suff. affinchè si possano trasformare simul...
...neamente con omografia le quadriche A B nelle A' B' è ch...
... quartiche basi dei due fasci AB e A'B' siano della stessa specie
... ~~altre inoltre~~ (il che equivale a dire che i due fasci hanno
la stessa caratt.^{ca}) e che inoltre (perciò che le ρ^{i} omo...
fra il fascio AB e il fascio A'B' corrispondenti con...

forme di prima specie vi sia una proiettività in cui
specializzate
si corrispondono e quadriche dei due fasci corrispon
denti a uno stesso gruppo caratteristico, e si corrispo
dono inoltre le A, A' e B, B' (è l'omografia in cui si
corrispondono le $\varphi^{(i)}$ e le $\varphi'^{(i)}$ che sono proporzionali e in
tre i valori nullo e infinito di ρ che conducono al
A, B) ecc. Questo se si vuole trasformare A in A' e
B in B'. Se basta trasformare i fasci l'uno nell'altro
senza preoccuparsi d'altro resta lo stesso enunciato
levando l'ultima frase. E se si vogliono mutare i fasc
~~ddd~~ l'uno nell'altro e la sola A nella sola A' basta
alla fine dire "e la A in A' " -è questo il caso già o
servato a p. 15)

Preso uno qualunque di questi enunciati, esso non p
teva ancora essere riguardato da Segre come soddisfacen
te. Segre cercava delle condizioni in forma geometrica:
la nuova veste data al teorema di Weierstrass è geomet
ca solo in parte. Quando si parla della proiettività fra
i due fasci AB e A'B', si ha già qui un concetto geomet
co. Per chi non si accontenti di considerare per defin
re tale proiettività il birapporto dei quattro valori
numerici di ρ che conducono a esse, Segre pensava che s
può sostituire a ogni fascio ~~dd~~ di quadriche il ~~ddddd~~

curve delle specie della quartica

Riandiamo

Premettiamo che a ogni gr. caratt. di h si corrisponde una quadrica spezzata h volte (p. 158).

... es. per curve p.d. si hanno gruppi di 1 n.;

... Come giudizio complessivo si può dire che

esse non risolvono il problema che ha impostato

in modo organico, né con risultati definitivi ma la

... serie di osservazioni ~~che~~ con lo scopo che ~~possono~~ servire in

ogni caso possano servire a risolverlo (cfr. quanto si

dirà poi)

Osserviamo con l'occasione per quanto se ne ...

serve che se il pt. y è doppio per una quadrica

del fascio, ossia che un fascio d'ip.$^{\text{ni}}$ polari si

ha un ip.$^{\text{no}}$ polare (poli se constata prima $g(x)=0$ ~~...~~

ho ogni $g_i(y)=0$

~~...~~ è il

coeff.$^{\text{te}}$ di ρ svanisce). E che viceversa se y ha

uno stesso ip.$^{\text{no}}$ polare esso è doppio per una del fascio.

... altro nell'eq. ho che i rapporti dei coeff.$^{\text{ti}}$ delle x_i sono

dip. da ρ; ossia già le $f_i(y)$ e le $g_i(y)$ sono ... cioè tali che $f_i(y) - k$ ...

allora la $f - kg = 0$ ha pt. doppio in y.

ascio degli iperpiani polari rispetto a ... di un punto
enerico y dello spazio, e ricondursi così a proiettività
ra fasci di iperpiani, che hanno un contenuto più essen
ialmente geometrico. Il passaggio è ovvio: l'iperpiano di y
...tto a la quadrica del fascio $f=0$ $g=0$, ne $f-\rho g=0$ è $\Sigma x_i[f_i(y)-\rho g_i ...$
o. Ho dunque al variare della ρ un fascio di iperpiani
... proiettivo a quello] Ma molto più riposto è il mo
i dare un'effettiva interpret.ne geom.ca alla caratteris
ica. Nella mia biogr di Segre ho pubblicato una lettera di
egre a Kronecker (25 dic 1883) dove proprio su questo teo
ema e nei riguardi di cui parlo scriveva (in francese) "...
ondo delle parole geometriche" al teor di W, com si è ...
atto fin qua" si hanno le condizioni perchè due coppie di
uadriche in un iperspazio siano ~~...~~ identiche dal
unto di vista della geometria proiettiva. Ma queste condi
ioni restano analitiche, perchè vi sono di mezzo dei divi
i elementari, ecc.; qual'è il significato geom. co dei div
ori elementari? Se a una coppia di quadriche corrisponde
na radice doppia, tripla, ecc. del determinante del loro
cio, esse saranno tangenti in uno o più punti; ma quale di
erenza vi sarà fra questi contatti in relazioni ai vari
radi dei divisori elementari...?

(sia pure con qualche variante nell'esposizione

Cerchiamo dunque di farci un'idea del modo con cui
egre dà un significato geom.co alla caratteristica] Egli
ncomincia a considerare il caso "generale" in cui l'eq.
e $\Delta(\rho)$, ha tutte radici semplici. Per ognuna $\rho^{(i)}$ ho allora
$l_i=1$, e quindi le succ.ssive (minori di essa p 155) nulle
quindi un solo esp. $e=1$ in ogni gruppo caratteristico. ...

Viceversa se vi sono nel fascio $r+1$ coni si ha quella caratt.ca: invero ognuno avendo (di cui ne ho così $r+1$) a un gruppo caratt.co che non può che consistere di un sistema e punti di un 1 perché la somma di tutte le e vale $r+1$. Così la caratt. è ~~completa~~ ~~esatta~~ interpretata, nel senso che, seguita a affermare l'esistenza di $r+1$ coni (cioè è interpretata in base ai coni del fascio)

Si tratta in altre parole della caratteristica

$$[1\,1\,1 \ldots 1]$$

Abbiamo ~~un~~, si hanno nel fascio $r+1$ quadriche specializzate, e ognuna è specializzata semplicemente ~~(perchè per ogni radice il det. ha caratt. propri eguale a r)~~ p. 162 più di passaggio

Possiamo anzi osservare con Segre che i vertici dei coni del fascio ~~coni~~ (in n.° di $r+1$) sono attualmente vertici di una piramide autopolare per le quadriche date (e per tutto il loro fascio). Se, più in generale, e qualunque sia la caratt. del fascio vi è in esso una Q specializzata Q_1 con punto doppio in y e un'altra Q_2 con punto doppio in z, i due punti sono coniugati rispetto a tutto il fascio, perchè lo sono rispetto a Q_1 (per la quale y è conto a tutti i punti) e perragione analoga risp. a Q_2. Quindi nel caso attuale quei $r+1$ punti lo sono a due a due, cioè ognuno ha per iperpiano polare (rispetto ~~a tutto~~ il fascio) ~~il~~ l'iperp. congiungente gli altri (p. 16)

Tornando alle caratteristiche, anche la

$$[(1\ldots1)(1\ldots1)(1\ldots1)\ldots(1\ldots1)]$$

dove ogni gruppo caratt. è tutto composto di unità si interpreta facilmente. Se il 1° gruppo contiene h_1 el., il 2° h_2 ecc. avrò intanto nel fascio ~~una~~ quadriche ~~aventi~~ -con aventi risp. con doppio (p. 158) un S_{h_1-1}, uno S_{h_2-1} ecc.

[andare a p. 169]

e anche per parlar[illegible]

dell'impegno che [illegible]

([illegible]

D a p 165 Per fare bene la conclusione occorre però es-
sere certi che quegli $r+1$ vertici di coni sono lin.te indipenden-
(pensati come vertici di piramide)
ti. Ora, se non lo fossero ~~...~~

~~...~~ prendiamo tra essi $P_1 \dots P_{k+1}$ in modo che $P_1 \dots$ siano lin. ind. ($P_1 \dots P_{k+1}$ no (certo possibile)). Allora rispetto a tutto il fascio $P_1 \dots P_k$ sono coniug.ti a P_{k+1}, e quindi P_{k+1} è anche coniug.to a sè stesso, esprimendolo come comb. lin. di quelli. Quindi se avvenisse la supposta dip. lineare, il vertice di un cono del fascio starebbe autoconiug.to rispetto al fascio cioè starebbe nelle $\mathcal{Q}^{k}_{r-2}$ base del fascio (cioè su tutte le Q). ~~Possiamo~~ Ora questo attualmente non avviene certo, perchè come possiamo dimostrare, se nel fascio di quadriche il vertice di un cono (A) sta sulle altre quadriche del fascio, quel cono assorbe almeno 2 ~~quadriche~~ fra gli $r+1$ coni del fascio, cioè dà luogo a una radice almeno doppia di $\Delta(\rho)=0$. Sono ~~A~~ $A = A_0 = f(x_1 \dots x_r) = 0$ e sia

$= \sum b_{ij} x_i x_j = 0$ ($b_{00}=0$) un'altra Q del fascio. Formo $\Delta(\rho)=0$: l'el.to c_{00} ~~=~~, $c_{0\alpha} = -b_{0\alpha}\cdot\rho$, $c_{\alpha 0} = -b_{\alpha 0}\rho$. Quindi

$f(a_{\alpha\beta} - \rho\, b_{\alpha\beta}) = 0$

Sviluppando $\Delta(\rho)$ secondo la 1a rig. e 1a colonna viene ρ^2 fattore c.d.d. ($\rho=0$ dà appunto la A del fascio)

c.d.d.

Ma per la caratt. $[11 \dots 1]$ ho $r+1$ coni distinti e quindi ciò non può avvenire.

perchè la somma eseguita è poi la somma di tutte le unità che ci sono nella caratt. e questa somma vale appunto $r+1$

(p159) ~~Viceversa se in un fascio vi sono tali quadriche specializzate, esso ha la caratt. indicata. Infatti la prima conduce a un gruppo caratt. di h_1 termini (p 158) e la seconda di h_2 ecc. e se i n.i di ogni gruppo caratt. sono eguali a 1, la loro somma è perciò già $h_1+h_2 \dots = r+1$. Quindi ~~non possono~~ nessuno può superare UNO perchè se no la somma risulterebbe troppo elevata~~.

Così è già interpretata quella caratt.ca in relaz. alle quadriche spec.te esistenti nel fascio

Come passare al caso di una caratt. qualunque? Segre ha questa idea. Si prende un gruppo caratteristico

$(e_1\, e_2 \dots e_h)$ dove gli indici non sono tutti 1 (saranno certo i primi a trovarsi in questa cond.; fine di p.157). Poniamo $e_1 = e_1' + e_1''$, $e_2 = e_2' + e_2''$ $\dots$; $e_h = e_h' + e_h''$ ove $(e_1' \dots e_h')$ $(e_1'' \dots e_h'')$ siano possibili gruppi caratt. per un fascio di S_r. Alcuni indici in uno dei due gruppi potranno essere nulli; e lo saranno certo se le ultime e_i sono eguali a UNO. Precisiamo p.es. così che ciò possa avvenire per le e'', che si mantengano non nulle fino a e_k'' compresa con $k \leq h$. Supponiamo di avere già interpretata geometricamente la caratt.

$$\left[(e_1' \dots e_h')(e_1'' \dots e_k'')\ \overbrace{\text{Altri gruppi}}^{E} \right]. \qquad (1)$$

Vuol dire che le quadriche specializzate del fascio sono quelle relative alle caratt. (1) dopo le prime e l'ultima una con S_{h-1} doppio, provenienti come caso limite delle due risp. con S_{h-1} e S_{k-1} doppio che si erano in (1). Ma dal passaggio al limite si possono ottenere altre cose: p. es.

in base all'esistenza di determinate Q spec.te esistenti nel fascio, per cui Q_1 e Q_2 spec.te risp. h e k volte. Segue allora prima di passare da un tal fascio al fascio

$$\left[(e_1 \dots e_4) \quad E \right] \qquad (2)$$

con un passaggio al limite variando con cont.a il fascio in modo che E resti invariata, mentre delle due radici ρ' e ρ'' che conducevano ai primi 2 gruppi caratt. di (1) le 2e vengono a coincidere con le prime acquistando così e molt.e per il Δ(ρ) e i suoi minori in modo da portare proprio alla caratt.ca (2). D'altra parte si osservano fra detti i divisori el.tari

$(\rho-\rho')^{e_1'}(\rho-\rho_2')^{e_2'} \dots (\rho-\rho')^{e_h'} \quad (\rho-\rho'')^{e_1''} \dots \quad (\rho-\rho'')^{e_k''}$

quando ~~…~~ il fascio varia in modo che ~~…~~ ρ'' tende a ρ' si raccolgono $(\rho-\rho')^{e_1'+e_2''}$ ecc. [La posiz.e che ciò avvenga segue dagli esponenti degli altri ulteriori divisori el.tari i meno ~~…~~ ~~…~~ segue]. Quindi la caratt. (2) si può interpretare come un caso limite della (1) supposta già interpretata.

~~Questo passaggio al limite da~~ pos. il seguente risultato.

Premettiamo questo. Uno S_m ($1 \leq m \leq r-1$) tangente a una V_{r-1}^2 di S_r in un suo punto x vuol dire uno S_m per x nell'iperpiano ξ ivi tangente (ciò per ipersup. qualunque). Allora l'inters. $S_m . V_{r-1}^2$ è una V_{m-1}^2 di S_m composta di rette per x, cioè con punto doppio in x. E viceversa se tale è l'inters. $S_m . V_{r-1}^2$ (e x non doppio per la V_{r-1}^2), lo S_m è tangente alla quadrica V_{r-1}^2 in x (perciò per ogni retta per x in S_m ha int.ni coinc.ti per V_{r-1}^2, quindi con la V_{r-1}^2 cioè è tutta a quella)

in generale, può avvenire che uno S_m dia con la V^2_{r-1}
l'inters. V^2_{m-1} che invece di avere un solo punto doppio,
abbia uno S_a doppio; chiamiamo allora con Segre un tale S_m
tangente alla quadrica di specie $a+1$ (vuol dire che pri
era di prima specie). Sarà dunque tangente lungo uno S_a
cioè in ognisingolo punto di questo
almeno nel caso in cui la V_{r-1} non ha punti doppi). ~~Appun~~
Così p es in S_4 presi due punti x e x' su una retta r del
(passanti entrambi per x e x')
la quadrica, i loro S_3 polar. si tagliano in uno S_2 pas
sante esso pure per x e x', anzi tangente ~~alla~~ Q ivi, che
sarà dunque sezione con due punti doppi ivi, cioè con rett
doppia (retta contata due volte). Quel piano ci dà dunque u
esempio di piano tangente di seconda specie). In generale
se c.s. S_m è tangente di specie $a+1$, cioè nei punti di uno
S_a, cioè passante per ogni punto x di questo e situato nel
relativo iperp. tangente ξ, lo spazio polare di S_m
(cioè quello che gli corrisponde nella pol.à rispetto a Q
cioè è l'int. degli ip; Ni polari dei punti di S , ecc)
sta in ogni ξ e passa per ogni x , cioè è dinuovo tang
te a Q in ogni punto di S_a, e quindi fra altro passa per
Cioè se S_m è tangente di specie $a+1$, esso ha uno S_a in
comune con lo spazio polare (che ha dim. $r-m-1$ cosicchè q
sto in generale, in base al solo esame delle dimensioni
risulterebbe sghembo con quello) Viceversa se uno S_m ha
comune con lo spazio polare uno S_a, esso è tangente di s

pari, cioè intutti i punti di quello S_2 (perchè questi punti risultano evid.te autoconiugati).

Ciò premesso, trattando la caratt. (2) come limite della (1) si avrà nel fascio limite una quadrica Q specializzata h volte cioè con spazio doppio di ciascuno Σ_{h-1}, proveniente dalla sovrapposizione di due quadriche Q_1, Q_2 del fascio variabile, aventi risp. uno S_{h-1} e uno S_{k-1} doppio. Finchè stiamo al fascio variabile i punti di S_{h-1} erano con.ti dei punti di S_{k-1} rispetto a tutte le quadriche del fascio (p 165). VALE a dire lo spazio polare di S_{k-1} ~~passava~~ rispetto a ogni quadrica generica del fascio passava per S_{k-1}. Al limite S_{k-1} è andato a stare su Σ_{k-1} (diciamo così punti in Σ_{k-1} di Σ_{h-1}); quindi lo ~~sp~~ spazio polare (rispetto a ogni quadrica del fascio) ~~passante su~~ di Σ_{h-1} (limite di S_{h-1}) passa pure per ~~esso~~ stesso Σ_{k-1} (limite di S_{k-1}); cosicchè siamo nelle condizioni del principio di questa pagina, in quanto (rispetto a ogni Q) Σ_{h-1} ~~Σ_{k-1}~~ ha uno spazio polare che lo sega in uno S_{k-1}. In altre parole lo spazio Σ_{h-1} proveniente dal 1° gr. caratt. di (2) è all'incirca tangente di specie k $(k-1+1)$ [Segre ha altra sign.ne per $h<k$] alle quadriche del fascio, cioè le taglia in una V^2_{h-2} con Σ_{k-1} doppio. P es. se nel gruppo caratt supposto $(e_1 \dots e_h)$ solo le due ultime e sono eguali a 1, così da poter prendere $k=h-2$ avremo in Σ_{h-1} una V^2_{h-2} con Σ_{k-1} doppio, ~~[illegible]~~ cioè spezzata in 2 sp. ni

per cui P è doppio: anche ogni ~~piano~~ per P [illegible] giunto S_3 e anche [illegible] per altro ha $\mathfrak{L}$ [illegible] ancora in P

Cioè segando con ~~piano~~ S_3 per 1 pt. P di questa ho ivi coppia quadrica ~~tutte~~ per P e Q per P ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ che vengano in C^4

(lo stesso ragto di S_3. $\mathfrak{L}$ risulta dove "doppio almeno". Se P fosse triplo per Φ da esso Φ^4 si proietterebbe secondo S_{r-1}. Ma allora questo S_{r-1} segando ogni Q di Φ^4_{r-2} sta in Q. Avrei sempre le quadriche spezzate.

in forma 6

Un solo intero $> \mathfrak{L}$ posso applicare quanto or detto e trovo un cono p. d. il cui vertice (Σ_{h-2} doppio) è doppio per le Φ^4. D'altra parte ~~ogni~~ [illegible] in gr. cantt. e [illegible] a un cono col vertice in Φ [illegible] cui [illegible] ricevuto il 2° Lemma di p. 167.

Se soltanto l'ultimo indice e_h vale UNO, avrò in Σ_{h-}
una V^2_{h-2} formata da un S^2_{h-2} doppio. Se finalmente tutte le
e sono ~~-1~~, cioè le quadriche Q_1 e Q_2 di cui sopra aveva
no già ciascuna uno S_{h-1} doppio, il rag.to tutto [illegible] ~~di p prec~~ prova c
che ogni punto dello Σ_{h-1} è autocon.to rispetto alle quadri
che del fascio, cioè queste contengono tutte per intero lo
Σ_{h-1}.

Insisto su una differenza che presentano questi casi.
Se una quadrica del fascio ha uno S_{h-1} doppio $h\geq 1$, i punti ch
esso ha in comune con una e quindi con tutte le quadrich
del fascio sono evid.te doppi per la Φ^4_{r-2}. Questi punti c
sono sempre se $h-1\geq 1$, cioè $h\geq 2$ ~~e invece~~ il punto può o non può essere
se $h=1$, avendosi allora il punto doppio per Φ se lo S_0
doppio della quadr. specializzata sta sulla base (è poi il
o di pg. 167) ~~Stando al caso~~ Comunque $h\geq 2$, il luogo dei ~~suoi~~ pun
ti doppi Di S_{h-1} è dunque generalmente una V^2_{h-2} (luogo dunque
di dim. $h-2$). Ed è appunto ciò che, negli es.pi suddetti
avveniva per i primi due. Nell'ultimo invece lo Σ_{h-1} dopp
di una quadrica specializzata stava sulle altre del fasci
e quindi era esso stesso (con la sua dim. $h-1$) luogo di
punti doppi. Così (per $h=1$) si ho un gruppo caratt. costituito d

Con queste oss.ni comincia a entrare direttamente i

ioco la Φ'_{r-1} nell'interpret. della sua specie(cioè della ca
att.)Così nel primo caso della caratt. $[1\ 1 - - - 1]$
a Φ non ha punti doppi (perchè da uno di essi si proiette
ebbe in un cono quadrico del fascio che avendo il vertice
ulla Φ conterebbe due volte fra gli $\overset{p.\,162}{\overbrace{r+1}}$, mentre qui tu
e le radici sono semplici)E viceversa se la Φ non ha pu
oppi la caratt. è quella,perchè l'esistenza di un gruppo
aratt. composto di più esponenti porterebbe a una quadric
pecializzata con almeno una retta doppia e questa darebbe
oi punti doppi per Φ nelle sue inters. con le altre quad
he del fascio (p prec).E se poi vi fosse un gr caratt.
ostituito di UN n° $e>1$ esso condurrebbe (p 176) a un pt
oppio di Φ .Quindi la caratt $[1 - - - 1]$ equivale a d
e che la Φ'_{r-1} non ha punti doppi. × v p 176

Le oss.ni prec.te fatte (specialmente da p 169 in poi
ànno qualche cosa di geom. relativamente alla presenza
ella caratt. di interi maggiori di uno;ma non dànno anco
elle interpretazioni distinte secondo il valore di quest
nteri.Limitiamoci p es a un gruppo caratt. formato da un
olo $e\geq 2$.La sua presenza è nec e sufficiente (p 176 p 16
erchè ~~lalquadrica~~ il cono quadrico che gli corrisponde abbia
l suo vertice sulla Φ ,cioè porti a un punto doppio di Φ
Ma ciò vale qualunque sia il valore di $e \geq 2$ ... fin qui ho cercato

V è del fascio di curve Θ. A queste curve corrispond.^{ne} tagliando con α_{r-2} si sostituiscono quelle di un fascio $\overline{\Theta}$ di $\overline{T}_{r-3}$ di α_{r-2} e delle ora sono $\overline{K}^4_{r-5}$.

come si distinguono fra loro i vari valori di $e \geq 2$ in relazione a varie particolarità geometriche presentate da questo punto doppio, giungendo (non dirò qui come) ai seguenti risultati.
Sia x tale punto doppio per una quadrica Q_1: le quadriche del fascio per le quali esso non è dopio hanno ivi uno stesso iperpiano tg (caso particolare di p. 162, dove si parlava dell'ip.no polare) Σ_{r-1}. Tagliando con Σ_{r-1} tutte tali quadriche, ho in Σ_{r-1} un fascio di sezioni, che sono T^2_{r-2}, tutti coni col vertice in x [p.134] che diciamo Θ. Questo fascio di coni ammette a sua volta una quartica base (pensarsi segnare, entro Σ_{r-1}, con α_{r-2}), cono esso pure con vertice in x, K^4_{r-3} cioè formato da rette per x in Σ_{r-1}. Evidente, i punti di questo K^4_{r-3} stando su tutti i coni T^2_{r-2} che stanno su le varie quadriche del fascio, stanno su queste, cioè su Φ.
Nasce così la considerazione, in relazione col punto doppio x della Φ^4_{r-2} di questo ~~quartico~~ cono quartico K^4_{r-3} col vertice in x e formato da rette della Φ uscenti da esso. Ora tra i coni quadrici del fascio Θ^{2}_{4} vi è particolare il cono quadrico P_{r-2} formato dalle rette tgti al Φ^4_{r-2} nel suo punto doppio x, cioè tgte alla Φ^4_{r-2} in x. Esso in contiene evid.te fra le sue rette quelle uscenti da x che sono addirittura tracciate su Φ^4_{r-2}, cioè le rette della Φ.
bene, Segre ha ridotto la considerazione del cono A al fascio originario, a cui compete la ~~...~~ e a quella
come gruppo caratt. Ω_2

~~&&&&&&&&&&&~~ del n° caratt. del cono P^2_{r-2} nel fascio Θ

in quanto ~~quest'ultimo interviene precisamente~~

1) se $e=2$, il cono P^2_{r-2} non è ulteriormente specializzato;

2) se $e>2$, il cono P^2_{r-2}, entro il fascio Θ corrisponde a un gruppo caratt. formato dal n° e-2.

Si ha così un modo ricorrente di interpretare i vari valori di e. Per $e=2$, è già detto sotto 1). ~~Per~~ Dire $e=3$ vorrà dire che il cono P, entro il fascio è (pensare sempre alla sezione con α_{r-2}) specializzato una volta, cioè ha retta doppia precisamente (valore 1 entro α_{r-2}) che questa retta doppia NON sta sulla K^4_{r-3} cioè sulla Φ. Vi sta invece per $e\geq 4$, e i vari valori di $e\geq 4$ si differenziano ~~per~~ in modo ricorrente come si è accennato.

Segre ha poi anche esteso queste considerazioni, almeno in parte al caso in cui gli $e\geq 2$ fan parte di gruppi caratteristici comprendenti più di un n°

~~Si può~~ Vedere p. es. ~~come~~ – senza entrare in troppi particolari – ~~le~~ prec.ti consid. permettano di classificare i fasci di quadriche non tutti coni in S_3 (lasciando ~~&&&&&&&&&~~ il caso più elementare r = 2). Scriviamo le varie caratt. possibili, cominciando da quelle dove ogni gruppo contiene un solo intiero.

[1111] [211] [31] [4] [22]

122

solo $e_p = 1$, avrò in Σ_{h-1} una V^2_{h-2} formata di S_{h-2}

spez. Se tutte le e_h sono > 1 [questa ipotesi non rientra nell'enum.

;, ma riprendendo quanto detto prima] direi che lo Σ_{h-1} è "Σ di spazi h_{-2} cioè

$\sum$ per cui sono doppi tutti i pt. di uno S_{h-} [così detto Σ_{h-1}, vuol

e

quelle con 1 gr. di 2 unità

[(11) 11]   [(11) 2]   [(21) 1]   [(31)]   [(22)]

[(11) (11)]

con 1 gr. di 3 o più   [(111) 1]   [(211)]

inoltre aggiungi le   [(1111)]

La possibilità di quest'ultima si esclude però subito
perchè la corr.te radice di $\Delta(\rho)$ annullerebbe anche tutti i
...i del 1° ordine, cioè gli el.ti $a_{ij} - \rho b_{ij}$. Ma allora le a_{ij}
...bero prop.li alle b_{ij}, e le quadriche con cui si indivi...
...il fascio coinciderebbero. Questa consid. serve per esclu...
... la caratt. [(11111111)] per ogni valore di r.

Restano le altre 13 caratt. La [1111] sappiamo già
...e si interpreta nel senso che la quartica base non ha pu...
...i doppi. Per la [211] questa ha invece un punto doppio ma
... tangenti distinte (p. prec sotto 1), dove il cono P_1^2 è app...
...o formato dalla coppia delle tgti; dire che non è ult. spe...
...ializzato vuole appunto dire che le due rette che lo for...
...mano sono distinte, cioè nodo (e restano 2 altri coni). Invece per [31] si ha quarti...
... base con punto doppio ma ora (p prec.te, caso e = 3) l'a...
...uale P_1^2, cioè la coppia di tangenti ha una retta doppia
...cioè si ha una cuspide (e resta (1 più) un cono). Il caso [4] si differenzia da questo
...in quanto (v. ancora p prec) la tangente cuspidale sta sulla...

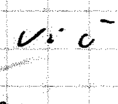
quartica base cioè questa & si decompone in una cubica e (per avere cuspide) una sua retta tangente. Resta nella prima serie la caratt. [22] Allora la quartica base ha due nodi e come tale si spezza nec.te in una cubica e una sua corda.

$\gamma\gamma'$ vict. in 2 pt. sulla retta r...

Nella seconda riga abbiamo un gruppo caratt. contenente due int ri: esso corrrisponde a una Q spec.te due volte, diconoide Q_1

conichi la quartica base si spezza sempre in due coniche

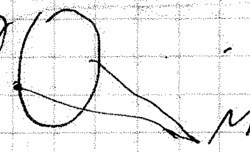
cioè a una coppia di piani. Precisamente la caratt. [(11)1] corrisponde a una quartica base spezzata in due coniche (~~distinte~~) che si segano (sulla retta r comune ai due piani) in due punti distinti, e che non si spezzano. ~~La prima~~ ~~Se pos~~ Ciò risulta ~~per~~ dal fatto che restano due coni distinti nel fascio, cioè due centri da cui le coniche si proiettano l'una nell'altra (mentre se si toccassero, si avrebbe un solo di questi punti Geom 11); la seconda analog.te perchè se UNA di esse si spezza, solo &&&&&&&&&&&&&& il suo punto doppio è vertice di un ulteriore cono del fascio (e se si spezzano entrambe viene ~~un'altra caratt.~~ coppie di piani di ... e ... ciò [(11)(11)]



v. sotto)

Nel caso [(11)2] vi è (p. 179 bis) un ~~punto~~ vertice M di cono Q del fascio che è pt. doppio per la C^4 base: e tratt. ... di un cono distinto dalla coppia di piani (altro gr. caratt.) il suo vertice è punto di r [se no sarebbe doppio per tutte le Q del fascio]: quindi ~~...~~ uno dei due punti ... pt. doppio di una delle ~~quartiche~~ C^2 punto: La C^4

ben è punto c.d. ma dipende da 2 rette distinte una delle due

conica: con γ  . (da M si prendono effettivamente in ciascuna Q_2).

Specie [(21) 1] Allora (p 177 principio) sulla retta r (l'attu

le Σ_{h-1}) le altre quadriche del fascio segano un punto co

tato due volte, cioè le sono tangenti; perciò ora le coni

che $\gamma\gamma'$ sono tangenti fra loro; e sta bene la presenza d

l'ulteriore intero caratt. 1, perchè sappiamo esservi un

cono per tali due coniche. [Esse sono poi nec.te irriduci

bili (se no vi sarebbe caratt. diverso)]

La specie (31) si può considerare come limite del caso [(11

~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ (p. 169) e allora

il punto doppio della Q_2 di cui sopra è venuto a stare sulla retta

doppia della Q_1 cioè sulla r. Vuol dire che la quartica

è composta di una conica e di una coppia di rette uscen

da un suo punto (Oss. In generale, ciò porterebbe 5 + 2 + 2

cond. per una quadrica; cioè non ne risulterebbe un fascio. E' p

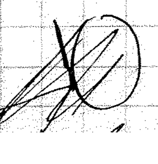
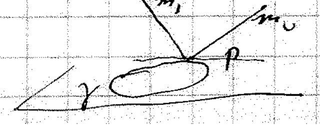
rò da osservare che non dovendo le quadriche del fascio

risultare tutte con punto doppio, le rette m_1 m_2 e

la tangente alla γ in P (v. figura) devono essere compl

nari. E allora effettivamente imponendo le due rette si

hanno 5 cond.ni; e allora basta imporre tre ulteriori

punti della conica (perchè  

quadriche passando già per P ...

Caratt. (22) E' secondo p. 169 caso limite di [(11)(1
quando le relative quadriche Q_1 e Q_2 vengono a coincide
Del resto sappiamo già (p177) che altra ~~la~~ retta doppia r del
la Q_1 sta per intiero su tutte le altre quadriche del
fascio. Presane una Q per cui r non è doppia il suo pia
no tangente in un punto di r è tale per tutto il fascio
cioè ho un fascio di quadriche tangenti lungo una retta
La loro residua intersezione è formata da due rette del
la schiera opposta (quelle in cui Q taglia ancora i due
piani della Q_1) La quartica è dunque formata da una rett
contata due volte più due rette incidenti ad essa.

[(11) (11)] . Qui ho due coppie di piani distinte Q_1 e
Q_2 ; la quartica è formata dai quattro lati di un quadri
latero sghembo (in cui i piani di una coppia segano c
quelli dell'altra).

Nei due tipi residui ove ho un gruppo caratt. di tre
numeri ho quadrica Q_1 spezzata due volte, cioè piano π dop
pio. A priori la quartica base potrà essere formata da
una conica γ da contarsi due volte (prodotta segando
il piano con un'altra quadrica del fascio) non degenere
-se ~~l'altra~~ un'altra quadrica Q non è tangente al piano- oppure
degenere -se lo è. Se γ è non specializzata, il fascio è

ω $\mathcal{L}$ u $\bar{\imath}$ $f(\bar{x}) = 0$ e dove $\bar{x}$ ec

unica : $f(\bar{x})f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ e $f\left(\frac{x}{x}\right)$

è il primo per $\bar{x}$.

~~costituito dalla~~ contiene come quadrica il cono circoscritto a Q lungo γ (la sua eq. è appunto comb. lin di quella di Q e di quella del piano doppio), con vertice fuori del piano. La caratt. in questo caso è dunque $[(111)1]$.

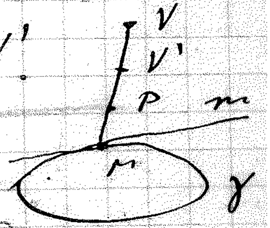
Se invece γ è spezzata in due rette distinte m_1, m_2 non vi sono più coni nel fascio (IL VERTICE sarebbe il punto $m_1 m_2$ ma allora non potrebbe essere, come dovrebbe, il piano tangente lungo entrambe le generatrici $m_1 m_2$). Avremo così la caratter. $[(211)]$ dove appunto mancano gli ulteriori coni.

Né può γ spezzarsi in rette coincidenti (perché ogni quadrica del fascio annullando π sarebbe un cono tgt lungo r ...).

In definitiva le due ultime caratt. considerate conducono a una quartica base formata da una conica contata due volte, risp. non degenere o spezzata in due rette distinte.

La teoria svolta si applica, come ho detto ai fasci di quadriche non tutte specializzate. Il caso dei fasci di coni è stato trattato a parte da Segre in un altro lavoro "Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque, Torino Atti XIX 1884" del quale dico subito qualche parola, per ritornare poi alle Memorie di cui ci stiamo occupando. Tra i fasci di coni quadrici vi sono evidentemente

sci di coni c. l vertice in comune; ma non sono i soli. P
in S_3 se parto da due coni di vertici V, V' ottenuti pro
tando da questi una stessa conica γ, in modo che la rett
risulti generatrice comune - cioè si appoggi alla γ in M qu
due coni hanno evidentemente come piano tangente lungo
il piano π che unisce questa retta con la tgte m.... (V.
.) Siccome in ogni punto di VV' il piano tgte ai due co
è lo stesso, ogni quadrica del loro fascio avrà in M anc
lo stesso piano tangente, cioè π è tangente a ogni qua
ica del fascio lungo tutta la VV'; ma allora ogni quadrica
l fascio è un cono, col vertice evid.te sulla VV'.



Anzi, risulterà da quanto diremo che è questo
solo caso possibile di un fascio di coni, nello
azio ordinario, senza vertice in comune. Sviluppiamo ap
nto con Segre, qualche consideraz. geom. sui fasci di coni
S_r. Segre considera anche il caso generale, in cui il con
nerico del fascio è una quadrica specializz. h volte anc
$h>1$; io mi limito ai coni di 1.a specie o quadriche specia
zzate una volta sola. Supponiamo senz'altro che siano sen
vertice comune; se no si ottengono proiettandoli dal ver
un fascio di quadriche non specializzate di uno S_{r-1}.
offre allora spontaneamente allo studio il luogo dei ve

dico ciò pensando agli eventuali casi di specie superiore del fascismo.

ici dei coni(generici) del fascio. Per ognuno di questi s
un punto(verticale)e così la linea $\mathcal{L}$ loro luogo. Analitic.t
ha subito questo. Se $\sum a_{ij} x_i x_j = \sum b_{ij} \ldots$ sono due coni del
ascio, è identicamente $\Delta = |a_{ij} - \rho b_{ij}| = 0$. Per ogni valore di
il vertice x del cono si trova come punto a iperpiano
olare indeterminato, cioè tale che

$$x_0(a_{00} - \rho b_{00}) + x_1(a_{01} - \rho b_{01}) - \,-\,- + x_r(a_{0r} - \rho b_{0r}) = 0$$

ec.; perciò le sue coordinate sono proporzionali ai comple
nti di una orizzontale del det. Δ, cioè a
olinomi di grado r nel parametro ρ. Quindi la
nea luogo dei vertici è algebrica e anzi razionale e si
ò aggiungere di ordine $m \leq r$. Dico $m \leq r$ e non $=$ per quest
gione; che quei polinomi potrebbero avere un fattore a c
ne e allora se esso è di grado m le x risultano date
polinomi di grado $r - n$. Allora il luogo dei vertici ha
le grado(proprio, perchè vi è corrispondenza biunivoca tr
valori di ρ, e i punti della linea $\mathcal{L}$, ognuno dei quali non
ò provenire da due valori di ρ, perchè sarebbe verticie
e e quindi di tutti i coni del fascio)

Ragioniamo ora sintet.te. Per conoscere l'ordine de
nea $\mathcal{L}$ cerco quanti suoi punti stanno in un iperpiano ge
co T_{r-1}; ora in esso il fascio F di coni sega un fascio F' di

| [potrebbe p. es. un caso /
F proviene da un caso
d'specie sup. di $\bar{F}$]

riche che ha ovviamente al massimo r coni. Ora se un punt
vertice di un cono del fascio dato F, è situato in T_{r-1}, il
o in questione sega T in un cono del fascio F'; quindi a
aggior ragione nell'iperpiano T vi sono ~~addaaaaa~~ $m \leq r$
unti della linea L, cosicchè si conferma la diseguaglianz
i sopra. La L è dunque una linea razionale di ordine $m \leq$
ome tale essa è certamente contenuta in uno spazio (minimo) di di
ione $S \leq m$ (quindi ... piano...) se invero $x_i = a_{i0}\rho^m + a_{i1}\rho^{m-1} \ldots + a_{im}$ $(i = 0 \ldots r)$
la sua rappresentazione parametrica, io posso determinar
n tanti modi diversi delle $\lambda_0 \ldots \lambda_r$ tali che l'iperpiano
$\sum \lambda_i x_i = 0$
ontenga tutta la linea. Basta ottenere che $\sum_i \lambda_i a_{i0} = 0$

$\ldots \sum \lambda_i a_{im} = 0$. ~~Sono~~ Questo è un sist. di eq. omog. nelle
incognite $\lambda_0 \ldots \lambda_r$: le eq. sono $m+1$: quindi il sist.
ammette certamente almeno $(r+1)-(m+1) = r-m$ sist. di soluz.
ind.: cioè la L sta in almeno altrettanti sp. lin. ind.
cioè nel loro spazio d'intersezione che avrà dim. $r-(r-m) = m$
minima (se questi sp. lin. ind. non più di $r-m$).
~~Ora~~ Ora, attendendo, si può trovare che vale il segno $=$, cioè
la L è una C^m razionale appartenente (con spazio minimo) a
uno S_m; ritornerò su questo fra un momento. v. p. 205

Per ora facciamo con Segre qualche altra oss. sulla L
Anzitutto quella che essa appartiene a tutti i coni del fa
o cioè fa parte della base di questo. "Infatti se x ne è
(ricordare il teor. di Bertini...)

Siccome questi punti x sono fra i punti y dello S_d, così il sistema H di iperpiani è contenuto nella totalità K degli iperpiani polari dei punti y dello S_d. ~~Questa totalità~~ ~~[illegible]~~ Questa totalità K è un sistema lineare (provenendo nella polarità dei punti di uno spazio lineare) e precisamente un sistema lineare ∞^{d-1} (perchè i punti di una retta per ~~A~~ il vertice di A, e questi soli hanno lo stesso ip.no polare: se ne hanno dunque ∞^{d-1}): il sist.e K è dunque formato degli iperpiani per uno S_{r-d}. Quindi anche gli ip.ni di H hanno a comune questo S_{r-d}. Nè possono avere in comune gli ip.ni di H uno spazio di dim. ρ maggiore. Invero, n punto, vertice di un cono C del fascio, x come sappiamo (p.162) ha uno stesso iperpiano polare Σ rispetto a tutti gli altri coni del fascio. Ma l'ip.no polare di x rispetto a un cono A passa per il vertice di A; quindi Σ passa per i vertici di tutti i coni del fascio, escluso forse C e per conti-

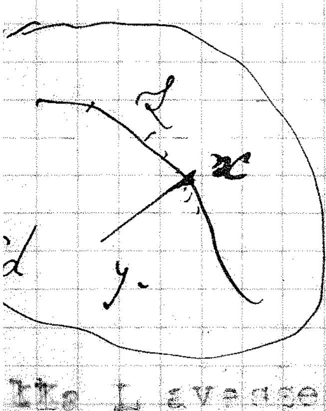
cioè per x. Quindi è autopolare c.d.d. In particolare x sta in Σ il che prima ho asserito.

à anche C. ~~Quindi Σ contiene tutta L.~~ ~~Da quanto ho~~ detto risulta inoltre che

In ogni punto della L le quadriche del fascio hanno in comune l'iperpiano tangente (un momento fa si diceva polare)

la linea L sta in tutti gli iperpiani tangenti cui ora si è detto.

Dimostriamo ora che, detto S_d lo spazio di appartenenza della L^n, nonsoltanto questa linea, ma addirittura tutto fa parte della base del fascio. Fissiamo infatti un cono del fascio, e pensiamo al sistema ∞^1, che chiamo H, degli iperpiani polari Σ rispetto ad A dagli ∞^1 punti x della L.



Siccome S_d è il minimospazio in cui sta L, io posso ottenere tutti i punti y di S_d combinando linearmente d+1 punti della L generali. Perciò se gli iperpiani polari di questi punti della L avessero a comune uno S_p questo sarebbe pure comun

a tutti gli iperpiani di K. D'altro lato, come si è visto, gli iperpiani Σ che costituiscono H, contengono tutta L e conseguentemente tutto S_d, cosicchè lo S_{r-d} comune a tutti gli iperpiani di H (o ciò che ormai è lo stesso di K) contiene a sua volta S_d. Infine ogni punto y dello S_d viene a stare nell'iperpiano polare, il che dice che ogni punto y dello S_d sta sul cono A. E ripetendo quanto si disse al variare di A, segue che ogni punto dello S_d fa parte della base del fascio.

Teniamo inoltre presente questo, che è contenuto nelle cose già dette. Rispetto al cono A - di cui chiamo x il vertice - i punti dello S_d situati su una stessa retta per x hanno uno stesso iperpiano tangente (prima si diceva polare); al variare di questa retta si hanno gli ∞^{d-1} iperpiani per lo S_{r-d}. Se invece di A e il suo vertice x prendo un altro cono del fascio A' col suo vertice x' posso ripetere lo stesso, e riottengo GLI STESSI iperpiani tatgebti, ognuno in corrispondenza a una retta per x'. Anzi come subordinata da una proiettività spaziale la corrispondenza fra gli iperpiani per S_{r-d} e le rette della stella (x, S_d) lungo cui sono tangenti ad A è proiettiva e così quella fra quegli stessi iperpiani e la stella $(x'\ S_d)$ In definitiva sono omografiche queste due stelle. Nasce così entro lo S_d

(va a p. 209)

da p 199)* Comunque, chiarisco subito questo. Se una cur
^{m} razionale come quella considerata sta prioprio in uno
S_m (caso massimo) alla sua rappr. parametrica IN QUESTO si
può dare una forma particolarmente semplice. Invero se ess

$$(\times)\quad x_i = a_{i0}\rho^m + \dots + a_{im} \qquad (i = 0, \dots m)$$

faccio il cambiamento di coord. $x_i = a_{i0}y_0 \dots + a_{im}$ $(\times\times)$
la trsf lin ha det. non nullo, come si vede subito) e all
a la rappr. par. nelle nuove coord. è

$$y_0 = \rho^m, y_1 = \rho^{m-1} \dots \qquad y_m = 1 \qquad (1)$$

Infatti partendo da queste espressioni e sostituendole
nelle $(\times\times)$, si torna alle $(\times)$. Quindi le curve razionali
^{m} appartenenti a S_m (o come si chiamano raz. NORMALI, in
quanto non proi. di curve dello stesso ordine appartenent
spazi maggiori, dove come si disse non ve ne sono) hanno
la rappr. param. così semplice vista. Sono le generalizza
zioni delle coniche, cubiche sghembe... Qui su esse ci im
porta osservare quanto segue a). Nei punti della curva con
siderata è ovviamente

$$(2)\quad \begin{Vmatrix} y_0 & y_1 & \dots & y_{m-1} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{Vmatrix} = 0$$

viceversa i punti soddisfacenti alle (2) stanno sul
la curva considerata. Invero posto $\frac{y_0}{y_1} = \frac{y_1}{y_2} \dots = \frac{y_{m-1}}{y_m} = t$
si deduce (fatto $y_m = 1$) $y_{m-1} = t$, $y_{m-2} = t\, y_{m-1} = t^2$ ... etc.
fino a $y_0 = t^m$. Quindi la L^m è ugualmente rappresentabile con le (2).
Ora si ~~questo~~ em legge questo: come le due stelle $\lambda_0 y_0 \dots + \lambda_{m-1} y_{m-1} =$
$\lambda_0 y_1 \dots + \lambda_{m-1} y_m =$
proiettive: sono stelle di iperpiani

Notg con la restrizione ~~che~~ (analoga alla nostra prop.^{ta} per $r=2$) che segue con $S_{n..}$ come detto mai vengano ai pt. uniti)

gue de p. pna.te). Se anni il luogo del punto comune a rette
...te (due punti sono opposti) viene appunto (2) [infatti se un pu.
comune a rette ass.te, tutti gli sp.ni rette 1e della per un hanno ;
... pure per ciò ... le 2 eq.ni rette ...
...]. Quindi la L^m (1) appare come luogo
pt. d'incontro di raggi analoghi in 2 stelle proiettive
... sono rette L^m ($\rho = 0$, $\rho = \infty$). b) è viceversa partendo
da stelle proiettive e cercando il luogo ... viene una L^m raz.
norm. Infatti segando le due stelle con un iperpiano S_{m-1}
erico, si vede che la linea generata ha quivi tanti punti
nti saranno quelli uniti di un'omografia Ω in questo spazi che si ...
le a dire (essendo inn° finito per ~~la natura della questi~~ ipotesi
) $(m-1)+1=m$ fra distinti e coinc.ti ecc. Quindi la linea gene
ha ordine m .Proiettandola succ. da suoi punti viene
na conica, e quindi quella è razionale; e allora come L^m r
partenente a S_m è appunto la (1) [~~Potrebbe~~ Può sorgere il dub
che NON appartenga allo S_m; ma esso si elimina in quanto
appartiene a uno $S_{m-\mu}$, la sua int. con S_{m-1} che dava i pu
uniti dell'omogrfia Ω starebbe in uno $S_{m-\mu-1}$ e
... in modo da avere ... di m pt. distinti il che ...]
supposto che questi m punti nello S_{m-1} non sarebbero
... : ne segue ... che Ω ha infiniti pt. uniti (...
... linea retta, ... ; ecc. ...)

torna a p. 199

I Ciò dicendo si ammette soddisfatta la restrizione di
p. 206 [e va bene: perchè il luogo dei pt.
2-dipendenti dei luoghi di pt. doppi delle
rigate quadriche del fascio. Coincide invece quella
superficie con $\mathfrak{L}^{mo}$ che non è rigata con ∞ pt. di
nessuna superficie].

II [se non è pt. doppio di curve di specie
superiore]

onsiderazione delle due stelle omografiche di centri x,
e quindi della linea C^d raz norm (p 205) da esse genera
a. Ebbene, questa C^d non differisce dalla L^m luogo dei ver
ici del fascio, cosicchè resta provato l'asserto di p 199
Invero se in S_d un punto z è comune a raggi omologhi del
lue stelle, è tale che in esso i due coni A A' hanno lo
stesso iperpiano tangente, cioè tutti i coni del fascio ha
no lo stesso ip. tangente, ma allora come sappiamo (p 162
z è vertice di un cono del fascio, cioè sta sulla L. Quind
ogni punto della C sta sulla L. E ~~xxxxxxxx~~ inversamente
se prendo un punto z sulla L, esso è vertice di un cono
del fascio, ma allora ivi i coni A A' hanno lo stesso ip
tgte, cioè esso è comune a raggi xz xz' corr.ti delle due
stelle. Così tutto è dimostrato.

Dalle cose dette abbiamo dunque che la linea luogo
di i vertici è una L^m raz. norm. di uno S_m contenuto nell
S_r. Che valori potrà avere m? Essi si limitano subito pens
do che lo spazio di appartenenza (prima si diceva S_d ora
S_m sta su tutti i coni del fascio che sono semplicemente
specializzati. Segando con un ip.no generico si avrà che
S_{m-1}... potrà stare su una quadrica non specializzata d.
S_{r-1} dove come sappiamo gli spazi massimi (p 143)

cioè n r dispari $\left[\frac{r-1}{2} - 1\right]$ e cioè n r pari ... n e dispari $\left[\frac{r-2}{2}\right]$. Quind

per r dispari $m-1 \leq \frac{r-1}{2}-1$ cioè $\boxed{m \leq \frac{r-1}{2}}$

per r pari $m-1 \leq \frac{r-2}{2}$ $\boxed{m \leq \frac{r}{2}}$

Abbiamo così il modo di dominare tutti i fasci di coni, e
anche da più punti di vista. P.es. ci si può domandare com
si devono assumere due coni quadrici A, A' (senza vertice comune
perchè il loro fascio di quadriche sia di coni. Se questo
corrisponde a un certo valore di m della tratt. precedent
lo S_m di cui sopra deve essere situato su entrambi i con
cosicchè questi DEVONO avere a comune uno S_m generatore, e
inoltre secondo quanto precede lo S_{r-m} (S_d di prima P 203
in cui si segano gli ip.ni tgti al 1° cono nei punti di S_m o
come possiamo dire brevemente, in questo stesso senso, lo
S_{r-m} tgte al 1° cono lungo S_m ~~&&&&COINCI&~~ DEVE coincidere
con quello tgte al secondo. Queste condizioni che cioè du
coni abbiano in comune uno S_m generatore (con $1 \leq m \leq$) i
e precedente) sono non solo necessarie ma anche sufficie
i perchè essi d terminino un fascio di coni. Invero, per
sufficienza, invero i punti dello S_m essendo comuni per ip
tesi ad A, A' stanno su ogni quadrica Q del loro fascio. In
re l'ip.no tangente a Q in un punto generico P di S_m appartenendo
l fascio degli ip.ni ivi tgti a A, A' passa come questi pe
S_{r-m}: ciò vale per tutti i pt. P generici di S_{r-m}: allora gli ip.ni

tgti a Q negli ∞^m punti di S_m sono([al massimo]) quanti gli iperpiani per S_{r-m} cioè $\infty^{r-1-(r-m)}=\infty^{m-1}$ .Non vi è dunque corr.za biunivoca come vi sarebbe se Q fosse non cono fra i punti di S_m e i relativi iperpiani tgti;quindi Q è proprio un cono e anzi col vertice su S_m

Possiamo applicare i risultati prec.ti ai primi valori di r per trovare tutti i fasci di coni quadrici(con vertice variabile) SPAZIO ORDINARIO;Nec.te $m=1$ .Allora luogo dei vertici è una retta;il fascio si può individuare secondo quanto precede con due coni aventi comune una retta e tgti lungo essa:la residua int.ne è una conica e si ricade,come sull'unico caso possibile,sull'esempio di p. 195

r = 4. $1\leq m\leq 2$ Fascio formato da coni aventi a comune una retta e tgti lungo essa;oppure aventi a comune un piano generatore(qui non c'è da aggiungere altro;esso stesso funge evid.te da piano tgte lungo sè stesso).Questi fasci si individuano secondo quanto precede con due coni di tale tipo.

r = 5 $1\leq m\leq 2$ .Fascio formato da coni tgti lungo una retta,oppure aventi a comune un piano e per di più lo S_3 tgte lungo esso. Ecc.

3

Avrei potuto cominciare da $r=2$, e allora avrei trovato iwfasci di coppie di rette (con vertice varibile); spiegare il caso del vertice fisso; inv.ne) Qui $m=1$, e trovo che il fascio è individuato da due coppie di coniche c una re ta in comune; la residua varia allora in un fasc di rette.

Aggiungo che nella Nota di Segre si ~~&&&&&~~ trovano anche, oltre al caso deifasci di coni aventi generalmente specie superiore, sviluppati altri punti di vista. Tra questi ricordo

1) quanto si è detto conduce a un modo per ottenere tutti i fasci di coni, ma non dà ancora una class.ne di questi che offra analogia con quella dei fasci di quadriche non specializzate. Una tale class.ne si può cercare - e Segre ha indicato come - (in mancanza dei divisori elementari, visto che qui l'eq.ne $\Delta(\rho)=0$ è identica) in base alla presenza nel fascio di coni diciamo pur sempr di 1.a specie, di particolari coni di specie superiore. ~~&&&&&~~ "In generale" risultano $r-2m$ coni di ~~&&&&~~ 2.a specie; i quali possono però venire a coincidere fra loro eventualmente anche dando luogo a coni di specie superiore e lo studio di queste varie eventualità si può opportunamente ricondurre allo studio già fatto per un fasc

~~sua morte. Klein si è trovato così a collaborare con [illegible] per la pubblicazione, e fu portato così allo studio delle geometria della retta a partire dell 1868.~~

in gran parte precursore a Segre: soprattutto per Jordan e Klein. Questi (n. 1849) dal 1866 era assistente di Plücker fino alla sua morte 1868. Plücker lavorava allora alla "Neue Geom. des Raumes, o geom. della retta, di cui solo una parte era pubblicata alla

⊥ sappiamo già che i fasci diventano rette della M.

e che più, rette incidenti di un pt. d'una retta r

e vicine. ~~tiene dire che 2 pt.~~ Ora 2 pt. di r sono

incidenti coniugati rispetto a M i e vicini (perché

polari x, y, z passanti per y le rette zy è tg te

in x che con 3 pt. già sulle M). Perciò

rette incidenti di S_3 = pt coniugati della M.

Anche analiticamente (p. 219)

di quadriche non degeneri di uno spazio meno esteso

2) S. mette anche in relazione la sua teoria con la f
ma canonica data da Kronecker per un fascio di forme qua
tiche con discriminante nullo.

Aggiungo anche che in alcune Note del 1917 (Torino Atti,
Rend. Lincei) Togliatti ha studiato più generalmente il
caso di sist. lin di repre tà degeneri.

Tornando dopo questa digressione alla Mem. sulle qu
driche dirò che essa si chiude con un capitolo sulle se
di "quartiche omofocali" su una data quadrica Q; sono le qua
che segate su essa dalle quadriche di una schiera di cu
Q fa parte

Passerò ora a riferire alquanto rapidamente sulla 2.
Memoria, dove si applicano i risultati della 1.a alla geo
tria della retta concepita come geometria di una M_4^2 n
specializzata dello S_5 ~~Non~~ Mi trattengo appena ~~sulle~~ cose più
~~e per~~ gran parte
elementari: ~~&&&~~ I complessi lineari di S_3 (loro eq.) div
tano le varietà comuni a un iperpiano ~~&&&&&&&~~ e lla M_4
, V_3^2 di S_4 il cui studio viene così a equivalere a que l
e precisamente se il complesso è generale, cioè se $a_{12}a_{34}$
$a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} \neq 0$, lo S_4 come si vede facilmente NON è
tangente, e la $V^2{}_3$ non è specializzata, cioè si ha quadri
$a_{12}p_{12}$ — — $+ a_{34}p_{34} = 0$

L_0 In fatto basa dire che la cgr. è generale equivale a dire che le 2 rette direttrici distinte; cioè ~~che~~ (p. 216) che esistono 2 pt. di M cioè una retta di pt. coniugati alla S_3 σ non tgte e allora anche il suo S_3 polare, cioè σ è non tgte (che σ tgte vuol dire per un x altre rette M_1 entro Σ_4: allora la retta polare è sempre in Σ per x, cioè tgte).

generale di S_4; mentre un complesso lineare speciale ha per immagine un cono. Una congruenza lin. (int. di due complessi) ha per immagine la traccia della M su uno S_3 6, cioè una quadrica dello spazio ordinario; ~~e anche qui risulta~~ che se la congruenza è generale, questa quadrica è non specializzata, mentre essa diventa un cono se la congruenza è lin. speciale. Una rigata quadrica (schiera) comune a tre C diventa la traccia su uno S_2 π, cioè una conica della quadrica. E la schiera incidente è allora la conica segata da M sul piano π' polare di . Questa circostanza ~~risulta infatti più generale~~ (a p. 216) 216: re te incidenti di S_3 dànno per immagini in S_5 punti coniugati $a'a''$ nella polarità rispetto a M e viceversa: inverso la l.a circostanza si traduce in ~~...~~ $a_{12}a'_{34}+\dots$ e la seconda come si vede subito anche. ~~Quindi~~ essendo le rette di una schiera incidenti a quelle della seconda per i punti immagine si ha appunto la relazione dett. Più generalmente una rigata algebrica R dello S_3 diventa una linea algebrica ρ tracciata sulla M; e se quella ha ordine n, questa ha anche ordine n: infatti dire questo vuol dire che la ρ ha n punti con ogni iperpiano, in particolare tangente alla M; e allora R ha n rette in un complesso lineare speciale, cioè appoggiate a una rett

Aggiungo ancora che, originalmente non sol[o] i pt. della M_4^2 a dare cui immagini in S_3 (rette), ma anche ~~ogni altro~~ da ogni altro pt. P dello S_5 si ha una immag. in S_3 cioè: P dà luogo a un cp.^{mo} polare π (e viceversa), e quindi a un complesso lineare. E viceversa: quindi ~~i pt~~ ~~in~~ si rappresentano i pt. di S_5 nei cplessi lin. di S_3: se P viene a stare sulla M, π_4 diviene l'ip.^{no} tg.te e si hanno in S_3 il cplesso lin. delle rette app.^{te} alla retta p imag. di P: si ricade così nella rapp.^{ne} dei pt. di M sulle rette di S_3. Per questo ordine di idee si presenta la domanda: quale è in questo caso più generale il significato, in S_3, della nozione di pt. coniugati in S_5? Per P e P' sulla M, sappiamo già (p. 216) che si tratta allora della incidenza delle 2 rette imag.^{ni}: ma coniugando P e P', se sono coniugati, i loro cplessi lin. imag.^{i} vengono a trovarsi in una ~~cond~~ relazione particolare che prende il nome di involuzione. Se un nuovo $\Sigma a_{ik} p_{ik}=0$ e $\Sigma b_{ik} p_{ik}$ le eq. di cplessi si scrive pensando a questo S_4 in S_5 e ai loro poli ($p_{34}=a_{12}$; $p'_{34}=b_{12}$): la relaz. di coniug. $P_{12}P'_{34}+\dots=0$ ds

$$\boxed{a_{12}b_{34}+\dots=0} \quad (1)$$

Questa è dunque la cond. di involuz.^{ne} dei 2 cplessi lin. considerati. La nozione di cpl. lin. in invol. fa capo a Klein. Qual è il suo signif.^{to} intrinseco? ... quello che comunque si prenda una retta g comune ai 2 cplessi lin. (p.es., si possono prendere come i loro poli) le pt. quella ottenute su g dai 2 poli di piano uscente intorno g sono involutive

segue a p. 222

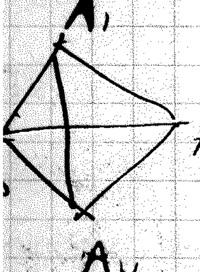
a,cioè R incontra a in m punti.Così,senza entrare in particolari,è lo stesso studiare le rigate cubiche di oppure le C^3 esistenti sulla M (e quindi ,stando quella to in S_3) su una quadrica ordinaria ~~il fatto che la C^3 ha possibilità che non sia piana, ovvero che giaccia (su un piano nec.te della M)~~. oPOSSIAMO DIRE C^3 sghe perchè se stesse su un piano questo sta su M,e allora R è cono,oppure inviluppo piano.Il fatto che la C^3 sta S_3 equivalea dire che ogni rigata cubica sta in un comp lineare,e come quello S3 può essere non tangente o tang nte alla M,segue che le generatricid di una rigata cubica ssono presentarei due casi di essere incidenti a due rett sse(caso della rigata generale) o a una sola(rigata di ayley). E così le rigate del quarto or ine dello S_3 si udiano come quartiche della M (nec.te in S_4 o meno) così è le loro generatrici appar engono sempre a un complesso neare.

Questo come esempio,ma è in casi meno elementari la rappresentazione ottiene la maggior utilità;e per anto riguarda la /Memoria di Segre sopratutto nello stud i complessi quadratici e delle congruenze quadratiche.

d'una

(segue da p. 220) Possiamo controllarlo così. Anzitutto la nozione in S_3 quale è definita da (1) è invariante per trasf.ni di coord. e: infatti ... lin. nelle x le dette nelle p_{ik} - cioè trasf. di coord. proi... in S_5 (che lascia inalterate le forme $p_{12}p_{34}$ - - - = 0 dell'eq. della M) e per questa è invariante la nozione di polarità e ... il campo, e più particolarmente le sue forme canoniche (1, ... Ciò premesso prendo p. es. come $A_1 A_2$ una retta comune a ... complessi. Nelle loro eq.ni solo effetto di $p_{12} = 1$ e le altre p nulle ... $a_{12} = b_{12} = 0$. Piano per $A_1 A_2$ $\xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$

I suoi 2 poli $(m_1 m_2\ 0\ 0)$ $(n_1 n_2\ 0\ 0)$



A_4 sono ... due ricordando in generale il pt x_1, x_2, x_3, x_4 ha il piano polare ξ ...

$\xi_1 : a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4$

$\xi_2 : c_{21} x_1$ ...

ξ_3 :

ξ_4 :

$$\frac{\xi_3}{\xi_4} = \frac{a_{31} m_1 + a_{32} m_2}{a_{41} m_1 + a_{42} m_2} = \frac{b_{31} n_1 + \ldots}{b_{41} n_1 + \ldots}$$

cioè

$$(a_{31} b_{41} - b_{31} a_{41}) m_1 n_1 +$$
$$(a_{31} b_{42} - a_{41} b_{32}) m_1 n_2 +$$
$$(a_{32} b_{41} - a_{42} b_{31}) m_2 n_1 +$$
$$(\ -\ -\ -\ ) m_2 n_2 = 0$$

La cond. di apolarità è invece

$$\underline{a_{31} b_{42}} - \underline{a_{41} b_{32}} = \underline{a_{32} b_{41}} - \underline{a_{42} b_{34}} \quad \text{cioè}$$

$$a_{13} b_{42} + a_{42} b_{13} + a_{14} b_{23} + a_{23} b_{14} = 0 \quad \text{cioè la (1).}$$

c. d. d.

quanto riguarda i complessi quadratici, sappiamo già che
udio di uno di essi equivale allo studio del fascio di
riche dello S_5 che si ottiene aggregando alla sua equazio
uella della M. Quindi si presenta un problema di classi
azione dei complessi quadratici come caso particolare
quello già trattato dei fasci di quadriche in base alla
atteristica. Non entrerò in particolari su questa classif
ione eseguita da Segre, riservandomi di aggiungere poi
lche indicazione in proposito. Naturalmente essa riesce
complicata in S5 che nel caso a noi già noto di S_3.
i presentano complessivamente 49 tipi diversi di carat
istiche. Il tipo per così dire più generale è quello del
20) 224
plesso quadratico corrisp.te alla caratteristica [111111]
ndo nel fascio di quadriche vi sono 6 coni. Allora (p.
loro vertici sono a due a due coniugati rispetto a tutte
quadriche del fascio, in particolare rispetto alla M; così
e (p.220) essi conducono a considerare una certa sestupla di com
essi lineari a due a due in involuzione fra loro. Questi
mplessi - che sono stati introdotti da Klein - si dicono fo
mentali per il complesso quadratico; e - come non sto a con
ollare - godono di questa proprietà che ognuno di essi (con
derato come una polarità nulla) trasforma il complesso qu

ratico in sè. Piuttosto osservo che essendo ora i 6 verti
. dei coni in S_5 vertici di una piramide autopolare rispe
) al fascio di quadriche (p. 165) se li assumiamo come ver
.ci di una piramide fondamentale in S_5, le equazioni dell
adriche del fascio si riducono tutte alla forma $\sum_{i=0}^{5} a_i x_i^2 = 0$
osì avverrà per fissare le idee che questa sia la eq dell
e $\sum b_i x_i^2 = 0$ (2) sia l'eq. di una ulteriore quadrica che serve
.à per rappresentare il complesso quadratico. Si possono
sempre propr. introdurre in S_5 delle coord.e di punto tali
RIDURRE l'eq. di un complesso quadratico "generale" alla
forma (2), dove però l'eq. della M riceve la forma (1).
Le x_i così introdotte sono nat.te anche coord.te di rett
in S_3, ma non sono le solite coordinate, perchè la &&&& re
zione identica fra esse invece di assumere la solita for
è la (1) - dove volendo si possono supporre unitari i coe
ficienti. Sono le cosidette coord.te di Klein. Si chiama
dunque così i risultati di una sost. lin. omogenee sulle
p_{ij} che facciando assumere alla identità.. la forma $\sum x_i^2$
Eè dunque sempre possibile introdurre tali coord.te di K
che&&&&&&&&& l'eq. di un cpl quadr. "generale" diventi la
(2) .Naturalmente il risultato non va confuso con quello
che Battaglini credeva di avere stabilito.

(vedi p. 231)

da p. 223

L'oss. essenziale da farsi sul metodo di classificazion usato da Segre è questo. L'idea di adoperare nel le caratt., quali appa il teor. d Weierstrass per i fasci di quadriche in S_r era così s tanea che essa si era presentata subito a Klein (in S_5 nella sua Dissertazione (1868) per la geometria della retta), ed essa era poi stata ef tivamente sfruttata qualche anno dopo da Weiler (Math. Ann VII 1874). Klein, preparando la Dissertazione, si era in primo tempo fermato soltanto sul caso "generale" (in cui l'eq. $\Delta(\rho)=0$ ha le radici di ed era to Lipschitz (K., Werke I 4) che esaminandola lo aveva stato vitato a esaminare anche le altre possibilità; e anzi stesso Lipschitz a fargli avere una copia di bozze del lavoro di Weierstrass che era allora in corso di stampa Comunque, Klein ha poi indicato in modo preciso la possi bilità di classificare i complessi quadratici secondo questo concetto. La vera e propria classificazione è st poi fatta, seguendo l'idea da Klein da Weiler. Che cosa dunque contiene di nuovo la classificazione di Segre? So pratutto questa idea (oltre ad altre e alla correzione di errori che si trovano in Weiler): in Klein e in Weil la classificazione diventa geometrica per così dire al l'ultimo momento, per questa ragione. La dimostrazione d

eierstrass
lativa alle condizioni di equivalenza di due forme qua
ratiche è fondata sull'uso sistematico delle forme cano
iche che si possono adottare per esse in ciascuno dei va
i casi possibili. La classific. &&W&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&
ome era stata fatta rpima di Segre consisteva essenzial
ente nel riprendere puramente e semplicemente le varie
oppie di forme canoniche che Weierstrass aveva incontrtr
o nella sua dimostrazione, e nel ricercarne volta per
olta il significato geometrico. Segre ha invece segui
senza più fare capo alle
o un cammino molto diverso, &&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&
tè&&&&&di&W&&&&&&&&&varie forme canoniche, MA UNica
mente, come abbiamo visto, alla nozione di caratteristica
di un fascio di quadriche, della quale abbiamo visto come
egli abbia indicato la possibilità di avere direttamente
nei vari casi; il significato geometrico. Lo per quanto
le medesime disp.ni hanno un significato intrinseco
più profondo.

torna a p. 223

H perciò [se si dimostra per $\Sigma^{h}_{1,\dots}$, questo si presenta da caso generale: e viceversa], Accenniamo ~~alcune~~ altre cose che si trovano nella Memori[a] di Segre. Avendo S. applicato sistematicamente l'idea di costruire la teoria del cpl quadratico a partire dal suo significato iperspaziale, cioè come equivalente a quella ~~&~~ delle quartiche Φ_3^4 (basi di fasci di quadriche) esistenti sulla M, è naturale che egli definisca come retta doppi[a] di un complesso quadratico [n. 123] l'immagine di un punt[o] doppio della Φ_3^4. Sappiamo che questa ha un punto doppio e solo se ~~(…)~~ vi è nel fascio di cui è base qualche co[-] no col vertice sulle altre qudriche del fascio; cosicchè "in generale" non vi sono rette doppie per un complesso quadratico. La df.ne viene a coincidere, pure essendo ~~più~~ la più adatta alla posizione assunta da Segre, con la df. di retta doppia che già aveva dato Plucker, secondo la qu[a-] le un raggio è doppio, se ogni suo punto è singolare (p. 87, significa che per un tale punto il cono del complesso ha una ge.ce doppia) e precisamente in modo che per ogni P della r il cono si spezzi in due piani per la r. Se in vero r è doppio secondo la df. di Segre, in S_5 il punto r è doppio per la Φ^4, e questa appare come la sezione del[-] la M con un cono K^2_4 di vertice r. Questo cono sega ogn[u-] no degli ∞^1 piani della M uscenti da r in una coppia di rette; se prendo dunque un piano immagine di stelle di

anche nelle Φ. #

[e viceversa cfr. p. 230]

2 [le guide dans l'« Malut », cf. p. 231)

S_3, vuol dire, in S_5: prendiamo un punto P di r (come centro di una stella) di rette del complesso quadratico uscenti da P ne ho due fasci di cui fa parte la retta r, il che appunto significa che P è punto singolare, e che il suo cono si decompone in due piani per r. Viceversa partiamo da una retta r doppia per il complesso nella 2.a df.ne, vediamo dochè avviene quest'ultimo fatto; in S_5 alla r corrisponde un punto r della M, anzi [illegible] della Φ, tale che ogni piano π (di un sistema) della $\breve{M}_4$ ha in comune colla Φ_3^1 due rette per r. La Φ contiene dunque le ∞^1 rette per il punto r che si ottengono al variare di quel piano, e questo porta di conseguenza che il punto r non può essere semplice (e sarà quindi doppio) per la Φ, perchè se no questa vi possiederebbe uno S_3 tangente contenente le ∞^1 rette di cui sopra. Ma allora quello S_3 conterrebbe due rette di ogni piano π, e quindi ogni piano π, e quindi tutte le rette della M uscenti da r, che appubto ricoprono gli ∞ piani π, il che è assurdo, perchè quelle rette costituiscono un cono quadrico. Ora, per ogni specie possibile di complesso quadratico, fra le 49 esistenti, Segre può assegnare facilmente quali sono le rette doppie eventualmente esistenti (si è già detto che "in generale", cioè per caratt. [111111] non ve ne sono) Invero si tratta di esam ricordo che ciò avviene per un gruppo

caratt. (e_1 -- e_4) i cui vettori si manten-

vano $\parallel$ 2 piani all'altro

re i punti doppi della Φ^5 ~~&&&~~. Questi, come sappiamo, son
i punti doppi di quadriche del fascio esistenti sulla φ
Quindi, se la caratt. contiene un gruppo costituito da u
intiero maggiore di uno (p $\frac{126}{162}$) si ha in corrispondenza
retta doppia del complesso. Questo per quanto riguarda i
gruppi caratt. formati da un solo intiero. Per ogni altro
di h intieri ($h \geq 2$)
gruppo, sappiamo che in S_5 conduce a una quadrica del fa
dicismo S_{h-1} doppio ($h \geq 2$)
con retta, o piano, ecc. doppi; cosicchè ~~s~~su essa sono dopp
per la Φ tutti i punti dove lo ~~&&&&&&&~~ stesso S_{h-1} taglia
M, i quali punti costituiscono una varietà quadratica en
tro S_{h-1}, senza escludere come si è detto a suo tempo (p 172)
lo S_{h-1} in questione stia su tutte le quadriche del fasc
e sia perciò esso stesso doppio per la Φ_5. Senza entra
così in particolari, si capisce come ~~&&&~~ Segre possa asse
re, come ho detto, in ogni caso la totalità delle rette do
per ogni specie di complesso quadratico. Per ogni comples
(in n° finito)
si hanno tanti sistemi di rette doppi, provenienti ognuno
secondo quanto ora ho detto da~~&&&~~ singole quadriche spec
lizzate del fascio. Mi limito a osservare che rette doppie
appartenenti a sistemi distinti sono sempre incidenti fra
loro (perchè i punti r che le rappresentano in S_5 sono do
pi per due quadriche diverse del fascio, e come tali, p. 16
coniugati rispetto a tutte le quadriche del fascio, quind

~~$a(p_{12}\,p_{34}\,\ldots\ldots) = a$~~

$$2a\,p_{12}p_{34}\ldots - \rho\,(p_{12}p_{34}\ldots) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \mathring{a}-\rho & a-\underset{\circ}{\rho} & & & & \\ & & \mathring{b}-\rho & b-\underset{\circ}{\rho} & & \\ & & & & \mathring{c}-\rho & c-\underset{\circ}{\rho} \end{vmatrix} = 0$$

(pren le p_{ik} relatifs $p_{12}, p_{34},\ p_{13}, p_{24},\ p_{14}\,p_{23}$)

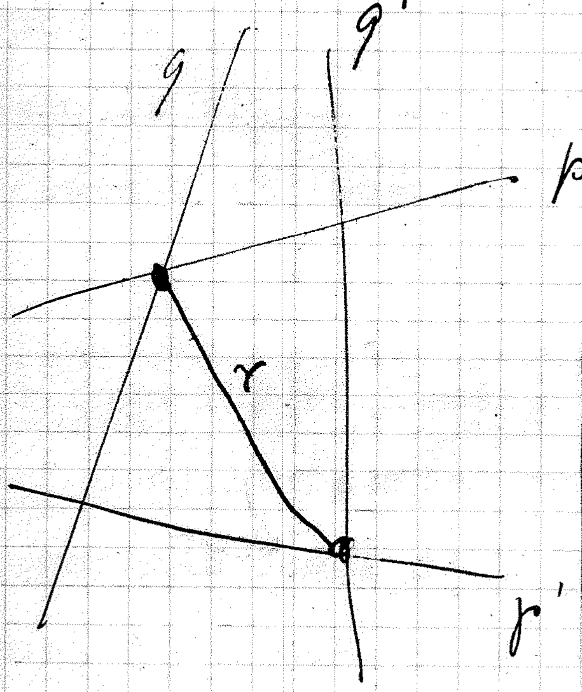
(On a par p. 238 : le M compris $\rho = \infty$)

in particolare rispetto alla stessa M, cosicchè (p 216)
le due rette che loro corrispondono in S_3 risultano eff-
tivamente incidenti c.d.d. Naturalmente, il fascio indiv-
duato da due tali rette doppie è tutto costituito da rett
del cplesso, perchè dette le r, r' incidenti in P il cono d
cplesso uscente da P deve contenere una coppia di piani
r e una coppia per r', & e quindi contiene per intiero il
piano rr'.

Esempio. Il complesso tetraedrale. Vediamo, per famiglia-
rizzarci coi concetti esposti tale esempio. Qui ogni facc
del tetraedro rispetto a cui si ha tetraedralità è "prin-
cipale" -p 56 -, cioè tutte le sue rette sono del compless
Preso uno spigolo, il cono uscente da un suo punto generic
si decompone dunque nei due piani facce per esso. Perciò
ogni spigolo è retta doppia (df Plücker). Abbiamo così ques
rette doppie.- Per lo stesso cplesso, cerchiamo la ca-
ratt.. In base alla sua eq $a p_{12} p_{34} + b p_{13} p_{42} + c p_{14} p_{23}$
l'eq. $\Delta(\rho)$.. si scrive come contro: essa ha le tre radici a
ognuna delle quali fa acquistare al det.te la caratt. 5,
cosicchè ognuna conduce a un gruppo (11); e si ha la carat

$$[(11)\ (11)\ (11)]$$

Tale è dunque la caratt. di un complesso tetraedrale. Vi-
ceversa, partiamo da tale caratteristica. In base ad essa



r due eme inc.te a p, g, p'

~~Le Altre~~ pass. per il pt pg': allo ste nel piano pg', e dunque appo a g e p' passa per i pt. di queste rette d'uno segate dal altro piano. (Si ha tutte le ...)

Ecco un modo più rapido ~~ma meno elementare~~ per giunge la stessa conclusione. Se ho un cplesso conquella cartt e interpreto in S_5, ho un gfascio di quadriche, che per il teor. di Weiers. Segre(p161) è proi. eqvte a ogni altro he abbia la stessa caratt. e inoltre lo stesso bir. β form o entro il fascio dalle tre quadriche spec.te con la M (olo birapporto). Quindi se accanto al dato prendo UN NUOV cplesso, che sia già tetraedrale, e quindi con la stessa c. per quale posso disporre di a, b, c e quindi del bir. to s siderato che vale $(abc\infty) = \frac{a-c}{b-c}$, posso fare in modo che i due ~~complessi~~ fasci di quadriche risultino proiet. equivalenti, la M corrispondendo a sè, cioè i due complessi omografici, e allora anche il primo è tetraedrale.

1) scegliere $\frac{a-c}{b-c} = \beta$.

no nel fascio di quadriche tre Q ognuna con retta doppia la quale segando un'altra conduce a due punti doppi per la $\mathfrak{L}_3^4$. Perciò ho per il complesso corrisp.te tre sistem di rette doppie, ognuno comprendendone una coppia; quindi tre coppie di rette doppie. In base alle loro incidenze, esse sono ~~&&&&&&~~ i 6 spigoli di un tetraedro; infatti se pp', qq' ~~à~~ sono due coppie, la terza, dovendo essere formata da rette incidenti queste 4, si otterrà certo congiungendo i pt. come in figura, ecc. Sia dunque $A_1A_2A_3A_4$ tal tetraedro. Ogni suo vertice e ogni sua faccia contenendo (p prec.) tre fasci del complesso è ~~&&&&&~~ "principale". Quindi l'eq. del complesso scritta rispetto a quel tetraedro adottato come rif.to è tale da essere soddisfatta p es da tutte le rette per A_1 cioè per $p_{23} = p_{24} = p_{34} =$ cosicchè ogni suo termine contiene a fattore una fra le p_{23}, p_{24}, p_{34}; cioè una p con 2 indici fra gli ultimi 3.

~~[illegible] $A_2A_3A_4$ porta che ogni termine contiene a fattore [illegible]~~ 1. E con permut.ni Ne segue che C_4 oltre a $p_{12}p_{34}$ + b $p_{13}p_{24}$ + c $p_{14}p_{23}$ = 0. (Ma per [illegible] pei termini che contengano p_{34} ~~dovendo fattore due~~ [illegible] dovendo un'altra p con 2 indici fra gli 1 2 4 [illegible] [illegible] $p_{12}p_{34}$ ecc. (Cfr. p. 120) Quindi ho proprio il complesso tetraedrale

~~Altro esempio~~ .Per la caratt. $[(111)(111)]$ abbiamo in S_5 due quadriche contenenti ciascuna un piano doppio, il quale ha dunque a comune con (le altre cioè con) Φ_5^2 una conica doppia. Perciò il complesso quadratico ~~&&&&&~~ possiede un primo sistema di rette doppie, che è una schiera, e poi ancora un'altra schiera, incidente a questa: cioè sono doppie le ~~&~~ rette delle due schiere di una Q. Se r,s sono due gen.ci di Q di schiere opposte, appartengono al complesso le rette del loro fascio (p 207); quindi al complesso appartengono tutte le rette tangenti alla quadrica Q. Effettivamente abbiamo già avuto occasione di vedere (p 110) che le tangenti di una Q formano un complesso quadratico (molto particolare) E viceversa ogni tale complesso quadratico ha tale caratt. (p es. riferendo proiett. la sua Q a quella or ora riconosciuta)

OSSERVAZIONI.- 1) Abbiamo visto esempi di gruppi caratt. con ~~&~~ 1,2,3 intieri. Di più per complessi irriducibili non possono esservi, perchè per avrei in S_5 una quadrica con S_3 doppio, la quale è coppia di iperpiani, e allora il complesso quadratico si spezzerebbe in due complessi lineari.

2) Fra gli esempi a noi già noti abbiamo già ora ~~vis~~ in sé posto sulla classificazione generale il cplesso tetraedrale. E quello di Battaglini? Qui le c

(per l'ordine $p_{12}\, p_{34}$ etc.)

$$a_{12}\, p_{12}^2 - - - \quad - 2\rho(p_{12}\, p_{34} - - \quad) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & -\rho & & & & \\ -\rho & a_{34} & & & & \\ & & a_{13} & -\rho & & \\ & & -\rho & a_{24} & & \\ & & & & a_{14} & -\rho \\ & & & & -\rho & a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

$\rho_1, \rho_2 = \pm\sqrt{a_{12}\, a_{34}}$ etc.

Δ/o Anche il n° delle conic. (17) da cui si vede il fin... [illegible] cpl. di B_{ni} (p. 81) rispetto a quello 19, da cui [illegible] quelle [illegible] volte [illegible] del [illegible] dei le 6 radici $\rho_1 - \rho_6$ sono [illegible] separate

e vanno in modo diverso. Formando per $^{(1)}\ a_{12}p_2^2 + a_{13}p_3^2 \ldots =$
l'eq.ne $\Delta(\rho) \ldots$ ho (v contro). Perciò, per valori generici dei
coeff.ti ho 6 radici distinte; e quindi caratt. $[111\ 111]$
quindi senza escludere la possibilità (che si presenta effettivamente) che & qualche particolare complesso di B.ni corrisponda a particolari cartt. che diverse da quella, "in generale" si ha quella. Vuol dire che l'essere un complesso del tipo Battaglini non dipende dalla caratt. ma da qualche altra cosa/ Effettivamente (p 159-161) un complesso può particolarizzarsi o per la caratteristica, o per i birapporti formati dalle radici di questa insieme col valore di ρ che corrisponde alla M $\rho:\infty$. L'eq. $\Delta(\rho)$ scritta contro mostra che per un complesso di Battaglini non ulteriormente particolarizzato, i valori di ρ radici dell'eq. caratt. sono del tipo $\pm\rho', \pm\rho'', \pm\rho'''$, ai quali è poi da aggiungere $\rho:\infty$. Quei sei valori si ripartiscono dunque in tre coppie di un'involuzione (un cui el.to doppio conduce poi alla M) e viceversa se i 6 valori di ρ radici dell'eq. caratt. si distribuiscono così, il complesso è di Battaglini, perchè si può evidentemente costruire l'eq. (1) in modo da condurre a quegli stessi valori di ρ (e allora la M corrisponde p. es a $\rho:\infty$); e allora il complesso così costruito e quello dato per il teor di Wei. Segre sono proiettivi

de <u>gruppini</u> (una per ogni gruppo caratt. di <u>UN</u> n°)

he i due siti [illegible] coincidono fra loro.

Quanto ora si disse spiega anche il passaggio sul quale avevamo sorvolato a p 101 sui complessi che si possono riguardare di Battaglini in più modi diversi (anche nelle Γ^4 che sono tetraedrali in più modi diversi) (

Tornando a tutti i complessi quadratici nella teoria di Segre, osserviamo anche come si ottenga subito quanto ora dico. In S_5, una Q del fascio (non cono) distinta da M possiede come sappiamo due sist. ∞^3 di piani. Questi piani generalmente ~~ddd~~ non appartengono alla M (possono appartenervi solo quelli ~~della~~ che stiano sulla Φ, che non sono certo tutti quelli della Q). Uno di essi, π sega allora la M in una conica, appartenente dunque a Φ; e per Q fissata si ottengono così sopra Φ due sistemi ∞^3 di coniche. Ciò avviene per ogni Q generica del fascio, e perciò in ∞^1 modi diversi. Trasportando nello spazio ordinario: (ognuno dei quali è chiamato da S n 120 generazione) è possibile, in ∞^1 modi diversi, di ripartire le rette di un complesso quadratico in due sistemi ∞^3 di schiere. Per ogni generazione, due schiere di uno stesso sistema appartengono sempre a uno stesso complesso lineare; due schiere di sist. diversi generalmente no, e se stanno in un cplesso lin. stanno addirittura in una congruenza lineare. L'ultima cosa detta dipende dalle relazioni di incidenza dei piani di Q quali furono esposte a p. 141

* Per le geom. corrispondenti ai complessi speciali i due sist. ∞^3

Il cpl. appare così dotato di $\underline{\infty^4}$ schiere (due provenienti da due diverse generazioni sono generalmente distinte se no avrei in S5 due quadriche del fascio con un piano in comune, cioè sulla Φ). Possiamo aggiungere che abbiamo così TUTTE le schiere del complesso; perchè in S_5 se g è una conica della Φ, imponendo a una quadrica del fascio, Q di contenere un punto ulteriore del piano π della g, essa viene a contenere tutto π, cosicchè ogni conica della Φ vi è effettivamente ~~segata~~ da un piano di una quadrica Q del fascio.

A proposito di sist. semplici di rette contenuti in un complesso quadratico, riconosciute le schiere, sorge la domanda se vi siano congruenze lineari. In S_5 vuol dire che la Φ contenga una quadrica G_2 di uno S_3. Allora, se così è, ragionando come qui sopra, nel fascio di quadriche per Φ trovo che esiste una Q contenente tale S_3. Allora tale Q è certo spec.ta, e non basta una volta (perchè Q generale di S_4 non contiene che rette) ma almeno due volte, e effettivamente allora essa solo 2 volte ~~contiene~~ si ottiene proiettando da una ~~piani proiettanti~~ retta s una quadrica ω di S_3 ~~[illegible]~~, costituita degli ∞^1 S_3 che congiungono la s alle singole generatrici di questa. Perciò, la condizione nec e suff perchè un complesso quadratico

Avuto riguardo alle ricerche ... delle geni di ω (qui ~~si vede~~ sostituendo ... ai piani S_3 aventi comuni ... piani di S_3 incidenti, S_3 aventi un piano comune) segue: ogni due ... di una stessa serie distinte hanno in comune ... di una stessa serie (ricorrono la S doppia per Q segue M ... doppi di Φ = rette doppie del complesso) hanno solo in comune le rette doppie del complesso corrispondente (p. 235) a quel gruppo di caratteristiche.

contenga per intero (almeno) una cgrza lineare è che nell[a] sua caratteristica vi sia almeno un gruppo formato di due intieri (almeno), e allora il complesso lineare si può im[ma]ginare ordinato in una serie ∞^1 di congruenze lineari. Più precisamente:

se vi è un gruppo formato proprio di DUE intieri, la ω è generale (non cono, se no il piano congiungente il su[o] vertice con la s risulterebbe doppio per la Q, che corri[s]ponderebbe allora a un gruppo caratt. di 3 intieri) e d[i] queste serie di cgrze lin. ve ne sono due (in corri.za ai due sist. di generatrici della ω)

se vi è un gruppo di tre intieri, vi è nel fa[-]scio una Q con piano doppio, luogo degli S_3 che dal piano proiettano i punti di una conica irriducibile, e allora (c[on]tenendo Q un solo sistema di S_3) la serie di cgrze linea[ri] del complesso quadratico è unica. – Più di due serie doppiam[ente] non esiste (p. 24

Alle cose dette si riattacca la possibilità di generare o no un cplesso quadratico con fasci proiettivi di cplessi lineari. Prendendo questi sotto la forma $\lambda A+\mu B$, $\lambda A'+\mu B'$ è lo tsesso che studiare la possibilità di scrivere l'eq[uazione] di un complesso nella forma $AB'-A'B=0$ (1). In S_5, vuol dire che nel fascio vi è una Q contenente uno S_3 $(A=B=0)$.

Viceversa se una Q di S_5 contiene uno S_3, ~~x~~ (per es. $x_0=x_1=0$) la

iò implica, come ora abbiamo avuto occasione di dire, che in S_5 vi sia nel fascio una Q specializzata almeno due volte. Quindi nec e suff per la generabilità di un cplesso quadratico con ud e fasci proiettivi di cplessi lineari è che nella sua caratt. vi sia almeno un gruppo di almeno due indici. Invece, ogni complesso quadratico è generabile con due reti reciproche di complessi lineari (nel senso già chiarito a p. 101) Infatti secondo 1 c la cdz è che la sua equazione si possa scrivere $\Omega_1 \Phi_1 + \Omega_2 \Phi_2 + \Omega_3 \Phi_3 =$ ora in S_5 l'eq di una Q qualunque si può scrivere in tal modo. Basta prendere un piano della Q certo esistente come $A_3 A_4 A_5$ cioè $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, e allora ogni termine dovendo contenere a fattore uno almeno fra $x_3 x_4 x_5$, l'eq è del tipo $A_3 x_3 + A_4 x_4 \ldots$ con $A_3 A_4 A_5$ forme lineari.

Oss. Come caso particolare, quanto si disse per le caratt. contenenti un gruppo almeno di due interi (come p es il contenere cgrze lineari, la generabilità con fasci proi di cpl lin) vale per il compesso tetraedrale.

Studiando le figure semplici costituite da rette entro un complesso quadratico, non ci siamo fermati sui fasci. Ma ciò in sostanza sappiamo già: ogni fascio non può che essere una parte del cono quadrico uscente dal suo centro. Quindi

o da considerare i punti singolari; cosicchè si hanno effe
tamente ∞^{3} fasci di rete. Sulla superficie singolare mi
ito a dire che è F^4 di Kummer, con 16 punti e piani doppi
cui è caso particolare il tetraedroide a noi già noto.

Accenno piuttosto al concetto di complessi confocali.
già detto che su una quadrica p.es M4 si chiamano confo
i le ∞^1 $\mathcal{F}_3^c$ segatevi dalle quadriche di una schiera s
appartenga la stessa M. Per la attuale M nasce così il
cetto di complessi quadratici omofocali. Essi hanno una
evole proprietà, e cioè di avere in comune la superficie
golare. Lo vediamo così.

Anzitutto, le quadriche di un fascio segano p.es un pia
in coniche di un fascio; ma se nel fascio v'è una Q con
ente il piano, le altre lo segano in una stessa conica (su
te, come è noto agli stud.ti del 4 o anno una p.tà molto
generale). Invero per limitarci allo S_5, se è il piano π
$x_0 = x_1 = x_2 = 0$ il fascio

$x_0 A(x) + x_1 B(x) + x_2 C(x)] + \mu \varphi(x_0 \ldots x_5) = 0$

ga appunto il piano in una stessa conica (questa sarà la conica principale)

Pensiamo perciò a tre quadriche Q Q' e M di un fascio
so un piano π della M, la Q e la Q' lo segano in una st
conica, cosicchè se Q è tangente a π (cioè lo sega
in una conica spezzata in due rette) anche Q' è tan-

te allo stesso π.

Traduco per dualità: ho intanto tre quadriche Q Q'

M di una schiera. Poi piano della M diventa ancora piano di

la M (perchè se un piano sta su M, cioè vi ha i suoi punti esso appartiene anche alla M come insieme di iperpiani, &&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&il

cioè ogni S_4 per esso è tangente alla M; invero esso sega

la M in una V_3^2 contenente il piano π e quindi certo

specializzata, cioè con punto doppio, che non essendo tale

per M, priva di punti doppi, sarà punto di contatto): e vi-

ceversa) Occorre anche tradurre per dualità la circostan-

za che un piano sia tangente a una Q, cioè passi per un

suo punto x stando nel relativo S_4 tgte ξ, e ciò eviden-

temente si traduce nelle stesse circostanze in ordine

scambiato. Perciò posso ora dire "se tre quadriche Q

Q' e M appartengono a una schiera e se un piano π della

M è tangente a Q lo è anche a Q'". (nat.te ora però le

due tracce di Q e Q' sul piano π, pure essendo contempo-

raneamente degeneri, non (è più detto siano) &&&&&&& coincidenti)

Allora, fissare un complesso quadratico, vuol dire fissare

la Q; fissarne un omofocale, vuol dire Q' e s. Quando io

cerco i punti singolari p.es. del primo devo far questo

Dire un punto P di S_3 (di rette) vuoldire un piano π di un

$$B_i = \frac{1}{b_i}$$

$\sum a_i x_i = (1)$

$\sum b_i x_i$ — chiedam $\sum B_i x_i = (2)$

Rispetto $\sum c_i x_i = MP(m_i)$ L

$\mu(c_i m_i)$ cioè che

(1) $\sum a_i \frac{\mu_i}{c_i^2} = 0$

cioè si Mostra su (1) per tocca (2)

$$\frac{a_i}{\mu_i^2} = B_i \quad c_i^2 = \frac{a_i}{B_i}$$

istema della M.Su esso "in generale" da P ,cioè la quad
Q sega una conica (il che in S_3 vuol dire che per il pu
passano infinite rette del complesso,formanti un cono q
ico).Se P è singolare,il cono quadrico si spezza in due
sci e la conica in due rette.Quindi P è singolare per i
mplesso,se il piano π è tangente alla Q quadrica
E sapendo noi che π è contem.te tangente alle due quadr
e Q e Q' segue che ogni punto singolare per il primo è
le anche per il secondo complesso quadratico.

Si può anche aggiungere questo.Partendo da due quadrich
considerando una volta il loro fascio e una volta la lor
hiera si trova che esse hanno la setssa caratteristica;l
sa non è evidente;Segre l'ha verificata in una breve Not
eor sulle relazioni tra una coppia di forme bilineari e
ppia delle loro forme reciproche Giorn di Batt.ni 1883".
rifica analitica di Segre conduce in sostanza
sultato che prese due quadriche non specializzate Q e Q
può sempre trovare una reciprocità che muti ciascuna de
e luogo nell'altra inviluppo.Posso aggiungereche molti a
dopo ho avuta occasione di precisare il risultato facen
dere che quelle due quadriche qualunque non specializzate
possono sempre considerarcome polari una dell'altra in
una conveniente polarità(Ann di mat (3) XXX 1921) il che
si immediato quando quelle due quadriche sono l'una ric
all'altra inposizione generale,ma solo allora. Comunqu

Se no, unite rette dir.ᵉ e corrispondenza $(1, m)$ fra i nuovi pt. e piani gen.ⁱ della congr. lin. spec.

ripresi i due complessi omofocali e s la schiera QQ' M ha la stess caratt. del fascio QM e anche del fasscio Q cosicchè questidue fasci hanno la stessa caratt.

Non entrerò ormai più inaltri particolari;aggiungo zolo che la teoria generale delle quadriche è applicata da Segre non solo ai complessi quadratici,ma anche alle congruenze quadratiche,aventi per immagini una superficie F^4 di S_5 sezione iperpiana della Φ (... Φ_2 Q M) ;sono dunque le sezioni di uncomplesso quadratico (Q) con uno lineare (M). La su teoria equivale a quella di un fasciodi quadriche (tra Q, M) dello S_4 (λ_5) .Una crza quadratica&&&&& ha ordine e class (spiegare)entrambi eguali a due,come è chiaro dalla df. (in S_3 per ogni punto ho risp. piano e cono quadrico); e si trova viceversa(cit.no Enz 1191);cosicchè sono proprio le più semplici cgrze dopo quelle che hanno ordine uno(come la lineare,ma non è la sola,le altr si determ nano sneza difficoltà(sono almeno del caso più generale formate dalle rette appoggiate a una retta r e a una C^m di cui quella è una(m-1)secante;ci sontrolla subito l'ordine uno e la classe m(fare;per m=1 si ha la solita, o le duali.Ho già detto che la teoria di una tale grz viene a equivalere a quella di un fascio di quadriche i

ude des différentes surfaces du quatrième ordre à coni
double ou cuspidale (générale ou décomposée) considérée
me des projections de l'intersection de deux variétés
dratiques de l'espace à quatre dimensions.

,cosicchè Segre ha potuto applicarvi questa teoria ~~e~~ per
[a]lle quarze, già studiate p es da Kummer, e svilupparvi nuov[i]
[pun]ti di vista, ~~e~~ definire la caratt., sviluppare la corrispo[nde]
nte classificazione. Così anche le congruenze omofocali e[c]

Aggiungerò ancora molto rapid.te qualche parola su
altri lavori all'incirca contemporanei di Segre che sono
strettamente connessi con questa memoria Ricordo anzitut[to]
una lunga mem. in M A XXIV 1884 di oltre cento pagine c[on]
un titolo anche molto lungo, dove studia le superficie del
spazio ordinario che nascono per proiezione di una Φ^4
S_4 base di un fascio di quadriche; esempio notevole di ap[pli]
cazione di considerazioni ipersp. allo spazio ordinario.
[Pr]endo l'analogo tra S_3 e S_2 verrebbero le quartiche pian[e]
con due punti doppi; qui si ottengono le F^4 con conica d[op]
pia (per un punto P di S_4 escono raggi proi.ti che dànno
per traccia su Σ punti doppi della F^4 se sono corde della Φ
ora fissato uno S_3 per P, che sega Φ^4 secondo una quartic[a]
di prima specie, di corde in esso ne ho due. Vuol dire che
per P passa un cono di corde, segato in due generatrici d[a]
ogni S_3 per il vertice, cono quadrico proiettante, la cui tr[ac]
cia su Σ è conica doppia. Non solo, ma come si trova
tutte le F^4 con conica doppia si possono ottenere così; co[sic]
sicchè il lavoro di Segre costituisce appunto uno studio

262

(pensa alle
[illegible]
q. -

clide

che appunto è come si vede subito

Tra esse si nacome un caso molto elementare il toro (inv

ppo di ∞' sfere tangenti ciascuna lungo un ~~&&~~ cerchio mer

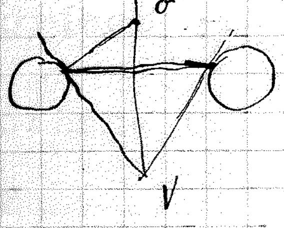
$(\infty', \ldots)$

p es

diano(sup. canale) oppure lungo un parallelo(pensare al

dono circoscrit o lungo questo, e poi a una sfera-col cen

tro sul l'asse che ammetta questo stesso cono circoscritt



generale di queste superficie, coi numerosi casi particolari a cui possono dar luogo. (sia per il degenerare della conica, o per il suo comportamento "cuspidale "invece che nodale, sia per l'eventuale presentarsi di ulteriori punt doppi fuoridella conica). Si tratta di una classe di superficie già assai estesa (dipendono da 21 costanti) fra le F^4; è già p es una teoria più generale per così dire che quella della F^3 generali.. Fra tali F^4 rientrano poi come casi particolari le ciclidi (quando la conica doppia è a l'infinito). Fra queste poi ricordo, come particolarmente te le cosidette ciclidi di Dupin: una tale si ottiene partendo da tre sfere $\alpha\beta\gamma$ e prendendo le ∞^1 sfere tangenti a quelle tre; esse inviluppano una sup. che è appunto la ciclide di Dupin (che appare dunque luogo degli ∞^1 cerchi caratt. di quelle sfere) E anzi le ∞^1 sfere in questione sono tangenti non solo a quelle tre $\alpha\beta\gamma$, ma a tutta una nuova serie ∞^1 a cui appartengono quelle tre, e anche questa nuova serie ∞^1 inviluppa nuovamente la cilcide. Si hanno due "schiere " di sfere inviluppanti; ~~&£&&&~~ due sistemi ∞^1 di cerchi caratteristici che costituiscono le linee di curvatura (e effetT; te Dupin è arrivato a queste sup . cercando quelle a linee di curvatura circolari). Tornando alle F^4 generali a conica doppia

vediamo rapidamente p. es. come dal pt. di vista di Segre si giunge ai ~~[illegible]~~ [illegible] di Kummer il qua le-essenso già allora abbastanza note le F4 rigate-che erano state studiate da Chasles 1861 e classificate dallo stesso: la classificazione fu poi ripresa più tardi da ~~Cremona~~ Cayley e da Cremona-si era proposto lo studio delle F4 luoghi di coniche e tra queste trovò appunto le attuali(cfr. in seguito). Altri tipi sono la sup di Steiner che contiene addirittura ∞^2 coniche; la F^4 a retta doppia(ogni piano per questa...); vi sono pochi altri casi.

Invece annullando il discr.^te (*) ho det.^te di 4° ordine a el.^ti lineari in λ, salvo a_{44} che contiene λ^2: quindi viene un'equazione di 5° grado (che può avere radici multiple) no già state studiate direttamente in S_3, a partire da

mer sulla loro eq.ne $\varphi^2-4x_4^2\psi=0$.

e.... e dove è evidente la conica doppia. Portano il nom

coni di Kummer i coni che si ottengono così. Scritta l'

la sup. per λ arbitrario

$$(\varphi+2\lambda x_4^2)^2-4(\psi+\lambda\varphi+\lambda^2x_4^2)x_4^2=0$$

de che ognuna delle ∞^1 quadriche (*) $\psi+\lambda\varphi+\lambda^2x_4^2=0$ tocca la F^4 lungo linea contata 2 volte: è la linea comune ad essa e a $\varphi+2\lambda x_4^2=0$ cioè C^4; ho così ∞^1 Q ognuna delle quali è tgte lungo C^4. In particolare vi ~~hanno 5 volte~~ (in generale) 5 valori di λ per cui uno dei quali Q è un cono): cioè 5 coni c.s.: la ogni generatrice g di uno di questi sega $\varphi+2\lambda x_4^2=0$ in 2 pt che non i soli (contati due volte) comuni a g e a F^4: sono bitangenti. Abbiamo così questi 5 coni a generatrici bitgti: sono i coni di Kummer. Un tale cono dà luogo a una ptà notevole anche

come inv.ppo. Se invero da un pto M circoscrivo cono a una

F, le sue generatrici sono le tgti a F per M e i suoi pia

ni tgti sono i piani tgti a F per M; se t è una gen.ce tg

te in A, il piano tgte al cono lungo essa è tgte a F in

A. Applicando a un cono di Kummer, ogni sua gen.ce come t

conduce a due posizioni del punto A, cioè ogni piano tgte

a un cono di Kummer è bitangente alla F4. Quindi la sua

ezione con la F4 presenta duepunti doppi nei punti di co
atto, oltre ai due punti doppi nei pu tisegati su esso da
a conica doppia; essa quindi si scinde in due coniche. Qui
i ogni piano tgte a un cono di Kummer sega la F4 a co
ica doppia secondo C4 spezzata in due coniche. (cfr. p. 265) Vediamo o
a come si giung a questi coni dal punto di vista di Se
re. In S_4, per la Φ^5_2 passano gen.te 5 coni (ev.te coincide
i, ma supponiamo distinti). Sia K uno di essi di vertice V.
roietto la Φ da P in F4 di Σ_3. Ogni punto V dà un punto
', il quale risulta appunto vertice di un cono di K.
non perchè il cono si proietti in id., ha ∞^1 rette !!) Il
ono K ha due serie ∞^1 di piani (proiezioni da V delle ... se
... di ... ω di S_3. Se
α è uno di essi, lo S_3 $P\alpha$ sega K in un piano dell'al
ra serie β (non è che la ptà che per Q_ω di S_3 un piano
er una generatrice sega una gence dell'altro sistema,
licata qui in proiez. dalla retta PV) Quindi tale S3 ap
are due volte come proiettante un piano di K, e dopo la
roiez. su Σ avremo $\alpha'\equiv\beta'$. Nasce così in Σ questo
iano $\alpha'\equiv\beta'$ passante per V' (lo S_3 proiettante passava
er V), il quale sega F4 in coppia di coniche: invero α
ega Φ^5 in una conica (quella ove è segato da una Q qualun
ue del fascio di base Φ^5) e così β, e queste coniche
i proiettano in due coniche $\alpha'\equiv\beta'$. Di questi piani $\alpha'\equiv$

§ Riprendo il corso comune in.[te] pro giunture le p.[te] d. p. 265: ognuno dei piani α' dando ragioni con 4 pt. doppi, è 2.ª g.[te] (nei 2 pt. uni della curva doppia). Quindi il caso è caratterizzato, oppi doppiamente da V alle F⁴, e la un gran uno 2.ª 1.ª d F⁴

Notiamo anche che per detto caso di Kummer, le 2 C⁴ dei nuovi piani devono esser ∞^1 alg.[te] distinti (quella provenienti dai piani α e quella provenienti dai piani

δ'). ~~[illegible]~~

Teor. S.

per V', ne ho ∞^1 perchè ho ∞^1 S_3 proettanti da P coppi
i piani del cono K; essi inviluppano dunque un cono. Ecco
me nasce un cono i cui piani tgti segano la F4 in coppia
coniche; anzi gen.te 5 di tali coni. Che siano quadrici
sulta anche ora, ognuno di ~~essi~~ come invi.ppo essendo traccia su Σ de
∞^1 di S_3 che dalla retta PV proiettano le generatrici
della ω. ~~(........)~~ !

Una F4 a conica doppia contiene gen.te 16 rette. Anche e
ultano fac.te dalle condid. ipersp.li, e precisamente
fatto che già la Φ^4 contiene altrettante rette. ~~Se&inver~~
siamo invero come int.ne di cono K di vertice V ~~(di 1.a specie)~~ con Q;
si opportunamente i vertici della pir. posso supporre le
o eq.ni $x_1 x_4 - x_2 x_3 = \varphi(x_0 \ldots x_4) = 0$. Se r è retta della Φ
a sta su un piano per V che segherà dunque Q cioè Φ^4 in
coppia di rette. Basta dunque cercare questo; un piano ge
ore di K - di uno o altro sistema - sega Q in una conica: qu
volte questa si spezza in una coppia di rette? Sia esso
sistema) il piano $x_3 = \lambda x_1$, $x_4 = \lambda x_2$. Esso sega la conica γ di cu
ottengono le equazioni aggregando a queste la $\varphi = 0$ cioè
$(x_0, x_1, x_2, \lambda x_1, \lambda x_2)$. Quest'ultima è in realtà l'eq. di una Quadri
sega la conica γ su l piano considerato, la quale quadrica (
eq.ne entrano solo $x_0 x_1 x_2$ (A, A))ha uno S_1 doppio, cioè si ott

$\lambda\varphi = \Sigma a_{ik}\, x_i x_k$ [illegible]

$$a_{00}x_0^2 \cdots + a_{22}x_2^2 + a_{33}\lambda^2 x_1^2 + a_{44}\lambda^2 x_2^2$$

$$+ 2a_{01}x_0x_1 \cdots + 2a_{03}\lambda x_0 x_1 \cdots + 2a_{25}\lambda x_2^2$$

$$+ 2a_{34}\lambda^2 x_1 x_2 = 0$$

[illegible] coeff.ti di grado 0, o 1, o 2 in λ e [illegible]

[illegible]

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

proiettando da questo la conica γ ,oppure p es la tra-
cia dello stesso cono dul piano $A_0A_1A_2$ .Quella conica γ
è riducibile con questa,cioè quando si annulla il discr-
minante di $\varphi(x_0, x_1, \lambda x, \lambda x_1)$ -(come forma ternaria) Annullando-
lo ho un'equazione di 4° grado in λ ;quindi vi sono
4 piani generatori di K, in ogni sistema per cui si ha
lo spezzamento,cioè in tutto 16 rette sulla Φ .
~~La F4 non contiene ulteriori rette A priori potre-~~
~~bbe contenerne ancora da con.~~ La considerazione della F^4
come proiezione della Φ^4 ne mostra anche subito la razio-
lità : invero Φ^4 si rappresenta pt per pt. su un piano, me-
diante proiez. da questa retta r: r A di A' su Σ, e [illegible] A'
[illegible] un pt A (piano per r sega solo più un pt. la
F^4, avendo due Ω in una [illegible] retta ciascuna). La razio-
lità era stata precedentemente stabilita per altra via
Clebsch senza uscire dallo spazio ordinario.Clebsch(Cre-
lle t. 69)era partito da un sistema (lineare) ∞^3 di C3 per 5 punti,
$f_1(z_1, z_2, z_3) = \ldots$ — — $f_4(z) = \ldots$ e dalla sup. rappresentata
r.te dalle $x_i = f_i(z)$ $(i = 1 \ldots 4)$ .L'ordine 4 della F co-
rappresentata si vede sulle img. E la conica doppia per-
chè le sezioni piane risultano con p = 1,e come tali devo-
avere due punti doppi,cosicchè vi è un luogo di pt. dop-

pi)

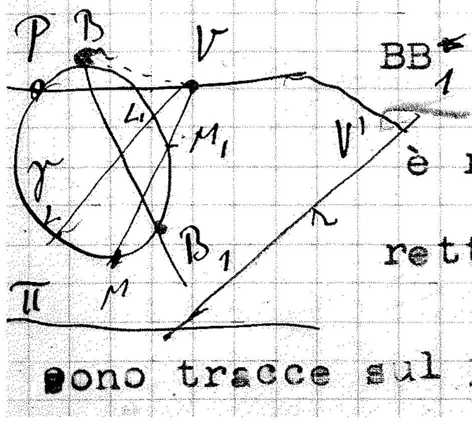
che è di 2. ordine e-escludendosi che sia coppia di re
te-risulta una conica. Clebsch ha anche provato che la F4
così ottenuta è una qualunque F4 con conica doppia. ~~Un~~ Acc. il
modo ~~di~~ per vedere la raz. tà della F4 consid.ta senza uscir
da S3 è questo. Preso un cono di Kummer, in ogni suo pian
tangente la F4 sega come sappiamo due coniche, delle qua
~~possiamo aggiungere~~ sappiamo che descrivono due sist. alg.te dis
tinti T, S (p 268; si capisce che ciò si può constatare sulle
equazioni, in S3); presone uno T, e poi uno analogo T' pr
veniente da un altro cono di Kummer (p es Jessop 40) si c
stata che le coniche di T e quelle di T' risultano unis
canti (il che è plausibile, la seconda segando il piano d
la prima in 2 punti, che staranno uno per conica). Così
in definitiva ogni conica di T e ognuna di T' portano
a un punto P della F^4, e viceversa, in quanto per questo
passano una conica di T e una di T' (come si vede; ma an
che questo è plausibile; per P passano 2 piani tangenti
al cono di Kummer, ed è plausibile che la conica per P ch
nasce in uno sia di T e nell'altro ~~dia~~ di S; quindi ne
ho una di T). Ma p es le coniche di T (in corr.za biun.
coi piani di un cono quadrico) costituiscono una ∞^1 raz.
e così quelle di T'; chiamando u,v parametri in corri

spondenza biun. alg con T T' risulterà perciò nec.te

P funzione razionale di u,V (Oss. Il fatto che una clas di F4 sia raz. ha importanza, in quanto, a differenza dell F3, una F4 generale non lo è.)

279

La genesi iperspaziale della F4 conduce anche facilm te a trovare delle ~~quadriche~~ inversioni (in senso largo) rispetto a ciascuna delle quali essa è inversa di sè stessa. Si chiama inversione r spetto a una quadrica H p es in S3 la corrispondenza in cui fissato oltre ad H un punto O (diciamo centro di invers si fanno corrisponde P e P' allineati su O e e a rispetto alle inters. della loro retta con H: se H è sfera e O il suo centro, ci si r duce evd.te alla ordinaria inversione. Ora, tratto la F4 come proiezione di Φ^4, eseguita come prima da P. Sia V il vertice di un cono K del fascio in S_4; sappiamo che esso ha uno stesso S_3 polare v_3 rispetto alle quadriche del fascio. Preso piano generico π per PV, sia γ la conica segatavi dalla quadrica Q del fascio passante per P. Anche rispetto a Q V e v_3 sono polo e iperpiano polare cosicchè in sezione sul piano π rispetto alla conica γ ha per polare la rett



BB_1^* traccia di v_3 sul piano π. Quindi B è retta coniugata, rispetto a γ di ogni retta per V, p. es. delle due VLL_1 e VMM_1 sono tracce sul piano π del cono quadrico del fascio, K

Ora dire che p es le rette BB_1 e LL_1 sono coniugate equi vale a dire (cfr p es p 72) che su γ le coppie BB_1 e LL_1 sono armoniche, e quindi tali anche i 4 raggi && che li proiettano dal punto P. Perciò, quando passiamo alla proiezione da P su Σ ,V si proietta in V' i punti del piano in punti di una retta r per V', e su questa L' e && L'_1 (e così pure M' e M'_1) sono c a rispetto a $B'B'_1$. I quali ultimi punti, oltre ad essere allineati su V' stanno su una quadrica di Σ perfettamente determinata, perchè B e B_1 stanno su v_3 e su Q, cioè sulla $V_2^{2/6}$ loro int.; dunque B' e B'_1 stanno sulla quadrica H proi. di questa. Siccome si può partire nello S3 Σ da una retta qualunque r per V' e costruire poi il piano π che la proietta dalla PV ecc. concludiamo che la F_4 è autoinversa nella inversione così ottenuta (quadrica H, centro V')

Possiamo anche aggiungere che nel caso delle cicli si tratta di vere proprie inversioni nel senso solito. Siccome qui la conica doppia è l'assokuto, si tratta in sostanza di accertare che la quadrica H ~~pass~~ (di cui si vuol provare che nel caso particolare è una sfera) passa sempre la conica doppia, e che inoltre (V' centro della sfera) V' è polo, rispetto ad H del piano della conica doppia.

ggiungo anche che la rappr. piana della F4 a cui si arri rettamente da p 271 è poi la stessa di cui si è servito Clebsch. Anzitutto per la Φ_2^4 le cose stannocosì. Stiamo al caso"generale "di una caratt. [11111].Allora ognuna d le 16 rette della Φ ne incontra altre 5.Se invero essa è r e incontra s per un punto ulteriore del piano rs passa una quadrica del fascio,contenente tutto questo piano,co sicchè essa è un cono;vuol dire che r e s stanno in un piano generatore di un cono del fascio.Ma allora viceve r partendo da r,la unisco coi 5 vertici dei 5 coni del fa scio,e in ognuno di questi piani un ulteriore quadrica de fascio sega con r una seconda retta s.Sono proprio 5 le rette s incidenti r. Ciò premesso quando faccio la proez zione da r di p. 271 su un piano π ,ogni punto A proiet ndosi in A',ecc. studiamo le immagini su π delle sezioni perpiane.Quando A si muove su una tale C^4 prodotta da S3 ω A' si muove sulla linea secondo cui si proietta quella C4 da r su π . Siccome la C4 si appoggia alla retta da cui proiettiamo in un punto(la traccia della r su ω) la linea proiezione è soltanto C3.Quindi intanto le imma ni delle sezioni iperpiane sono cubiche. Inoltre,fissiamo

r C^4 s

segue 281

a nostra attenzione su una delle 5 rette s incidenti r
e incidenti anche la C4, per la stessa ragione vista per
). Qualunque sia ~~de~~ S, il punto sC^4 dà sempre luogo a uno
tesso piano proiettante rs, e quindi a uno stesso punto p
ezione ~~de~~ A'. Quindi le cubiche del piano π immagini dell
ezioni iperpianehanno in comune 5 punti. In definitiva la
F_2^4 si rappresenta in modo che le sue ∞^4 sezioni iperpia
e hanno per immagini le ∞^5 cubiche del piano π per 5
unti fissi. Ora in generale, quando si ha una superfici
razionale
in un qualunque iperspazio S_r) rappresentata su un piano
π in modo che alle sue ∞^r sezioni iperpiane corrispon
ono curve di un sistema lineare ∞^r Ω, se di essa si fa un
roiezione p es da un punto P su uno S_{r-1} ottenenendosi
na sup. F di questo spazio, ovviamente razionale, questa
er il tramite della Φ risulta rappresentata sul piano
π, in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondono
e curve di un sistema lineare ∞^{r-1} Ω' contenuto in Ω.
nvero se quella è rappresentata par.te dalle

$$\cancel{x_i =} f_i(z, z, z) \qquad (i=0, \dots r)$$

on le f_i forme, il sist. Ω è ovviamente $\sum \lambda_i f_i(z) = 0$
D'altro lato, riducendosi al caso in cui la proiezione è
fatta da A_0 p es sullo S_{r-1} $A_1 \dots A_r$, la rappr. para

trica della F risulta $x_i = f_i(\xi)$ $(i = 1, \dots r)$

erchè punti allineati su A_0 hanno le stesse $x_1 \dots x_r$)

uindi il sist. rappresentativo delle sez. iperpiane della

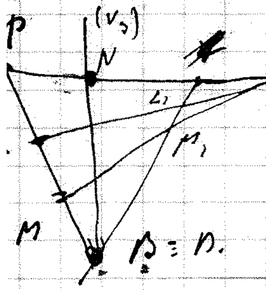
è an.te a sopra $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r = 0$,contenuto in Ω .

rciò tornando a noi la F4 sarà rappresentata da unsist.

lin ∞^3 di cubiche per 5 punti.

(tornare a p 275)

Per la prima cosa, siccome i punti della conica du
la della F4 provengono dalle corde della Φ passanti dal
ntro di proiezione P, pensiamo di particolarizzare il
iano π ora trattato, facendolo passare per una tale corda
iccome questo piano tagliava la Φ nei 4 punti LML_1M_1
e di questi devono essere allineati su P. La retta che li contiene
iene a avere comuni con γ tali due punti e inoltre P,
arà dunque una componente di γ. I due punti fra i 4
on possono essere LL_1 (allineati su V, non su γ) nè MM_1
iano p es L, M. Disegno dunque le rette PV, PLM, la retta



residua di γ e su questa L_1 allineato ecc
M_1. La retta BB_1 di prima, polare di V rispetto
a una coppia di rette passa per il punto co
une a queste due ($B \equiv B_1$) Prima la quadrica G(che dava po
n proiezione la H) era il luogo dei punti B, B_1. Ora quando
i proietta, B dà perciò contemporaneamente un punto B' della
uadrica H, e anche un punto della conica doppia (traccia
lla corda LM di Φ per P). Così la prima cosa è verifica
a. Quanto alla seconda, basta verificare che ogni punto
' della conica doppia è coniugato, rispetto a H, di V' (per
hè tali saranno allora anche tutti gli altri punti del

$$r(r-p)\left[q^2\rho^{2p} - p^2\rho^{2q} + (q-p)^2\right] -$$

$$-q(q-p)\left[r^2\rho^{2p} - p^2\rho^{2r} + (r-p)^2\right] = 0$$

$$p^2 q(q-p)\rho^{2r} - p^2 r(r-p)\rho^{2q}$$

$$+\left[r^2 q - pq^2 - q^2 r + pqr\right]\rho^{2p}$$

$$+(r-p)(q-p)(rq - rp - qr + pq) = 0$$

$$pq(q-p)\rho^{2r} - pr(r-p)\rho^{2q} + qr(r-q)\rho^{2p}$$

$$-(r-p)(q-p)(r-q) = 0$$

$$p(p) = pq^2 - p^2 q - pr^2 + p^2 r + qr^2 - q^2 r$$

$$-r(qr - pr - q^2 + pq) + p(qr - pr - q^2 + pq)$$

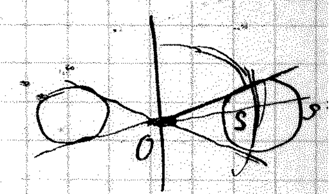
$$pq(q-p)\left[\rho^{2r-1} + 1\right]$$

$$-pr(r-p)\left[\rho^{2q-1} + 1\right]$$

$$+qr(r-q)\left[\rho^{2p-1} + 1\right] = 0$$

$$\cancel{k(1) = qp - rp + rq}$$

piano& di questa. Basta perciò provare che rispetto alla quadrica G sono coniugati B e non importa quale punto della retta PV. Siccome G è la sezione dell'ip.no v_3 con la Q, (ed essendo per P) [illegible] mi assicuro che rispetto ad essa sono coniugati per es. B e N(v. fig.) traccia di v3 sulla PV. Ora essi lo sono rispetto alla sezione piana ~~γ col piano~~ di π. Q (≡γ') (perchè qui B ha polare indeterminata) e quindi rispetto alla Q, e quindi trovandosi già entrambi in v_3, rispetto alla traccia ~~sua~~ di Q ~~su~~ su quest[illegible] v_3 che è appunto la G. Come esempio di queste inversioni ordinarie in cui una ciclide è invariante cito p. es per il caso del toro l'inversione rispetto a una sfera concentrica, con raggio $\sqrt{OS.OS'}$ (v. figura). Qui ogni punto è mutato addirittura in un punto dello stesso meridiano. Si vede anche bene sull'esempio che il centro di inversione è uno dei punti V', cioè vertice di un cono di Kummer, perchè in ogni piano meridiano escono da O due bitangenti, cosicchè esso è vertice di un cono di bitangenti.



La Mem. di Segre ha sviluppato a fondo un'idea che si era presentata nello stesso tempo a Veronese il quale vi ha dedicato da parte sua una breve nota. Essa ha avuto una notevole importanza sopratutto per far vedere come u

$$\frac{x^p-1}{p} = \frac{x^q-1}{q} \qquad x = \rho\cos\theta$$

$$\begin{cases} q\left[\rho^p\cos p\theta - 1\right] = p\left[\rho^q\cos q\theta - 1\right] \\ q\rho^p\sin p\theta = p\rho^q\sin q\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} p\rho^q\cos q\theta = q\rho^p\cos p\theta + p - q \\ p\rho^q\sin q\theta = q\rho^p\sin p\theta \end{cases}$$

$$p^2\rho^{2q} = q^2\rho^{2p} + 2(p-q)q\rho^p\cos p\theta + (p-q)^2$$

$$p^2\rho^{2q} - q^2\rho^{2p} - 2q(p-q)\rho^p\cos p\theta - (p-q)^2 = 0$$

$$\frac{\sin p\theta}{p} = \rho^{q-p}\frac{\sin q\theta}{q} = \rho^{r-p}\frac{\sin r\theta}{r}$$

$$\frac{q^2\rho^{2p} - p^2\rho^{2q} + (q-p)^2}{2q(q-p)\rho^p} = \cos p\theta$$

Se $p = 1$ $$= \frac{r^2\rho^{2p} - p^2\rho^{2r} + (r-p)^2}{2r(r-p)\rho^p}$$

lmente si possono applicare metodi iperspaziali allo spa
io ordinario. Per dare un'idea della complessità della cla
icazione fatta da Segre, dirò che contiene 70 specie!
Continuando a ~~passare~~ rapidamente in rassegna i lavori
importanti di Segre connessi con quelli già esaminati,
ricordare un suo lavoro sulla classificazione delle omogra
a fra spazi sovrapposti. Già nello spazio ordinario son
ibili molti casi diversi per quanto riguarda la configu
one degli elementi uniti (pensare non solo alle omografie
ali, omologie ecc. ma anche all'eventualità di punti uni
he si siano venuti a sovrapporre ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~
nel caso di punti uniti in n° finito, dove i 4 punti uni
el caso generale possono variamente coincidere fra loro
nche nel caso di infiniti punti uniti, dove p es nell'omo
ia assiale possono gli ulteriori (due ai punti) punti uniti venire a
ncidere fra loro, o con punti della retta unita, e così via
l caso dell'omologia che può diventare speciale ecc.) Si
se come questi casi si moltiplichino col crescere della
nsione dello spazio ambiente. La questione delle class.
lle omogr tra spazi sovrapposti è stata affrontata da S
"Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie i
o spazio lineare ad un numero qualsiasi di dimensioni"
ncei Mem 1883-84. Si capisce in che senso la ricerca
sulta materialmente connessa con quella sui fasci di qua
iche. Se l'omografia è $\rho x'_i = a_{i0} x_0 \cdots + a_{ir} x_r \quad (i = 0, \ldots r)$

pt. e sp. p. rispetto S e S

$$\Delta(\rho): \begin{vmatrix} a_{00}-\rho & a_{01} & & \\ a_{10} & a_{11}-\rho & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{rr}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

Si può aggiungere che il fascio individuato dalle 2 forme scritte che annullate hanno il seguente significato geometrico interpretando in S_r le y come coordinate di pt. e le z come coordinate di spaziamento

1) $\sum a_{ij} y_i z_j = 0$ cioè $\sum_i y_i \sum_j a_{ij} z_j = 0$

equivale a scrivere $\sum_i y_i z'_i = 0$ cioè il pt z' è nell'sp. y. cioè è l'eq. che passa per un pt. del 1° spazio e un sp.^{no} del 2° che ne contenga il corrispondente (eq. dell'omografia scritta in forma bilineare analoga alle più volte eq. delle reciprocità scritte in forma bilineare)

2) $\sum y_i z_i = 0$ è la condizione di appartenenza.

ricerca dei punti uniti conduce in modo notissimo all'eq

scritta contro. Ora il primo membro NON è (per l'asimmet

ta) il discriminante di una forma quadratica, bensì di una

rma bilineare. Si arriva alla stessa equazione in ρ stu

ando il fascio di forme bilineari

$$\sum a_{ij} y_i z_j - \rho \sum y_i z_i$$ e più precisamente, nel fascio le forme discriminante nullo.

indi si capisce come la questione sia ricondotta in so

anza ~~aa~~ ai fasci di forme bilineari. Ora il teorema di Weier

rass si riferisce non solo ai fasci di forme ~~bilineari~~ qua

atiche, ma anche bilineari. Quindi Segre può mettersi nello

esso ordine di idee che per i fasci di quadriche, definire

caratteristica di un'omografia, intrpretare geometricamen

a caratteristica, ecc. con sviluppi che non espongo.

Mi limito a aggiungere qualche osservazione

1) ~~aa~~ la ricerca degli iperpiani uniti conduce come è n

to in S_3 e come si estende subito a S_r alla stessa equazi

in ρ. Quindi presa una radice di essa, essa conduce a un

punto unito e a un iperpiano unito che restano così lega

fra loro, diciamo associati. Più in generale pensando che

essa abbassi ulteriormente la caratt. del primo membro,

diciamo conduce a uno spazio S_i di punti uniti e a uno

spazio S_{r-1-i} di iperpiani uniti associato al precedente.

agli studenti 293

:' ben noto che in un'omografia ~~da~~ tra piani sovrapposti
ogni punto unito U ha una retta unita u associata in questo
senso geom.co che se prendo due rette corr.ti e distinte
per U, il loro centro di prospettività, C al loro variare, ha
per luogo precisamente la u. Ora Segre ha dimostrato (in
una breve Nota successiva "Sugli spazi fond. di un' omo
grafia" Lincei Rend 1886) che la relazione puramente anali
tica di spazi associati sopra indicata ha un significato
geom.co che è proprio l'estensione di quello ora detto;
cioè presi ~~due~~ S_{i+1} e S'_{i+1} corrispondenti distinti per lo S_i unito, essi
sono prospettivi, e il loro centro di prospettività C al loro
variare descrive precisamente lo S_{r-i-1} associato. Si può anche
aggiungere che quello S_{r+1} e il relativo centro di pro
spettività C descrivono forme omografiche.

2) Omografie e fasci di quadriche non soltanto si ricon
ducono a questioni analitiche analoghe (fasci di forme bili
neari o risp. quadratiche); ma la teoria dei secondi in s
stanza si può ~~dedurre da~~ ricondurre quella dei primi, in quanto si pr
va questo: cond nec e suff perchè una coppia di quadriche
AB si possa trasformare omograf.te nella coppia A' B' è ~~a~~
che l'omografia prodotto delle polarità risp. A, B sia pro
iettivamente id.ca a quella prodotto delle polarità rispe
to A'B'.

3) Pochi anni dopo Predella e poi molto più recentemente
-isues e Chisini (Teoria geom. delle eq. algebriche II) ha
data della stessa questione una trattazione diretta, geom
cui non occorre più il teorema di Weierstrass (cioè in
stanza questo viene dimostrato geometricamente)&

Menziono anche in questa occasione le "Ricerche sull
ografie e sulle correlazioni in generale e partivolarment
quelle dello spazio ordinario considerate nella geometri
della retta " Torino Acc ~~Mem~~ Mem 1885. Qui si studiano anzitut
le omografie di uno spazio in sè che mutano una quadrica
sè. Nel piano le coniche ~~unite~~ sono ∞^5, ognuna è mutata in
da ∞^3 omografie; in tutto si hanno così ∞^8 omografie
tanti coniche in sè. Siccome le omografie del piano sono
punto ∞^8, si sarebbe tentati di concludere che ogni omo
(in Rc 36)
afia del piano muta qualche conica in sè. Eppure già una
fica elementare porta alla conclusione opposta. Preso p
l'omog con tre punti uniti distinti $\boxed{x_i = k_i x_i'}$ $i = 1, 2, 3$
provo a costruire una conica mutata in sè

$$a_{11} x_1^2 - - - \qquad + 2a_{12} x_1 x_2 = 0$$

~~ngo~~ mano le condizione che ntte eq. coincidan le

$$\rho\, a_{11} k_1^2 x_1^2 - - - \qquad + 2a_{12} k_1 k_2 x_1 x_2 = 0$$

ondo il rapporto per i termini a coeffte non nullo ~~[illegible]~~ [illegible]
tutti non ch.) $k_1^2 = k_2^2 = k_3^2 = k_1 k_2 = k_1 k_3 = k_2 k_3$ ossia $k_1 = k_2 = k_3$

e la contraddizione con l'os. anzidet. si spiega così: che si omografia che muti in sè una C^2 deve mutar ∞. Effettivamente qui p.es. se $K_0^2 = K_1 K_2$ resta l'omografia mutata in sè Ognuna di quelle C^2 con a_{11} e a_{22} arbitrari

Inoltre per le radici ± 1 bisogna ancora che si presentino ~~...~~ divisori elementari di grado dispari (1)

Si badi che qui si parla di trasformazioni in sè la forma: e con le quadriche ove a cui omografia trasformi in sè una Q si possono alterare i coeff. della trasf. ^{ne} lin. per un fattore in modo che qui le forme a 1° membro si invarianti

(1) p.es. l'omografia $x' = x + a$, $y' = y$ traslazione dove ogni pt. su per traslazione una retta non muta. Esiste una C^2 cui è mutata (se A va in A', A' va nella stessa retta ..) : eppure $\rho x_1' = x_1$, $\rho x_2' = x_2$, $\rho x_3'$

di $\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} 1-\rho & & a \\ & 1-\rho & \\ & & 1-\rho \end{vmatrix} = 0$ con $\rho = 1$ radice tripla. Ma qui (det. te divisib. per $(\rho-1)^3$; non per $\rho - 1$. i div. el. ^{ri} sono $(\rho-1)^2$, $\rho - 1$ e il 1° ha grado pari l dire che qualche a_{ij} sarà nulla; ma comunque, essendovene la irriducibilità due almeno non nulle, ne ~~segue~~ almeno (le sole) relazione fra le k (p es se son non nulle a_{11} e a_{23} viene $k_2 k_3$)cosicchè ~~se~~ le k sono arbitrarie la ~~quadrica~~ conica esiste. Ciò premesso, si capisce che in S_r le ~~&&&~~ omografie suscettibili di mitare una quadrica in sè devono presentare qualche particolarità. Essa è precisata in un teorema Frobenius, che Segre ha largamente applicato. Le condizioni per la trasf. in sè di una forma quadratica o queste: le radici dell'eq $\Delta(\rho)$ = di p - 290 devono essere a due reciproche, eccetto quelle eventuali che siano eguali a ± 1, e che inoltre le prime a due a due reciproche ducano a divisori elementari ei egual grado. Completato p. 296

P es nel caso dianzi considerato della conica forma $+2a_{23}x_2x_3=$ ~~le radici~~ dell'eq $\Delta(\rho)=$ ~~sono~~ cioè

$$\begin{vmatrix} \cancel{\rho-k_1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{\rho-k_2} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{\rho-k_3} \end{vmatrix} = 0$$

ke appunto (l'eq. è $\rho x_i' = \frac{x_i}{k_i}$)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{k_1}-\rho & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2}-\rho & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

con radici $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_3}$

...(cfr. p 286) due con $k_1^2 = 1$ e $k_2 k_3 = 1$

...tra le 3 radici (che suppongo distinte) una = ± 1

le altre due reciproche (hanno prodotto 1). E ...

fin A, nelle' esame

ducono nec& te a divisori el.ri lineari(tre radici disti
ti e il teor va bene).Osservo anzi ora che dei tre punti
uniti dell'omografia(punti $A_1A_2A_3$) due A_2 e A_3 sono sulla
conica invariante;sono come si vede subito i due provenie
ti dalle radici non unitarie.Ora Segre osserva p es come
risultato si generalizzi:ogni spazio ~~unito~~ fond. e (=) di punti uniti proveniente da
una radice distinta da ± 1 sta sulla quadrica &&& invaria
te;non solo ma risulta tangente lungo esso a questa lo
spazio &&&&&&&&&&(p&&&&&& di iperpiani uniti proveniente
dalla radice reciproca. Ogni spazio fond. di punti uniti,
anche se proveniente da ± 1 è coniugato a ogni altro pu
chè non sia proveniente da radice reciproca

Naturalmente da un'omo.mutante Q(irrid. in sè) gli sp
zi massimi esistenti sulla Q sono mutati in id id.Ora se
è pari(p 153) essi costituiscono un solo sistema,che du
que è mutato in sè.Invece per r dispari si presentano d
sistemi,con le due possibilità che ognuno sia mutato in
è(omografia di prima specie)oppure nell'altro(di second
specie.Nel secondo caso vi sono certo radici ± 1 (di mol
tà dispari) e conducono a spazi di punti uniti a un n°
pari di dimensioni;nel primo possono esservi o no e se
sono portano a spazi di punti uniti a un n° dispari di
dimensioni.

er chiarire queste gen.tà con unesempio,per $r=3$ conside

a) l'omologia armonica mutante Q in sè che ha per centr punto P e per piano il suo polare π Rette corr.ti essen incidenti (su π) l'omografia è di seconda specie.Effettiv. mente essa ha come spazi f ond. P(dim. zero) e π (di due)dunque con dim. pari,e inoltre provenienti certo d radici ± 1 ,perchè non stanno su Q

b) omografia biassiale armonica avente come unite due re te polari risp. Q(due loro pt qualunque sono coniugati quindi la retta che li congiunge,cioè una retta qualunq appoggiata ad esse sega Q in coppia armonica risp ai pu di appoggio cosicchè Q è mutata in sè)Qui rette corr. no sghembe(se no per la loro int. due app.te....) quind prima specie.Effettivamente ho due rette di punti uniti ,provenienti da radici ± 1 perchè non stanno su Q,e di d mensione dispari

Oltre al teor. di Frobenius ricordato la ricerca di Segre ha nat.te altri precedenti analitici,su cui non mi trattengo.Il problema di trasformare con sost. linea una forma quadratica in sè aveva nat.te già fermato l'a ttenzione di molti.Basti ricordare il caso delle sosti tuzioni ortogonali ($x'_1 = a_{11}x_1 \dots + a_{1r}x_r$ ecc.) cioè quelle che conducono a un det.te ortogonale $|a_{ij}|$ con

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 \dots + a_{r1}^2 = 1 \quad \text{ecc.}$$
$$a_{11}a_{12} \dots + a_{r1}a_{r2} = 0$$

([illegible])

Ricordare inoltre i nomi
delle g. h. c

E in un modo altro che le sost. mutandosi in sè la forma quadratica $\sum x_i^2$. Invece le eq. che mutano $\sum x_i^2 = \sum x_i'^2$ con
$(a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r)^2 + (a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r)^2 + \dots = x_1^2 + x_2^2 \dots$
l'identità dà appunto quelle cond.ni.

Ho detto della prima parte della Mem. Nella seconda sviluppa questa idea: per $r=5$ la prima parte fa conosce le omografie che mutano in sè la M_4^2 rappresentativa de lo spaziorigato. ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ Queste omografie S_5 in sè non sono - in quanto operanti sulla M - che imma ni di omografie oppure di reciprocità dello S_3 in sè. Pr cisamente si tratta di omografie di S_3, come si vede su to, se l'omografia dello S_5 è di prima specie. Ne viene l possibilità di una nuova classificazione delle omografi di S_3 considerate come omografie dello S_5 di prima spec mutanti la ~~&&&&&~~ M in sè (cfr. la seconda parte del tit

Le parti successive riguardano lo studio delle corre zioni, e fra altro le omogr. o correlazioni che mutano in sè un complesso lineare (il che equivale poi a stud re, cosa qui già fatta) le omografie in sè di una V_3^2 di S_4.

Dal nuovo punto di vista ogni omografia di S_3 viene ad acquistare una nuova caratt; una ne aveva già con 4 i tieri (p 291), la nuova nat.te ne ha 6; questi 6 intieri ,

(e quest non altro)

0 ⌐ e con lati passanti de radici diverse de

± 1: nessun tratto sopra.

Segre, per distinguere dalle prec.te caratt. li racchiude tra graffe, raccostando fra loro quelli provenienti da radici reciproche, e sopralineando quelli provenienti da radici ± 1. Così, il caso "generale" di una omografia $\&\&$ con 4 punti uniti vertici di un tetraedro ha $[1111]$ e poi $\{11\ 11\ 11\}$ essendo unite le 6 rette spigoli del tetraedro e non altre, cosicchè in S_5 ho 6 punti uniti (vertici di una pir. fond., su Q) e non altri

Mi fermo soltanto più su un risultato che si trova alla fine della Memoria, non per la sua importanza essendo esso assai particolare, ma perchè mi dà occasione di dire qualche parola su un genere di questioni che si presenta assai spesso in geometria. Il problema specifico a cui si riferisce l'oss. di Segre è quello dell'esistenza in una data omografia tra S_3 sovrapposti di due tetraedri corrispondenti, tali che ogni spigolo dell'uno tagli lo spigolo opposto del tetraedro corrispondente. Data che sia l'omografia si hanno in sostanza 12 incognite non omogenee (3 coord.te per ogni vertice) e sono da soddisfare 6 condizioni diciamo semplici, in quanto ognuna si traduce in un'equazione fra quelle incognite. Sarebbe dunque prevedibile che di tali coppie o perchè il nostro è incompatibile o perchè la

soluzione ~~alg~~ contraria genera soluzioni "degeneri", fu p. 81, e segui ecc.

cioè in base al computo della cost.

e ne siano infinite(∞^6).Invece ,come dirò non è così.
i-mo di fronte a un problema che (usando per fissare le i
ee coor. non omogenee) comporta meno equazioni che inco&
nite eppure non è,generalmente ris&olubile.Il voler presu
ere di sapere se il problema è solubile soltanto facendo
uello che si chiama un computo di costanti,cioè attualmen
e paragonare il n° delle costanti(12) da cui dipende il
etraedro cercato col n. 6 delle cond. a cui quelle devono
oddisfare può avere spesso un valore euristico ma non
ostituisce assolutamente un metodo incui si possa avere
iducia. Cf~~r. anche del resto p. es. p.~~ 205, [illegible] Si tratta
n definitiva di problemi geometrici apparentemente possi
ili(determinati o indeterminati,secondochè il n° delle
quazioni è eguale oppure inferiore a quello delle incogn
e) e invece di fatto impossibili. Oltre all'esempio
he abbiamo in vista cito questi:

a) sono date due coniche in un piano,e si cerca un
riangolo && che sia p es iscritto nella 1.a e autopolare
ispetto alla seconda.Anche qui ho sei incognite ,e come
i vede subito 6 equazioni.Problema apparentemente deter
inato.Invece se le due coniche sono qualunque,un tale tr
ngolo non esiste.La cosa si vede subito,perchè se esiste

uel triangolo, presolo perfond. le coniche hanno le equaz

$\gamma)$ $2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$ $\qquad b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 = $

Se allora formo l'eq.ne $\Delta(\rho) = $ annullando il discriminan di una conica del loro fascio, viene

$$\begin{vmatrix} -\rho b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & -\rho b_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & -\rho b_{33} \end{vmatrix}$$

$$-\rho^3 B + \rho^2 C + \rho \mathcal{D} + A = 0 \qquad (1)$$

[illegible]

$$\mathcal{D} = -b_{11}\begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ a_{23} & 0 \end{vmatrix} - \dots \qquad C = 0.$$

[illegible] (1) [illegible] $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 0$. (2) Ora [illegible] rapporti [illegible] ρ [illegible] (2) [illegible] ρ [illegible] ... soddisfatta le (2). cioè C [illegible]

$\Sigma a_{ij}x_ix_j = 0 \qquad \Sigma b_{ij}x_ix_j = 0 \qquad$ da $\left| a_{ij} - \rho b_{ij} \right|$

$$\boxed{\Sigma a_{ij} B_{ij} = 0} \quad (3)$$

[illegible] nec. ~~e suff.~~ per l'esistenza di quel triangolo [illegible] (3) il triangolo [illegible] esiste. [illegible] contrariamente alla [illegible] NON ci sono soluzioni. La (3), come ~~[illegible]~~ verifiche[illegible] è anche sufficiente. [illegible] B_{ij} [illegible] spolante. [illegible]

Une solution <u>dégénérée</u>

Je ne peux toujours prendre

$A_1 = A_2 = A_3$ en un pt δ

questa apolarità tra γ luogo e δ inv.ppo la cond. nec. sufficiente per l'esistenza di un triangolo come quello considerato. La sufficienza si può controllare così. Valg) -dunque in relazione a ogni sist. di riferimento: prend triangolo fond $A_1A_2A_3$ coi primi due vertici su γ e aut lare rispetto a δ (lo trovo certamente; per costruire triangolo autop rispetto δ posso partire da A_1 arbitra o e lo scelgo su γ, e prendere ancora arbitrariamente A_2 rchè ad esso coniugato, e lo scelgo in punto comune a e alla polare di A_1 rispetto a δ). Allora l'eq. δ è c. s. mentre quella di γ è

$$a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

rivendo che ha luogo la (3) scrivo $a_{33}A_{33} + \dots = 0$

cioè $a_{33}\, b_{11} b_{22} + 2 \dots = 0$ ($B = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{vmatrix}$ le altre $B_{ij} = 0$ risultano $= 0$)

ma non è $b_{11} b_{22} = 0$ e non lo è ... δ non degenere. È certo $a_{33} = 0$, cioè anche A_3 sta su γ.

Abbiamo così verificato non solo che (3) è sufficiente, ma che esistono addirittura ∞^1 triangoli nelle condizioni richieste, potendosi scegliere A_1 arbitrariamente su . vale a dire che <u>se esiste un triangolo nelle condizioni richieste ne esistono certo infiniti</u> .

b) nella riduzione a forma canonica si è spesso portati ~~a fare computi di costanti, che~~ per condurre a risultati esa o errati. Esempio il pentaedro di Sylvester della F^3; cioè possibilità di porre la sua eq.ne, se essa è generica sotto la forma $\pi_1^3 - - - + \pi_5^3 = 0$ (1)

Qui le incognite sono 19 (5.4-1) ~~e le eq.ni da~~ i coeff.ti di uno di essi [= 1] soddisfa altrettante (scrivere che i coeff.ti che risultano in (1) sono prop. a quelli dati a priori. E i risultato di fatto resta poi confermato. Così cito il rag.to con cui Plücker nella Th. der alg Curven stabiliva che per C3 piana i tre asintoti (tgti nei 3 P_∞) la segano ulter.te in tre punti allineati (è poi caso particolare di teor. bel noto, ma non importa). A tale scopo P. vuol dimostrare che l'eq. di C3 generale si può scrivere sotto la forma $pqr + ks = 0$ (2)

con p,q,r,s lineari in x,y e k coeff.te. Quelle p,ecc. possono supporre p es col coeff.te di x unitario (dividendo se no per fattori opportuni): quindi l'identificazione di (2) con eq. di C3 generale comporta 9 eq in 9 incognite. Quindi se il computo delle costanti torna, è possibile la riduzione. Dopo di che p = o sega C3 in 1 punto proprio quindi è asintoto, ecc. e i tre punti sono tutti sulla s

Anche qui di fatto il risultato torna.

] d puissance n^e

Un esempio dovuto allo stesso Plücker in cui il computo non torna è questo. L'eq. in coord.te cart ort. $x^2+y^2=$ dipende da 3 costanti (p es scelta dell'asse x e su ques dell'origine). Si può adottare quella come eq. canonica del cerchio? il computo delle cost. direbbe di sì (l'identificazione dell'eq di cerchio prefissato con quella con cui essa si trasforma con passaggio a altri assi po tre eq. &&&3&&& in quelle tre costanti) Invece evid.te perchè ogni cerchio avrebbe raggio unitario.

Altri esempi di computo di cost.ti nella rid.ne a ~~fomma~~ forma canonica. Per una fo generale di grado n in $r+1$ variabili ci si può propor il problema (gen.ne del pentaedro di Sylvester) se con sost lin. &&&&&&&&&& sulle variabili la si possa ridurre alla so di un certo n° diciamo $h+1$ (piccolo quanto è possibile) di forme lineari nelle stesse variabili; cioè geom.te se l'eq.ne di una V_{r-1}^{n} generale d r si possa sempre ridurre alla forma $\pi_1^n+\pi_2^n - - - +\pi_{h+1}^n=$ ove $\pi_i = \cdot$ sono iperpiani. Che risultato dà il computo delle costanti? La (1) contiene $(h+1)(r+1)-1$ (tutti i coeff.ti meno uno) costanti; e le condizi ni da soddisfare sono (p 313) tante come i termini nell'e nerale -1. Quindi il computo delle costanti dà, per la ri solubilità, per h il minimo valore tale che

$$(h+1)(r+1)-1 \geqq \binom{n+r}{r}-1 \text{ cioè } \boxed{(2)\ h+1 \geqq \frac{1}{r+1}\binom{n+}{r}}$$

da qui

Teniamo presente, perché ci torneremo, le prime due [illegible] servono al computo della Coh. ogni C' [illegible] [illegible]

π_1^{i}, $\tau\,\pi_j^{-}$: [illegible]

Ora si pone la questione se effettivamente il risultato fornito dalla (2) è esatto. Non sempre. P.es. per ~~le~~ quadriche non lo è mai (per nessun valore di r). Esso darebbe inverso (dato che il min.° intero per cui $h+1 \geq \frac{1}{r+1}\binom{r+2}{2}$ cioè $h+1 \geq \frac{(r+2)(r+1)}{2(r+1)}$ cioè $h+1 \geq \frac{r+2}{2}$. Ora potendo una sola l'eq. n V^2_{r-1} $x_0^2 + \dots + x_r^2 = 0$ ~~a tre valori di~~ (la cui manca... no pt. doppio) il vero valore di $h+1$ è $h+1 = r+1$ cioè $\boxed{h = r.}$ E questo valore è sempre maggiore di quello ora detto (perchè già per $h+1 = r$ (anzichè $= r+1$) soddisfa alla disuguaglianza $2r \geq r+2$ avendo già per $r = 2$)) Altro caso di eccezione; per le curve piane del 4° ordine avrei $h+1 \geq \frac{1}{3}\frac{6.5}{2}$ e quindi $h+1 = 5$. Viceversa questo risultato non è vero perchè ~~xxxxx~~ di fatto si trova che le quartiche $\varphi_1^4 + \dots + \varphi_5^4 = 0$ costituiscono un tipo particolare, annullandosi per esse un certo invariante, (quartiche di Clebsch). Per le altre quartiche è invece $h+1 = 6$. La risposta alla questione posta non è semplice. Per le curve piane sì; per esse si dimostra assai facilmente che la formola (2) data dal computo delle costanti è esatta per ogni valore di n escluse le due eccezioni ora notate. In S_3 ho dimostrato, ma non senza fatica, che lo stesso risultato vale ancora (Torino Atti 1916). Anche negli spazi superiori deve valere un risultato dello stesso tipo, cioè che il ri

ultato (9) è esatto salvo certi valori di n;ma esso par
ifficile da stabilire.Bisogna guardarsi da dimostrazioni
i risultati recenti di
ffrettate;p es manca ma di fondamento ~~una che mi dato re~~
~~&&&&&&&&&&&&~~ Bronowski(Proc. Cambr phil Soc 1933).Già
n S_4 sono eccezionali i valori di n = 2 oppure 3 oppu
e 4 .Ma ~~&&&&&&&&~~ che questi siano i soli non è provato.
li stessi problemi si pongono quando invece di una sola
orma se ne considerano due o più, ~~&&&&&&&&&&&&~~ di ordine
,che si tratta di ridurre simulatenamente a potenze n^e
elle stesse forme lineari. Qui ho potuto raggiungere un
e per una coppia di forr
isultato completo solo nel piano (Ann. di mat; 1915) di
ostrando che ilrisultato forntio dal computo delle co
tanti è sempre valido con la sola eccezione dei fasci
i cubiche.

Ora un mezzo che spesso-ma non sempre - riesce utile
er sapere se ilrisultato fornito dal computo delle co
tanti è esatto è il cosideeto criterio di Plucker -Clebs
già adoperato da Plucker e formulato da Clebsch nella sua
ecrologia di Plucker stesso.Prima di enunciarlo osservo
e limitandomi per semplicità ai pro-
egli esempi addotti ~~in cui il computo delle costanti m~~
blemi apparentemente determinati
~~&&&&&&&&&& che per i casi particolari~~ questo:si trat
sempre di sapere ~~se~~ a partire da un dato ente geometrico variabile
entro una certa classe -p es coppia di coniche di un pi

e precisamente .Consideriamo unproblema in cui sia dato un ente geom. E variabile in una classe C.Il problema consista nel trovare un nuovo ente E' legato ad E da date condizioni.Il problema sia apparentemente det.to nel senso delle pp prec.ti,cioè in base al computo delle costanti. Ebbene,se il computo delle cost. conduce a un risultato errato,avviene nec.te questo che per quei particolari E della classe C per i quali il problema diventa possibile lo diventa nec.te in ∞ modi. Se invece il problema è apparentemente ind.to e app.te dare ∞^s soluzioni, per i particolari E per cui è risolubile questo ha luogo in $\infty^{\delta+s'}$ modi con $s'>s$

no a p 307, oppure singola quadrica di S_r di cui si vo glia scrivere l'eq. annullando somma di quadrati, diciamo per semplicità conica - sia <u>possibile</u> di trovare un cert nuovo ente E' legato a quello da date cond.ni (nei due esempi: il triangolo iscritto e autop.; una coppia di forme lineari π_1 & π_2 che diano all'eq. della C^2 la for $+\pi_2^2=0$) Ora in questi esempi in cui il computo delle costa ti non torna risulta a posteriori questo: che per quei <u>par colari</u> enti della classe data per i quali il problema ri ta invece possibile esso risulta possibile in infiniti m (mentre il problema era apparentemente det.to) Ciò si è ap punto visto per il probl di p 307, e si vede anche subito per l'altro; perchè se per una C2 posso scrivere l'eq. $+\pi_2^2=0$, essa è coppia di rette, e allora comunque si prend nel loro fascio una coppia armonica alle due come $\pi_1=0, \pi_2$ sempre.....Ora il principio di P.& C. enuncia precisame te che quanto ora si è detto vale non solo negli esempi addotti, ma sempre. Esso dà quindi un criterio per riconosc re se (in un probl. app.te det.to) il risultato fornito dal computo delle costanti è esatto, perchè basta accertarsi che per una scelta particolare dell'ente dato entro la classe esistano soluzioni, ma non in n° infinito per con clude che il computo delle cost.i è esatto (se no il princip. di P.

rebbe che esistento soluzioni sono infinite). E così se
ratta di un probl app te ind to con apparenti ∞^5 soluz.
rova per un particolare E appunto ∞^5 e non più, concludo
~~&&&&~~ an.te che il computo è sempre esatto. Una dimost
zione completa del pri cipio è stata data recentemente da
Severi (Rend Lincei 1933, v. anche le sue Lezioni di Analis
preceduta da qualche cenno in Enriques Chisini (I) che a
punto perciò ~~&&&&&&~~ sta dando luogo a una polemica fra
Severi e Enriques). Per indicare un'applicazione del prin
cipio, va bene per la dim. di p 313 ~~&&&&&&&~~ sulle resi
due int.ni degli asintoti. Invero in quella (2) pes $p=0$
è asintoto (perchè dà una sola int.ne propria): quindi se
l'eq. di una C3 si scrive in quel modo, le rette $p=0$, $q=0$ ...
sono gli asintoti, e la retta $l=0$ è anche determinata
come quella che contiene le loro int. con la curva. Quindi
per la cubica (2) la riduzione alla forma non è certo
possibile in infiniti modi. Altro esempio: dim.ne dell'e
sistenza del pentaedro di Sylvester per F3 generale. Presa
la F3 $\pi_1^3 + \dots + \pi_5^2 = 0$ si trova facilmente che ogni vertice
(10) del pentaedro ha per quadrica polare una coppia di
piani (per lo spigolo opposto). D'altra parte si dimostra
direttamente per F3 generale che di punti dello spazio
con quadrica polare spezzata in due piani ce ne solo 10

uindi se l'eq. di una F3 si può mettere sotto la forma
ritta, NON è vero che ciò avvenga in infiniti modi. Quindi
computo delle cost. torna; cioè ogni F3 gen rale ha eq.ne
quella forma. Questo principio come si disse torna
sso utile, ma non dà sempre un modo per risolvere comple
mente la questione, non essendo sempre agevole di dimostrar
l'esistenza di una soluzione non implica quella di infi
te soluzioni. Così per le forme canoniche di p 315 sgg.

Per chiudre questa digressione e tornare al problema par
colare che è stato il nostro punto di partenza (p 305) Se
in loc cit e in un'altro lavoro contemporaneo (Sur les
variants simultanés de deux formeq quadratiques, Lettre à
Rosanes, M A XXIV. 1884) ha osservato qualche risultato un
più generale da cui discende questo. Quel problema, che
apparentemente ∞^6 soluzioni, è di fatto gen.te impossibi
cond. necessaria e suff. perchè in una omogr. vi siano
z.ni è che (sviluppando gen.te in S_r $\Delta(\rho) = \ldots \left| a_{00} - \rho \;\ldots\; \right| = 0$

$$A + \rho J_q \;\ldots\; + \rho^{r-1} J_2 + \rho^r J_1 + (-1)^{r+1} \rho^{r+1} = 0$$

ove ogni coeff. ~~[illegible]~~ è una funz. delle radici,
a. anzi omogenea e come tale invariante a meno di un fat
re per le trsf.ni delle coord.: le eq. che si ottengono
nullando i coeff. sono perciò invarianti) risulti $J_2 = 0$.

Anche ora e le caratt. M_0 – M_γ danno luogo alla seguente prat.:

Anzi, S trova qualche cosa di più; e cioè che $J_2 = 0$ è cond. nec e suff. perchè esista una sestupla di cpl lin $C_1, \dots C_6$ i quali siano dall'omografia trasformati in C'_1, ecc. in modo che p es $C_1 C'_2, \quad C'_6$ stiano in un sist. lin soltanto ∞^4, e così via. Si osservi come domandare ciò sia di meno che domandare la condizione relativa al tetraedro che pure rientra come caso particolare in questa (prendendo $C_1 \quad C_6$ nei 6 complessi lin speciali aventi come assi gli spigoli di un tetraedro) (cioè in S_3) Possiamo aggiungere, per completare che attualmente si hanno tra i coeff. altri due invarianti. Il significato geom del loro annullarsi risulta ~~&&&&&&~~ da risultati di Segre. Egli ha trovato che, ~~&&&&&&~~ in S_r (v anche Enz 841) condizione ~~&&&~~ SUFFICIENTE per $J_k = 0$ (per ogni valore di k) è ~~questa~~, che esista una piramide (si intende di $r+1$ vertici $M_0 \dots M_r$) tale ~~che~~ a ognuno degli ~~suoi~~ S_{k-1} delle 1e piramidi) (vuol dire congiungente k dei suo vertici) corrisponda ~~nell'altro spazio~~ ~~all'S... in modo~~ (~~uno spazio~~ anche S_{k-1} ~~delle~~ 2e incidenti allo S_{r-k} delle 1e opposto allo S_{k-1} di partenza (mi[illegible] costituito di generato delle coppie)) Per k = 1,2, n-1, n la condizione è anzi NECESSARIA E SUFFICIENTE; e siccome per n = 3 si hanno solo i valori di k = 3,2,1, si ha così in S_3 un risultato completo. Per $k = 2$ si è già detto, per $k = 3$ risulta come

con S. trova

aso part dal detto che esistono due tetraedri corr.ti di
ui le facce del secondo passano per i vertici del 1° op
osti alle facce corr.ti(cioè il 2° è,nel modo preciso de
critto,circoscritto al primo).Per $K=1$ si ha la stessa co
a scambiati i due tetraedri.

Coi lavori che abbiamo esamonato Segre si era trova
contribuire in modo importante alla creazione della geo
roi degli iperspazi.Contemporaneamente gli argomenti già
tudiati lo portavano allo studio di altre questioni fond
i inquesto indirizzo. Ne indico qualcuna.

1) Anzitutto,potendosi ritenere allora già nota la teor
elle curve raz. norm. (cfr p 205) si apriva la via a gen
ralizzare questo concetto. Ciò è avvenuto in modi diversi
a rappr. param. $x_0=t^r \dots x_r=1$ mostra che la C^r raz norm
i rappresenta su una retta in modo che ai gruppi di punt
ue sezioni iperpiane sorrispondono tutti i G_r di
questa.Allora una estensione era;le superficie razionali
rapp.te su un piano in modo che alle loro sez. ip.ne cor
rispondono TUTTE le C^m di un piano.Anzi,particolarmente
si presentava il 1° caso $m=2$;sup...... Tali si ottengono
colla rappr. param. $(u^2, uv, v^2, u, v, 1)$ (spiegare d(alle rapp.ni)) La superficie che così nasce è la ~~ovviamente~~ del 4° ordine)
cosidetta superficie di Veronese(v. corso prec.te) così
chiamata peressers stata studiata anche da Veronese.Ma

Segre ha ~~[illegible]~~ sviluppato la teor. della sup di verones
da un punto di vista indip. e personale(Considerazioni
intorno alla geom delle coniche di un piano e alla sua
pprese.ne sulla geometria dei complessi lineari di rett
Torino Atti 1885) rappresentando le coniche di un piano
anzi le coniche inv.poo nei punti di S_5 attraverso la l
ro equazione. Allora le ∞^2 coniche immagini di un punto
doppio dànno luogo a una sup. che risulta appunto quell
di Veronese, mentre le ∞^4 spezzate in due punti gen.te dis
tinti dànno luogo a una V_4^3 dello S_5 contenente doppia
mente quella sup. Non entro in particolari già svolti
nel corso precedente. Aggiungo piuttosto (cfr. la seconda
parte del titolo) che Segre fa vedere la poca opportu
tà di riaccostare lo studio della ∞^5 delle coniche di
un piano alla ∞^5 dei complessi lineari di S_3, come viene
spontaneo di fare attraverso la loro interpret. nei pu
di S_5(e come aveva fatto Aschieri); perchè per ritornare
poi dalle propiretà ottenute in S_5 a proprietà aventi
interesse per le due teorie ha una parte importante
risp. nei due casi la varietà di S_5 immagine delle coni
che degeneri(cioè la M_4^3 con sup. F^4 di Ver doppia come
ora detto) e risp. la $M_4 2$ immagine delle rette. Quindi
intervengono nei due casi figure dello S_5 nettamente
distinte. 339

e adesso si arriva ~~ap~~ così precisando questa idea: se sopra l F^{r-1} con uno S_{r-1} generico C^{r-1} direttrice; non faccia anche lo S_{r-1} già per una direttrice resta C^{r-1} direttrice; ~~qu~~ te. Onde prendere più gen.^a che si può in modo che ... possa avere un S_{r-1} le cui int.^ni renderà ... il resto tanto più piccolo quanto maggiore è il n.^o di quelle

1 non se ne ha 1 tipo solo

come per le C, tutte = a v a

1 è preso ~~S~~ tra UNA

C μ i ∞^1 solo per r dispari

C μ max $= \frac{r-1}{2}$ (ecc.^e Q 1 S)

Per ogni valore di μ si hanno sup. tutte proiettivamente generali.

2)Un'altra estensione è questa. Quelle curve sono normali(nel senso che....)e tutte le altre curve raz. si possono ottenere come loro proiezioni([redacted] già [redacted] Segre ha studiat an.te in un iperspazio qualunque le <u>rigate razionali normali</u>(Sulle rigate rae. in uno spazio lineare qualunque, Torino Atti 1885), delle quali [redacted] ,normali(cioè....., e anchequi tutte le al...), F^n già Veronese aveva dimostrato che hanno come spazio di immersione uno S_{n+1}. Sempre per le normali, (dim F^{r-1} d S_r) Segre ha cercato una classificazione fondata sulla considerazione delle linee direttrici d'ordine minimo. In S_3 si hanno ovviamente i casi della quadrica irriducibile (per una schiera RETTE direttrici) e del cono. E entro ogni categoria le sup. sono tutte equivalenti. Ora in S_r avviene questo(Segre): se le dir. ci minime sono C^{μ}, è sempre $1 \le \mu \le \frac{r-1}{2}$. Tutti i valori di μ che soddisfano a questa limitazione sono effettivamente possibili perchè congiungendo mediante punti omologhi di una C^{μ} e di una $C^{r-1-\mu}$ normali e gen.te disposte si ottiene precisamente una F^{r-1} del tipo indicato. Della quale Segre ricava anche le equazioni sotto la forma

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{\mu-1} & x_{\mu+1} & \dots & x_{r-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{\mu} & x_{\mu+2} & \dots & x_r \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (1)$$

Per A_2 le linee fond.^{e} si trova tendendosi lungo $u_1 = m u_3$. Allora nelle eq. par. i 2^i membri delle 1^a linee contengono a fattore $u_3^{r-\mu}$ e nelle 2^a $u_3^{r-\mu-1}$ - dividendo per questi, al limite $x_0 = 0 \dots x_\mu = 0$; $x_{\mu+1} \dots : x_r = 1 : m : m^2 \dots : m^{r-\mu}$ eq. par.^{che} di una linea, cos.^{te}

Per A_1 ~~altra~~ $u_2 = m u_3$, nel caso non eccez.^{ale} il termine minimo in u_3 è quello di x_r, quindi si corrisponde il pt. $(0 0 \dots 1)$ ma (v. 50) le linee rapp.^{ve} sono tg.^{ti} in A_1 e allora nasce nuovamente una linea fond.

Cfr. p. 59-61 del caso prec.): nel caso eccez. sono minimi x_μ e x_r e ho $(\mu : r-\mu-1)$ $x_\mu : x_r = 1/m$. Viene nella

se non è $\mu = r - \mu - 1$ cioè escluso $2\mu = r-1$

cioè escluso $\mu = \frac{r-1}{2}$ (r dispari e μ max.)

~~Ma allora ottengo qui~~

$$\cancel{(r-\mu)^2 - (r-\mu-1)^2 - 1 = -1 + 2(r-\mu) - 1}$$

$$\cancel{= -2 + 2\frac{r+1}{2} = r-1}$$

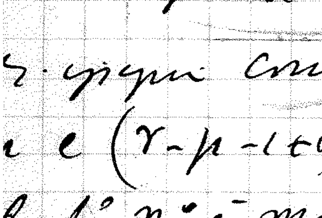
e va bene

Ma escluso il particolare (di questa dim.^{ne}) il rag.^{to} credo va bene anche in questo caso.

…miamo leggere nelle (1) le rappr. param.^{ca} delle F^{r-1}. Preso
$=1$ e posto allora $x_1=u$ leggo dalla prima colonna
$x_0=1,\ x_1=u;\ x_2=u^2,\ x_3=u^3 \dots\ x_\mu=u^\mu$
poi $\begin{vmatrix} x_0 & x_{\mu+1} \\ x_1 & x_{\mu+2} \end{vmatrix}=0$ ecc. ma da solo $x_{\mu+1}$ cioè ... $x_{\mu+1}$
possiamo prendere ad arbitrio $x_{\mu+1}=v$ e allora completo

$$\boxed{x_{\mu+1}=v,\ x_{\mu+2}=uv;\ x_{\mu+3}=u^2v, \dots\ x_r=u^{r-\mu-1}v}$$

Si hanno così le eq. parametriche che tradiscono le rapp.^{ta} delle
F^{r-1} rigate di ogni specie. Nella rapp.^{ne} piana alle
… ognuna corrispondono {il quale max è il maggiore fra
… e $(r-\mu-1+1)=r-\mu$: ma (per la disuguaglianza $2\mu\leq r-1$)
il 1° n° è minore del 2°) delle $C^{r-\mu}$ che $\left(u=\frac{u_1}{u_0},\ v=\frac{u_2}{u_0}\right)$
hanno in A_1 un pt. ~~[illegible]~~ $A_1^{r-2\mu}$,
… multiplo (termini $u^{r-\mu-1}v$ per $C^{r-\mu}$) in A_2 un pt.
… $(r-\mu-1)^{plo}$ (ordine -1) ognuno di quali è fond.
… $u_1=u_0=0$ o $u_1=u_2=0$ tutte le x_i si annullano)



~~…~~ le rette per A_0 hanno una sola
int.^{ne} con le $C^{r-\mu}$ (fuori di A_0). quindi
sono le curv. delle generatrici [~~…~~
~~… A_2 … sing. di … d'ordine $(r-\mu)-1$~~]
~~… … … più semplicemente~~
Per confermare l'ordine $r-1$ delle F dalla rapp. piana conviene
osservare che per A_1 le curve rapp.^{ve} passano tutte con la stessa

Del resto a p. 3364 si è già trovato una $C^{r-\mu-1}$ fond. isopicamente A_2. che è appunto una $C^{r-1/2}$.

C^{μ}

In tutti gli altri casi le dir.^{ni} minime risultanti separate del punto P [vi conc. fond. d'ordine ~~r-1~~ $r-\mu-2-(r-2\mu-2)=\mu$].

In quest'ultimo caso le dir.^{ni} d'ordine minimo $C^{\mu}=C^{\frac{r-1}{2}}$ sono date dalle ∞^1 rette per A_2^0 (segant le $C^{\frac{r+1}{2}}$ in $\frac{r+1}{2}-1=\frac{r-1}{2}$ pt.) ~~Veramente~~ da esse occorre escludere la A_2A_1 (che non sega ~~le~~ quelle C in pt. variabili), al punto della quale compare il pt. $A_1^{\frac{r+1}{2}}$ ple che, fond.^{le} de: Moltiplicità mag. di una ~~d~~ ~~fattore~~ direttrice δ (~~si capisce dal fatto che i pt. del piano ... le dir. uscenti da esso molteplici corr.~~) perchè ogni gen.^{ca}, s'immagini, piana per esso, e vi passa, come si capisce, di ordine $\frac{r-1}{2}$ (perchè le direz. del piano uscenti da A_1 con. ma pt. di δ. è ... $\frac{r-1}{2}$ in ogni superpiano - cioè in ogni iperpiano)

...te (il term max $u_1^{r-\mu-1} u_2$ le coeff^a per u_2) $u_2 = 0$
... ; ma $u_2 = 0$ sega (v. ci pare) $u_2 = 0$ cioè A_1
$r-\mu-\mu = r-2\mu$ volte cioè quelle $C^{r-\mu}$ hanno tutte
A_1 con $A_1 A_2$ ~~contatto~~ mentre ... ($r-2\mu$ ...) punti in A_1
quindi ... e allora le ... per $A_1 A_2$ sono

$$(r-\mu)^2 - (r-\mu-1)^2 - (r-2\mu) = 2(r-\mu) - 1 - r + 2\mu$$
$$= r-1.$$

Ma Segre ha tenuto alle rapp^{ni} piane anche
ordine (delle curve ...) minimo: così escluso
... e $\mu = \frac{r-1}{2}$ ... in cui le ... sono $C^{r-\mu-}$
$P^{r-\mu-2}$ e $r-2\mu-2$ ... fisse ... ivi ~~e nel cercando~~

~~...~~ $r-\mu$ (rapp. minima) ...
... non ne esistono d'ordine più basso. ... per
... e $\mu = \frac{r-1}{2}$ quelle rapp. (di cui $r-\mu = \frac{r+1}{2}$
$A_1^{\frac{r-1}{2}}$ e A_2 semplice) risulta già minima.

Esempi/Prescindendo da $r = 3$ ed esclusi sempre i coni
si ha per $r = 4$ soltanto $(\mu \leq \frac{r-1}{2})$ $\mu = 1$; quindi una F3 raz norm
di S_4 ha sempre una retta direttrice. Invece per $r = 5$
sono possibili F4 raz norm con retta direttrice, oppure
con ∞^1 ~~rette~~ coniche direttrici. Le rappr. piane sono
(minime) date per la F3 dal sist. ∞^1 di $C^{r-\mu-1}$; C^2 con P base
$P^{r-\mu-2}$) semplice (e $r-2-2 = 0$ ... fissi).

Segre 349

+ [illegible] le [illegible] ~~che~~ perdute

mutano sfere [illegible]

331 339 del riavvicinamento di proprietà
A proposito ~~[illegible]~~ concernenti enti diversi

to piuttosto il lavoro "Sulle geom metriche dei compless
neari e delle sfere e sulle loro mutue analogie" Torino
(Klein, Lie)
ti XIX 1884, fondato sulla seguente idea. E' ben noto, ed
a già così prima di Segre che vi è una stretta analogia t
proprietà proiettive del complesso lineare di rette e
di punti
uelle dello spazio (ordinario) invarianti per inversioni
similitudini e loro prodotti
geometria delle inversioni, chiamata spesso anche geom
conforme, inquanto per un teor di Liouville sono appunto (anche piane)
[illegible] appunto quelle che portano sfere in sfere
quelle in S_3 le trsfni conformi, a differenza di S_2). La sp
e rapidamente
si spiega bene introducendo in S_3 le coordinate penta-
feriche (Darboux) $\rho x_i = a_i(x^2+y^2+z^2) + b_i x + c_i y + d_i z + e_i$
x y z cart. ort.) con $|a_i\ b_i\ c_i\ d_i\ e_i| \neq 0$. Ogni punto P(xyz)
onduce così a $x_1 : \dots : x_5$; e biceversa purchè sia soddisfa
un'eq. di condizione che si ottiene eliminando le 4 xyz,
ra le 5 eq. prec ti. Essa si trova facilmente risolvendo
prec. ti rispetto x y z e poi sostituendo nel valore
he si trova per $x^2+y^2+z^2$ e risulta
uadratica nelle x_i. P.es. supponiamo (come si può sempre
qui e poi
enere con una trsfne lin om sulle x_i) che sia

$$= x^2+y^2+z^2 \quad \rho x_2 = x \quad \rho x_3 = y \quad \rho x_4 = z \quad \rho x_5 = 1$$

$$x = \frac{x_2}{x_5} \quad y = \frac{x_3}{x_5} \quad z = \frac{x_4}{x_5} \quad \text{e poi} \quad \frac{x_1}{x_5} = \frac{x_2^2+x_3^2+x_4^2}{x_5^2} \quad \text{cioè}$$

$$\boxed{-x_1 x_5 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0}$$

Segre

La geom conforme di S_3 si chiama spesso anche geometria delle sfere, appunto in quanto le sue prop.tà sono quel[le] inv.ti per le trsfni puntuali che mutano sfere in sfere. Potremmo anche dire che in essa sostanzialmente si pre[nde] come elemento generatore la sfera dello spazio (per noi iperpiano $\Sigma c_i x_i = 0$ dello S_4, v. sopra) e, se la sfera ha raggio nullo, ciò significa $\frac{c_5}{c_1} - \frac{c_2^2 + c_3^2 + c_4^2}{4c_1^2} = 0$ cioè (+) $4c_1c_5 - (c_2^2 + c_3^2 + c_4^2)$

~~[illegible]~~

l'iperpiano diventa tangente alla W e il suo punto di tatto è appunto l'immagine del centro $\left[-\frac{b}{2a}, -\frac{c}{2a}, -\frac{e}{2a}\right]$ della sfera di raggio nullo $\left[\frac{1}{4a^2}(b^2+c^2+d^2), -\frac{b}{2a}, -\frac{c}{2a}, -\frac{d}{2a}\right]$ secondo la precedente r pp.ne. Questa geom. delle sfere si indica spesso con "inferiore" per distinguerla da un' altra "superiore" che qui non entra in gioco

~~I che ha eq. [illegible]~~

I che ha eq. [illegible] $4\xi_1\xi_5 - (\xi_2^2 - -) = 0$ [illegible] S_4 [illegible] y è $y_5 x_1 + y_1 x_5 - 2\Sigma y_2 x_2 \ldots = 0$ [illegible] $y_1 = \xi_5$ $y_5 = \xi_1$ $y_2 = -\frac{\xi_2}{2}$ etc. e dalle eq. [illegible] [illegible] quelle]

II. [[illegible] S_4 [illegible]

[illegible] di quanto precede $x_1 + \frac{1}{4a^2}(b^2+c^2+d^2)x_5 - 2\left(-\frac{b}{2a}\right)\ldots$ cioè $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + \frac{b^2+c^2+d^2}{4a}x_5 = 0$ ma il coeff.te di x_5 vale app[unto] in forza di (+)

equazione quadratica a discr.te come subito si vede non nullo;Quindi possiamo interpretare le x_1 come coordinate dei punti di una quadrica non spec.te W_3^2 di S_4,i cui punti sono le immagini dei punti di S_3.Proprio come un'analoga V_5^2 abbiamo trovato come img delle rette di un complesso lineare.E più precisamente là le p tà proiettive di questo vengono a riflettersi in proprietà della quadrica invarianti per le omografie che la lasciano fissa (pensare a essa come sezione della $M_4 2$).Che significato hanno queste stesse omografie di S_4 per lo S_3 Vuol dire corrispondenza fra gruppi di valori (x_1) tali da putare gruppi soddisfacenti a una data eq. lin om. $\sum_1 c_i x_i = 0$ in analoghi.In S_3 quella eq. $(c_1(x^2+y^2+z^2)+c_2 x \ldots)$ è quella di una sfera;quindi viene trasformazione puntuale in S_3 che muta sfera in sfera.Perciò è lo stesso studiare la geom proi del cpl lin. o la geometria conforme dello sp. di S_3.Ciò come dissi era ben noto.In Segre si trova invece un nuovo riavvicinamento, in quanto entrambe le geometrie vengono riavvicinate nelle loro proprietà metriche(cioè inv.ti rispetto al gruppo euclideo L'idea di Segre è sostanzialmente questa. Cosa vuol dire studiare le proprietà metriche dello spazio rigato(pensiamo dunque a TUTTe le rette,non solo a quelle di uncpl.

in.) Occorre rappresentare le rette nei punti di una M_4^2
oi considerare le ptà di questa che sono invarianti non
o per le imgni delle omografie di S_3, ma delle similitudi
ranno in S_5 omografie della M in sè che soddisfabo a qual
cond. in più. Ora le sim.ni di S_3 sono le omografie che
o in sè l'assoluto, e quindi anche il complesso quadrati
delle rette isotrope. Questo ha per img.ne l'int.ne di M_4^2
una quadrica ulteriore N_4^2, la quale è però specializzata
nsando le r tte di S_3 come cong.ti $\begin{Vmatrix} x & y & z & 1 \\ l & u & \ldots \end{Vmatrix}$ $l_{\ldots}$ si ha
$p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2 \ldots$. E' questa l'eq. della N): essa ha un piano
doppio p_{i4} ($p_{14}=p_{24}=p_{34}=0$), appartenente alla M_4^2. Quindi le proprietà me
triche dello spazio ordinario rigato si traducono in S_5
nelle proprietà della M_4^2 invarianti per omografie che
lasciano fissa la M_4^2 e inoltre anche la $\Phi_3^4 = MN$, sezion
della M con la N ora descritta. D'altro lato pensiamo
alle proprietà metriche (euclidee) nella geometria delle
sfere. Sappiamo già come nasca la W_3^2 di S_4
immagine dei punti dello spazio, e che le ptà conformi di
questo si traducono nelle omografie di S_4 che la
sciano fissa la W. Ma se vogliamo studiare in S_3 ptà
non solo conformi, ma invarianti per similitudini (sotto-
gruppo nel gruppo conforme), interverranno in S_4 omogra

Segre

e che oltre a mitare W in sè devono soddisfare a qualche
tra cond.ne .Quale?InS_3 le similitudini,fra le trni cform
no quelle che mutano piani in piani,cioè le particolari
ere(p 339 fine)$c_2 x + c_0 y + c_2 z + c_5 \ldots$ in id.id.Queste sfere nel
$c_1 x_1 \ldots + c_5 x_5 \ldots$
hanno per imgni S_2 per il punto fisso $(1\ 0\ 0\ 0\ 0)$
e sta [redacted] sulla W.Quindi le omografie che interessano
S_4 sono quelle che mutano in sè la W e questo suo punto
sso K o se vogliamo lo S_3 σ ivi tangente alla W. Per riavv
nare meglio al caso prec. te possiamo pensare a σ do
o come a una nuova quadrica dello S_4 ;e allora sia il
so di prima come l'attuale rientrano entrambi in questo:
S_r studio delle proprietà di una $\breve{V}_{r-1}$ non specializza
che sono invarianti per le omografie della $\breve{V}_{r-1}$ in sè
e ulteriormente trasformano in sè il fascio individuata
lla V e da un'altra quadrica $\breve{N}_{r-1}$ avente come doppio
o S_m (risp. dei due casi $m=?, m=0$) il quale è tangente al
V in (tutti i p.ti) ~~uno~~ S_{r-m-1} (risp. S_2, S_0).L'analogia qui accennata
[redacted] (e che ha luogo nelle cond. qui trattate fra casi
orrispondenti a valori diversi di r ; $r=4, r=?$)è stata ap
rofondita e sfruttata da Segre in modo da condurlo a un
Segre fa
[redacted]drurre dalle p.tà metriche della geom della rett
ella della geom delle sfere.Egli trova p es come p.ni co

ispond nti queste &&& (&&&&&&&&).Il prodotto della dist.
i una retta qualunque dall'asse di uncomplesso lineare
er la tgte dell'angolo che la retta polare fa con questo
costante e eguale al parametrp del complesso (ben noto
el caso particolare di una retta DEL cplesso lin.); e il
rodotto delle dist. dal centro di punti inversi rispetto
una sfera è &&&&&& costante ed eguale al quadrato del
aggio. Oppure: la ptà che presi due punti inversi ris
etto a una sfera,il rapporto delle dist& ze di un punto
iabile su questa da quei due è costante (è poi nel piano
a notissima p.tà del luogo di un punto le cui distanze
a due punti fissi danno rapporto costante) diventa: pres
ue rette polari in un cplesso lin. una retta variabile
el complesso dà con quelle due momenti in rapporto costa

Va p 333

Come 1° caso partic.^{te} element. e not. delle F^3 rigate e S_3 (un caso) che saranno ~~rigate~~ rispett.e denot. le ∞^2 (un completo) di C^n per un punto

Dove la C^r di un... d'ordine vengono a contenere generatrici

Si vede bene qui che il caso $p = 1$ è caso limite di quello $p \geq 2$ che è sup. il caso generale. E così per qui solve di r il caso generale è quello di p maggiore. + altri risultano casi limiti

Per dim. il caso più elementare e ben noto

per F^3 di rigate di S_3 l'esistenza di una retta dir.^{ce}. Altrimenti segue per quella di una retta ulteriore direttrice, cuspidi doppie proverrebbero da una retta delle F^3 proiettive ben da un piano proiettante (per P, punto qualunque di S_4) contenente ~~che~~ ∞^1 coniche di F uscenti da P

~~Per ... passanti in una conica ... coniche per P~~) (perchè per P passano curve di F^3 di cui una in ogni S_3 per P (la C^3 ha UN pt. doppio apparente) quindi costituiscono un cono d'1° ordine, piano) (darebbe per un piano segante F^3 una curva proiettata doppiamente da P cioè conica) dc p. 337

invece per $r = 5$ ho risp. ($\mu = 1$) le ∞^5 C3 con P^2 fisso e una tgte fissa(sono appunto 4 cond.),oppure ~~da~~ ($\mu = 2$) le ∞^5 C3 con A_1 doppio e A_2 semplice.

Le propr. delle rigate raz. non norm. seguono poi per proiezione;e anche la loro rappr. piana,perchè come si è accennato per le F4 con conica doppia,il passaggio da una sup raz a una sua proiezione equivale al passaggio dal sist. lin di curve rappresentativo delle sezioni iperpiane di quella a un sistema lin. contenutovi. E' così,per quanto rigurada in particolare la proiezione su S_3 che Segre ha ritrovato la rappresentazione piana che per le rigaterazionali di questo spazio era stata prec.te ottenuta da Armenante e Clebsch.

Segre è poianche passato dalle sup. rigate raz. normali alle V_3 raz norm che sono luoghi di ∞^1 piani((Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani Torino Atti 1885).Lo studio è stato oi facilmente esteso ulteriormenye alle analoghe varietà a un n° di dimensioni qualunque (Bellatalla, Torino Atti 1901)

In un altro senso Segre ha esteso la sua ricerca passando dalle rigaterazionali a quelle di genere uno(come luoghi di generatrici) o ellittiche(per le curve ellittiche,~~quelle~~ normali sono le ~~Cn~~ C_{r+1} ellittiche di ~~Sn-1~~ S_r;

altre ellitt.: non proi...

(C ...

p es. cubiche piane, quartiche sghembe ellittiche, ecc.: esse costituiscono in certo senso estensione delle cubiche piane; Clifford ha esteso a esse la p.tà della configurazione dei 9 flessi, provando l'esistenza di $(r+1)^2$ iperpiani ~~stazonari~~ dicansi punti [illegible] di iperosculazione (cioè con le $r+1$ intersezioni raccolte in un punto; in generale l'ipno osc. in S_r ha solo r tali) i quali sono tali che l'iperpiano per r di essi passa ancora per un punto dello stesso [non nec.te distinto da quelli] gruppo.) Per le rigate ellittiche (non coni) Segre (Ricerche sulle rigate ellittiche di ordine qualunque Torino Atti 1886) ha anzitutto provato che quelle d'ordine n sono normali in S_{n-1} [illegible] (p. [illegible]). Se si paragona il risultato con quello relativ a rigate razionali, si rileva una certa differenza. Là il fatto da noi enunciato della normalità della Fn in S_{n+1} e più precisamente la non esistenza di una tale sup (irrid) in spazio più ampio dipende essenzialmente da questo, che, detto S_r lo spazio di appartenenza, la sezione iperpiana generica sarà una curva Cn apprtenente (come si dimostra in generale) generalmente a questo spazio, cosicchè per i risultati noti sulle curve razionali $n \geq r-1$, cioè $r \leq n+1$.

Si potrebbe ragionare analog.te nel caso ellittico, e dire; se Fn è ellittica in S_r la sua sezione generica è

C^n evid.te ellittica di S_{r-1}, cosicchè (prec.) $r-1 \leq n-$ cioè $r \leq n$

Invece sopra si è enunciato (in sostanza) $r \leq n-1$; e la cosa si spiega così, che se ho una rigata (ellittica) F_n di S_n, proiettandola successivamente da suoi punti, trovo in S_3 una F^3. Ma se quella è rigata elllittica, tale deve essere anche questa, il che esige trattarsi di un cono cubico (unica F3 non razionale). E allora ~~Ma~~anche la F oggettiva è un cono: verifichiamolo p es per $n=4$ (dal quale si passa poi an.te a $n=r$ ecc.). Si avrà in S_4 una rigata che da ogni suo punto P si proietta in S3 secondo cono: dimostro che essa è cono dimostrando che le sue gen.ci sono a due a due incidenti (donde, notoriamente come in S3 segue che stanno in piano, qui escludo passano per punto). Se non è così, per P passa sempre una retta app.ta a g_1 g_2 arbitrarie (il raggio proiettante V e quindi lo S_3 di due gen.ci arbitrarie conterrebbe tutta la sup., che invece sta in S_4.

Anche per il caso ellittico (F^{r+1} di S_r) Segre fa la ricerca delle direttrici minime (anche qui come a p3?? si è detto per le curve razionali segando con iperpiani che contengano già parecchie generatrici). Sono possibili vari casi: per limtarci a quelli per così dire più generali, in quanto gli altri si possono riguardare come loro casi limiti), per r ~~dis~~pari, vi sono ∞^1 direttrici minime C^r (m. $k = \frac{r}{2}+1$ ...

(Cfr. p. 358

di cui 2 per ogni pt. generico delle F. Per
dispari due C^{μ} minime, con $\mu = \frac{r+1}{2}$. (Il
ex$^{\mu}$ è S_3 e una F^4 ellittica ha come due di minime C^2
in più ogni di queste C^2 una ~~p.d. ...~~
~~...~~ un uno p.d. una ogni è una retta
... (un C^2) e per la F^4).

Questi studi sono poi stati quasi subito continuati da Segre estendendoli alle rigatedi genere superiore all'unità. In questo modo Segre è venuto a passare dalle prime ricerche di carattere essenzialmente proiettivo un nuovo campo di ricerche, dove - pure non abbandonandosi completamente il punto di vista proiettivo, prendono una parte sempre più prevalente le trasformazioni birazionali e le proprietà invarianti rispetto a queste. Al momento non vogliamo occuparci di questo indirizzp.

Dirò invece di alcunialtri lavori di S. che costituiscono un'altra continuazione dei suoi primissimi lavori. Doppoavere approfondito lo studio delle quadriche in uno S_r, era naturale che Segre portasse la sua attenzione sulle ipersuperficie che leseguono immediatamente vale a dire sulle V^3_{r-1} di S_4. Ad esse sono dedicati essenzialmente i due lavori "Sulle varietà cubiche il su V_3^2 prende sist. paral. ass. ~~per~~ ogni pt. ~~ne~~ ne passino m, su S_3 ne ho risp. $2m$, $3m$

o anche i pt cui ...

V_3^2 e alle $1°$ c... ...

d P costituiscono C^6: ogni ...

pt Q tale che PQ è bit...

e quindi ~~ut~~ $d V_3^2$

ello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario Torino Mem 1887, Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni Torino Atti 1887 Collegata con questa è poi anche la Nota "Alcune considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni„ Rend. Palermo 1888, II

~~Incominciamo dalla~~ prima. Pensando alle V_3^3 di S_4 Segre analogamente a quanto abbiamo visto altre volte- aveva in vista di ottenere dei risultati che interessassero non solo questa ipersup. ma anche indirettamente lo spazio ordinario. Ciò come indica il titolo avviene in due sensi diversi. Anzitutto quelle V_3^3 sono rigate (che per ogni punto P passi qualche retta si vede così: lo S_3 tangente in P sega una F^3, con punto doppio in P, e allora notoriamente su questa si hanno rette per P [$x_0 \varphi_2(x_1 x_2 x_3) + \varphi_3(x_1 x_2 x_3) =$ ... con $\varphi_2 = 0$ $\varphi_3 = 0$ ... in A_0 ... in 6 rette ... delle F^3 uscenti da P]) Quindi la V è ricoperta da un sistema ∞^2 di rette di cui diciamo in generale passano 6 per ogni suo punto: proiettando su una S_3 ... si hanno così delle congruenze di rette (di ... ordine, ~~o in~~ ... nel caso minore, se la congruenza si spezza), al cui studio si trova così applicazione ai risultati ottenuti. E poi anche alle superficie dello spazio ordinario, prendendo in questo le superficie che nascono come contorno apparente di quelle V_3^3. Da questo punto di vista, il lavoro si può

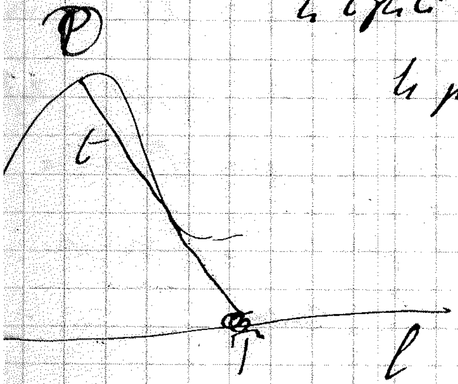
onsiderare come una continuazione del metodo di Geiser
r le C4 piane come contorni apparenti di F3. Le cose stann
sì; in S_r presa V^3_{r-1} e punto $O \equiv A_0$, circoscriviamo il con
O alla V e poi seghiamo con ip.no p es con $x_0=0$. Nasce co
su questo una V^n_{r-2}. L'ordine n di questa dipende dall'ass
re P sopra o fuori della V^3_{r-1}. Se è fuori, l'eq. di que
a sarà $x_0^3+\varphi_1 x_0^2+\varphi_2 x_0+\varphi_3=0$. Si può fare in modo
che $\varphi_1=0$, assumendo per ip.no $x_0=0$ quello polare di O: ...
è $6x_0+2\varphi_1=0$ e se ora cambiamo con $x_0=0$ sarà $\varphi_1(x_0 ...)$
allora ho $x_0^3+\varphi_2 x_0+\varphi_3=0$. Volendo condurre per O tante
rette PQ ... degli $x_1, x_2, \dots, x_r$ tali che la prec.te, come
... in x_0 abbia radici doppie discr.te nullo cioè

$$27\varphi_3^2+4\varphi_2^3=0. \qquad (o)$$

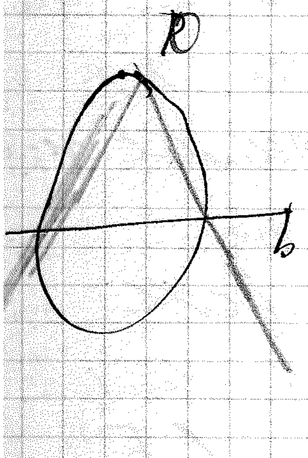
questa è la cond. per ogni Q di S_r che congiunto a O dà una tg.te
cioè è l'eq. del cono circoscritto da P, e così della sua
sezione con $x_0=0$ cioè del contorno apparente. Attualmente $n=6$
Se invece O è (semplice) nella V^3_{r-1}, la sua eq.ne sarà
$\varphi_1 x_0^2+2\varphi_2 x_0+\varphi_3=0$. Il contorno app.te è (coll
stesso ragionamento) $\varphi_2^2-\varphi_1\varphi_3=0$. Quindi attualmente
$n=4$. Nel 1° caso $(r=3)$ si collegano così le F^3
di S_3 e le C^4 piane, considerando una di queste come
cont. app. di F^3 da un suo punto. È quello che aveva
fatto Geiser: il metodo ha importanza perchè Ogni

T cioè la traccia del piano tgte in P

Invece ~~[illegible]~~ scelto da P di F², prendo piano ~~[illegible]~~, ch. essendo per P: una sup. C² per P, da cui posso cavare le tgti. le loro tracce sul piano π ove prendo ora le pt. allineati delle C², nella retta l traccia di λ. Quando scelgo il piano λ nel piano [illegible] tang. [illegible]



la C² acquista un pt doppio, e quindi le tgti si riuniscono in 2 coppie: la retta l ha 2 int. [illegible] e [illegible] altre due cioè è una [illegible]



quartica piana generale si può ottenere così. Basta provare che la sua eq.ne si può scrivere sotto la forma (1) ora ciò si vede osservando che ivi $\varphi_1=0$ è bitangente e

1) prendendo $x_1=0$ in bitangente della C4. Allora l'eq ne di questa raccogliendo a fattore dove si può sarà $x_1\varphi_3(x_1x_2x_3)+\omega(x_2x_3)=0$, dove ω deve essere quadrato perfetto. Abbiamo dunque la forma voluta

2) oppure possiamo cercare di scrivere l'eq. di C4 generale sotto la forma $pqrs+\varphi^2=0$ ancora più particolare della (1). E vi si riesce perchè questa dipende da 14 (2.4 + 5 + 1 una cost. che inglobo in φ) E il computo delle costanti dà risultato esatto perchè (principio di Pluck Clebsch p.319) qui per una quartica che abbia già quell'equazione le rette $p=0$, ecc. sono già bitangenti (da scegliersi in un n° finito di modi fra le 28) e $\varphi=0$ è una conica ben individuata da queste, dovendo contenere i loro otto punti di contatto. Naturalmente la seconda dim.ne prova di più perchè prova per le quartiche piane generali l'esistenza di quaterne di bitangenti con gli otto punti di contatto (non tutte le quaterne) su una ~~conica~~.

Geiser ha appunto studiato così le C4. Una bitangente è come già detto la $\varphi_1=0$; le altre 27 risultano le proiezioni da P delle 27 rette. Così legame tra la cor

In generale, in luogo di due F^2 con piano tg^{te} lungo C^2 si possono [illegible] F^2 con piano "tangente doppio", sappiamo già che le [illegible] delle [illegible] dette di pt. doppi (per esempio ∞^1 tg^{ti} di cono generici [illegible] [illegible] ∞^1 tg^{t} alle [illegible].

-igurazione di quelle e di queste. Invece nel caso
-udiato da Segre, non si ottiene più in S_3 una F4 qualunque
solo una classe di queste, del resto assai vasta. Infat
-i S_3, per la (1) il piano $\varphi_1=0$ sega la F' una conica contata due v
-e; vi è dunque un piano tangente lungo conica (come caso
-articolare potrebbe trattarsi addirittura di F4 a conica
-oppia). Viceversa ogni F4 con piano tgte lungo conica (i n
-articolare a conica doppia) può ottenersi come contorno a
-arente della V_3^3: basta ripetere il ragionamento fatto
-sotto 1). Le F4 a conica doppia trovano così un secondo
-egame -oltre a quello già noto- con figure iperspaziali.
Ciò se il centro di proiezione sta sulla V^3. Se no, la (
-rova che la V^0_{r-2} di S_{r-1} contorno apparente ha come doppi i
-unti $\varphi_3=0\ \varphi_2=0$, ha cioè una certa V^0_{r-3} di punti doppi. Se si
-arte da F3 si ha dunque una C6 piana con 6 pt. doppi, situa
-i su una conica (sono punti $\partial\varphi_2=0$), e anzi cuspidi (le tg
-n uno di essi coincidono con quelle di $\varphi_3^2=0$, e quindi vie
-etta contata due volte). Così passando da V_3^3 a F6, si ha
-na sup. con sestica doppia (int.ne della quadrica $\varphi_2=0$
-on la cubica $\varphi_3=0$); in ogni punto della linea doppia i piani
-gti coincidono (ciò avvenendo per $\varphi_3^2=0$): è cioè linea dopp
-uspidale. Ho dunque ~~F4~~ F6 con sestica (nel senso precisat
-uspidale. E Segre verifica inoltre che viceversa ogni ta

] soltanto due coni le V_i ora una sit.^{te} ($\varphi_i=0$) non provenienti da rette di F^{4}; congiungi ne sim danno id. id. e precisamente ogni retta del piano $\varphi_1=0$ è bitgte avendo 2 coppie di int.^{ni} con F^{4} coincidenti (sulle int.^{ni} con le conica di contatto) : queste ∞^2 bitgti non provengono per proiez. da rette di V_3 (e le lasciamo a parte parlando di bit.^{ti})

F6 si può ottenere come contorno apparente. Risulta così in ogni caso ben delimitata la classe delle superficie d

S3 che vengono studiate.

Anche qui, per la stessa ragione esposta a p 3 le rette della V^3_3 si proiettano in bitangenti della sup contorno apparente (di 4° o 6° ordine), e viceversa: cosicchè la figura formata dalle bitangenti della F4 o risp. F6 è quella che costituisce la proiezione delle rette della $V_3{}^3$. Si tratta di una congruenza ~~della ragione esp~~ (la V_3^3 ha ∞^2 rette)

Ricordo che per una congruenza anche non algebrica su ogni retta generica (nel campo complesso) vi sono due fuochi, cioè punti che descrivono superficie toccata dalla retta stessa (salvo casi di degenerazione che indico), cosicchè nascono due sup. focali, alle quali le rette della congruenza si mantengono tgti, e la congruenza viene a apparire come totalità ∞^2 delle rette che toccano quelle due sup. focali. Se invero essa è descritta dalla retta yz con $y = y(u,v)$ $z = z(u,v)$ cerco un punto $x = y + \lambda z$ che sia fuoco imponendo $x = \{y + \lambda z,\ y_u + \lambda_u z + \lambda z_u,\ y_v + \lambda_v z + \lambda z_v,$

1, 2 (1) complanari che si riduce a $|y,\ z,\ y_u + \lambda z_u,\ y_v + \lambda z_v| = 0$ eq.ne di 2° grado in λ che dà così 2 radici cioè 2 fuochi. Dove però è da osservare (prescindendo qui dalla eventuale esistenza dei fuochi in ogni raggio - sulla quale non mi arresto) che può avvenire un fatto ~~...~~ diciamo ...

J i raggi d'una stessa cgr.ze

ome avviene "in generale" tutto va bene. Ma può avvenire
e esso descriva una linea (se $x \; x_u \; x_v$ cioè i 3 primi (
sono legati
nearmente, e allora $x \; x_u \; x_v$ lo sono eff.te i 5 (1)
uindi può darsi che una sup. focale sia sostituita da
linea focale (incontrata senza nec.tà di contatto) dalle
tte della congruenza. E così per entrambe. E' ciò che
vviene p es per congruenza lineare, o anche per le generale congru
ze del 1° ordine elencate a p 259 dove appunto si avevano
nee fovali. (Ho detto generale perchè per quella speciale
è nel caso di una sola linea focale, cioè fuochi
incidenti, che abbiamo lasciati a parte. E vosì nel caso
più elementare di una stella.) Tornando al caso gener
di sup. focali, le due sup. focali possono benissi
ssere falde di una stessa sup. algebrica, cioè può darsi
si tratti della congruenza delle bitangenti a una sup. al
[illegible] (p. 357) come falde [illegible]
rica. E' appunto il caso sopra considerato. E' così che
leggiamo p es le seguenti p.tà: per una F4 con piano tg
ngo una conica la congruenza delle bitangenti ha ordine
, classe 27. Per la F6 con sestica (c s) cuspidale tale con
uenza ha risp. ordine e classe 18,27. Nei due casi le 12
sp. 18 rette uscenti da un punto generico si ripartiscono
due o risp. tre sestuple appartenenti a coni quadrici.
i ordini sono già spiegati a p. 357; la classe (nei due ca

muște: puii-n ale gură, clasa VI – Per

Ca rep. în Septembrie ... scena

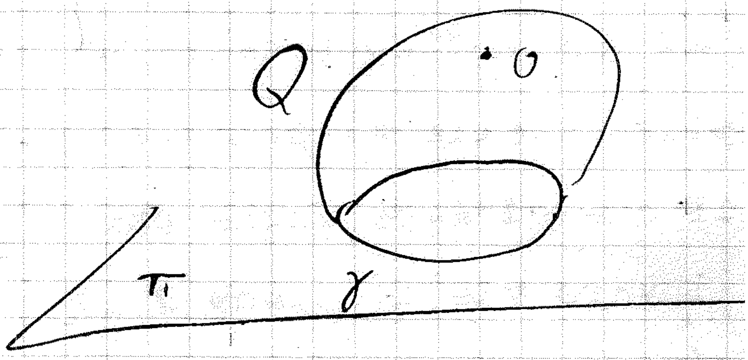
de p. 35 +

i) dipende da questo: Cercare in S_3 quante rette in piano ... ,equivale a cercare sulla V_3^3 quante rette in S_3 nello S_3 ~~per~~ ... .Ma queste sono rette di F3 generale, cioè appunto 27 : se ... F° sup. sp.^{me} avere pt. D_{pi} (poss. punti la V_3^3 altre linee doppie) il V' dimi...

Ma piuttosto che sulle V_3^3 generali, Segre si è fermato ... vari casi particolari, legati all'ipotesi di punti dop... presentati dalla varietà. Tra queste si può fare anche ... entrare la prima ipotesi ~~fatta~~ studiata da Segre, che cioè si trat... di una V_3^3 contenente un piano, in quanto la sua esisten... plica quella di punti doppi (gen.te 4) esistenti in quest... il che ci dice anche ~~che~~ V_3^3 generale non possiede piani ... Invero vi è il piano $x_1=x_2=0$, l'equazione si scrive

$x_1\varphi(x_1 \ldots x_5)+x_2\psi(x_1 \ldots x_5)$ cosicchè i punti del piano $x_1=x_2=0$ ... ve anche $\varphi=\psi=0$, sono appunto doppi. Questo caso partico... si capisce che doveva prendere particolare rilievo per ... e in quanto egli ha osservato che una tale V_3^3 di S_4 è ... proiezione della Φ_3^4 di S_5 base di un fascio di quadriche ... tto da un punto della stessa Φ (e viceversa). Invero s... S_5 prendo due quadriche passanti per A_0, con le equazi...

$x_0 l(x_1 \ldots x_5)+\varphi(x_1 \ldots x_5)=0$ $x_0 m + \psi = 0$ la $l\psi - m\varphi = 0$ è in S5 una ~~quadrica~~ V_4^3 per la Φ anzi cono con vertice ~~d~~ in A_0, e quindi quella stessa ... l'eq. della proi. di Φ da A_0 sullo S_4 $x_0=0$ E' un'eq... me la (1), e ne risulta sulla sup. proiezione il piano ... $m=0$ E viceversa. Quindi lo studio delle V_3^3 con piano viene ...

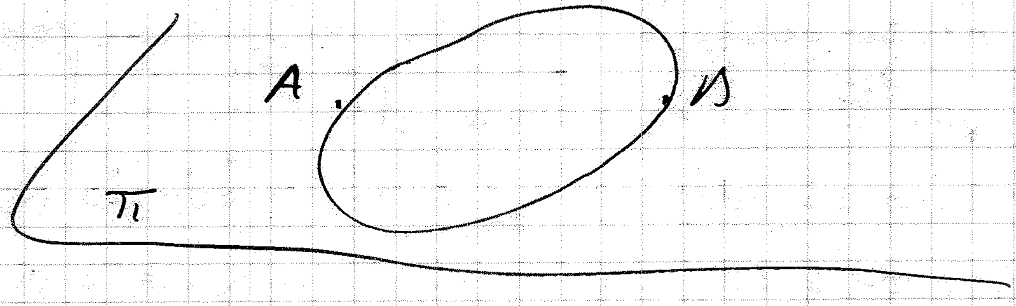

Q
O
π1
γ

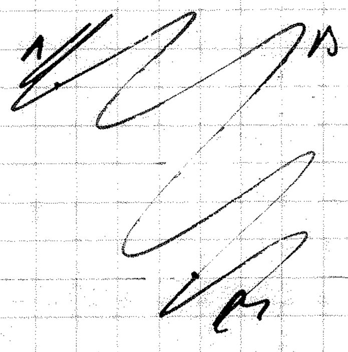
In questo caso la sup. F4 contorno apparente da O di V_3^3
[v]iene a acquistare,oltre al 1°(p362-3) un 2° piano tgte
[d]oppio(lungo conica).Se invero π è il piano della V_3,lo
[S]3 proiettante O π sega V_3^3 ulteriormente in V_2^2 (P),che ha a
[c]omune con π una conica γ :quindi quello S_3 dando una se[z]-
ione con $V_3 3$ per cui i punti di γ sono doppi è tangente in
[o]gni punto di γ :le r tte che vanno da O ai punti di γ
[s]ono tangenti uscenti da O che conducono sul contorno appa[r]-
ente F4 a una conica γ'(proi. della γ ,nel piano π' proiezio[ne]
[d]i π) Nè π' ha altri punti a comune con F4 (e quindi le rette di γ dopp[ie]) perchè
[qu]ello S3 $O\pi$ non si possono condurre da O(che sta sulla
) altre rette a toccare la sup. $F^3 = \pi + Q$. Così si partico-
[la]rizza attualmente la F4;e Segre trova anche facilmente
[c]he la congruenza delle sue bitangenti si scinde in due
[d]i ord e classe risp. 4 e 10;8 e 16.Si osservi che mentre
[l]a somma degli ordini è come deve 12 quella delle classi
[è] soltanto 26 e non 27 come a p.362:la ragione è che fra
[l]e rette della V^3_3 vi sono le ∞^2 del piano π ,e che quind[i]
[d]al sistema ∞^2 delle rette loro proiezeioni si staccano
[l]e ∞^2 del piano π' ,delle quali effettivamente una sta poi
[i]n ogni piano arbitrario,completando così l'ordine della
[c]ongruenza complessiva

Segre si è poi sopratutto fermato sul caso

[Oltre che nel ricollegarsi a Vimen
che già aveva condotto varietà
suscettibili di generazioni proiettive

i V^3_3 con un n° finito di punti doppi, da 6 fino a 10. limiti dipendono da questo. 10 è il massimo n° a priori possibile (in S4 classe $n' = n(n-1)^3$, abbassata di 2 da ogni punto doppio. Ora 10 pt. doppi portano una $\underbrace{\text{classe}}_{}^{3\cdot 8-20=}$ 4, a prior on incompatibile con l'ordine 3, mentre 11 dànno classe 2, cioè quadrica). Cfr. quan o si dsse sulla sup di Kummer). Nat. ancora ciò non significa l'effettiva esistenza di V_3^3 con 10 pt doppi, che seguirà poi). Quanto al caso minimo tra quelli studiati da Segre, trova la sua ragione in questo, che sono appunto le V^3_3 con 6 punti doppi (almeno) quelle ch si possono generare con tre reti proiettive di S_3. Ora tale generazione proiettiva conduce come vedremo a semplificazione di proprietà. he V^3_3 così generata abbia ta ti punt doppi, si vede scrivendo.... e poi la sua equazione $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$ on le a_{ij} fomr lineari. Per tale V_3^3 è certo doppio ogni punto nel quale, oltre a annullarsi il det. acquisti caratt. no (come ben noto) spiegare Ora per cercare in quanti punti ciò av iene: annullando la matrice $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix}$ .. ho $F^3 = V_2^3$ (pe are a tagliare con un iperpiano ~~x_5~~ ~~viene notoriamen a cubica sghemba~~, rappresentata da quelle eq.ni). Annullando altra matrice $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$ viene altra F^3. I punti comuni annullano anche gli altri minori di 2° ordine, purché se ne escludano alcuni. Così segue da $A_{33} = A_{13} = 0$ se nel pu (domanda) anche $A_{..} = 0$

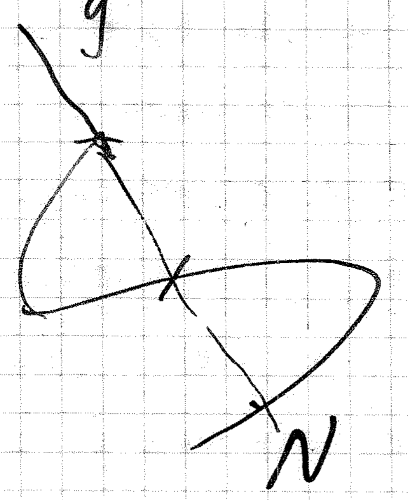

A
B
π


B

in questione non è $a_{11}=a_{12}=0$. e così via. Quindi fra i pt. comuni a quella $F_2'^3$ bisogna escludere quelli due $a_{11}=a_{12}=a_{13}$ che effettivamente stanno su quella V_2^3 e vi formano una retta comune. Quindi le due V_2^3 non hanno comune un n° finito di pt.: hanno una retta e alcuni altri pt. isolati? Qual è "l'equivalente" di quella retta? Cioè, la F3 e la F'3 in quanti punt segano fuori di quella retta? Osservo che entrambe le sup no F3 rigate (p.es. $a_{11}=\lambda a_{21}$, $a_{12}=\lambda a_{22}$ etc) raz. (le gen. ci sono in r. coi valori di λ), e trattandosi di F3 di S4 normali retta comune è gen.ce p es della prima $(\lambda=0)$:quindi si tta di vedere per due F3 rig raz norm con gen.ce comune nti punti hanno ancora comuni Considero F3 come int. di V_3 eprecis.te dei due coni quadrici α e β che la pro tano da due suoi pt. generici A e B. I quali però danno .ne complessiva del 4° ordine, e effett.te oltre a F3 que coni si segano ancora in un piano: perchè per A, B passa conica di F3 (rappr. dolla F [poi si rappresenta F'] su un piano con le conica per è la retta AB), proiettata da entrambi secondo il suo pia π, il quale fa dunque parte dei due coni. In definitiva vo prendere le intersezioni di F e F' fuori di g, cioè t. comuni a ~~xxxxxxxx~~ α e β fuori di π e a F' fuori di g ci

$\boxed{\text{pt. comuni a } \alpha\ \beta\ F' \text{ fuori di } \pi \text{ e } g}$

gando intanto α con F' l'int.ne complessiva è C6 di cui fa parte g: prescindendone resta C^5. Si tratterà ancora



Le imponiamo al det.te di avere <u>una certa caratt.ca</u>
Qual è il grado del sist.a di equazioni algebriche che così si viene a scrivere? Si capisce come di molte cose, p. es. applicaz.e nelle quali prec.te dove le a_{ij} erano <u>lineari</u> nelle
(le coord.te)
Ma incognite: allora quel grado coincide col n.o delle soluzioni relativo a quelle incognite (Darà sarà 6). Siccome, diciamo così:

cercare i punti comuni a C5 e a β, fuori di π, g, co
chè, per poi scartarli, ci conviene sapere quanti sono i
comuni a C5 da un lato e poi a g, π (pt questi ~~ulti~~
certo su β). Per avere i pt. $C^5 \cdot g$, guardo la rappr.ne
di F' in l'int. completa F' α l
na, dove ~~F'~~ α (segata da quadrica, spiegare) si deve rappr
tare con C4 avente in M pt. doppio, e perciò la C5 in C3
nte M semplice: essa sega ancora g in due punti. Quindi i
$C^5 g$ sono due. I pt. $C^5 \cdot \pi$ ~~sono~~ fra i pt. $(\alpha F')_\pi$ e quindi
(su α) F'_π che sono tre. Ma di $\alpha F'$ bisogna prendere solo C^5
è la parte distinta da g: cioè dei 3 levare $g\pi$ (il
.c.è. g incontra π sono gen.^{te} ~~semplice~~ tutti i
iamo di una conica gen.^{te} di F i cfr. rappr. piana) i resta
In definitiva ho $10-2-2=\underline{\underline{6}}$. È questo il
cercato.

Il ~~calcolo~~ computo fatto per arrivare a questo risultato
per quanto elementare è un pò penoso. Calcoli di qu
to g ner si possono oggi evitare ricorrendo a una formol
~~tale~~ che più tardi lo stesso Segre ha detto da risultati
i Schubert (Gli ordini delle varietà che annullano i det.
i dei diversi gradi estratti da una data matrice, Lincei
end. 1900). Consideriamo gli el.ti di un det. di ordine r
~~come~~ (quantità ideterminate) come coord in uno spazio
$[d] = [(r+1)^2-1] = [r^2+2r]$. Ora $|a_{ij}|$
~~eq.ne~~
l'eq. di una V_{d-1} di ordine ovv.^{te} r+1. Ma se
i pongo nulli tutti i det.^{ti} di un certo ordine $\underline{r+2-h}$
ora ~~se~~ se h=1, ne [illegible] che qualunque varietà di quelle

~~Spiegare come si applica (prendendo le a_{ij} lineari) al problema preced.te~~

Si ha ancora il risultato più generale. Si ricorda che Det.te si annulla matrici con $r+1$ orizz. e $s+1$ verticali (anche con $s \neq r$) con un certo rango diciamo $q+1$, si rapp.te varietà in $[rs+r+s]$, la dim. $rs+r+s-(r-q)(s-q)$ e d'ordine posto $s-q=$ (altri h o b ...)

$$\frac{(r+s-2q)_h\,(\ldots)_h \cdots (r+s-q)_h}{(h)_h\,(h+1)_h \cdots (s)_h}$$

(che include la preced.te. È questo il grado del nost.o comund.te (a cui ...

P.es. $r=2$ $s=3$ $q=1$ $h=s-q=2$ v. p. 389

$$\frac{1,\ 2\ 3_1}{1_1}$$

mensioni ordine h. La dimensione si ha facilmente

$$d = r^2 + 2r - h^2$$ (non occorre annullare tutti questi D.ti, ma solo alcuni, seguendone poi l'annullamento degli altri: ciò noto). Più difficile è il calcolo dell'ordine che risulta.

$$N = \frac{(2h)_h \, (2h+1)_h \cdots (r+h)_h}{(h)_h \, (h+1)_h \cdots (r)_h}$$

es. $h=1$ viene $\frac{2 \cdot 3 \cdots (r+1)}{1 \cdot 2 \cdots r} = r+1$ c.s. ovvio.

$$h=2 \quad N = \frac{4_2 \, 5_2 \cdots (r+2)_2}{(2_2) \, 3_2 \cdots r_2} = \frac{(r+1)_2 \, (r+2)_2}{2_2 \, 3_2} = \frac{r(r+1)^2(r+2)}{2^2 \, 3}$$

cui per $r=2$ (c.s. p. 275) $N = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 4}{12} = 6$ c.s.)

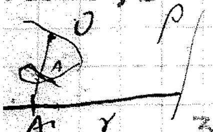
Naturalmente il risultato cambia se le a_{ij} non sono indip.te (p.es. anche nel caso quadratico), es. se il det.te è simmetrico vengono dimensioni (ovviamente) e anche ordine diversi. Cfr. le formule in Segre l.c.

Tornando a noi, i sei punti doppi sono poi punti in ciascuno dei quali si incontrano tre piani omologhi delle tre reti. Se invero $|a_{ij}|$ è nullo in P con caratt. 1 le eq.ni in $\lambda \mu \nu$ $a_{11}\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu = 0$ ecc. hanno due soluzioni distinte (e loro cob. lineari) il che vuol dire che vi sono nella 1.a rete due S3 distinti che coi loro omologhi si incontrano in P, cioè ciò avviene del piano loro int.ne. – (e viceversa) ~~Naturalmente~~ Segre dim.

Osserva che (nel caso di un n.o finito di essi) ciascun

:ra anche che, viceversa ogni V_3^3 con 6 punti doppi indip.
i può generare così.

Vediamo che cosa avviene attualmente dei contorni appar
enti e delle loro bitangenti. In generale, se la V_3^3 ha
n punto doppio A, il contorno app.te da O ha nella proiez
: A' anche un punto doppio. Bisogna provare che, in proiez
e retta r per A' ha (nel caso p es di F4 a cui mi limito
ue int.ni raccolte in A' (cioè solo più due fuori). Proiet
ando, si tratta di vedere che nel piano ρ_1 Or' passante



per A, delle 4 tgti alla cubica ivi segat
alla V_3^3 condotte da O due cadono nella retta OA; ed è
ffettivamente così. Quindi la F4 ha attualmente 6 pt
oppi. Inoltre il fatto che vi è un piano tgte lungo C2,
ioè l'eq. $\varphi_1\varphi_2-\varphi_0\cdots$ di p 359 mostra l'esistenza (sempre)
i 6 pt doppi in punti di questa ($\varphi_1=\varphi_2=\varphi_0=0$). Comunque,
iciamo una F4 con piano tgte lungo conica e sei ulterior
unti doppi. Ciò per la superficie. Quanto alle bitangenti,
a loro congruenza si spezza. Invero la generazione consid
rata mostra l'esistenza di un sistema ∞^2 di rette sulla
V_3^3 (le intersezioni degli S3 omologhi delle tre reti); di q
ueste evid.te ne passa una per ogni punto della V_3^3. Ab-
biamo così intanto questo primo sistema S su di essa. Ma
ve ne è un secondo analogo S' procedendo sul det.te per

colonne invece che per linee. Vuol dire che le ~~rette~~ ulteriori formeranno un sistema T, di cui passano 4 rette per ogni punto della V_3^3 (sempre limotandoci a F4). Perciò, in proiezione la cgrza delle bitangenti, si spezza in tre di ordini rispettivi 2,2 e 3. E le classi? L'ultima verrà per differenza da 27. Quanto es alla prima, si tratta di sapere quante rette del sistema S sono contenute in uno S3 generico. In esso le tre reti di S_3 segano tre reti proiettive di piani. Abbiamo così queste in S_3: tre piani omologhi vi si segano gen.te in un punto, ma potranno eccezionalmente segarsi in una retta e si tratta appunto di sapere se e quante volte ciò avviene.

Se $\lambda a_{11} \dots = 0$ sono le tre reti, dire che ciò avvenga vuol dire che si han $\lambda \mu \nu$ tali che la matrice dei coeff. delle x_1, x_2, x_3, x_4 (queste dunque alternative!) ha caratt. 2. È una | ... | a coeff.ti lineari in $\lambda \mu \nu$. Il risult.o dunque p. 378 fine ($r=2$, $s=0$, $q=1$, $h=2$) ha grado $\frac{3_2 4_2}{2_2 3_2} = 6$.

più ~~elementare~~ – dà 6. Ciò avviene dunque sei volte. Del resto
come S3
per chi conosce la teoria delle F3, quando si genera una F3 (generalizzata) con tre reti proiettive di piani, è noto ilrisultato ora detto, e è anche noto che si ottendono così le sei rette di una sestupla (spiegare): anzi quando si procede come ora detto per S e S', si vedrebbe che si hanno le rette di un

In generale per una congruenza algebrica di un certo ordine k per P generico passano k rette. ~~Ma~~ Si presen[tano] però dei punti eccezionali, detti singolari, per ciascuno dei quali passano non un n° finito, ~~ma~~ infinite rette, [l]e quali ricopriranno un cono algebrico di ordine h, il p[unto] singolare si dice allora di grado h. (Enz Z 1174); nat.te per [es]so, diciamo per un P_h possono ancora passare rette isolat[e]. [O]ra per le c.rze di secondo ordine $(2, m)$ senza linee focali, si [po]ssono presentare (solo) le seguenti due possibilità. Detta [m] la classe [cfr. 1188]

1) vi sono pti ~~dei~~ P_h con $h > 2$ ~~di due tipi~~ con 2 [illegible] per h e cioè un P_{m-1} poi $\binom{m-4}{2}$ P_3. La congruenza si dice allora di 1.a specie

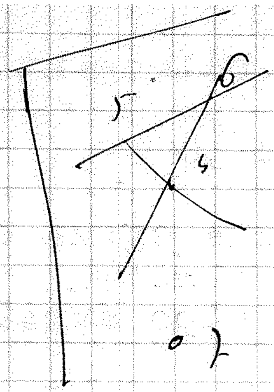
2) vi sono pti con $h>2$ di un solo tipo e cioè con $h = \frac{m}{2}+1$ (cgrze di 2.a speice). La seconda evid.te ~~[illegible]~~ dovendo $\frac{m}{2}$ risultare intero si può presentare solo per m pari, [ci]oè eguale a SEI, e va bene, o a Quattro, ma allora come è c[h]iaro la distinzione ~~cade~~ (e per $m=4$ le [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] non risultando di P_h con $h>2$) ([illegible] (p. [illegible]) sono doppi)

Invece quelle 3 rette $\bar{\pi}$ vi segano 3 fasci $\bar{\pi}$ (se il piano è $x_0 = x_1$ $=0$ [illegible] per $V=0$, le tre rette ~~seg~~ fatto $x_0 = x_1 = 0$ è $a_{11} \equiv 0$ con a_{21}, a_{31}. Sono per $x_0 = x_1 = 0$ [illegible] fasci per $a_{12} + V a_{13} =$ [illegible] evid.te $\bar{\pi}$ vi). ~~[illegible]~~ Del ABC i centri (che risultano non all.ti) AB sono C per B, BC C per B. E le 3 [illegible] piani di B ~~[illegible] congiungente alle~~ non serve). ~~[illegible]~~ congiungente alle 3 rette assi delle rette 3c piani omologhi isestupla. Comunque, si hanno per le bitangenti della st

F4 tre cgrze coicaratteri (2,6) (2 ,6) (8,15

Per capire il grado di generalità delle cgrze di second'
dine
e così si ottengono, avverto che è un tipo assai generale
erchè ~~&&&&&~~ già Kummer ha provato che una tale senza lin
ocali ha classe variabile fra 2 e 7. Sono così possibili
~~2, 1 no p...~~
grze scriviamo così (2,2) (2,3) (2 4) (2 5) (2 6)
(2,7) e basta: delle quali le (2,6) si dividono in base
[Zindler Enc. 1188]
seguente
[criterio d~~i cui non ... occupo~~ ~~&&&&&~~ in due specie; di 1.
2.a specie (talvolta si scambiano tra loro le due den.n
de la cgrza di Zin
bbene le cgrze che si presentavano sono le più generali
[o altrimenti ...] p. es. de Segre di 2a: qui uso termin. di Zindler
2 6) di 1.a specie. Ecco come così il proced.to di Segre
più maneggevoli e
omincia a portarlo verso enti geometrici noti, che così p
ono essere studiati per nuova via.

Senza stare a fermarci sui vari casi successivi stu
salvo sul
iati da Segre, ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ caso massimo di V_3^3 c
O pt doppi, dico poche parole del concetto direttivo. Se
er le tre reti proiettive avviene una volta che tre S3 c
(non confondere con [...] p. 379)
ispondenti si incontrino in un piano π, anzichè in una
a, questo piano sta ovviamente sulla V_3^3 e Segre osserva
enunciato) (12)
he esso contiene tre dei pt doppi della V_3 ~~che~~: il pia
per i sei d. p. 379 [...]
di tre rimaneni certo esistenti 456 sta certo esso pure



.lla V_3^3 avendovi in comune le tre rette 45 46 56 e il pt
ne esso ha a comune con 123 che rèsulta fuori di tali ret
nzi,questo punto comune ~~àapeaea~~,chiamiamolo 7,è perciò do
.o per la V_3^3 uscendone due piani(e quindi due fasci di r
tangenti)che risultano non in uno stesso S_3.Perciò l'es
.enza di un piano π come il supposto porta l'esistenza d
settimo punto doppio 7.E come Segre dimostra viceversa.
Il sistema S di p 381(rette comuni a tre S3 omologhi)
tiene in particolare le ∞^1 rette del piano π comune pe
tiero a tre piani omologhi.Quindiquando si proietta in S
S dà luogo a una congruenza (2,5):la classe è soltanto p
5 perchè dalla cgrza proiezione si staccano le rette del piano proiezione,di cui appunto ne sta una in ogni piano
generico.Eccodunque che questa volta si hanno cgrze(2,5)
fra quelle di p prec.te.

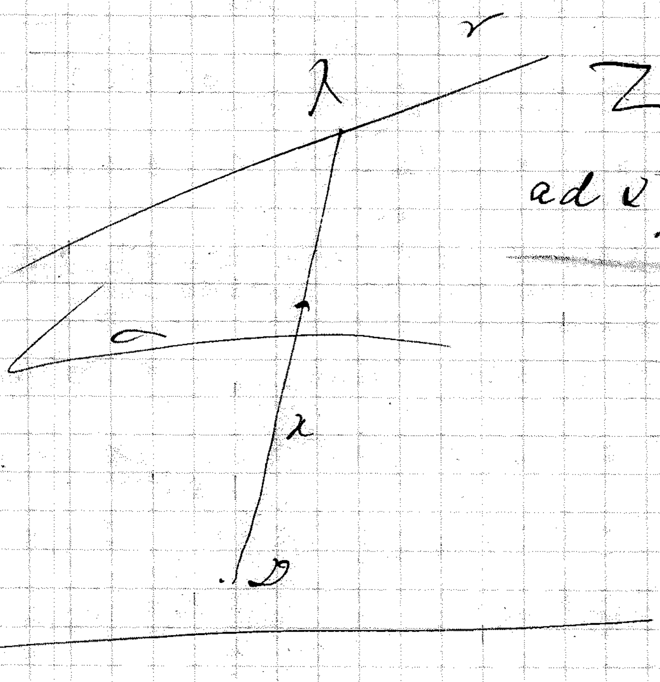
Se la particolarità ora detta avviene una seconda vo
cioè vi è una seconda terna di S3 omologhi che si segano
e una (2,4) ecc.
in piano,nasce analog.te un nuovo pt. doppio.Le cose ora
tre
Così continuando,Segre arriva a supporre che ciò avve
ga quattro volte,e arriva così in modo preciso a quatt
nuovi punti doppi oltre al 6,cioè a 10 in tutto.Osserv
mo,prima di esporre qualche altro particolare
a) che il controno apparente F4 ha attualmente 16 p
ti doppi(10 più 6 sulla conica di contatto del piano t

δ) i già presentati i 10 pt. doppi; 6 nella matrice int.ni e 4, uno per uno in ogni piano (p. 369) doppio p381) cosicchè è una superficie di Kummer

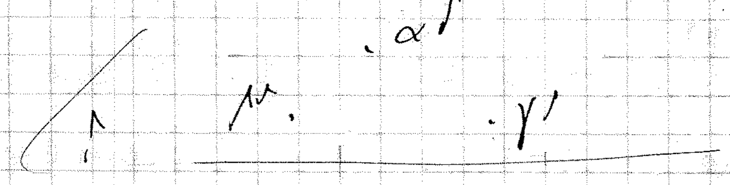
b) che la componente della cgrza delle bitangenti di questa proveniente per proiezione dal sistema S è a desso una (2,2) perchè rimanendo inalterato l'ordine d prima,vi è un abbassamento di classe di 4 unità per il distacco dei quattro piani rigati ecc.

Ma, come vedremo, addirittura la congruenza (12, 27) delle bitangenti si scinde in sei (2, 2) (La differenza per le classi risulterà spiegata poi). ~~La teoria di tali V_3 si può ricostruire rapidamente così.~~ Dal cenno di sopra è già chiaro che su una tale V_3 vi sono quattro piani.Pro viamo a partire senz'altra ipotesi da questa:una V_3^3 contenente quattro piani(supposti senzaltro"non incidenti" o in uno spazio maggiore del normale,cioè incid.ti in punto) Una tale V3 contiene evid.te ogni retta che si appoggi (in punti gen.te distinti) ai quattro piani,avendo così già 4 punti a comune con essa.Effett.te le rette incidenti 4 piani sono ∞^2 (presumibile perchè ho 4 cdzioni spl. per le ∞^6 rette:in modo preciso preso un pt A su α i tre S3 $A\beta, A\gamma, A\delta$ si segano in retta per A evid.te appoggiata ai quattro piani:variando A su α ho le ∞^2 rette.Queste ∞^2 rette ricoprono una V3.(che dovrà poi coincidere con la V_3

ogni modo si può ~~&&~~costruire la teoria da questo punt
i partenza, e pensare direttamente alla V3 ricoperta dall
∞^2 rette app.te ai quattro piani $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ &.Ora
on consid. di geom proi Segre (nella Nota di Palermo cit.
357) ha dimostrato che in S4 le ∞^2 rette in questione
i appoggiano nec.te a unquinto piano (facendo la restriz
e che dei sei punti $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ ... mai ve ne siano tre allineati
a dim.ne è essenzialmente questa: in S4 tre rette sghemb
due a due ammettano UNA retta incidente (l'int. dei tre
S3 che le congiungono a due a due, spiegare). Dualmente tre
piani "non incidenti" a due a due p es $\alpha\ \beta\ \gamma$ ammettono
un piano "incidente" tutti tre: sia δ' .Ebbene, dal punto
$\delta\delta'$ proiettiamo le ∞^2 rette su uno S3 generico Σ .In
proizeione viene una congruenza C che Segre dimostra ess
una congruenza lineare~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~
(in base a questa idea. Le ∞^3 rette appoggiate ad $\alpha\ \beta\ \gamma$
da (con ...) ~~... Segre~~
da punto generico si proiettano in complesso tetraedrale
se invece P sta su δ' (come attualmente) viene uncompless
lineare. Di più, le ∞^2 rette oggettive incidendo $\delta\delta'$ ...
δ ,e proiettandosi ora da un pt di δ ,le rette proie
zioni incidono la retta $\delta\Sigma$ .Quindi vengono ∞^2 rett
di un cplesso lin. e di un altro speciale, ecc.) Ora C a-
vrà un'altra direttrice (m che risulta distinta da quella nelle ipotesi fatte): come questa è incontrata da tutt
le rette di C, quindi delle proi.ne alla figura oggettiva,



Z_0 e non incidente ad $\alpha\beta\gamma\delta$.



abbiamo che le ∞^1 rette oggettive daranno incidenti al piano proiettante m, cioè al piano $\delta'.m$ ~~x~~ e d d
$(\alpha\beta\gamma\delta)$

A ogni quaterna di piani, diciamo generici, in S4 viene (unico come S conferma con qualche oss.ne) così a ~~asso~~ciarsi un quinto piano ε colla ptà vista, dando luogo a una quintupla di piani associati. Notiamo anche ~~ch~~ che come il quinto piano ε contiene il punto δ', così esso contiene anche i punti $\alpha\alpha'$ $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, cosicchè ε esso può definirsi come il piano dei quattro punti (dunque nec.te complanari $\alpha\alpha'$ $\beta\beta'$ $\gamma\gamma'$ $\delta\delta'$; La relazione tra i 5 piani nelle simmetrie: 4 d. cui determinano il 5.

Dimostriamo anche direttamente che quelle ∞ rette riempiono una V_3^3; determinarne l'ordine vuol dire qui n° delle rette appoggiate ad α β γ δ e a retta generica ulteriore r. Chiamando D il pto d'appoggio a δ di una retta cercata x, app.ta a r in R, D sta su ciascuno dei tre S3 αx βx γx cioè αR βR γR Viceversa se trovo un pto R di r tale che i tre S3 αR βR γR abbiano comune un pto D su δ, la retta $x = DR$ risolve ik problema perchè risulta evid.te app.ta anche a α, β, γ. Quindi, quante volte avviene che un punto R di r dia luogo alla p.tà richiesta? ~~Vaaaaa~~ Per ogni R p es ~~ad~~ lo S3 αR ha comuni con δ gli ∞^1 punti di una retta (dove andrà cercato D) e ~~aaaa~~ al variare di R questa retta varia in un fascio, perchè passa sempre per $\alpha\delta$. Così unse

osservare per β seg δ che
ci contiene i pt $\alpha\beta$ $\alpha\gamma$
$\alpha \wedge \gamma$ (rette int.mi delle
3 rette nominate)

~~Non~~ cancellare
Va bene

esso sega invece una
retta su α β γ e per
il pt δ è fuori di quelle -

dat p. cp

ondo e un terzo fascie ,ottentu proiettando la r come pt

ggiata sempre su δ una volta da β e una volta da γ. ~~&&&&~~

i tre fasci sono proiett. a due a due, provenendo per pr

ez e sez dalla r. ~~I primi due centri~~ ~~generano~~

Applicando di nuovo p. 384 fine

~~na conica per questi due punti, gli ultimi due una conica~~

~~er . E i punti comuni alle due coniche, fuori di β.~~

~~ono tre punti~~ ho tre posizioni di D. La V è effett.te un

3

3.

Inoltre essa possiede proprio 10 punti doppi, perchè

si 5 iani si segano a due a due (solo, eff.te) in un pun

gnuno d. questi 5_2 10 punti d'int. (non risultandovi S,

e) è doppio.

La V_3^3 contiene già i 5 piani associati $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$

contiene ancora altri piani: p.es. il già considerato pia

β' (il piano incidente α, β, γ ~~&&&&&&&&&&&&~~ che poi passava pass sta anche sulla ipersup. Invero,

il punto $\delta\varepsilon$).) ~~come~~ piano inciente in retta tanto α p es

quanto β passa per il punto $\alpha\beta$ (perchè le sue

te int.ni con α e β come rette complanari sono incident

'incidenza non può che aver luogo in $\alpha\beta$) che è doppio

sso passa dunque per i 3 punti doppi $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$, e poi ancora

il punto $\delta\varepsilon$ ~~punto $\delta\varepsilon$~~ (doppio esso pure e che non risulta allineat

nessuna coppia dei prec.ti. Allora se avesse luogo un'in piano con l'ipersup. sarebbe un triangolo di verti ci

V^3

Per ogni pt. doppio passano 6 piani (poichè $\frac{15 \cdot 4}{10} = 6$)

Se si riscontrano su una retta questa contiene necessariamente dei 10 pt. doppi i quali si devono contenere nel simbolo corrispondente. (Che contiene 2 pt doppi se uno di questi è il piano in S_3 $x_0 = 0$ sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ la eq. di V_3^3 è $x_1 x_2 A_1 + x_3 \psi_2 = 0$ i pt. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ delle rette ... su $\psi_2 = 0$ sono doppi, cioè 2 dei 10)

Siano i pt. doppi segnati 01 ... 9 e tra i piani [...] vi sono p. es. 0123 0789 sono ... i pt

mutue 0126 e 0149 ...

Ora, come δ' è il piano incidente (in rette) i tre piani α β, γ fra gli associati $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, così si hanno parecchi piani analoghi (tutti distinti) e precisamente $5_3 = 10$. Sono così altri 10 piani che la V^3_3 viene a contenere. Si hanno così in tutto $5+10 = 15$ piani (e ~~non~~ risultano altri). Ognuno di essi viene a passare per 4 fra i 10 punti doppi (per $\alpha ... \varepsilon$ sono le loro int.ni a due a due, per p.es. δ' c.s. si è detto ora e risulta ...). Si potrebbe, come fa Segre nella sua NOTA di Torino, numerare i 10 pt doppi, e rappresentare ognuno dei 15 piani coi 4 n.^{i} relativi ai 4 punti doppi, studiare la loro cfgr. ecc. ~~Cosicché~~ Se due tali piani si incontrano in un solo punto esso come si vide è nec.te doppio. Quindi guardando lo schema così costruito, si riconosce subito: se due dei 15 piani

a) hanno un solo n° in comune, si incontrano solo in un punto doppio

b) se hanno in comune due n.^{i} si incontrano in una retta. Altri casi non sono possibili. Ciò facendo, si riconosce che ognuno dei 15 piani è non inc.te (cioè solo pt) a altri 8 e incidente a altri 6. P.es. i piani $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ si trovano a due a due nel primo caso; ma in base allo schema accennato si possono anche in altri modi trovare delle quintuple (ma non sestuple etc.) di piani fra i 15 che risultino a due a due non incidenti; anche queste quintuple sono di piani $\pi_1 ... \pi_5$

fra loro associati, perchè IL piano associato a 4 fra $\pi_1 \dots \pi_4$ si viene a stare sulla V^3_3 e a essere non inc.te con sì, cosicchè coincide con π_r. Facendo in modo complet lo schema si vede che di queste quintuple in tutto ve ne sono 6. Vi SONO DUNQUE SEI MODI DI ~~[illegible]~~ RACCOGLIERE 5 FRA I 15 PIANI IN PIANI ASSOCIATI.

Per ogni quintupla si ha un sistema ∞^2 di rette in denti (quelle che incontrano 4....), e in corrispondenz delle 6 quintuple, 6 sistemi ∞^2. Questi vengono così a dare TUTTE le 6 rette della V^3_3 uscenti da un suo punto generico. Si hanno così questi sei sistemi $S_1 \dots S_6$

Veniamo ora alla F4 contorno apparente, che ha or $6+10=16$ punti doppi, è cioè una sup di Kummer; la congr enza delle sue bitangenti si spezza, come preannuncia a p 389 in 6 congruenze di ordine 2, le quali sono anc di classe due. Invero ora, p es. per S_1 (rette app. a $\alpha\beta\gamma\delta$) ~~in~~ uno S_3 generi (proiettante, per quanto qui ci interessa) stanno t te rette quante in tale S_3 si appoggiano alle 4 rette c ivi sono tracce dei piani (pes.) $\alpha\beta\gamma\delta$, cioè 2. La somma del classi dà così 12 anzichè 27, la differenza di 15 è dovut ai 15 piani rigati proiezioni dei 15 piani della V^3_3

Vediamo, senza particolari, il modo di dedurne qualch

~~[illegible] tgte~~

e ciò dovrà avvenire per ragioni analoghe a quelle viste e nello stesso tempo per ogni altro piano tgte doppio. visto che i tgte lungo conica.

oprietà della sup. di Kummer. Già si disse dei 16 punti
ppi. Ora essa ha anche 16 piani tangenti doppi. Tale sappia

essere la traccia sullo S_3 dello S_3 tgte alla V^3_3 in O. (ω'_2, ω_3)

tale è anche la proi. di ognuno dei quindici piani, p.es

a proi. α' di α : invero ogni retta di α' essendo bitange
ome proi. di una retta dell'ip.cie) vuol dire che la

nea sezione di α' con la F4 è una C4 incontrat

due coppie di punti coincidenti da ogniretta del suo pi

oè una conica contata due volte (c.d.d.). Il piano ω'_2

una genesi diversa dagli altri 15, ma in realtà tutti si

ortano nello stesso modo. Così, ω' contiene come sappiam

381) 6 punti doppi della F; α_0 solo 4 fra i 10 della V^3_3

sicchè α' conterrà 4 loro proiezioni. Però

che α' ne contiene in tutto 6 perchè ne contiene ancora d

i 6 esistenti su F^4. Inver ripresa l'eq. della V^3_3 di p

55 $\varphi_1 x_0^2 + 2\varphi_2 x_0 + \varphi_3 = 0$ e quella del cono circoscritto

O $\equiv A_0$ $\varphi_1\varphi_3 - \varphi_2^2 = 0$ i punti comuni al piano α e alle (ω_2) $\varphi_1 = 0, \varphi_2 =$

ovendo come punti di π stare sulla V^3_3 cioè soddisfarne

eq.ne dànno anche $\varphi_3 = 0$, e allora quei punti (due), in pro

zione rendono nulli di 2° ordine i termini dell'eq. di F4

ciò dimostra i 16 pt. doppi a p. 381

uindi la sup. di Kummer ha 16 pt doppi e 16 piani doppi,

gnuno dei quali contiene 6 punti doppi. Inoltre per ogni

unto doppio passano 6 piani doppi, come in S_4 ci è già not

er i 6 pt doppi e i 15 piani, e come si potrebbe

V_0 o insieme di quelle ideali di quintuple di rette associate.

$$\frac{(r+1)r}{2} - 2$$

completare per i 6 di ω_i. Insomma, la sup. di Kummer si potrebbe effettivamente studiare col metodo indicato.

Aggiungo in via di digressione quale è la sostanzuale [origine] della nozione di ~~piani~~ Geniliaye associati che sta a base del[la teoria] delle V_3^3 esaminate. In S_4 possiamo definire come [in] S_3 delle coordinate di retta xy $p_{ik} \ldots \begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_4 \\ y_0 & \ldots & y_4 \end{pmatrix}$ [ve]ngono $5_2 = 10$ coordinate omogenee sostanzialmente distinte. [Lo] stesso si potrebbe fare per le rette di un qualunque S_r [e] anche più in generale per gli S_k di uno S_r definendo le [co]ordinate di S_k così; prendere $k+1$ punti linearm. indip. $x' \ldots x^{(k+1)}$ formare poi tutti i det.ti di ordine $k+1$ estratti dalla [ma]trice

$$\begin{vmatrix} x'_0 & - & - & - & x'_r \\ \\ x^{k+1}_0 & - & - & - & x^{k+1}_r \end{vmatrix} \quad \ldots \quad p_{i_1 \ldots i_{k+1}}$$

dove $i_1 \ldots$ indica le colonne adoperate

[Al]lora si può anche estendere la rappresentazione delle [re]tte di S_3 nei punti della M_4^2 di S_5. Bisognerà considera[re] ~~lo spazio~~ S_d dove si adottino per coord.te di punto le coord [degli] S_k; esso ~~[illegible]~~ ha avrà dimensione $\binom{r+1}{k+1} - 1$, per $k=1$ $\binom{r+1}{2} - 1$. [I] punti di questo spazio rappresentativi di rette dello S_r non sono però tutti, in quanto per le coord. delle ret[te] (e più in generale degli S_k) vi sono come in S_3 delle eq[uazi]oni di condizione, la cui necessità appare facilmente, p. [es.] di

$$\begin{vmatrix} x_0 & - & - & - & x_5 \\ y_0 & - & - & & y_5 \\ x_0 & - & - & & x_5 \\ y & - & - & & y_5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{h}$$

$p_{01} p_{23} + p_{02} p_{31} + p_{03} p_{12} = 0$

$p_{01} p_{35} + p_{03} p_{51} + p_{05} p_{13} = 0$

pui in generale per gli S_k è con

$$\mathcal{M}^{r}_{(k+1)(r-k)} \quad \text{con}$$

$$\nu = \frac{1!\,2!\ldots k!\,\left[(k+1)(r-k)\right]!}{r!\,(r-1)!\ldots(r-k)!}$$

(che per $k=1$ da $\dfrac{(2r-2)!}{r!\,(r-1)!} = \dfrac{1}{r-1}\binom{2r-2}{r}$ con

centro

$$\nu = \frac{\cancel{2!}\;6!}{4!\;3!\;\cancel{2!}} = \frac{6\cdot 5}{6} = 5.$$

risultano

quindi i pt. immagini di rette ~~sono~~ quelli della varietà
une a tutte queste ipersup. Tale varietà è una $M_{2r-2}^{\frac{1}{r-1}\binom{2r-2}{r}}$
dimensione risultando ovviamente già dalla dim. della t
tà delle rette di uno S_r ;l'ordine non è di calcolo i
facile
sto. Per $r=3$ si conferma ord. 2 ;per le rette dello S_4 si
ce una M_6^5 di S_9 .In ogni caso la varetà così definita
hiama una varietà di Grassmann. Vedere che è proprio l'ordine 5 e spiegare le quintuple di tante (La M_6^5 è incontrata in
punti da ogni S_3 dello S_9, che non la incontri in infinit
nti.Se prendo su di essa ~~5~~ 4 punti generici A B C D ess
terminano uno S_3 che la incontrerà ancora in un quinto
nto ~~pàà~~ ben determinato E.

D'altro lato, ~~ààà~~ teniamo presente anche questo a
ro modo di considerare la M.Prendiamo ora in S_4 i piani,
nzichè le rette, con le loro coordinate (i minori ~~di~~ q_{ijh} d

$$\begin{vmatrix} x_1 & - & - & - & x_5 \\ y_1 & - & - & - & y_5 \\ z_1 & - & - & - & z_5 \end{vmatrix}$$

er il piano xyz).Ho $\binom{5}{3}=10$ coordinate (che potrei prendere come coor
ate di punto in S_9: i punti rappresentativi di piani costi
reggono ~~tuiscono~~ secondo quanto precede una grassmanniana ~~che chia~~ N e anc
(v. criterio per dim.e e ord.)
~~ma~~ N_6^5 -data la legge di dualità in S_4 si capisce che de
risultare Sostanzialmente ~~equivalente~~ alla M_6^5 a meno di una proi.tà.)

~~prendiamo un complesso lineare di piani....~~ Ma ci

Conviene assumere tutte 10 coord.te ... di piani come coord.te d si intende nello stesso S_9 i cui pt su ~~le rette di S_4~~ ρ_{ik} già introdotte. Ho così

S_4	S_9
rette ρ_{ik}	pt. ρ_{ik} della M_6^5
piano g	S_8 g_{12}, ρ_{45} e ... ∞
complesso lin. di piani	pt. (generico) di S_9
" " special (rette)	pt. di S_9 sulla M_6^5
sist. lin. ∞^i di cpl. lin.	S_i

IPERPIANO in S_9 rappresentando il piano $q_{12}\ldots$ nell'S_8 ra-
presentato dall'eq. $q_{12}p_{345}+\dots=0$ ~~$a_{12}q_{345}+\dots$~~ (indici complementari).Ho
così ...v. contro.Si intende che anche qui non vengono TU
gli S_8 ma solo quelli le cui coordinate soddisfano alle e
zioni di condizione relative alle q. Prendiamo ancora in
S_4 un "complesso lineare di piani" $a_{45}q_{123}+\dots=0$ spiegare.Vine come imma-
gine in S_9 un "PUNTO", sist. lin. ∞^8 di iperpiani, cioè un ~~quello rappresentato in coord. di~~
~~iperpiano dalla~~ centro delle relative stelle: il punto di coordinate
$p_{45}=a_{45}$ (1) che è appunto appartenente a quegli iperpiani

ra vengono TITTI i punti di S_9 .In particolare prendiamo
n complesso lineare speciale,formato da tutte ~~xxxxxx~~
piani di& S_4 che incontrano ~~un piano fisso~~ una retta fis
.Avuto riguardo alla dfne delle p e delle q la condizion
i incidenza della retta $p=xy$ e del piano $q=zuv$
$|xyzuv|=0$ cioè $p_{12}q_{345}+\dots=0$
uindi i piani inc.ti retta fissa di S_4 costituiscono effe
ivamente un compl. lin. ,che diciamo speciale. Questo com
sso lin. come ogni altro avrà per immagine un punto di S
a ora con qualeche particolarità:ed effettivamente si
tta ora del pt di coord.te p_{ik} ,secondo quanto precede,ch
disfano ora le relative eq.ni di condizione,cioè ora il pt
agine del complesso lin sta sulla grassmanniana.Si ritro

2 Nota): nelle 2a C^{ta} [n. 25] le cui delle l'eq. delle V_3^3 sotto la forma molto simm. $\alpha_1^3 + \dots + \alpha_6^3 = 0$ (gen.

dove le α_i sono funzioni lineari colle cond. $\boxed{\Sigma \alpha_i = 0}$ & (V_3^3 è gen.

"esaedro" $\alpha_i = 0$ che ha lo stesso ufficio del pentaedro di Sylvester per le F^3 generali.

Cito un tentativo recente di estensione delle ricerche di prima apparse in B. Segre (Sui gruppi di S_k associati in S_r. R. Acc. di Bologna 1905)

Aggiungo che ~~parecchi~~ alcuni degli argomenti studiati da Segre nella V_3^3 lo sono stati anche contemporaneamente e indip.te da Castelnuovo (~~...~~ in Mem. Ist. Ven. 18..) e che anno dopo poi Castelnuovo ha iniziato lo studio della geom. delle rette di S_4 in un'altra Nota anch'essa Ist. Ven. 1891 (Ricerche di ~~geometria~~ geometria della retta nello spazio a 4 dim.) soprattutto col proposito di vedere se la parità dello spazio influisce pertanto per la diversa che in S_3 capisce anche cui due assiomi perché un cpl. lin. $\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0$ ove $\Sigma a_{ik}(x_i y_k - x_k y_i) = 0$ determina una polarità nulla: ma allora il det. delle sost. fra le coord. di pt. e piani, essendo emisimm. dispari è nullo e la polarità degenere, cioè tutti gli sp.^{i} polari di pt.^{i} generici passano per un pt. fisso A centro del cplesso. Per P generico escono le rette di $P\pi_3$, per A invece ogni retta appartiene al cplesso Segre op. 41

che non ha S_3 assoc.te determinati.

così insostanza la rapp.ne delle rette nei punti della M

I sist. lin. ∞^1 di di cpl. lin di piani in S_4, in base al

linearità della (1) dànno sist. lin ∞^1 di punti i

S_9 cioè risp. $S_1 S_3$ ecc., cosicchè in particolare gli S_3

di S_9 stanno a rappresentare i sist. lin ∞^3 di cpl. lin

di piani, e ~~&&&&&&&&&&~~ la prop. a metà p. 405 dice ora

che nel sistema lin ∞^3 determinato da 4 cplessi lin

speciali di piani ce n'è unquinto, cioè i piani incident

(i quali costituiscono appunto ~~...~~ ∞^3), la base di quel sist. lin. ∞^3)

4 rette ne incontrano una quinta, c d d

Naturalmente, ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ la proprietà relat

alle quintuple di piani associati ecc. è una proprietà re

tiva allo spazio a 4 dimensioni, che trova applicazione a

ttè le interpretazioni di questo. Ricordo qui in particola

il pentacielo di Stephanos (C R 1881) ~~&&&&&&&&&&&&&&~~

~~&&&&&~~ insiemedi 5 cerchi dello spazio ordinario, che ri

lta univocamente definito da 4 di essi. Ciò perchè & i

rchi dello spazio ordinario si possono considerare come

tte dello spazio a 4 dim.ni (formano eff.te sist. ∞^6

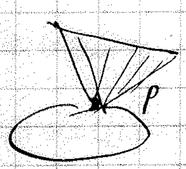
me quelle) && perchè possiamo rappresentare li.te le sfe

$a(x^2+y^2+z^2)+bx+cy+dz+e$ nei pt $(a\,b\,c\,d\,e)$ di S_4 e allora i

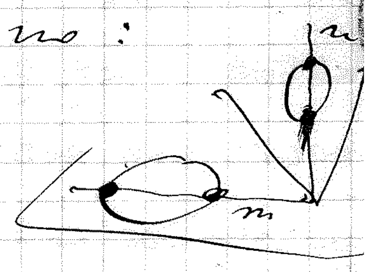
rchi, o fasci di sfere diventano rette di S_4 e viceversa.

Tornando ancora un momento ora alla Memoria sulle V^3_3
di Torino Mem., dirò che essa tratta anche di quelle
con infiniti punti doppi, cioè con linea doppia o sup. doppia. Per linea doppia, si hanno subito i casi possibili a
priori per questa, pensando che questa ha ordine complessivo $n \leq 4$ perchè F3 sua sez. iperpiana non può avere più di 4
punti doppi. Quindi si tratta di mettere assieme alcune
linee con tale limitazione per l'ordine complessivo
scartando senz'altro i casi in cui lo spazio minimo di appatenenza della linea complessiva K o di alcune sue parti
ha dim. 3 ed è riempito dalle corde di K, perchè allora
tutto lo S_3 farebbe parte della V^3_3 e questa sarebbe riducibile. Se poi K è piana, è di second'ordine, perchè se no sulla
F3 sezione iperpiana generica si avrebbero più di 3 punti doppi in
linea retta, donde scenderebbe facilemnte che tutti i punti di
questa sarebbero doppi, e che la V^3_3 avrebbe piano doppio
(segato dagli S3 in rette doppie). Quindi, se le cpnenti
della linea doppia sono tutte rette, posso avere
1) una retta doppia
2) due rette doppie, incidenti (se non avrei S3...o s)
3) tre rette doppie adue a due incti e anzi per un punto
(non potendo e s stare in un piano). Potremmo pensare anche a 4 rette doppie, nec.te per un punto; ma allora queste
sono indip. nella stella (trovandosi se no impossibilità
per le F3 sezioni iperpiane) e presele, per AOA1 ... AOA4
venendo già doppi i vertici della piramide ho eq.ne
$(\,0\,x_1 x_2, \dots x_1 x_2 x_3 \dots) = 0$. Ma per un doppio p.es. le rette $x_2 = x_3 = x_4 = 0$

Infatti C^n è retta r: quella con proiezione in S_3 con C^n; retta primi ogni piano che congiunge r con il P di C^n avendocene r^n e P^n sta nella V_3 che alle



rioltre proiettando i pt. di C^n da r: ma è V_3^n. — Due C^n in S_3 ma:



ma in S_4 è con incidente ~~dopia~~ ogni piano m n (fig.) contenuto le pt doppie sta in F^3: lo S_3 per p. e di m e dell'altra conica sta in V_3^2 etc...

x_0x_2, x_0x_3, x_0x_4, cioè tutti quelli con x_0, e allora viene

[illegible] cubica, Lasciando dunque a parte i coni, il caso [illegible]

[illegible] nel punto F' con 4 [illegible] doppi.

Se ~~[illegible]~~ tra le linee doppie vi è una conica si può avere

4) una conica doppia senz'altro. A questa si potrebbe pensare di aggregare una retta o un'altra conica, ma si [illegible] facilmente che il primo caso non può avvenire e il secon do solo così

5) due coniche doppie incidenti in un punto e non ap partenenti a uno stesso S3

Poi una C3 non può esservi: piana no e sghemba nemmeno pei motivi detti. E una C4 per lo stesso motivo solo se appartenente a S4; quindi

6) una quartica doppia razionale normale

Questi casi risultano poi tutti possibili, e sono studiat da Segre. Qui osservo solo che il contorno apparente da (di V_3^3 nel caso 3) è F4 che avrà come doppie le tre rette proiezion delle tre rette doppie, e che sulla sup. proiezione il pu to comune risulta di conseguenza triplo (se è A0 e le re te doppie gli spigoli.... dovendo ogni termine contenere a 2° grado x_1 e x_2, x_1 e x_3, $x_2 x_3$, manca ogni termine in x_0^2 punto A_0 è triplo.) Viene dunque la superficie di Steiner.

Finalmente, se vi è sup. doppia, pensando alla se zione con S3 non può essere che un piano.

Vedi p. 4[illegible]

p. 407

Ciò naturalmente per un cpl. lin. generale, cioè se a_{ik} sono generiche; se queste invece sono tali da annullare più profondamente il dt. $\left| a_{ik} \right|$, cioè da annullare tutti i suoi minori di 4° ordine, in conseguenza di questo fatto si annullano anche quelli del terzo (la caratt. dovendo sempre essere pari): allora gli iperpiani polari passano ~~subito~~ non più per S_0 ma per uno S2 fisso, cosicchè a ogni P corrisponde l'ip.no Pa, e le rette del cplesso, uscendo da P in tale S3 incidono a. Le rette del complesso sono dunque tutte incidenti a un piano fisso. E Viceversa. Si ha cioè il duale del cplesso lin spec di piani di p. 402

Castelnuovo passa poi a studiare i sist. lin. $\infty^1, \infty^2, \infty^3$ di cpl. lin, $\lambda \Sigma a_{ik} p_{ik} + \mu \Sigma b_{ik} p_{ik} + \nu \Sigma c_{ik} p_{ik} = 0$ e così in particolare in ogni caso il lugo dei centri. Le coordinate del centro risultano a conti fatti (polinomi quadratici nelle λ, μ, ν ecc? cioè $x_i = P_i(\lambda, \mu, ..)$) Quindi il luogo del centro è:

1) per fascio una conica
2) per rete una sup. che (rappresentando $\lambda \mu \nu$ come coord proi. in piano) è rappresentabile su un piano con un sist. lin. ∞^4 di coniche: sarà dunque una proiezione della sup. di Veronese
3) per sist. lin. ∞^3 una V_3 rappresentabile c.s., su uno S_3 analogamente introdotto, con un sist. lin. ∞^4 di qua

segue [illegible]

iche .D'altro lato, quel ~~sist. lin.~~ ∞^3 contiene 5 complessi
eciali(è la p.tà già vista a p. 409)
, ---, C_5 le cui rette si appoggiano risp. a 5 piani
---- α_5 .Quando si esprimono le coord. del centro in
[illegible]
nzione delle λ, μ , in relazione a ognuno di questi complessi
r tali valori delle λ, μ . i valori delle x non possono ris
e determinati, non avendosi come centro un punto det.to m
to un piano; vuol dire che per tali particolari valori de
$\lambda\mu$.. i polinomi P_i si annullano tutti. Ciò avviene 5 v
Vi sono dunque nello S3 rappresentativo 5 punti per i quali ~~dove~~, an
dosi tutti tali pol.i, passano tutte le quadriche del sis
neare rappresentativo. In questo modo concludiamo che la
rietà luogo dei centri di un sist. lin ∞^3 di cpl lin in
è una V_3 rappresentabile su uno S3 mediante le quadrich
5 punti. Ma tale V_3, possiamo aggiungere, è proprio la
di Segre; è una V^3 perchè nello S3 rappresentativo, cerca
e l'ordine come n° di punti comuni a tre sezioni iperpia
si trova, per due, C4, per i 5 punti base che sega una terz
drica del sistema in 3 punti fuori della base. Inoltre
come tale V^3 contiene evid.te i 5 piani centri dei cpl
spec. già chiamati $\alpha_1 .. \alpha_5$ essa avrà punti doppi, 10 , nelle
or mutue inters.ni. Così resta provato l'intervento della

[si capisce verificando che i piani sono a 2 a 2 incidenti]

[Cem evidente a prua
la rapp ma non
questo]

$_3^3$ con 10 pt doppi nella teoria dei cpl lin., e inoltre

una semplice rappresentazione sullo S3 mediante le quadr

r 5 punti fissi. Sulla rappresentazione si vedrebbeche

i 5 pt base hanno per corr.ti 5 fra i 15 piani, mentre gl

altri 10 si rappresentano sui 10 piani che congiungono te

ne di punti base. I 10 punti doppi della V si rappresentan

sulle 10 rette che congiungono i 5 punti. Si tratta dunqu

sempre di el.ti fondamentali. La V^3_3 così ottenuta è p

la più gnerale, perchè tutte quelle con 10 pt doppi sono

cioè non vi sono invarianti assoluti

proiettivamente ~~identiche~~ (essendo una definita da 4 pian

a due a due non incidenti e come si vedrebbe tutte queste

quaterne di piani sono proi.te equivalenti fra loro)

andare al principio di p. 411

in sostanza

in si limita a far questo:

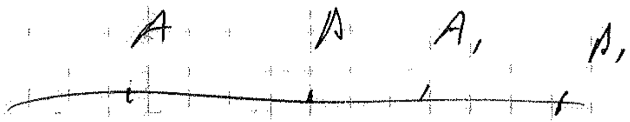
Staudt (B. d. L. (n. 315)) definisce le pare "pt. dti doppi d'un'inv. sono imag.", dicendo che essa è quindi e afferma che un'inv. è ellittica: e prende poi ~~considera~~ il problema d. C^n per tre pt. e note date inv. ell. e rette come quello d. C^n per 5 pt. 3 reali e 2 imag.: i cui probl. analoghi esige una trattazione più approfondita.

Lasciamo con questo l'esame dei lavori del primo ciclo nell'indirizzo puramente proiettivo.

Passiamo invece a un altro gruppo di lavori di carattere ben diverso, che riguardano gli elementi immaginari nella geometria. Mi ~~[illegible]~~ Comincio con un cenno sul primo di questi che aveva uno scopo essenzialmente didattico. Staudt nella sua trattazione puramente grafica della geometria proiettiva, si era lungamente preoccupato di introdurre in questa gli elementi immaginari, accontentandosi in un primo tempo (Geom der Lage) 1847 di introdurli in un breve ~~per quelli [illegible]~~ ~~a coppie img co~~ cenno i 2 img. coi niugati come gli elementi uniti di un'inv. ellittica, così e [illegible] come comparivano già del resto in opere precedenti Staudt.

Nei Beiträge zur Geom der Lage 1856, 57, 60 Staudt è poi riuscito a svolgere una teoria conseguente degli el.ti img per via puramente grafica, dando un sig. geom.ca reale dei singoli pti img. scindendo la coppia nei suoi elementi secondo un'idea che — conoscendo già gli im. dal punto di vista analitico — possiamo ~~ricostruire~~ immaginare così.

Se nello spazio ho due punti reali a e b, e p i il punto a + ib, questo è un punto della loro retta, luogo dei pt a + tb. Dovrei dare a t il valore t tale che $t^2=-1$; non essendo ciò possibile nel campo reale, pensiamo invece all'equazione $tt'=-1$, in base alla quale nascono le infinite



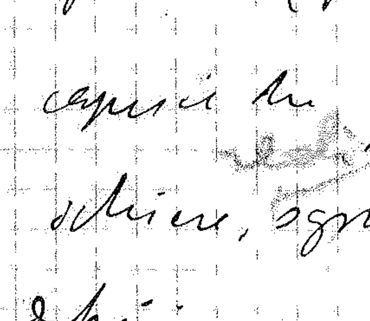
In questa notazione è già detto implicitamente il
vers. 2 pt. mag. c.c. A B, A, B.

coppie di un'inv. ellittica. Dare questa involuzione equi vale a dare la coppia dei suoi pt uniti, img.: quindi quest si può definire (la coppia) come un'involuzione ellittica reale

Così il concetto della coppia rientra in un concetto geom Come separare i due punti? An.te ciò avviene in base al segno con cui si assume i. Ora finchè si dànno a t valori reali, se questi sono positivi, tra O e +∞, il punto a+ti partendo da a va a b muovendosi in certo verso proietti vo (cioè riempie UN segmento ab) se negativi, da O a −∞ il punto si muove nel verso oposto, cioè riempie l'altro s segmento ab. Nel campo reale la distinzione del segno si può ~~collegare~~ con quella fra i due versi proiettivi di movimento sulla retta reale; così si spiega che Staudt abbia definito ~~aaaa~~ il punto img. come un'inv. ellittica su una retta, accoppiata con un verso ~~aaaa~~ proiett. di movimento su questa. Nasce così un ente complessivo geometrico reale, che Staudt definisce come punto img. e per il quale sviluppa la geom. proiettiva. E così fa (dualmente) per il piano img. (inv. in fascio, ecc.). E lo fa anche per il fascio di rette definendo così quello che chiama non retta img. ria senz'altro, ma retta img. di 1.a specie. Invero, dal punto di vista an.co, una retta img., messa in relazione con la sua coniugata può esserle sghe~~mba~~ op

È da tener presente che mentre nei casi prec.ti le forme fond.li dove ora definite l'el.to immag. ora unico, qui no, perchè ~~(per~~ per le rette immag. cos.ti si capisce che passano un ente, una infinite soluzioni, ognuna delle quali può servire per definire quella rette immag.ia di 2a specie.

osservazione quando via una rapp.e delle rette (v. sopra)

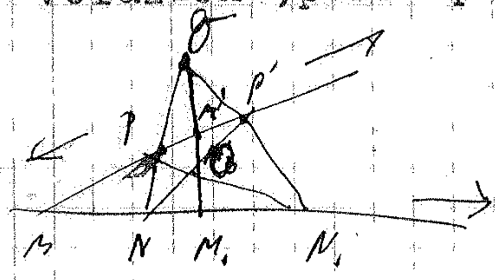


le rette r: AA, B, è di schiera opposta, e le rette AA, BB, e quelle segate da gg, hh, avendo i più conservazioni del verso per ragione.

pure incontrarla.Nell'u t mo caso essa possiede un pt e un piano reali;nel primo no(perchè il pt starebbe anche sulla con.ta).Si distinguono così le due specie di
(la 2a spec. dette ant. totalmente img.)
rette img. E la df.data conducendo a retta di un fascio reale,dà evid& te rtta di 1.a specie.Per quelle di 2.a specie,Staudt le definisce entro una schiera reale, dove sia data un'inv. ellittica come insieme di questa involuzione e di un verso proi. nella schiera.

Per questi el.ti img. Staudt costruisce poi la geom. ~~..~~ proiett. definendo la relazione di appartenenza,e poi facendo vedere che valgono le Pp. fond.:p/es. due punti individuano una retta a cui appartengono?ecc. ecc. Viene una teoria logicamente completa,ma assai complicata. Accenniamo p.es. a quella prima Pp fond. Naturalmente essa presuppone una df. di appartenenza fra punti e rette Per pt. img. e retta reale r,questa gli appartiene se è la re tta sost. dell(inv.(e al punto appartengono
(ant. negli altri casi)
i piani reali che passano per r).Se la retta è img. di prima specie si ha appartenenza quando la ptggiata ~~ABAB..è~~ l'involuzione AA, BB, è prospettiva all'inv. CC, dd, e sono pure prospettivi i versi che contri
ant. per pt. e piano img.
buiscono a costituire il punto e la retta.Per l'appartenenza fra punto e retta di seconda specie ~~...~~

Se le due inv. sono date su una stessa retta reale r, questa passa dunque per i due punti (e risulta poi la sola). se
(reali)
sono date su due rette r e s, e se queste sono incidenti SI RIESCE A CONGIUNGERLI CON una retta img. di prima specie (e risulterebbe, in questo solo modo). Invero, detto M il pt. rs, e risp. M1 M' i suoi corr.ti nelle involuzioni, posso poi p.es. determinare la prima con la



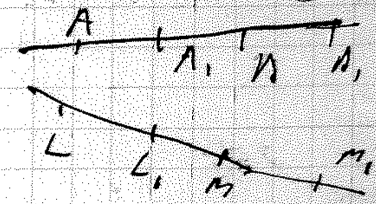
coppia (certo esistente) armonica a quella NN_1, e an.te la seconda con PP'. Allora le due quaterne MM_1NN_1 MM'PP' sono proiettive e anzi prospettive, cosicchè... concorrono in O, e l'inv. mm_1 nn_1 è prospettiva a entrambe le date. Resta la questione dei versi. Ora, fissato il resto si possono indifferentemente scambiare fra loro PeP': si hanno così due posiz. per O, da ognuna delle quali il verso dato su r si proietta nei due versi opposti su s, cosicchè la scelta si può fare in modo da ottenere proprio il verso prefissato su s, e allora questi due versi dàn luogo nel fascio a uno stesso verso che completa la retta img. congiungente. Resta da provare a congiungere due pt quando r e s sono schembe. ~~Pensiamo alla questione duale, dove date due rette schembe r e s per definire due piani~~ img ~~p e σ~~ ~~, si tratta~~ di arrivare

1 Come si vede m fare tutte

la g p. ~~fiere~~ smalti el ving e

avari completi

Allora si può anche qui prendere quaterna armonica AA_1BB_1 e poi LL_1MM_1 ;allora si ha una proi.tà fra le rette,congiungendo punti omologhi viene schiera,



e si può anche qui mettere a posto i versi.

Nat.te è cenno;resterebbe a veder bene in ogni caso l'unicità della soluzione. E così per le altre Pp fondamentali.

Ora Segre,svolgendo come incaricato nel 1885-86 il corso do proiettiva si è proposto di trattarvi gli elementi immaginari per quel tanto che era utile in un corso di quel genere,e cioè non facendo tutta una teoria,come Staudt,dello spazio di punti immaginari,ma soltanto introducendo,ma in modo completo e rigoroso le coppie di el.ti immaginari per quel tanto che interessano la geom. proi.va reale,in modo da andare però assai al di là di quanto aveva fatto inizialmente Staudt nella G d L.A ciò Segre ha dedicato la Memoria"Le coppie di elementi immaginari nella geometria proiettiva sintetica" Torino Mem 1886.L'idea essenziale è questa. Definita la coppia di el.ti img(sottinteso coniugati) in una forma di 1.a specie reale come un'involuzione ellittica si trattava anzitutto di definire la relazione di coppie coniugate armoniche che come tutti sanno nella trattazione di Staudt ha tanta importanza.Per due coppie reali AB,CD dire ciò equivale ~~come si vede facilmente~~ a dire che l'inv.ne iperbolica I di el.doppi AB e la J di el.ti doppi CD sono "permutabili",vale a dire $II' = I'I$.

 operazione di permutabilità

Invero se ho due inv. (sulla stessa retta) I e J io posso "trasformare I mediante J", cioè prendere tutte le coppie di I e trasformarle mediante J in tante coppie, che ap-
(punti corrispondenti in I), applicando I mediante J permutati $M, I(M)$
parterranno nat.te a una nuova ~~involuzione~~. Se ~~M~~ è una cop-

$J(I(M))$

$M \quad I(M) \quad J(M) \quad J(I(M))$ pia di I, sarà J(M) ~~J(M)~~ una coppia della nu-
corr.te dai $J(I(M))$
va. In essa il ~~coniugato~~ di ogni punto, p.es. di J(M), lo avrò applicando a esso la J^{-1} che dà M, poi I che dà I(M), poi J che dà $J(I(M))$ cioè J^{-1} poi I poi J: quindi trasformare I mediante J vuol dire applicare (cominciando dal 1° fattore a sinistra) $\boxed{J^{-1}IJ}$: questa è la trasf.ta della proi.tà I mediante J (e che il signif.to dopo detto. In particolare può darsi che questa trasformata coincida con la proi.tà I. Allora $J^{-1}IJ = I$, cioè moltiplicando a sinistra per J, $IJ = JI$: la cond. necessaria e suff. perchè la proi.tà J trasformi la I in sè è che esse siano PERMUTABILI. In particolare per due inv.ni iperb. la cond. della permutabilità è allora che la J trasformi la coppia unita di I in sè, perchè allora trasformerà la I in un'involuzione con gli stessi elementi uniti, cioè ancora in sè stessa. Ciò significa che C e D devono essere c.a. rispetto ad A e B come si era detto. Perciò si può assumere per df. di armonicità di due coppie, di cui una almeno immag. la permutabilità delle relative involuzioni, che servono a definirle.

Nota la nozione di coppie armoniche, si possono definire le coppie di punti immaginari che si corrispondono in una da

ta involuzione, come coppie armoniche rispetto ai punti doppi, ecc. Il punto essenziale è poi stabilire l'esistenza di punti immaginari uniti per le proiett.tà ellittiche (non involutorie). Siccome la coppia di punti uniti immag. di cui si tratta di provare l'esistenza in modo sintetico è definita come un'involuzione ellittica, tutto si riduce a provar l'esistenza di una involuzione ellittica unita, cioè di una involuzione ellittica mutata in sé (secondo p. prec.) dalla data proi.tà ellittica. O anche, secondo p. prec.te è da mostrare per ogni data proi.tà ellittica $\mathfrak{P}$ l'esistenza e la unicità di un'inv.ne ellittica con essa permutabile, I. Ciò si vedrebbe facilmente per via metrica, riducendo opportunam. la proiettività in un fascio proprio a diventare un'eguaglianza diretta (rotazione di un certo angolo α); UNA ~~e si vedrebbe la sola~~ inv. permutabile è l'inv.ne circolare: è invero lo stesso ruotare di α e poi di 90° o viceversa. Ma Segre vuole una dm.ne grafica. E dà la seg.te

Sia detta P la proiettività per un dato punto A; $A_1 = P(A)$, $A_{-1} = P^{-1}(A)$. Sia α al momento un altro punto qualunque della retta. Allora trasformando ~~...~~ con la proi.tà la quaterna $A\,\alpha\,A_{-1}\,\alpha_{-1}$ ho (scambiando a due a due) (pensando a binaria)

$$A\alpha A_{-1}\alpha_{-1} \;\bar{\wedge}\; A_1 \alpha_1 A \alpha \;\bar{\wedge}\; A\alpha A_1 \alpha_1$$

che vale ripetiamolo per A e α qualunque $\boxed{A\alpha A_{-1} A_1 \underset{(1)}{\bar{\wedge}} A\alpha\, \alpha_{-1} \alpha_1}$

D'altro lato, per provare completamente l'unicità di I, se questa

1 trasf con P (permutazione a I) di una coppia di I

E con A_{-1}, α_{-1} in senso inverso esiste, supponiamo che in essa sia α il coniugato ~~di~~ A. Si ha allora in questa ipotesi che ~~Aα~~ $A_1\ \alpha_1$ sono pure coniugati in I (punti si corrispondono nella involuzione $P^{-1} I P$ che per ipotesi coincide con I) e così A_{-1} e α_{-1} (ottenuti l'ultimo da A_{-1} mediante $P I P^{-1}$ che è anche $= I$). Avremo così tre coppie di una inv. cioè

(2) $$A\,\alpha\ \alpha_{-1}\,\alpha_1 \;\overline{\wedge}\; \alpha\, A\, A_{-1}\, A_1$$

Allora (1)·(2) dà (elym.)

(3) $$A\,\alpha\, A_{-1}\, A_1 \;\overline{\wedge}\; \alpha\, A\, A_{-1}\, A_1$$

Perciò, se esiste I, la (3) precisa la posizione del punto che in essa è coniugato di un qualunque A: invero la (3) dice che A e α sono c. arm. rispetto a A_1 e A_{-1} (equivale proprio a ciò); cosicchè α non può essere che il c. a di A rispetto a A_1 e A_{-1}. Quindi se I esiste, è unica. Per l'esistenza, è da far vedere che accoppiando a ogni A l'α così ottenuto si ha proprio un'Inv., permutabile a P. Ora preso tale α, sussiste la (1); che valeva per α qualunque: sussiste inoltre la (3) che traduce la posizione armonica assunta per α. Ma il confronto (1)-(3) dà (2) (elym. do $A\alpha A_{-1} A_1$) Questa allora esprime che le tre coppie $A\,\alpha$, $A_1\,\alpha_1$, $A_{-1}\,\alpha_{-1}$ appartengono a una certa involuzione; chiamandola K, questa porta le coppie $\begin{pmatrix}A_{-1} & A & \alpha_{-1} & \alpha\\ A & A_1 & \alpha & \alpha_1\end{pmatrix}$ della π-ca P nelle $\begin{pmatrix}\alpha_{-1} & \alpha & A_{-1} & A\\ \alpha & \alpha_1 & A & A_1\end{pmatrix}$ cioè la P in sè. Ora $K^{-1}PK = P$ che dice P e K essere effettivamente permutabili c. d. d.

4

39

Segre può poi così svolgere la teoria delle pori.tà ellittiche (p es individuare una con i "punti uniti" cioè l'involuzione unita e una coppia di el. corr.ti), ecc. E poi fare le applicazioni in modo rigoroso alla teoria delle coniche: p.es. ricordo un'osservazione che giustamente fa Segre. Se si sviluppa la teoria delle coniche secondo Steiner, cioè in base ai fasci proiettivi, e ci si accontenta di dire che una retta esterna alla conica sega la conica in due punti immaginari coniugati, adottando per df. come tali i punti uniti dell proi.tà segata....., la trattazione non è sufficiente, perchè nulla prova a priori che la coppia degli el. uniti così definita sia sempre la stessa al variare dei centri. Dal punto di vista di Segre, si tratta di far vedere che tutte quelle proiettività hanno la stessa involuzione unita, e Segre dimostra precisamente questo. Anche i teoremi di Sturm, Desargues ecc. restano stabiliti per le coppie di el.ti img in modo rigoroso. Una semplificazione che si ha nella trattazione di Segre riguarda poi le rette img. di seconda specie, che Segre tratta come (rette unite di) involuzione biassiale ellittica, ovviando così all'inconveniente rilevato a p. 424). ~~Staudt non poteva fare così, perchè gli sarebbe mancato il "senso" dell'involuzione.~~

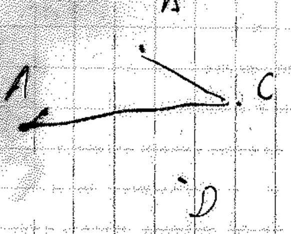
Un carattere completamente diverso hanno invece le 4 Note "Un nuovo campo di ricerche geometriche" Torino Atti 90. Il punto di partenza di Segre (esposto nella Introd. e alla 1ª Nota) è questo, che, introdotti nella geometria gli elementi immaginari il loro studio non era (e in parte si può dire non è) stato condotto avan

L che sarà più sempre
Tra la quella

ti come meritava, sembrando a Segre un soggetto degno di essere studiato questo: lo spazio ordinario (p.es), introdotti i punti complessi viene a avere non solo più ∞ ma ∞ punti (riferendo l'esponente di ∞ a parametri reali). Sono dunque da studiare secondo Segre le totalità ∞ di punti dello spazio. Una curva o una superficie con i loro punti complessi dànno esempi di totalità ∞ o ∞ di punti ma molto particolari; la totalità dei punti reali di una curva o sup. reale dànno esempi di totalità ∞ o ∞, ma sempre particolari. Si tratta dunque di iniziare studi in tale indirizzo .

Cito subito, perchè ne prendiamo conoscenza, un esempio di tali enti ∞, che compare in Staudt col nome di catena (Beltraege): è l'insieme degli el.ti di una forma di 1.a specie, diciamo punteggiata che con tre el.ti fissi dànno un birapporto relae (inStaudt in altro modo, evitando i birapporti); p.es. tale è l'insieme dei punti reali di una retta reale; ma più in generale tre punti qualunque di una retta definisconoevid.te una tale catena. E' anche chiaro (coord proi) che 4 pt. qualunque di catena dànno birapporto reale. Sono esempi di enti ∞ . Queste catene assumono unaspetto particolarmente semplice quando si rappresentano i punti complessi nel piano di Gauss: se A B C D sono 4 punti della retta complessa, definiti dai 4 valori complessi dell'ascissa, o dai risp. pt omonimi nel piano di Gauss

$(ABC):ABD = \frac{\gamma-\alpha}{\ldots}$



il birapporto è (ABCD) = ~~$\frac{AC\,BD}{BC\,AD}$~~ = $\frac{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}{(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)}$

Ora l'argomento di $\gamma-\alpha$ è l'angolo che l'asse reale fa con AC, etc.; l'argomento di (ABC) risulta, per differenza, l'angolo d'AC, BC. E l'argomento del birapporto è $\widehat{ACB}-\widehat{ADB}$ (a meno di multipli di π) quindi dire che il birapporto è reale è come dire che i due angoli ACB, ADB sono eguali, cioè i 4 punti $ABCD$ su una circonferenza (o event.te su una retta). Il ragionamento è invertibile: quindi con la rappresentazione di Gauss le catene dànno luogo a cerchi (inchiuse le rette) (e viceversa).

La rappr.ne dei pt complessi di una retta qui indicata ha carattere metrico, ma è facile darle aspetto proiettivo, il quale anzi conduce a considerare la rapp.ne di Gauss sotto nuova luce. Come forma di 1.a specie coi suoi el.ti complessi prendiamo anzichè punteggiata un fascio in piano reale con centro O img. Allora ogni retta generica per O, p.es r ha uno e un solo punto reale, la sua int.ne con la coniugata $\bar{r}$ per $\bar{O}$, e conduce così a un punto reale R, e viceversa ogni tale dà r per O. È nuova rapp.ne degli el.ti complessi di una forma fond. di 1.a specie in una totalità reale. Si ha solo eccezione quando come retta per O anzichè r img. si prende l'unica reale, cioè $O\bar{O}$, perchè allora R è ind.to sulla retta stessa. La rapp.ne include la precedente, prendendo come O, ecc. i pt ciclici. Se in O è

$x_1 + ix_2 = 0 \quad x_3 = 0$, il relativo fascio di rette r è $x_1 + ix_2 - (a+ib)x_3 = 0$
dove $a+ib$ è coord. $\bar{z}$ nel fascio e così individua r

$x+iy = a+ib$. Altra del pt. $R = r\bar{r}$ è $x=a \quad y=b$ (come

è diverso: quindi la retta di coord. propria $a+ib$ nel fascio O viene ad avere per immag. nel piano il pt. di coord.te cartesiane a, b. È proprio la rapp. di Gauss (sostituendo al fascio, per punto app. a b). Qui si escludono la retta im-propria ($O\bar{O}$) cioè $a+ib=\infty$, cosicchè si rappresentano nel piano di Gauss solo i valori finiti di $a+ib$ (pt. propri). La r_∞ non ha pt. cor.te determinato via gr ∞ di r_∞. Ciò si evita costruiamente sostituendo al piano la sfera ottenuta per proi. stereografica, il che ri-pristina un cont. di $a+ib=\infty$.[1] Del resto, la rapp.ne dei pt complessi di una forma di prima specie sulla sfera così ottenuta si può anche avere direttamente, pensando una Q a punti ellittici (p es sfera) come insieme delle rette img (di 1.a specie) di una schiera; se si prende questa come img di una forma di prima specie si ha per ogni suo elemento, immaginario (e lo sono tutti) il punto intersezione colla retta coniugata (appartenente alla sfera opposta) a Viene così rapp.ne biun.ca senza eccezioni delle rette di una schiera, come forma elementare, nei punti reali di una Q a punti ellittici - Con proi. stereogr. [illegible] (dei pt reali) di

[1] Paragonando il caso generale a quello particolare ove le catene dimostri si capisce (Cfr. N.° 255) che qui generale le catene danno C. per $O\bar{O}$.

estendendo la rapp.ne di Gauss. cioè ~~per~~ per $x_1 = a_1 + ib_1$ etc. prendendo in S_{2h} le
cond.te non omogenee $a, b, \ldots$. A quel
S_{2h} si può (e conviene spesso) sostituire (come
al piano di Gauss la sfera) i pl. di una opportuna
M_{2h} riferita algebricamente a quello (nel caso di
Gauss ma la proi.ne stereografica.

ricadrebbe sulla rp.ne generale piana che precede, cosic chè (v. nota) attualmente le catene hanno per immagine le sezioni piane della Q. All'ultima rapp.ne si giungerebbe ancora altrimenti, addottando con Staudt come F_1 una retta immagin. di seconda specie: allora ogni suo punto r m ata su una retta reale, la quale si appoggia ad r e $\bar{r}$ e viceversa ogni m ~~appoggiata~~ reale app.ta a m $\bar{m}$ dà pt di r. Si ha così rapp.ne dei punti complessi di r senza eccezione sulle rette reali della cgrza lin. a direttrici img con.te r $\bar{r}$. Ma questa notoriamente equivale a una Q reale di S_3 e si ricade sulla rapp.ne precedente

Tornando dopo questa digressione al lavoro di Segre nella Introduzione egli osserva che il nuovo indirizzo si può sviluppare in due sensi diversi, creando cioè per i nuovi enti l'analogo della geometria differenziale oppure quello della geometria algebrica. Il lavoro di S è ~~dunque~~ essenzialmente in questo secondo indirizzo. La cosa va intesa così. Gli el.ti complessi di una forma di specie h (di ciascun retta piano spazio coord.e $(x_1 \dots x_h)$) ($h = 1,2,3$) si possono rappresentare ~~[illegible]~~ nei punti reali di una S_{2h}; come si disse ora per i_ 1, e come si estenderà poi. Allora lo studio di una totalità ∞^i di ~~punti~~ el.ti ~~compl~~ complessi della forma equivale allo studio di una varietà V_i contenuta nella M_{2h}. Segre chiama iperalgebriche quelle totalità che si hanno n le V_i immagini è algebrica

Supposto p es di essere nello spazio, ogni V_4 algebrica è sulla M_0 inters.ne di un certo n° di V_5. Quindi ~~xxxxxxxx~~ una particolare importanza avranno le ∞^5 iperalgebriche di pt complessi che possono come int.ni dare tutte le varietà iperalgebriche di minor dimensione come loro int.ni. Come si rappresentano queste ~~xxxxxx~~ V_5 iperalgebriche? La V5 immagine avrà un'equazione algebrica $F(x_1, \dots, x_6)=0$; posto $x_1 = x_1 + i y_1$, $\bar{x}_1 = x_1 - i y_1$ ecc. $x_1 = \frac{x+\bar{x}}{2}$ $y_1 = \frac{x-\bar{x}}{2i}$ viene un'equazione che lega le $x\, y$ e le coniugate $\bar{x}\, \bar{y}$, $\boxed{\Phi(x, \bar{x}) = 0 \quad (1)}$ con Φ polinomio. Così dunque si può rappresentare ogni v.tà iperalgebrica a 5 dimensioni reali. E viceversa? Se parto dalla (1), essa ~~xx~~ scrivendo $P + iQ = 0$ mi dà DUE equazioni algebriche, gen.te distinte nelle sei variabili reali ($P=0$ $Q=0$). Quindi non si può dire che viceversa ogni (1) rappresenti una varietà ~~xxxx~~ iperalgebrica ∞^5 del tipo richiesto. Perchè ciò avvenga dovrà esistere un fattore comune a P e a Q (p es addirittura le due ~~xxxx~~ equazioni $P=0$ $Q=0$ ~~cioè~~ cioè $\Phi=0$, $\bar{\Phi}=0$ coincidere fra loro ~~xx~~ come avviene quando nell'equazione $\Phi(x, \bar{x})=0$, sviluppata, insieme a ogni termin vi è quello complesso coniugato.

E' però da osservare che la presenza di un fattore k comune a P e a Q oppure addirittura il verificarsi di quest'ultimo caso rende possibile, ma non rende certa l'esistenza di una var.tà iperalg. a 5 dimensioni, perchè occorre

ancora che l'equazione unica, diciamo $R=0$ a cui si riducono le $P=Q$.., sia soddisfatta da ∞^5 valori ~~reali~~ (tali essendo le $x_1 \dots x_6$) il che può avvenire o non avvenire. Prendiamo p es. per φ.. l'equazione

$$a x\bar{x} + b y\bar{y} + c z\bar{z} + d = 0$$

con $a\ b\ c\ d$ costanti, cioè $a(x_1^2+x_2^2)+\dots\dots+d=0$.
Se le a sono n.i complessi quindi $a=a_1+ia_2$ ecc. si hanno le 2 eq.ni

$$a_1(x_1^2+x_2^2)+\dots\dots+d_1=0$$
$$a_2(x_1^2+x_2^2)+\dots\dots+d_2=0$$

gen.te distinte tra loro. Per scelte particolari delle $a \dots d$ possono ~~ridursi per~~ ridursi a una - p. es. se $a\ b\ c\ d$ sono reali (manca allora la 2ª eq.). Ma non è detto che la 1ª sia soddisfatta da ∞^5 valori: p. es. se a_1, b_1, c_1, d_1 sono >0 non è addirittura soddisfatta mai.

Le quattro note di Segre studiano soltanto le prime varietà algebriche che si presentano; ma esse studiano anche le corrispondenze che si presentano come neccessarie in questo studio e che sono in sostanza l'analogo delle corrispondenze proiettive. Analogo in questo senso, che le df. delle proi.tà tra forme di varie specie come si dànno nella trattazione grafica di Staudt (per prima specie biun. conservazione dei gruppi armonici, per l' altre biun.tà e

in quella dim. ne scende
$f = x$

Potremmo sostituire il n. 1° dell'appuntamento più generale formato da (1) e da

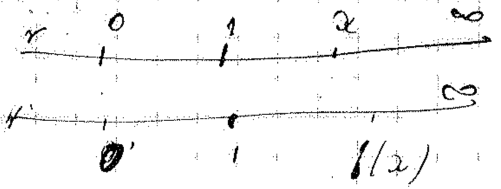
$$(2) \quad f(xy) = f(x)\, f(y)$$

(omomorfismo)

Infatti $f(xy) = f\left(\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}\right) = \frac{1}{4}\left\{[f(x+y)]^2 - (f(x-y))^2\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\left(fx+fy\right)^2 - \left(fx-fy\right)^2\right) = f(x)f(y).$

conservazione degli allineamenti o della complanarità) quando si considerano le forme stesse come insiemi di el.ti complessi non definiscono soltanto più le proi.tà, ma anche delle nuove corr.ze. Sono queste che Segre studia a fondo. Cominciamo dalle formedi prima specie. Riprendiamo la ricerca delle corr.ze biunivoche e conservanti i gruppi armonici, come si fa nella dm. del teor. di Staudt. Allora



faccio corrispondere i punti O 1 ∞

Se al pnto variabile x corrisponde f(x) la armoneità dà per la f le due equazioni funzionali

$$(1)\quad f(x+y) = f(x)+f(y) \qquad (2)\quad f(x^2) = [f(x)]^2 \quad \text{con } f(0)=0,\ f(1)=1$$

(che si ottengono tarsformando un gruppo armonico formato da x, y, $\frac{x+y}{2}$ e ∞ ; e l'altra il c. a del punto 1 rispetto a x e -x). Si tratta quindi, per precisare la natura della corrispondenza di risolvere il sistema di equazioni scritte. Se si studia la questione nel campo reale, (cioè per x reale e per f funzione reale) la questione si porta a termine rapidamente. Se si ha solo la prima equazione, essa anche nel campo reale dà luogo a difficoltà se non si fa nessuan potesi a priori sulla natura della funzione f. Una sua soluzione con le condizioni si limoti poste è

e allora si ha evid.te [illegible]

evidentemente $f(x)=x$, ma la difficoltà sta nel sapere se ve ne sono altre. Altre se ne sono costruite, ma facendo interve

nere il principio di Zermelo, e sono di natura estremamente lontana dalla continuità. ~~Non pare facile~~ risolvere la (1)

questione dell'esistenza o meno di soluzioni diverse da $f : x$ senza ricorrere al principio di Zermelo. La questione diventa invece molto semplice se si suppone la continuità

o qualche altra cosa per f — si ha la 4 $f(nx) = nf(x)$ per n intero ecc. Altre (x:1)

nuità, perchè allora trattando la (1) per i valori intieri e poi razionali si ha facilmente $f : x$, e per continuità ne segue $f(x) \equiv x$. ~~[illegible]~~

Allo stesso risultato si arriva anche con Darboux se invece di supporre f continua si suppone l'esistenza di un intervallo ove f sia limitata. Invero se per un certo a non è $f(a) = a$, introduciamo la nuova funzione

$$g(x) = f(x) - x \qquad \text{onde } g(a) \neq 0.$$

Ed è $g(x+y) = g(x) + g(y)$ onde se m e n sono razionali $g(mx+n) = g(mx) + g(n) =$ (ancora) $m\,g(x) + n \cdot 0 = m\,g(x)$. In particolare

$$g(ma+n) = m\,g(a).$$

Ora preso un intervallo a piacere I si possono determinare prima un m raz. tale che $m\,g(a)$ sia grande a piacere positivo o negativo e poi un n raz. tale che $ma+n$ stia in I. Quindi se non è dappertutto $f = x$, la f è non limitata in ogni intervallo (né superiormente né inf.)

I è pur V. libro F. Terza
Curve

Studiare curve: $y = x$

$y = x^{-}$

Continuità continuità

Discontinuità

ra quando si studia il sist. (1)-(2) la (2) serve a far
edere che le soluzioni sono limitate(perchè f è postiva
er le x positive;quindi ho lim.ne inferiore)Allora si
onclude che nel campo reale la sola soluzione del sistema
con le date cond.i per 0 e 1 è $\underline{f = x}$. (Un altro modo
i ragionare nello stesso campo è questo;da (2) concludere
a crescenza della f perchè $f(x+h^2) = f(x) + [f(h)]^2 \geq f(x)$)
o esposto l'altro modo perchè esso prepara in certo senso
lterreno a quanto avviene NEL campo complesso per il sistema (1)-(2).) Qui,anche studiando già il sistema,non sembra
he si riesca senza altre ipotsi a dimostrare o escludere
'esistenza di soluzioni ~~distinte da quella evidente~~. Quanto
i può dire di certo è che se queste altre soluzioni vi sono
ono di natura molto strana,così come era sopra per la sola
1),cioè sono estremamente discontinue.P.es. ho dimostrato
he se vi è un'altra soluzione,questa,comunque si prefissi
n n° K,su ogni archetto piccolo a piacere di curva analiti
a del piano la f prende valori che sono vicini a piacere
K. Quindi f è "molto discontinua", perchè K è arbitrario. Anche per
dimostrare ciò (dove non occorre che f è cont. e f = x) prima
dimostro che nel campo complesso una soluz. cont.
del sist. (1)-(2) si riduce a $f = z$, $f = \bar{z}$. Infatti $f = x$ per x
reale rappresenta al limite per f reale. Quindi
per a reale $f(a) = a$.

457

trasf. proj. cons.e di r e di $\bar r$ (ove r si quale è reale) ; ho allora una proj. cond. d' $\bar r$ corrisp.te ling. cons.e d r $\mathfrak{L}\, y^* = \bar x$ che è cons.te antiproj. (muta i bir. nel. ling. con.)

$\vdash$ d proj. e ant. è ant.

~~analiticamente~~ si ottiene ~~facendo~~ seguito dalla $\overline{\text{trasf. r e r}}$ proj. (pos.) prima il ~~...~~ passaggio con cui passa da x a $y = \bar x$ e poi la proj. ${}^{\text{tra r e r}}$ $x = f(\alpha) = y (\bar x)$. Ciò che ha ... l'eq. alle quali quale antiproj.tà

$$y = \frac{a\bar x + b}{c\bar x + d} \qquad ad - bc \neq 0 \;.\; \underline{\text{forme simmetriche}}.$$

$A^c = P \quad A = PC$

Poi $[f(i)]^2 = f(i^2) = f(-1) = -1$ cioè $f(i) = \pm i$

Così per b reale (3) dà $f(bi) = \pm bi$

dove $\pm$ è lo stesso qualunque sia b. Quindi

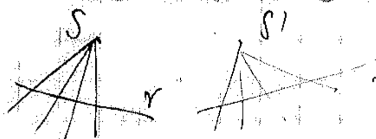
$$f(a+bi) = f(a) + f(bi) = \begin{cases} a+bi \\ a-bi \end{cases}$$

valendo sempre il segno + o il segno −.

Il sist.ª (1)-(2) con $f(0) \neq f(1)$ ha le due sole soluzioni $f(x) = x$ $f(x) = \bar{x}$. Vi sono due corr. biunivoche conservanti i gruppi armonici che portano 3 pt. dati in 3 pt. M. Esse si possono distinguere una dall'altra in quanto la prima evidentemente conserva tutti i birapporti, e la seconda evid.te li muta nei complessi coniugati (e conserva perciò quelli reali). La prima è una proiettività, la seconda è chiamata da Segre un'antiproiettività. Riassumendo se si studiano le corr.ze tra F biunivoche e conservanti i gruppi armonici la trattazione nel campo reale e in quello complesso porta a queste conclusioni diverse: nel campo reale, senza nessuna ipotesi supplettiva si hanno solo le proiettività; nel campo complesso, con qualche ipotesi supplettiva, p es continuità si hanno DUE tipi di corr.ze, cioè proi.tà e antiproiettà. Da quanto si è detto segue che un'antiproi.tà si può individuare con tre coppie; che ~~a~~ il prodotto di due antiproi. è una proi; che un esempio di antipr. è il coniugio ~~(...)~~. Ogni ~~...~~ antiproi. si può ottenere come prodotto di una proi. per un coniugio (nella trattazione di sopra l'antiproi. ~~...~~ $f(x) = \bar{x}$ ~~è il prodotto della $f(x) = x$ e del coniugio x, $\bar{x}$~~)

2. Se il probl. delle pp
prec. cioè (1) (2) ha
soluzione diversa da f.
le $x' = f(x)$
$y' = f(y)$
danno soluz. altre e diverse
trovate da
$$ax + by + c = 0 \quad \text{segue}$$
$$f(\qquad\qquad) = 0 \quad \text{come}$$
$$f(a)f(x) + f(b)f(y) + f(c) = 0$$
cioè
$$f(a)x' + f(b)y' + f(c) = 0$$

Passiamo ora a p.es. piani punteggiati, studiando una cor r.za (C) biunivoca e conservante gliallineamenti. Riprendendo il solito rag.to di Staudt si vede che fra rette corr.ti r e r' è subordinata una corr.za biun.ca e conservante i gruppi armonici. Se supponiamo, come vogliamo la C continua anche quest'ultima è tale e quindi proiettiva oppure antiproi.va. Se è proiettiva anche per UNA coppia r, r' è sempre proiettiva, e allora C è unaomografia. Infatti se tra r e r' ho proi.tà, presi pt omologhi in C fuori di



r e r', siano S e S', tra questi fasci ho proiett.tà o antiproi.tà, e prec.te proi.tà perchè il primo fascio è prosP alla r e il secondo alla r', che sono proi tra loro. Quindi fasci omologhi (coi centri fuori...) sono proiettivi; tagliandoli con rette omologhe s s' ahà che queste sono proi.ve ecc. (e poi i nuovi fasci coi centri [illegible]) Allora C subordina fra due F$_1$ omologhe qualunque una proi.tà. Possiamo chiamare C un'omografia, in quanto valgono eff.te per C le proprietà delle omografie quali si deducono nei corsi di proi.va dal fatto di subordinare proi.tà tra F$_1$. Supponiamo invece che una volta fra r e r' e quindi sempre tra F$_1$ venga subordinata antiproi.tà. Si avrà allora tra i due piani una corr.za non omografica e pur conservante gli allineamenti; si chiama antiproi.tà (antiomografia, anti

repre.tà, ecc. E così in S3)

Per individuare e costruire p es antiomogr? tra due piani π e π' serve il solito proc.to della geom proi opportunamente modificato. Si danno p es. A, A'; B, B' e antiproi.tà tra A, A'; B, B' che facciano corrispondere ad AB sempre $A'B'$. Quindi si individua antiproi.tà tra F2 e risp; F3 con 4 e risp. 5 coppie di el.ti corr.ti indipendenti ecc. Prodotto di 2 antipr è proi.; di anti e di proi è anti, ecc. Un esempio di antiproi.tà è il coniugio tra π e $\overline{\pi}$; che invero è biunivoco, conserva gli allineamenti (mutando la retta $ax+by+c=0$ nella $\bar a \bar x + \bar b \bar y + \bar c = 0$ (compl.e conj/te) e non è proi.tà perchè fra rette corr.ti ~~subordina~~ e evnt. reali coincidenti) subordina il coniugio che è antipro. tra F_1). Ogni antipr. si può ottenere come prodotto di proi.tà e di coniugio: invero la antiomogr. tra π e π' $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ P & Q & R & S \end{pmatrix}$ si può ottenere ~~come prodotto~~ eseguendo p.es. ~~...~~ il coniugio della omografia $\begin{pmatrix} P & Q & R & S \\ \bar P & \bar Q & \bar R & \bar S \end{pmatrix}$ tra π' e $\overline{\pi}'$ e poi la ~~e del coniugio~~ proi.tà $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ \bar P & \bar Q & \bar R & \bar S \end{pmatrix}$ tra π e $\overline{\pi}'$; invero il prodotto così ottenuto è appunto una e quindi la anti ~~om.ia~~ $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ P & Q & R & S \end{pmatrix}$

Perciò possiamo subito avere la rappresentazione analitica di una antiproi.tà ~~tra i piani~~ p.es. antiom.a tra i piani (x') e (x). Basta dalle x alle $\bar x$ e poi sost. lin. tra le x' e le $\bar x$. In definitiva $x'_i = a_{i1}\bar x_1 + a_{i2}\bar x_2 + a_{i3}\bar x_3$.

E così in ogni caso

~~[illegible]~~

~~T [illegible] $\vec{z}$~~

~~transf continue~~

~~discontinue~~

Come si comportano le antiproi.tà in fatto di el.ti, p es punti uniti? Se A è antiproi.tà tra forme sovrapposte (di 1.a specie, e se no antiomografia), A^2 è evid.te proi.tà (omografia): se U è un punto unito di A, lo è anche di A^2, ma non viceversa: se U è unito per A^2, può non essere unito per A, bastando che da A sia mutato in U' che poi A riporti in U, quindi può anche darsi che U faccia parte di una coppia involutoria. Pensiamo anzitutto al caso in cui A NON è un'antiinvoluzione (spiegare), cioè A^2 non è un'identità: allora 1) se siamo su una punteggiata, questa omografia non identica possiede due el.ti uniti, reali o immaginari gen.te distinti (diciamo general.te proprio in questo senso). Ciò significa che su una punteggiata un'antiproi. non involutoria in generale (vuol dire a quadrato non parabolico) o possiede una coppia involutoria, e nessun punto unito, oppure possiede due punti uniti e nessuna coppia involutoria. Si osservi la differenza dalla proi.tà non solo perchè ci può essere una coppia involutoria senza che lo siano tutte, ma anche perchè i punti uniti possono mancare, sia come reali sia come img.ri. Dal punto di vista analitico le cose vanno così. Se l'antiproi.tà è (p. 452)

$$a\bar{x}x' + b\bar{x} + cx' + d = 0 \qquad (1)$$

con $a = a_1 + ia_2$ ecc., cerco i pt. uniti, ponendo $x = u + iv$

$$(a_1+ia_2)(u^2+v^2) + (b_1+ib_2)(u-iv) + (c_1+ic_2)(u+iv) + d_1+id_2 = 0$$

Intanto possiamo limitarci a studiare il caso $a = 1$ come è ovvio se $a \neq 0$: ma anche per $a = 0$ ci si riduce a quel caso cambiando sist.^{a} di riferimento ($a = 0$ non è nat.^{te} perchè esprime che a $x = \infty$ corrisponde $x' = \infty$).

A priori si potrebbe anche pensare alle forme di passaggio cachino nullo (sospetto ...); ma ciò non può avvenire. Infatti allora ($a_1 = 1$) nelle eq.^{ni} (*) il discr.^{te} è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ b_1 & b_2 & d_1 \end{vmatrix} = d_1 - b_2^2 - b_1^2 \qquad \begin{cases} b_1 = \dfrac{b_1 + c_1}{2} \\ b_2 = \dfrac{b_2 - c_2}{2} \end{cases} \text{ per } b = \bar{c}$$

$$= ad - bc$$

e allora l'antipr.^{tà} degenererebbe.

cioè $\begin{cases} a_1(u^2+v^2) + b_1 u + b_2 v + c_1 u - c_2 v + d_1 = 0 \\ a_2(u^2+v^2) + b_2 u - b_1 v + c_2 u + c_1 v + d_2 = 0 \end{cases}$ (*)

eq.ni di 2 cerchi affatto generali (si potrebbero dare a caso e determinarne poi b_1 b_1+c_1, b_1-c_1 cioè c b e d). Secondochè essi hanno o no pt. comuni, si avrà o no pt. uniti per A. I due casi hanno per ciò dire la stessa generalità. - L'ipotesi che una si tratti di un'antiinv.ne gioca così: si ha antiinv.ne se (1) ~~[illegible]~~ x e x' si corrispondono in doppio modo: cioè se ~~[illegible]~~ (1) equivale a $a\bar{x}'x + b\bar{x}' + cx + d = 0$ (2).

cioè passando alle coniug.te a (3) $\bar{a}\bar{x}x' + \bar{b}x' + \bar{c}\bar{x} + \bar{d} = 0$.

Ciò avviene certo se $a : b : c : d = \bar{a} : \bar{c} : \bar{b} : \bar{d}$, e solo allora (perchè solo allora le 2 eq.ni bilineari (1) e (3) fra $\bar{x}$ e x' coincidono) Preso (riccome si è) in (1) $a = 1$ (~~[illegible]~~) ho allora $\begin{cases} b = \bar{c} \\ c = \bar{b} \end{cases}$ $d = \bar{d}$

cioè d reale e b e c coniug.ni coniugati, e nella 2ª eq. (*) viene $a_2 = 0$, $b_2 + c_2 = 0$ $b_1 = c_1$ e $d_2 = 0$, cioè essa svanisce. e si ha solo la 1ª, cioè tutto un cerchio ~~(un cerchio~~

Adunque se si parte da un'antiinv. le due eq.ni (*) si riducono a una. E viceversa perchè (per $a = 1$) se ciò avviene, la prop.ne fra la 2ª eq. e la 1ª, avendo riguardo che $a_1 = 1$ $a_2 = 0$ non può che risultare dall'annullarsi id.co della 2ª. E allora d è reale e $b_2 + c_2 = 0$ $b_1 - c_1 = 0$ cioè $b = \bar{c}$. Cosa si può dire allora dei pt uniti dell'antinv.? Il cerchio considerato è semprereale (ha eq.ne reale, cioè è con.to di sè stesso, nozione generale diente reale): ma con la terminologia impropria in uso nella geom an el.re può essere reale oppure immaginario (cioè avere infiniti pt reali o nessuno). Corr.te a ciò vediamo (p. 441, dove i cerchi erano evid "reali") che una vediamo quando A - sempre un'involutoria - può avere infiniti punti uniti. Allora antiinvol.ne in una forma di prima specie o non ha nessun ELEMEnto unito,oppure ne ha infiniti formanti una catena.

2) Tornando al caso non involutorio,accenno alle anti omografie p es nel piano.Allora l'omografia A^2 non è identica:nel caso "generaleà in cui essa ha tre punti uniti, l'antiomografia A avrà,secondo p 403 tre punti uniti e nessuna coppia involutoria,oppure un punto unito e una coppia involutoria.Ma sono possibili varie particolarità:p.es. ~~potrebbe~~ A^2 ~~essere~~ è un'omologia; se M e q sono l'asse e il centro,un punto generico P di q ha come corr.te in A un punto parimenti unito per A^2(perchè se è distinto da P forma con esso coppia involutoria)e quindi,per la genericità di P,situato su q.Quindi q è unita,e per conseguenza M è unito.Quanto ai punti di q,la A subordina su q un'antiproiettività,necess.te involutoria(ogni punto P e il suo corr.te si corrispondono in doppio modo),la quale attualmente si trova nel caso di avere tutta una catena di punti uniti (avendo per ipotesi infiniti punti uniti).Quindi se A ha infiniti punti uniti senza essere involutoria ha un punto e una catena rettilinea di punti uniti.

E le antiinvoluzioni piane?Conviene premettere il concetto di catena piana,o più gen.te di catena di S_r,generalizzando così le catene delle forme di prima specie(che p 438 erano tutte proiettive a quelle formate dai punti reali di una retta reale);si chiama catena di S_r la totalità ∞^r ottenibile dai pt reali di uno Sr reale mediante un omografia (p.es. catene piane, catene spaziali etc.).

delle catene
a una catena C per un pane una retta ~~[illegible]~~
e comune con C una catena rettilinea
(per Poinc. una retta
reali).

[cont.[e] di n i pt. individuano una catena da n° $\leq r+1$).

Un' omografia muta, com'è ovvio, delle
Of. catene in catene. Ma anche un'antiomo-
grafia: infatti questa è (p. 457) prodotto d'un'omo-
grafia (che muta catene in catene) per un coniugio,
e questo muta la catena $\Sigma \lambda_i x^i$ nell'insieme
$\Sigma \lambda_i \bar{x}^i$ che è ancora una catena (le λ sono
reali). — Le p.tà delle catene si hanno poi facilmente da quelle
di pt. reali: così nel piano ~~[illegible]~~ una retta e una catena
piana hanno a comune un pt. ~~[illegible]~~ o invece una
catena rettilinea (perchè su una retta di pt. reali ne ho uno, o
una catena ne è reale). Ancora nel piano, se P non appartiene
(e allora le rette si diciamo retta della catena

Per $r+2$ punti indip.ti di S_r passa UNA catena; una perchè posso riferire quello S_r a uno reale in omogr.ia in cui a quei punti ne corrispondano altrettanti reali, e allora la catena di punti reali di cui fan parte quesi ultimi dà appunto una catena delle cond.richieste. È una sola: perchè ridottici al caso di pt reali $A_1 \ldots A_{r+2}$ ogni catena $\mathcal{C}$ per essi si deve ottenere con omogr. dalla catena C' formata comunque da S'_r reale; presivi $A'_1 \ldots A'_{r+2}$ ind. l'omografia definita da $\frac{A_1}{A'_1}$ ecc. (reale) porta pt.reali di S' in pt reali di S_r, cioè si ottiene sempre nec.te la catena dei pt reali di S_r. Dal pt.di vista analitico segue evid.te che la catena definita in S_r dai punti x^1, x^{r+2} è quella dei pt. $\lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_{r+2} x^{r+2}$ con le λ_i reali

Ora, data una antiinvoluzione piana, sia r una sua retta non unita: il punto rr' ha per corr.te r'r cioè è unito. Vi sono dunque infiniti punti uniti. An.te vi sono infinite rette unite (congiungendo P non unito con P'). Se m è retta unita, su essa è subordinata un'antiinvoluzione, la quale si trova attualmente nel caso di avere punti uniti (basta prendere p.es il punto comune a m e a un'altra retta unita, certo esistente) e ha quindi (p.467) una catena rettilinea di punti uniti. Presa poi an.te n, mi

Ne segue facilmente che ove i 4 punti
uniti della trasformabile in un'omografia
d'π reale
piana in una catena reale, il caso anti-
tinv.te che nota A B C D reali ind.ti in
se: tale è già il coniugio su π,
nel caso antiinv. è unica (p 461), quindi
ove è il coniugio, e allora ogni pt. reale
è unito ecc

procuro così due pt.uniti su m e due su n(evitando il pt mn):ho 4 pt.uniti indip.ti. ABCD.Alla catena da essi definita(p 469) l'antiinv. fa corrispondere una catena(p468) che dovendo contenere quei punti è ancora la stessa.Ho dunque una catena piana ~~[illegible]~~ uniti.Nè vi sono ulteriori pt.uniti;se tale fosse U,fuori della catena C ora detta,per M generico del piano passano due rette unite: 1) la UM su cui è unito U e poi il pt(uno almeno)che essa ha a comune con C;2) la retta per M che ha a comune con C una catena rettilinea (p.468).Queste rette per M generico sono distinte perchè se coincidono ,tale retta è retta per U segante C in catena,e ciò può avvenire solo per una retta per U(p.468).Sarebbero così uniti tutti i punti fuori di tale retta) e al limite su tale retta:identità,assurdo trattandosi di antiomogr.ia Quindi in ogni antiinvoluzione piana ci sono infiniti punti uniti formanti una catena piana (e basta)/notare la differenza con le F_1 dove la catena di pt uniti poteva esserci o non esserci.

I risultati ottenuti si generalizzano facilmente a S_r trovandosi che qui una antiinv.ne se r è pari ha una catena di punti uniti;se r è dispari o nonha punti uniti oppure ne ha una catena (No 6 II n. 20) Non mi fermo a seguire Segre nello studio approfondito che egli fa delle antiomografie e delle catene.Aggiungo qui solo qualche cosa:

1)stiamo alle forme di prima specie.Troviamo qui p es

in Segre le prop/ni A) Presa una antiinvol. su una punteggiata comunque si prenda una catena C per i pt. MM' di una coppia, C è unita per l'antiinvol. B) Due coppie qualunque di pt. corr. nell'antiinv. stanno sempre su una catena (unita)

Ora, secondo un pt di vista che sarà poi sviluppato in un successivo lavoro di S Le rappresentazioni reali delle forME complesse e gli enti iperalgebrici (Math.Ann 40 1891)

possiamo collegare questi teor. con altri noti sul 'ordinaria inversione attraverso le seguenti idee, di portata generale. Una antiomografia A su r, a cui si sostituisce un piano rappresentativo di Gauss diventa una trasf.ne puntuale tra piani sovrapposti π (per quanto riguarda i pt propri; i pt. impropri vanno considerati come coincidenti, imagini di pt improprio della r) T, la quale (mutando A ogni catena in una catena, p.468) muta cerchi in cerchi. T è dunque una trsf.ne circolare del piano in sè (cioè mutante cerchi inc.ret..). Badiamo che anche se A fosse omografia, lo stesso rag.to darebbe per T una trsf.ne circolare del piano in sè. Del resto an.te si ha nei due casi $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ $x' = \frac{a\bar{x}+b}{c\bar{x}+d}$

(var.li cplesse) di cui si verifica facilmente la stessa p/tà. Tra le trsf.ni circolari sono le sim.ni (piano proprio) e le inversioni; anzi si prova facilmente (p es F.Ter 433) che ogni tra circ. si ottiene già come prodotto di una similitudine per un'inversione. Le (1) provano che la

T nel caso di un'~~omografia~~ è trasformazione conforme e di più diretta cioè conserva il senso degli angoli, e nell'antio~~pro~~iettività è inversa. Sono dunque le trasformazioni circolari inverse le immagini delle antiomografie. Veniamo più in particolare alle antiinvoluzione. Allora si avrà nel piano una trasformazione circolare inversa avente essa pure carattere involutorio. L'equazione della antiinvoluzione è ora (p. 468) (a=1) $x'\bar{x} + b\bar{x} + \bar{b}x' + d = 0$ (d reale)

Possiamo prendere le ascisse r sulla retta in modo che l'origine sia il corr.te del punto all'infinito (se questo fosse unito prenderei coord. proi.ve e procederei an.te). Allora nella (2) a $x=\infty$ deve corrispondere $x'=0$ ma $x' = \dfrac{-b\bar{x} - d}{\bar{x} + \bar{b}}$

Dovendo ~~x' ...~~ cioè $\bar{b}=0$ e quindi $b=0$

La corr.za è dunque $x'\bar{x} = k$ (reale con d, $k=-d$). Essa dunque, nel piano di Gauss è $\rho' e^{\theta'} \cdot \rho e^{-\theta} = k$ con $\rho\rho' = k$; $\theta' = \theta$: è l'inversione rispetto al cerchio di centro nell'origine e raggio $\sqrt{k}$. E venendo ancora più in particolare ad A, B, A diventa il noto teor che qualunque cerchio per due punti inversi è unito nell'inversione, e B che due coppie di punti inversi sono sempre conciclihe (F T 430)

2) Si vide le rappr.ni anal.che delle catene (p. 469). Stiamo p. es. in S_3, considerando alcuni pt. (fino a 4) $A_1 \ldots A_i$ lin. ind. avevamo $\Sigma \lambda_i A_i$ con λ_i reali. Segue studio anche la possibilità che quei pt. non siano lin. ind., cioè siano legati linearmente. Ma occorre distinguere il caso in cui il legame lineare è reale oppure no (cioè se nella $\Sigma \rho_i A_i = 0$ le ρ_i sono a rapporti reali o no). Prendiamo p. es. $i=3$ ($i=2$, consideriamo un

interesse) Evid.te se ho legame reale, posso esprimere $\lambda_i A_i - \lambda_k A_k = \lambda_h A_h$ sotto la forma $\lambda_i A_i - \lambda_k A_k$, e anzichè catena piana ho catena rettilinea. Ma se ho legame lineare ma non reale, i tre pt A_i sono nat.te allineati, e risulta che il pt. descrive tutta la loro retta (più precisamente risulta che ogni pt complesso si ottiene una volta, salvo un punto singolare della retta che si ottiene ∞^1 volte). La retta appare dunque come una catena piana degenere (e con un pt singolare nel senso chiarito). Per $i=4$, se vi è un legame reale, si ha evid.te catena piana anzichè spaziale; se invece il legame vi è ma non reale, allora i pt. A_i stanno evid.te in un piano, e vi costituiscono un sist. ∞^3, di cui si precisa facilmente la natura così: si ha in un fascio di rette una catena di queste; gli ∞^1 punti di queste ∞^1 rette formano il sist. considerato (che appare dunque come una catena spaziale degenere). Segre ha poi anche considerato i sist. di pt. $\Sigma \lambda_i A_i$ per $i = 5, 6$, (non si ha più il significato di catena); sono tra i più semplici enti iperalgebrici. Qui in ognuno dei due casi i 5 o risp te 6 pt A_i sono nec.te legati lin.te; cosicchè il loro studio si fa analog.te alle catene degeneri di cui ora si è detto. Ma per non ridursi a casi già tratta

ti

si può supporre che il legame sia a coeff.ti non reali.E S. ova per i_5(supponendo,come nel caso generale,unico tale ~~5~~)legame) che gli ∞^4 pt in questione sono i pt. delle ∞^2 rette di una catena (doppie) stellare;e per i_6 nel caso più ~~ge~~ nerale si hanno gli ∞^5 punti degli ∞^1 piani di una catena in un fascio di piani.

Nella III N.ta "Un nuovo campo" Segre passa poi a studiare le antipolarità,le quali,come le polarità conducono alle quadriche,conducono in modo analogo alle iperconiche e iperquadriche. Definite le antipolarità come antirec.tà a carattere involutorio(polo e polare stiamo p es nel piano: ,punti ~~reciproci~~ coniugati,ecc.) si presenta l'eventualità che un punto sia autoconiugato ~~..~~ Ma mentre nelle polarità ~~...~~ esistono sempre punti autocon.ti, qui ciò non è più vero. Attualmente,le rette del piano, relativamente all'esistenza su esse di punti autoconiugati possono offrire tre possibilità 1) Se r è autocon.ta, contiene intanto R autocon.to e nessun altro pto autocon. (come nella polarità,se questo fosse S,su r,la sua polare passerebbe per R,e sarebbe RS) Allora ho su r UN pt autoc

2) Sia r non autoc..Allora segando r col fascio delle polari dei suoi pt per R (antiproi.) nasce su R una antinvoluzione senza punti uniti o con una catena di tali.Quindi su r avrò nessun pt autocon.to oppure una catena di tali

Supposto che vi sia un pt autocon.to P,ve ne sono ∞^3: infatti se conduco per P una retta a (sono ∞^1) $\neq$ p,e quindi non autocon.ta,essa non può che offrire l'ultimo caso: ho quindi ∞^1 catene rettilinee

Segre chiama <u>ipereonica</u> il luogo in quanto esistente di questi ∞^3 punti autoconf. In ogni suo pt sia ha una retta <u>tangente</u> (la sua polare) che incontra l'ipere. solo ivi : ogni altra retta o non sega l'ipereonica o la sega in una catena.

Analog.te nello spazio (e se esistono per le iperquadriche) qui si possono studiare ~~......~~, in quanto vi siano pt autocon.ti, quelli esistenti su retta r o in un piano π . Per r se è incidente ma distinta dalla polare r', si ha UN punto, rr'; se coincide con r', OGNI suo pt è autocon; To; se è sghemba con r' col rag.to di prima risulta su r NESSUN punto autoc. ~~......~~, o ~~UN~~ UNA CATENA di tali. Tali sono dunque (quattro) le possibilità, ove esista la iperquad. fond., per i pt comuni a essa e a r. Per un piano π ~~......~~ che NON ~~....~~ passi per il suo polo P, risulta come in geom. proi. subordinata su esso un'antipolarità; quindi, se come p prec.te o esso <u>non</u> contiene pt. autocon. o ne contiene un'ipe conica. ~~......~~

Quindi, se esiste l'iperquadr. un piano non autocon. o <u>non la sega oppure la sega in una ipereonica</u> (tener sempre presente che il non segare vuol dire non segare affatto, nè in pt reali nè in img). Se invece il piano è autocon. (e allora si chiama <u>tangente</u> in P), nel fascio P π è subordinata un'antiinv., cosicchè avremo ivi NESSUNa oppure UNA CATENA di rette ~~........~~ polari di sè stesse ~~..~~ (le quali stanno sulla iperquad.), cosicchè si avrà <u>solo quel pt di inters.ne</u> oppure ~~fascio P~~ <u>infinite rette (una catena nel fascio Pπ)</u>.

Anche qui basta l'esistenza di UN pt autocon.to, per de durne quella di ∞^5 pt autocon. formanti l'iperquadrica; perchè condotta r per P fuori di π (cosicchè r' è in non per P e quindi sghemba con r) siamo in uno dei due ultimi e anzi nell'ultimo caso di pag. prec.te, cosicchè ho su r una catena di pt autocon.ti ;e avendo ∞^4 rette r..... Anche le iperquadr. si distinguono in RIGATE e NON RIGATE. Basta l'esistenza di una retta r (seconda event.tà di p.prec.te) per conchiudere che essa ne contiene ∞^4; per ogni pt. P della iperq. ne escono ∞^1 costituenti una catena nel fascio P_π. Infatti preso generic.te P, il piano tgte (v. sopra) o non sega che P o sega una catena di rette; ma qui sega certamente un pt di r, dunque siamo nel secondo caso.

Non starò a seguire S nelle sue ulteriori considerazioni sintetiche. Osservo solo che a differenza che per le polarità, p es nel piano non si può dare un'antipolarità con un triangolo polare ABC e poi una coppia di elementi polari P p arbitrari. Qui bisogna scegliere (arbitr.te) p come una retta della catena (p. 468) congiungente ABCP; e allora la polarità risulta determinata. Si può anche determinare da questi dati se esista o no l'ipereconica, con regola in certo senso analoga a quella del piano; chiamando P' la proi. di P da A su BC e $P_1 \equiv p.BC$, ecc. i 4 punti B C P' P_1 appartengono evid.te a una catena rettilinea e quindi ha senso parlare del separarsi o no delle due

coppie $P'P_1$, BC (riferendosi a el.ti reali proiettivi a quelli). La cond. per l'esistenza dell'ip reonica è che si abbia separazione solo su un lato.

Veniamo piuttosto alla rappr. analitica (in S2 e S3) Un'antirec. si rappresenta come segue da cose dette con una sost. lin. a det. non nullo fra le $\bar x$ e le u, che si può sostituire con un'eq. bilineare fra le stesse $\bar x$ e le coord. y di un pt. nel (diciamo piano pensando a S3) u (1) $\sum a_{lm} \bar x_l y_m = 0.$

Questa è l'eq.ne di un'antirec.tà: se vogliamo un'antip.tà cioè carattere involutorio, la cond. è che la eq. scritta equivalga alla (2) $\sum a_{lm} \bar y_l x_m = 0$ cioè scambiando l con m e passando ai n.i coniug.i

$$(3)\quad \sum \bar a_{ml}\, y_m\, \bar x_l = 0.$$

La cond. è allora che le eq.ni (1) e (3) coincidano cioè coeff.i prop.li, cioè esista di ~~ρ~~ k tale che

$$\cancel{a_{ml} = \rho a_l} \quad \bar a_{ml} = k a_{lm} \quad (4)$$

(con permut.e) Scambiando gli indici $\bar a_{lm} = k a_{ml}$ cioè (coniug.) $a_{lm} = \bar k \bar a_{ml}$ (5) cioè (paragonando da (3)(5) $\frac{\bar a_{ml}}{a_{lm}}$) $k = \frac{1}{\bar k}$

cioè $k \bar k = 1$ $|k| = 1$

Porto k $= \frac{\bar\sigma}{\sigma}$ (possibile in ∞ modi; dato $k = e^{i\theta}$ e prendo $\sigma = e^{+i\theta/2}$ (potendo moltiplicare per moduli arbitrari) [illegible] (Pensare p. es. a rappresentare un intero I come somma di 4 quadrati $u_1^2 + \dots + u_4^2$ cioè $I = x\bar{x} + y\bar{y}$, generalizz. degli interi rappresentati da forme quadratiche) le cond. trovate cioè (4) diventa $\bar a_{ml} = \frac{\sigma}{\bar\sigma} a_{lm}$

cioè $\bar\sigma \bar a_{ml} = \sigma a_{lm}$. Questo significa che è possibile moltiplicare la (1) per un fattore in modo che dopo la moltiplicazione i coefficienti

$b_{lm} = \sigma a_{lm}$ e $b_{ml} = \sigma a_{ml}$

risultino fra loro coniugati. In definitiva la (1) si scrive (scrivendo le a in luogo delle b)

(E_0) $\boxed{\sum a_{lm} \bar x_l y_m = 0 \quad \text{con } a_{ml} = \bar a_{lm}}$

è l'equazione dell'iperquadrica in quanto [illegible] sarà $a_{ml} = \bar a_{lm}$

(E) $$\sum a_{lm} \bar x_l x_m = 0 \quad \text{con } a_{ml} = \bar a_{lm}.$$

Il 1° membro di (E) - con le cond.ni scelte per i coeff.ti - anche in certo senso è forma quadratica nelle x_i - si chiama forma *hermitiana*. (Se annullasi una delle forme relative a x_i e x_k vuol dire ~~...~~ l'equazione di una catena rettilinea. oppure nulla: però allora E_0 è come sappiamo (p. 465) l'eq. d'una antiinvoluzione della retta, di cui (E) dà i punti uniti.) Introdotte da Hermite (caso binario) Crelle 47 - 1855 (Op. I. 408) Una tale forma ha -a differenza dal caso generale di una forma ~~quadratica~~ bilineare nelle $x, \bar x$- la proprietà di acquistare esclusivamente valori reali, anche per argomenti immaginari; invero usando x arbitrarie viene un certo valore, il cui n° complesso coniugato è

$$\sum_{l,m} \bar a_{lm} x_l \bar x_m = \sum a_{ml} x_l \bar x_m = \text{scambiando gli indici } \sum a_{lm} x_m \bar x_l .$$

cioè il valore stesso che pertanto è reale.

* Dedotto invece dalla quadrica reale di p. 490 (dove si dice ammesso che le rette

$\frac{x_1}{a_{11}} = \frac{x_3}{a_{33}}$; $\frac{x_2}{a_{22}} = \frac{x_4}{a_{44}}$ stanno per intero nell'ipq.)

Viceversa, un'ipersuperficie data dalle (E) - annullando una forma hermitiana definita un'antipolarità - data dalla (E_0).

Sulla (E) si vede anche bene come non sempre esista la iperquadrica fond/le di una data polarità. Pensiamo invero a prendere per il riferimento un triangolo o tetr. autopolare (nel solito senso della geom proi.. Segre adopera il termine anche in altro senso). Allora il vertice A_1 ha (p es nel piano) per polare il lato opposto; ma E^0 dà per tale polare l'eq. (posto $\bar{x} = A_1$) $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{10}y_0 = 0$ onde $a_{21} = a_{10} = 0$ etc. e l'eq dell'antip. riferita a triangolo autop. è ~~[illegible]~~ (a_{11} reali)

$\Sigma a_{\beta\beta}\bar{x}_\beta y_\beta = 0$ ($a_{\beta\beta}$ reali). Per l'ipq ho $\Sigma a_{\beta\beta}x_\beta\bar{x}_\beta = 0$

ossia $\Sigma a_{\beta\beta}(u_\beta^2 + v_\beta^2) = 0$ $(x_\beta = u_\beta + iv_\beta)$. Se le $a_{\beta\beta}$ sono tutte di un segno essa non esiste (e non esiste). Nel piano invece è luogo ad altre distinzioni: ~~E~~ (caso 2 di un segno e 1 no); in S_3 se due $a_{\beta\beta}$ sono di un segno e le altre dell'opposto ho l'ipq. rigata (~~[illegible]~~ p. es. retta x_1 ...

a_{11} e $a_{22} > 0$ ~~[illegible]~~ $\frac{a_{11}}{a_{00}} \frac{x_1\bar{x}_1}{x_0\bar{x}_0} = 1$ ~~[illegible]~~

e poi a_{00} a_{33} negative due segni. $-a_{00}, -a_{33}$, rendo nullo $a_{11}x_1\bar{x}_1 - a_{00}x_0\bar{x}_0$ rimane $\frac{a_{11}}{a_{00}} \frac{x_1}{x_0}\left(\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0}\right) = 1$

cui posto $\frac{x_1}{x_0} = X$, $\frac{a_{11}}{a_{00}} X\bar{X} = \frac{a_{00}}{a_{11}}$ il che si rende solo di soddisfare per X con un n° di modulo $\sqrt{\frac{a_{00}}{a_{11}}}$: possibile in infiniti modi; così per $\frac{x_2}{x_3}$: e allora i 2 piani $\frac{x_1}{x_0} = c_1$

$\frac{x_2}{x_3} = c_2$ si segano in una retta, della cui esistenza segue un ... n. c. ... in vario modo ∞). Se invece $a_{11} > 0$ $a_{22} > 0$ $a_{11} > 0$ $a_{33} < 0$ non si ... retta (per ... i piani ~~[illegible]~~ ...

Qual'è la parte visibile di un sp.q.^ca? cioè nello spazio S_5 tre ∞^5 pt. che devono avere d'comune con le ∞^5 reali i quadrice (parte reale di quadrica ordinaria). è la Q. $\Sigma a_{ll} x_l^2 = 0$ (i cui pt. imag. invece reali d'altra specie
che a $\Sigma a_{ll} x_l \bar{x}_l = 0$.) Così sarà pure per le spazioni con le altre catene dello spazio ambiente

(eguglianza nelle "matrici hermitiane" che ha l'sp. per sp. ...)

accettate nuove x_5 - e non è ora soddisfatta dell'ipq. in nessun pt. reale: ma si ha in esso l'eq. $a_{11}x_1\bar{x}_1 + \dots + a_{55}x_5\bar{x}_5$ - che non è soddisfatta in pt reali. Quindi l'ipq. non può contenere rette.

Si potrebbero studiare con Segre le propr. di una ipq. in S_n l'argomento che interviene nella teoria delle funzioni di gruppi fuchsiani: è un gruppo di sost. lin. proiettive discontinuo infinito nella variabile complessa x [F. Vor. Disc. p. 104], che mutano in sè una catena rettilinea (con qualche altra cond.) (hanno parte colla importanza le $f(x)$ automorfe per tali gruppi). Ora per f. di più variabili si hanno analoghi gruppi iperfuchsiani di sost. lin. proiettive su più variabili che mutano in sè un'iperquadrica curva o iperquadrica.

Vediamo piuttosto (Nota IV) qualche cosa sui sist. lin. Qui nel fare la comb. lin. nascono delle complicazioni per la cond. $a_{ml} = \bar{a}_{lm}$ dell'eq. di una antip. o di un'ipq. dovuta al fatto che essa non si conserva per comb. lin. (e poi anche altre complicazioni) Partendo da

$\sum a_{lm}\bar{x}_l y_m = 0$, $\sum b_{lm}\bar{x}_l y_m = 0$, ... che soddisfino a quel cond.

e combinandole lin.te in

$$\lambda_1 \sum a_{lm}\bar{x}_l y_m + \lambda_2 \sum b_{lm}\bar{x}_l y_m + \dots = 0 \qquad (1)$$

dovranno anche qui (p. 587) soddisfare a quelle cond. presa molt.te per un fattore σ. Ciò dà luogo

$$\sigma(\lambda_1 a_{ml} + \lambda_2 b_{ml} + \dots) = \bar{\sigma}(\bar{\lambda}_1 \bar{a}_{lm} + \bar{\lambda}_2 \bar{b}_{lm} + \dots)$$

cioè tenute presente quella

$$(\sigma\lambda_1 - \bar{\sigma}\bar{\lambda}_1)\, a_{ml} + (\sigma\lambda_2 - \bar{\sigma}\bar{\lambda}_2)\, b_{ml} + \dots = 0$$

Torni un ipq. di S_1

Ora supposto, come si deve per arrivare a risultati aventi interesse che le antip.tà date siano lin.te ind., ciò esige l'annullamento dei termini in parentesi, cioè che ogni $\sigma\lambda_i$ sia reale, cioè che i rapporti fra le λ_i siano reali.

Possiamo dire che ci si può limitare a prendere, nella (1) coefficienti reali. Se si prendono altrimenti essa non dà un'antipolarità, ma solo un'antirec.tà. In un sist. lin. di antip.tà individuato da $r+1$ lin ind. le antip.tà sono soltanto ∞^r e non ∞^{2r}. Questo fatto, secondo il quale p. es un fascio di antip.tà contiene ∞^2 antirec.tà non inv rie suggerisce la domanda se viceversa presa un 'antirec.tà non inv.ria, la si possa considerare in un fascio di antip.tà. Ora ciò avviene in modo unico

o per questi in sist. lin.

Infatti se un fascio di antip.tà (1) contiene una data antir.tà, ottenuta con certi valori delle λ, essa contiene certo la antirec.tà inversa di quella (è una proprietà che in certo modo compensa il fatto che le antirec.tà contenute nel fascio non sono tutte antip.tà)

Infatti *(con questa visti)* la antirec.tà inversa di $\sum k_{lm}\bar{x}_l y_m = 0$ è $\sum k_{lm}\bar{y}_l x_m = 0$ *(scambiando x y)* *cioè passando ai coniug.* $\sum \bar{k}_{lm}\bar{x}_m y_l = 0$ *e* $l\,m$ $\sum \bar{k}_{ml}\bar{x}_l y_m = 0$

e allora quella di (1) è

$$\sum\left(\bar{\lambda}_1\bar{a}_{ml}+\bar{\lambda}_2\bar{b}_{ml}\ldots\right)\bar{x}_l y_m = 0 \quad \text{cioè appunto } \bar{a}_{ml} = a_{lm}$$

$$\bar{\lambda}_1 \sum a_{lm}\bar{x}_l y_m = 0 \quad \text{ecc.}$$

la quale prova che usando nella (1) i coeff.ti compl. conti dei preced.ti si ha appunto l'antirec.tà inversa. Allora partendo da A, antirec.tà non invria, e volendo immergerla in un fascio di antip.tà, devo prendere l'antir.tà inversa. Se quella e questa sono risp. *(v. sopra)*

$$\sum k_{lm}\bar{x}_l y_m = 0 \qquad \sum \bar{k}_{ml}\bar{x}_l y_m = 0$$

il loro fascio è un fascio di antip.tà. Invero in $\mu_1 \sum k_{lm}\bar{x}_l y_m + \mu_2 \sum \bar{k}_{ml}\bar{x}_l y_m = 0$ *di*

che una forma hermitiana
è reale su UNA da
per l'annullare

$\perp$ che forma p 437; il fatto

$\perp$ no la cui matrice sia
presentata per

un'antip.tà posso prendere μ_1 e μ_2 tra loro coniugati complessi.

Infatti allora $a_{lm} = \mu_1 k_{lm} + \bar{\mu}_1 \bar{k}_{ml}$ e (scambiando gli indici lm —)

$\bar{a}_{ml} = \bar{\mu}_1 \bar{k}_{ml} + \mu_1 k_{lm}$

e risulta $a_{lm} = \bar{a}_{ml}$.

Notiamo un'altra differenza con la reciprocità. Per una di queste il luogo dei pt. autoreciproci è ancora una conica, come se fosse una polarità. Qui no; per antip.tà (piana) il luogo dei pt. autorec. è, se esistono, un'iperconica. Se invece ho A, non invria, ogni suo pt. autore. (se vi è) è evid.te tale anche per l'inversa A' e quindi per tutto il fascio AA', quale fu ora considerato, e quindi per ciascuna delle ~~iperquadriche~~ coniche di esso. Quindi il luogo dei pt. autore in antirepr. non invria è (se esiste) la base di un fascio di iperconiche.

E' da rilevare bene il fatto che un'eq.ne bilineare nelle $x, \bar{x}$ rappresenta enti geom.ci diversi secondo che è hermitiana o no ($a_{ml} = \bar{a}_{lm}$ o no) (antip.à o antirec.à). P.es. nel piano se lo è, ~~e~~ se si annulla in qualche punto, si annulla negli ∞^3 di un'iperconica; se non lo è e se si annulla in qualche punto, si annulla negli ∞^1 della base di un fascio di iperconiche (certo esistenti a partire da quel punto supposto). E' anche da osservare che comunque si prenda un'antirepretà nel fascio AA' considerato, in quanto vi siano pt autorepr., il loro luogo è sempre lo stesso al variare della A nel fascio; cioè comunque si prendano λ_1, λ_2, il luogo (1) è sempre lo stesso.

P.es. si potrebbe anche alla A sostituire una repr. degenere

[illegible]

scegliendo le λ, μ in modo che $|\lambda a_{lm} + \mu b_{lm}| = 0$. Noto p.es. in que-
si occasione che esso è l'analogo p es nel piano della gen
proi. delle coniche, quando si prendono due fasci ~~...~~ antipro-
iettivi. Già il fatto che si ottengono ∞^2 punti fa prevede-
re che non verrà un'iperconica. Eff.te ~~...~~
avendosi i fasci $A+\lambda B=0$, $A'+\mu B'=0$ con $\mu = \frac{p\bar\lambda+q}{r\bar\lambda+s}$ posso (come là)
supporre $\mu = \bar\lambda$. Allora devo segare i raggi corr.ti $A+\lambda B=0$
e $A'+\bar\lambda B'=0$ cioè $\bar A'+\lambda \bar B'=0$ cosicchè elim.do λ il
luogo è $\begin{vmatrix} A & B \\ \bar A' & \bar B' \end{vmatrix} = 0$ cioè $A\bar B' - \bar A' B = 0$ con $A, B, \bar A', \bar B'$
forme lin. risp. nelle x e nelle $\bar x$. Se essa non è hermitiana
(e non lo è perchè anche senza verifica diretta darebbe zero
o ∞^3 punti, e qui ne ho ∞^2) ci troviamo nelle cond.ni de-
te, cosicchè il luogo delle int. di raggi corr.ti in fasci
antiproiettivi complanari a centri distinti è la base di un
fascio di iperconiche.

Studiamo appunto un momento (e così vedremo anche se
questo risultato è invertibile) la base C di un fascio di i-
perconiche. Parto da un fascio di antip.tà, come a p. 491: se
una di queste manca di iperconica fond.le, non vi può essere
una base, perchè dall'esistenza di un solo pt base segue come
è chiaro che ogni antip.tà del fascio ha iperconica fond (p.
479). Limitiamoci a studiare un fascio "generale" cioè tale
che nel fascio

$$\lambda \sum a_{lm} \bar x_l y_m + \mu \sum b_{lm} \bar x_l y_m = 0.$$

vi siano tre antirec.tà degeneri, cioè l'eq.ne $|\lambda a_{lm} + \mu b_{lm}| = 0$
abbia tre radici distinte. Siccome $\bar a_{lm} = a_{ml}$, $\bar b_{lm} = b_{ml}$

Se l'inv.ne ha catena di rapp. uniti lo sp.ce fond. segmenti costituita dai assi ao' punti. Se no, no

E così, più gen.te per un'antirec.tà degenere, ancora analog.te...., (degenere sempl.te) Segre I n.10) consiste in questo Si hanno due fasci di centri P e P' riferiti in un'antipr.tà; e a ogni pt. M corrisponde l'omologa per P' della retta PM. Se l'antirec.tà diventa antip.tà i due fasci P e P' si sovrappongono in un'antiinv.ne).

per ogni i pt. singolari dell'antir.tà

... pano da quelle a $\begin{vmatrix} \lambda a_{i1} + \rho b_{i1} & \lambda a_{i2} + \rho b_{i2} \\ \lambda a_{i1} + \rho b_{i1} & \cdots \end{vmatrix} = 0$ a quelle che ha i coeff.ti img. coniugati $\begin{vmatrix} \bar\lambda a_{i1} + \bar\rho b_{i1} , & \bar\lambda a_{i1} + \bar\rho b_{i1} \\ \bar\lambda a_{i2} + \bar\rho b_{i1} & \cdots \end{vmatrix} = 0$ cioè quella stessa - salvo lo scambio delle rig. e colonne - cioè è un'equazione a coeff.ti reali. Coincide delle sue tre radici o tutte sono reali, o una sola, e le altre due img. con.te.

Vediamo le varie possibilità I) 1 rad. ~~img.~~ reale e 2 img. con.te. Quella appunto per cui λ/ρ è reale dà una antip.tà degenere (p. 493). Un'antip.tà degenere (semplicemente) è, come si troverebbe ang.te alle polarità degeneri, un'anti involuzione in un fascio di rette (cioè ogni pt. ha per con.ti i pt delle retta corr.te nell'antiinv alla congiungente del pt col centro del fascio, pt singolare per l'antip.tà degenere). Qui avremo questa antip.tà con pt singolare ~~[illegible]~~ A. Invece le altre due antipr.tà degeneri (certo non antip.tà perchè per esse λ/ρ è non reale) ~~avranno pt. singolari B e~~ ~~C, [illegible]~~ sono inverse l'una dell'altra perchè l'inversa della prima corrisponde a un valore di λ/ρ img. coniugato ~~[illegible]~~ (p. 493)) cosicchè è appunto la seconda). La prima ~~[illegible]~~ consista (v. contro) d'una antipr.tà tra cui fasci M e N cioè stelle M e N con pt. singol.: l'inversa cioè l'altra avrà questi stessi ~~pt.~~ singolari. Allora per avere la base del fascio posso applicare p. 495 dove appunto in quel caso ho dimostrato da una ~~prop. e dalla~~ antiinv A e dalla sua inversa era lo stesso parlare della base del fascio o del luogo dei pt. autoc. in A. Ora questi pt. determinano sui raggi omologhi dei fasci antiproi. M e N: quindi abbiamo la base è certo esiste ed un Δ autopolare pel fascio, come per i fasci di coniche. Inverso,

Invece in I ciò in generale avviene. Invero se il Δ esiste preso per coordinate il fascio le coniche

$\sum a_i x_i y_i$

$\sum b_i x_i y_i$

l'eq. che dà le coniche degeneri è

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 & & \\ & \lambda a_2 + \mu b_2 & \\ & & \lambda a_3 + \mu b_3 \end{vmatrix} = 0$$

con radici reali. Siamo dunque in questo caso.

è generabile da due fasci antiproiettivi, invertendosi co

sì in questo caso il risultato di p. 497.

II) Siano invece le tre radici reali. C.s. ognuna con

In questo caso (esaminiamo con l'occasione) e anche nel precedente ciclo

duce ora a un'antipolarità degenere. La prima abbia pt sin

golare ~~A~~ L e le altre M,N. Rispetto alla 1.a i pt coniuga

ti di L sono indeterminati, rispetto alla seconda quelli

di M; quindi L e M sono coniugati rispetto a queste due e

quindi rispetto a tutte le antip.tà del fascio. Quindi ~~ABC~~ LMN

è triangolo autopolare rispetto a tutto il fascio. Se lo

si assume per fondamentale, ho per le antip.tà le forme

canoniche di p. 489. Distinguo ora due sottocasi:

II_1) esiste nel fascio almeno una antip.tà senza iper

conica fond. Allora la base Q, come si è già detto, manca.

La possibilità del caso si ha individuando p.es. il fascio

con $a_1\bar{x}_1y_1 + a_2\bar{x}_2y_2 + a_3\bar{x}_3y_3 = 0 \quad (a_i > 0)$ e un'altra anti

II_2) TUTTE le antip.tà del fascio abbiano ip.ca fond.

Ciò avviene allora in particolare per le antip.tà degene

ri considerate. Ognuna di queste ha dunque ip.ca fond.

costituita da una catena in un fascio, con centri risp.

L,M,N. Considero il fascio determinato da due di queste, e

allora vedo che esso ha una base che si trova segando o

gni retta della catena nel fascio L con ogni retta del

la catena del fascio M. Ho dunque una base, formata dagli

∞^2 pt. intersezioni delle ∞^1 con le ∞^1 rette delle due

catene. Questa base Q nat.te si potrebbe trovare in modo

analogo partendo da L,N; o M,N. I suoi ∞^2 pt. si ripartisco

no in tre modi diversi in ∞^1 catene su ∞^1 rette di un fa

scio. Ma questa base Q non risulta più quindi antipro

iettivamente con due fasci. Quindi dei tre tipi di fasci di antip.tà, <u>solo il primo ha una base generabile antiproiettivamente</u>.

antip.tà spaziali

Anche i fasci di ~~quadriche~~ sono studiati da Segre in un ordine di idee analogo. E così, a lungo, nell'ultima parte della Nota IV ~~[illegible]~~ accennodo le reti di antip.tà piane. Qui la base di una rete ~~che si presenta solo nella~~ se rete non vi è nessuna antip.tà priva di iperconica fond.le ~~[illegible]~~ si ottiene pensando che ogni suo pt P, essendo autorepr. per tutte le antipolarità e quindi per tutte le antire. della rete va intanto ricercato fra i pt y che rispetto a queste ammettono in comune un pt. reciproco x (cioè a rette reciproche formanti fascio). Un tale punto ~~è~~ x, in relazione alle

(1) $\sum a_{lm} \bar{x}_l y_m = 0 \qquad \sum b_{lm} \bar{x}_l y_m = 0 \qquad \sum c_{lm} \bar{x}_l y_m = 0$

è evid.te tale ~~che~~ (eliminando le $\bar{x}$ [illegible])

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 & a & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & \cdots \\ c & c & \cdots & c_{31} y_1 + c_{32} y_2 + \cdots \end{vmatrix} = 0$

Quindi i pt y si trovano su una cubica γ con questa equazione. ~~[illegible]~~ E lo stesso x è il pt comune alle rette corr.ti e quindi anche alle polari; la relazione fra y e $\mathfrak{X}$ è simmetrica, cosicchè anche $\mathfrak{X}$ sta su γ. Nasce così su γ una corr.za fra y e $\mathfrak{X}$, univoca, [illegible] algebrica: [illegible] le

(2) le (1) con eq.ni nelle $\bar{x}$ si riducono alle prime due, lineari nelle $\bar{x}_i$ [illegible] $\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3$ con [illegible]

o (prese invece un fascio di rette immag. in

piano reale) nel piano di Gauss generalizzato

(partendo da retta r immag. di 2a specie

e rappresentando $r \bar{r}$ ogni suo P con le rette reali

per esso, app.te a r e $\bar{r}$: è la rapp. di Segre

chiamata di Staudt)

delle y. E viceversa. La T non è birazionale, ma si può chiamare antibirazionale (prodotto di una biraz. per un coniugio). La base ~~dalafaaaaa~~ della rete è dunque, in quanto esiste, la totaltà dei punti uniti della trsf.ne antibiraz. T sulla cubica γ .; ed essa risulta (se esiste) una ∞^1 di punti, cioè è un (particolare) filo (così appunto chiama S. gli enti iperalg.ci sempl.te infiniti)

Piuttosto di seguire S. in questo studio particolare dirò qualche cosa dell'altro lavoro già citato LE RAPPRESENTAZIONI REALI DELLE FORME COMPLESSE E GLI ENTI IPERALGEBRICI dove si trovano dei fatti più generali. Ho già accennato alla rapp.ne degli ∞ pt complessi di una retta nel piano di Gauss (con eccezioni) e sulla sfera di Riemann (senza eccezioni) e sulle rette di una cgr.za 1 neare. E anche abbiamo visto (p $\left\{\begin{matrix}441\\ 443\end{matrix}\right.$) p. es che cosa diventano le catene della retta e le corr.ze proiettive e antiproi.ve su questa nel piano di Gauss. Rappresentazioni di questo genere possono riuscire particolarmente utili nello studio degli enti iperalgebrici; pensare p es al l'utilità del piano di Gauss in tante questioni. Segre si è proposto di dare e studiare queste rappresentazioni anche per le forme non di 1.a specie, e di utilizzarle effettivamente nello studio delle p.tà geometriche da lui considerate. ent.

iperalg. Veniamo subito all'analogo del piano di Gauss per il piano complesso; meglio ancora per evitare le ecce

I rapp. ni di Gauss in senso larg.

si arriverà più 507
zioni ~~dicismo~~ all'analogo della sfera di Riemann. La pri
(analogo della rapp.ne di Gauss p.d.)
ma idea ~~potrebbe essere~~ e quella di rappresentare il punto

$x+iy, u+iv$ col punto di $S_4(x,y,u,v)$; ma si hanno le eccezioni per i punti all'infinito. Queste rapp.ni, volendo, si può ottenere come casi particolari di questa] (cfr. i richiami p.451 per le F_1). In S_4 reale punto per F_2 tipico i piani per retta fissa r imag.ia e sghembe alla coniugata: ogni tale piano π ha un coniug.to $\bar\pi$ per $\bar r$ e i due piani si incontrano in un punto P reale come pt. $\pi\bar\pi$. E viceversa ogni P reale... Ho così corr.za quasi biunivoca tra i π complessi per r e i pt. P reali di S_4 (in sostanza ad ogni piano π per r corrisponde il suo punto reale). Vi è però il pericolo che ~~che~~ (e allora cessa la biunivocità) che un piano π per r abbia più di un punto reale. Piano reale addirittura non può essere perché conterrebbe anche $\bar r$, sghemba invece con r. Ma un piano π imag. di S_4 può essere imag.mo

{ di 1a specie se la congiunta $\pi\bar\pi$ è S_3
{ " 2a specie .. .. è tutto S_4 ambiente

(in spazi superiori si avrebbero anche di 3a specie). Ora se π è di 2a specie: tutto va bene. Non possono avere più di un punto $\pi\bar\pi$. Se invece π è di 1a specie i punti $\pi\bar\pi$ costituiscono tutta una retta, evid.te reale e quindi con ∞ punti reali. Ogni tale piano è congiunge...

duce invece che a un punto reale immagine a una retta reale immagine (retta reale appoggiata alle $r, \bar{r}$) con ciascuna delle quali è complanare. I piani eccezionali della rete, ognuno a

sta nello $S_3\, r\bar{r}$

dei quali è evid.te ~~incidente alla $\bar{r}$ (con cui, come con $\bar{\pi}$ sta in uno S_3)~~ sono piani per r nello $S3\ r\bar{r}$; e viceversa ogni piano di tale fascio (avendo il coniugato per $\bar{r}$ nello stesso S3) è eccezionale. Quindi sono i piani di un fascio. Riprendendo come F2 un piano punteggiato α (da cui quella rete fosse ottenuta per proiezione da r) si ha che ogni punto di questo ha un punto reale immagine in S4, risultando però nel piano complesso stesso α una retta m di punti eccezionali, ai cui singoli punti complessi corrispondono le rette reale della congr. lin ellittica di S3 avente per direttrici $r\,\bar{r}$. Questa rappr.ne dei punti del piano α sullo S4 cosa fa corrispondere a una retta di α, sia $t \neq m$? Cioè ai piani di un fascio per r, contenuti in uno S3 τ per $r \neq r\bar{r}$? Ognuno di essi conduce a un punto reale contenuto in τ e viceversa. Dunque si avranno come immagini i punti reali $\tau\bar{\tau}$, cioè i punti del piano reale $\tau\bar{\tau}$ che stando in τ con r è incidente a r, e così a $\bar{r}$. Quindi una retta t di α, $\neq m$ ha per immagine un piano reale $\tau\bar{\tau}$ appoggiato a $r, \bar{r}$. Anzi, resta così subordinata una rapp.ne dei punti complessi di t sui punti reali di quel piano reale $\tau\bar{\tau}$, che si vede ~~subito~~ facilmente essere una rapp.ne di Gauss (in senso largo) (dare

P. di t equivale a dare un piano per r entro τ, e il suo coniugato

9A

le loro tracce sul piano π, che sono pure rette e sono rette img. con le variabili in posiz...). ~~I punti le rette [illegible] rinale [illegible] (che così pt. corrispondono le rette di [illegible]) [illegible] visione e [illegible] rapp.ne su questa col metodo di Staudt~~ [illegible]

Se quanto ora si disse si particolarizza adottando come retta r dello S4 (x y u v) la retta $\begin{matrix} x+iy=0 \\ u+iv=0 \end{matrix}$ si vede come a p. 441 che si ha proprio la rapp.ne fra piano e S4 in cui al punto $x+iy, u+iv$ corrisponde $(x\,y\,u\,v)$, cioè rapp.ne di Gauss p.d.

Questa rapp.ni avendo el.ti eccezionali, Segre ha cercato di sostituirle con altra che non ne abbia. Tale è per le rette complesse la rapp.ne di Staudt. Vediamo allora di estenderla. Richiamarla. In essa in sostanza si rappresentano i pt complessi di una retta con le rette reali per essi, e le eccezioni si evitano facendo in modo che per un punto non passi mai più di una retta reale, cioè il pt non sia reale, cioè la retta sia img. di 2.a specie. Per fare l'analogo, rappresentiamo i punti complessi P di un piano α mediante la retta reale p per essi. Ma se vogliamo evitare eccezioni, bisogna fare in modo che per un punto del piano non passi mai più di una retta reale. Quindi sono da escludere i piani reali, e anche quelli che anche non essendolo contengono punti reali, cioè i piani img di 1a e 2a specie (p. 507). E' invece da prendere come piano α un piano di 3.a specie che evid.te non ha pt reali.

Naturalmente altrimenti bisogna assumere come spazio ambiente almeno un S5. Precisamente proprio un S5.

Nei casi particolari ~~potrò~~ prese come la
Opera di Riemann. Si passava così dal
la rapp.^ne di Staudt a quelle di Riemann
Ora passeremo dalle rapp. di Staudt
generalizzate a quelle di Riemann
generalizzate

Allora ogni suo pt P dà ~~[illegible]~~ retta p reale per esso, app.ta nat.te anche al piano $\bar{\alpha}$, s.h. biunivocamente perchè. Viceversa ogni tale retta p ~~ppp~~ reale è app.ta ai piani $\alpha\,\bar{\alpha}$ e quindi in particolare a α, ha con questo comune un pt ~~da~~ img. P.
Ripetiamo che in questa rp.ne (di Staudt generalizzata) NON VI SONO ELEMENTI ECCEZIONALI. Da essa (ma allora si ripresentano questi) si può passare alla precedente segando, in S5, mediante S4 reale generico. Allora ogni retta p dà come traccia un punto reale P', e si ha rapp.ne dei pt P sui punti reali P', che coincide in sostanza con la pres.te (α e $\bar{\alpha}$ danno come traccia su S_4 due rette img. coniug. $r, \bar{r}$: Ogni P de[lla] retta p che con α dà S_3 αp segante S_4 in piano per r: la sua intersez. col coniug. che compare in quella prima rapp.ne è il punto P' che sta nello S_4, e sta nello S_3 αp stando in p)
Ma conviene rimanere alla rapp.ne senza eccezioni. Tutt'al più ~~la~~ si può modificare in modo che gli enti rappresentativi dei punti complessi di α siano punti anzichè rette.
Si può prendere come guida il caso delle F1, dove si ha una cgr.za lin. ellittica. Come già si è accennato a p. 455 essa si può rappresentare nei punti di una quadrica. Ma anche direttamente, con formole che poi estenderemo al caso delle F2 si può ragionare così. Pensiamo al momento a una congruenza lineare qualunque di direttrici r, s: vi è una corr.za biunivoca senza eccezioni tra le rette della cg e le coppie di punti M,N variabili risp. su r, s. Ora a queste coppie di punti io posso sostituire una varietà in corr.za biun.ca con esse, senza eccezioni, e avrò ~~id~~ fra i punti di questa e le rette della cgrza. Tale varietà si può

prendere così. Se su r e s assumo coord. proi om.ee risp $x_1\, x_2$ e $y_1\, y_2$, prendo poi in uno S3 le 4 X con

$$X_{11} = x_1 y_1 \quad X_{12} = x_1 y_2 \quad X_{21} = x_2 y_1 \quad X_{22} = x_2 y_2 \qquad (1)$$

Dati M N è dato X e viceversa. Quindi X descrive una sup. nelle cond. richieste. Essa è evid.te una quadrica Q

$$X_{11} X_{22} - X_{12} X_{21} = 0 \qquad (2)$$

Precisamente, i suoi punti complessi sono img. delle rette complesse della congruenza lineare. Precisiamo ora nel senso che questa sia ellittica e che ci interessino le sue rette reali. Vuol dire che r e s sono img. con.te, cioè $s \equiv \bar{r}$, e su esse $N \equiv \bar{M}$. Ora le ∞^4 coppie di punti MN sono solo queste ∞^2 che ci interessano. Se prendo i rifer.ti, come si può, su r s img. cont. uno dell'altro, sarà $y_1/y_2 = \overline{(x_1/x_2)}$ e possiamo dire $y_1 = \bar{x}_1$, $y_2 = \bar{x}_2$; e sono questi i soli valori che dobbiamo adoperare allora nelle (1). Posto $\frac{x_1}{x_2} = u + iv$, $\frac{y_1}{y_2} = u - iv$ si ottengono in definitiva della Q i punti $(x_1 = u + iv,\ x_2 = 1,\ \text{ec.})$

$$\rho X_{11} = u^2 + v^2 \quad \rho X_{12} = u + iv \quad \rho X_{21} = u - iv \quad \rho X_{22} = 1. \qquad (3)$$

con u,v reali, ~~[illegible]~~ Ora le coord. X in S3 si possono prendere in modo che per i punti reali siano X_{11} e X_{22} reali, X_{12} e X_{21} img cont. Basta per questo riferire tale sistema a uno Y reale con $Y_{11} = X_{11}$, $Y_{22} = X_{22}$, $Y_{12} = \frac{X_{12} + X_{21}}{2}$, $Y_{21} = \frac{X_{12} - X_{21}}{2i}$

Se facciamo così, gli ∞^2 punti della Q dati dalle (3) sono reali, e la Q rispetto al rifer.to reale Y ha l'eq. ~~$X_{12} = Y_{12}$~~

trasf. di (2)

$$Y_{11} Y_{22} - Y_{12}^2 - Y_{21}^2 = 0. \qquad (4)$$

$$X_{12} = Y_{12} + i Y_{21}$$
$$X_{21} = Y_{12} - i Y_{21}$$

~~Posso prendere per X le coord cart. cart. omogenee~~
Essa è l'eq. di una Q a punti ellittici (segare p es col piano tgte $X_{11}=0$). In definitiva si rappresentano così senza eccezioni ~~.......~~ le rette reali della congrz lin ellittica ~~.......~~ (cioè i pt complessi di una retta) nei punti reali di una quadrica a punti ellittici. E' rapp.ne già accennata a p. 551, e del resto quella che si ha nella sfera di Riemann, esposta così per generalizzarla ora come segue. Facciamo ora l'analogo per le rette p app.te ai piani $\alpha\ \bar\alpha$. Anche qui partiamo da due piani $\alpha\ \beta$ qualunque sghembi e dalla rapp.ne delle rette ad essi appoggiate, nelle coppie M N di punti di appoggio (senza eccezione). Poi sostituire a questa varietà di coppie di punti una di pt. in corr.za biun.ca con essa. Prendo ora coord. proi om $x_1 x_2 x_3$ e $y_1 y_2 y_3$ risp. su α e su β e formo poi i prodotti

$$X_{ij}=x_i y_j \qquad (1)$$

(nove in tutto). Assunte le X come coord proi om in S8, ho in questo la V_4 (nat.te 4 dim complesse) rappresentata parametricamente dalle (1): i suoi punti sono in corr.za biun senza eccezioni colle coppie M,N Come si è detto nel corso prec.te è una V_4^6 razionale dello S8. ~~.......~~ (già studiata dallo stesso Segre in una Nota dei Rend di Palermo 1891: Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani e spazi). Comunque le (1) mostrano che alle coppie MN con M fisso corrispondono i punti di un piano, e così... Nascono due schiere dopp.te inf.te di piani, ciascuna delle quali ricopre (le le schiere asintotiche coord. princ. hy- drate tra anche al piano $(y) \equiv \beta$)

Si osservi che effettivamente, viceversa ogni pt. reale della V_5^6 proviene da una coppia di pti. pot.

allora $X_{11} = x_1 y_1$ reale $x_1 y_2$ e $x_2 y_1$ sono coni$^{\circ}$ dividendo

$\frac{y_2}{y_1}$ e $\frac{x_2}{x_1}$ sono coni$^{\circ}$

cioè pur posto $x_1 = y_1 = 1$, $y_2 = \bar{x}_2$, etc. etc.

la varietà (generalizzano le schiere di una Q, di cui la varietà stessa è evid.te una generalizzazione); due piani di schiere diverse si incontrano in un punto (pensare a dare risp. M,N), della stessa schiera no (pensare a dare due diversi M). E' importante osservare che i piani di ciascuna schiera sono tagliati da quelli dell'altra in sistemi omografici, cosicchè ha senso parlare di riferire una tale schiera omograficamente a una F2, o a una schiera analoga e in particolare a sè sostituendole sempre il piano sistema (UNO QUALUNQUE) in cui essa sega un piano dell'altra schiera. La p.tà si vede sulle (1). Fissare un piano di una schiera vuol dire fissarvi p. es le x, siano le X'; fissare un altro piano id id vuol dire x'': in ciascuno dei piani le y sono coord. proi. ve e riferire i piani a parità di y (cioè ~~img~~ inquanto segati da un piano variabile nell'altra schiera) vuole appunto dire riferirli proiett.te. Poi, come nel caso prec.te bisogna particolarizzare nel senso che $\beta = \bar{\alpha}$ e interessano solo gli $N = \bar{M}$. Quindi adottati sui due piani sist. di riferimento ~~img~~ coniugati uno dell'altro sono da assumere

$$y_i = \bar{x}_i \quad (2)$$

cosicchè $X_{11,\ldots} = x_1\bar{x}_1$ sono reali, mentre $X_{12} = x_1\bar{x}_2$ e $X_{21} = x_2\bar{x}_1$ risultano img. coniugati. Anche qui possiamo e. s. prendere il sistema di riefr.to X_{hk} (proprio nello stesso modo di là) che per i punti reali siano X_{11} ecc reali e X_{hk}, X_{kh} coniugati uno dell'altro. Allora sulla V_4^6 si hanno ∞^4 punti reali in corrispondenza proprio alle coppie $M\bar{M}$. Dunque le rette p cioè i punti P complessi del piano α si rappresentano biunivocamente senza eccezioni ne~~gli~~ ∞^5 punti reali della V_4^6 attualmente considerata. È la rapp.ne di Riemann

generalizzata

Invero se $M(x)$ e $N(y)$ sarà $\overline{N}(\overline{y})$ e $\overline{M}(\overline{x})$ cosicchè

$$X'_{11} = \bar{x}_1 \bar{y}_1 = \overline{X_{11}}$$

$$X'_{12} = \bar{y}_1 \bar{x}_2 = \overline{X_{21}}$$

ove introdotte le Y reali per le reali come a p. 515

$$y'_{11} = \overline{Y_{11}} \qquad y'_{12} = \frac{X'_{12} + X'_{21}}{2} = \frac{\overline{X_{21}} + \overline{X_{12}}}{2} = \overline{Y_{12}}$$

$$y'_{21} = \frac{X'_{12} - X'_{21}}{2i} = \frac{\overline{X_{21}} - \overline{X_{12}}}{2i} = \overline{\left(\frac{X_{12} - X_{21}}{2i}\right)} = \overline{Y_{21}}.$$

~~aa~~ Ora le due schiere di piani della V_4^0 sono tutte di piani img.ri;perchè ~~[illegible]~~ se la coppia MN ha per img il pt A la coppia $\bar{N}\bar{M}$ ha per img. il pt $\bar{A}$;cosicchè quella per M fisso ha per img un piano e questa per $\bar{M}$ fissa il piano coniugato;due piani coniugati sono dunque in due schiere opposte onde segue che ogni piano è img,e precisamente ha il suo coniugato nella schiera opposta Volendo,la rapp.ne così ottenuta per F2 si può esporre così: ~~come~~ F2 si prende una ~~aa~~ schiera della V, e ogni suo piano si rappresenta col suo punto reale,in cui esso taglia il piano coniugato,esistente nella schiera opposta.

Riassumo ancora qualche p.tà relativa alla rapp.ne he precede: a)la V_4^0 rappresentava le coppie di pt per di α β . ~~Quando~~ Per M fisso si ha un piano,per M variabile su na retta questo piano ~~aaa~~ risulta descrivere una V_3^3 di S_5 nat.te luogo di piani.Nascono così tutte queste V_3^3 coi re ativi S5,ovviamente ripartire in due schiere ∞ (dim. complessa) come le rette di α e di β .Queste due schiere di S5 vengono a godere di p.tà duali in S8 alle due schiere ~~di~~ S2,cioè lue di schiera opposta stanno in S7 (e della stessa no).Ne segue quindi che due S5 di schiere opposte si segano in uno 3,il quale poi sega la V in una quadrica.Nasce dunque una quadrica sulla V in corr.za a(due tali S5 cioè) una retta di α e

una di β .Nel caso part. di $\beta=\bar{\alpha}$ ecc.nasce una quadrica da una retta r di α e dalla $\bar{r}$ di $\bar{\alpha}$ .Si trova che essa,reale e a punti ellittici, è proprio una Q che dà rapp.ne di Riemann della r,così subordinata da quella della S2 .

b) Per le Fl dalla rapp. sulla sfera di Riemann si passa a quella sul piano di Gauss con proiezione stereografica.Anche qui si può fare l'analogo .Il piano α complesso è già rapp.to sulla V_4^6 .Questa è una varietà razionale come è ovvio dalle(1) di p. 517.Si può dunque rappresentare,sia pure con eccezioni su S4.P.es. così.Dallo S3 di una delle Q ora nominate si trova che la si proiett biun.te su S4 (con eccezioni) e si trova allora che la rappresent.ne che ne segue fra α complesso e tale S4 reale è proprio una rapp.ne di Gauss generalizzata come nelle pp. precedenti.

Le rapp.ni dette si estendono poi in modo perfettamente analogo,prendendo invece del piano complesso uno S3 complesso,ecc.

La rapp.ne di Riemann(orig.le e general.ta) dà una immagine semplice delle proi e antiproi. di r e risp. di α .Parlando dirett.te di α omografia in sè premettiamo questa consid.ne,sempre estensione delle Q
Se le prendo una omografia della 1.a schiera della V_4,di ciamo di Segre,in sè(p 519) e una della seconda in sè,rest

avremo trasf. in di S cui si riesce alle [illegible]
e quindi omografia

ta da queste det.ta sulla V una corr.za alg.ca evid.te bi un.ca in quanto a ogni pt int.ne di due dati piani,facciamo corrispondere...... Questa corr.za della V in sè è una <u>omografia</u>.Infatti(p.519) fissare un piano p es della seconda schiera S' vuol dire fissare le y-che v.ivi sono inoltre coord. proive entro S',e così per S.Quindi le due trasf.ni entro S,S' sono del tipo $x_l = \sum_i a_{li} x'_i$, $y_m = \sum_j b_{mj} y'_j$

e allora $X_{lm} = \sum_{ij} a_{li} b_{mj} X'_{ij}$

cosicchè le X* si otengono dalle X' con sost lin.

Più precisamnete possiamo dire che è un'omografia di 1.a specie,in quanto muta ogni schiera in sè. Analog.te ~~ci~~ arriveremmo a un '<u>omografia di seonda specie</u> partendo da una omografia tra S e S' e da una tra S' e S.

Viceversa si troverebbe che ogni omografia della V in sè,di 1.a e 2.a specie si ottiene in questo modo. Tutto ciò è an.go a quanto si ha per le Q.Veniamo ora ~~alla questa~~ per una V reale come interessa noi,alle sue omografie <u>reali</u> in sè.Qui S e S' sono img con.;se prendo om di 1.a specie e dò la omografia di S in sè,entro S' DEVO prendere l'omogr fia di S' in sè che è con.ta di quella,se l'effetto sulla V deve essere reale(i due piani img con reale per A devono andare nei due id id per A' reale).Se invece voglio 2.a specie e do H tra S e S',devo poi prendere $\bar{H}$ tra S' e S.

Premesso questo sulle H diV in sè,vediamo come si ri per seguito nelle V bisogna seguire entro le ∞^4 di rette p di p. 51 d): P va in P', p va in p'

$\overline{P}$ va poi in $\overline{P}'$: Quindi una è accompagnata dalla omogr.

appl. costante su $\overrightarrow{\alpha}$. Allora complesso

flettono sulla V le omogr. e antiomogr. di α in sè. Se ho (p. 518)

una omografia di α in sè, ~~siccome~~ anzichè entro α posso con

siderarla le 1ª omogr. ~~entro~~ una schiera della V, ~~la posso considerare~~

e le 2ª con l'

~~come un'H della V~~ ... un'omografia

conto

entro l'altra schiera(~~cioè entro~~ α'). E ~~posso~~ allora le prendo

coniug. e con ... una H reale, ~~se prendo in α' la con.ta di quella~~

In questo modo un'omografia di α in sè diventa sulla V reale un'omografia reale di 1.a specie di questa varietà in sè e si vede viceversa

Se invece prendo in α una antiomogr.ia e ragiono in modo analogo, avrò antiomgr. tra P e P', e poi un'altra (con.ta di essa) fra $\bar{P}$ e $\bar{P}'$ cioè ... una antia tra π e π' e una tra $\bar{\pi}$ e $\bar{\pi}'$ ~~quindi avrò un'antiomogr. entro S e la sua cont.ta entro~~ della quadrica S'. Ma si può fare in modo un pò diverso, così da concludere che questa volta si ha un'H di 2.a specie

A e coniug. di π e $\bar{\pi}$; A' di π' e $\bar{\pi}'$. Innanzi ...

in sè. Se faccio il prodotto dell'antiom. di S in sè per il

π e π' (di S) ... $\bar{\pi}$ e $\bar{\pi}'$ (di S') e ... $\bar{\pi}$ e $\bar{\pi}'$. ...

~~coniugio tra S e S' viene un'omografia tra S e S'~~ di π per

a $\bar{\pi}'$ con antiomografie (tra π e π') ... coniugio quindi

con omografie. ... tra $\bar{\pi}$ e $\bar{\pi}'$ ho ... (coniug. di $\bar{\pi}$

e π e poi antiom.e). Vengo così a avere omogr.a di S in S'

e altre (con.te di ...) tra S e S. Ho sulla V_4^6 una omografia di

1ª specie. Le antiomografie di hanno dunque sulla V_4^0 per immagini le omografie (reali) di seconda specie. - Risultati

analoghi avrei fra la retta r e la sfera di Riemann.

Si potrebbero poi studiare le rapp.ni delle omogr e antiomografie nelle rapp.ni di Gauss. Per le Fl sappiamo

[illegible]

già che si ottengono nel piano di Gauss le trasf.ni circolari dirette, o inverse, ciò che ora si pitrebbe confermare per proiezione stereogr. dalla sfera di Riemann. E per il piano ~~dic~~ complesso quanto avviene nello S4 reale di Gauss si potrebbe dedurre da quanto ora si è detto, passando dalla V_4^6 allo S4 di Gauss mediante proi.ne dallo S3 di una quadrica, come si è accennato a p. 512). Le immagini sono allora le seg.ti trasf.ni:

1) per le omografie di α in sè si ha una omografia entro la rete di piani di asse r, e l'omografia con.ta entro la rete di asse $\bar{r}$. Per ogni punto generico P, int.ne di un piano p per r e uno per $\bar{r}$, asse così un corr.te determinato come intersezione dei due piani omologhi

2) per le antiomografie su α, analog.te, avendosi però ora un'omografia tra la rete r e la rete $\bar{r}$, e la con.ta...

Come già avviene nel piano di Gauss, dove le corr.ze immagini non sono lineari, ma quadratiche (a una retta corrispondendo gen.te un cerchio), anche qui Segre trova che le rapp.ni reali in S4 sono corr.ze non lineari. Precisamente vengono a corrispondere

a) a una retta generica una conica appoggiata a r, $\bar{r}$

b) a un piano generico una F3 rigata raz. normale avente r, $\bar{r}$ fra le gen.ci (p. 331)

c) a uno S3 generico un cono V_3^2 passante per r, $\bar{r}$ e per un certo piano fisso (è possibile, appunto trattandosi di un cono).

In particolare, per quanto riguarda le antiomografie, possono essere involutorie; e allora ~~le due omografie~~ subordinate ~~l'una fra S e S' e l'altra tra S' e S, che già sono coniugate, devono risultare l'una inversa dell'altra~~ l'omografia H reale della V in sè, di seconda specie avrà essa pure carattere involutorio. In particolare si presenta il

problema di studiare sullla V di Segre che cosa diventano i luoghi di punti uniti delle antiinv.ni piane, cioè le catene piane; ~~Segre~~ (sulla sfera di Riemann sappiamo già che diventano cerchi) e Segre trova che diventano superficie di Veronese (~~spiegare~~ vr p. 329). E così le ~~antip~~ antirec.tà e antip.tà e le iperconiche e le loro inters.ni si possono studiare sul modello reale iperspaziale, e così fa effettivamente Segre.

Ma piuttosto che seguire Segre in queste ricerche particolari preferisco ~~esporre~~ accennare alcune fra le considerazioni generali svolte da Segre nella rimanente Parte della Memoria dei M.A.

Ho già spiegato che cosa sono gli enti iperalgebrici. Bisogna, se siamo in S_r prendere una sua rapp.ne reale su una varietà (reale) V_{2n} che sia o uno S_{2n} di Gauss, oppure, il che fa lo stesso una varietà da esso ottenuta con trsfne alg.ca biunivoca; meglio di tutto le sfere di Riemann e estensioni, V_4^0 ecc.

Segre allora chiama iperalg.co un ente qualunque relativo allo S_n complesso, che abbia su quella V_{2n} per immagine reale un ente algebrico. Siccome le immagini reali da noi adottate sono algebricamente equivalenti fra loro, la df.ne si può indifferentemente applicare su una qualunque di esse. L'ente di cui si tratta può essere un ente geometrico qualunque, p.es. una varietà, ma può anche essere una corrispondenza. P.es. le antiomografie p.es. del piano α sono corr.ze iperlagebriche, perchè hanno p.

sulla V_4^0 come si disse per imagini corr'ze algebriche ,anzi addirittura omografie ;e se invece rappresentassimo sullo S4 di Gauss,troveremmo come si disse ancora per imagini corrispondenze algebriche ,sebbene non più lineari. Il nome di enti iperalgebrici è dovuto a questo,che essi comprendono come casi particolari gli ordinari enti algebrici. Senza entrare a questo riguardo in considerazioni generali p.es. una linea algebrica del piano complesso α ,ha l'eq.ne algebrica $F(x+iy,u+iv)=P+iQ=0$, cosicchè nello S4 di Gauss la sua imgine è la sup. algebrica reale $P(x,y,u,v)=Q(x,y,u,v)=0$ Quindi quella linea algebrica è precisamente un ente iperalgebrico. P.es. restando ancora al piano α ,se si prende come linea una retta,si disse a p.521-3 che la sua immagine reale sulla V di Segre è una quadrica,sup. algebrica.

In particolrare Segre chiama fili,tele,trivarietà le varietà,di punti,iperalgebriche aventi risp.te una,due tre dimensioni reali.

Per ogni varietà iperalg. Segre trova che essa è sempre contenuta in una varietà algebrica,la cui dim. complessa è minore o eguale rispetto alla dim. reale di quella;p.es. un filo algebrico sta sempre su una curva algebrica;una tela su una superficie,ma può anche stare su una curva(riempirla) ecc.(Se V_r e M_k sono le due varietà ora dette,si ha dunque $k \le r$). Prendiamo p.es. un filo,situato su una curva algebrica C), ~~p.es. nel piano~~. Segre definisce il suo ordine n, ~~se la~~
p. es. su retta, oppure nel piano) quando C è retta, se la
immagine sulla sfera di Riemann è una curva algebrica di ordine 2n, reale(una curva reale non può essere sulla sfera

~~Oss.^ne C.S. la V_4^6 [illegible] di S_8 contenente le F a pt. [illegible] ammette~~

Il suo significato sull'img. reale è questo: se C è retta, si ha una C^{2n} ~~[illegible]~~ reale sulla sfera di Riemann (la quale non contiene curve reali di ordine dispari, non estendendosi all'infinito), e precisamente del sistema (n,n). Se C è piana l'immagine sulla V_4^6 è analogamente una C^{2n} reale

Analogamente,

di ordine dispari, perchè si estenderebbe all'infinito) ~~Quale~~ ed se C è non rotta, quando l'imm. reale nella V_4^6 è ancora C^{4n} reale. Quale è il significato intrinseco dell'ordine di un filo? E' il prodotto dell'ordine della curva C per l'indice del filo: un filo si può sempre considerare come insieme dei punti uniti per una corr.za iperalg.ca sulla C, involutoria, il cui indice si chiama indice del filo. Un filo del 1. ordine sta sempre su una retta ed è una catena rettilinea (img.ne cerchio).

Un filo del 2.ordine può offrire due casi: stare su una conica e costituirvi una catena ordinaria (luogo pt uniti in anti inv.ne sulla conica) oppure stare su una retta e costituirvi un insieme ∞^1 rappresentato sulla sfera di Riemann da quartica reale, cioè sul piano di Gauss da C4 bicircolare (gen.te genere 1). Si vede già qui il concetto di genere di un filo, come genere della curva reale img.; questi due fili hanno risp. generi zero e uno. Un filo del 3.ordine può essere (indice tre) rettilineo, oppure avere indice uno e stare allora su una cubica, ellittica o ev.te razionale. Se la cubica è ellittica, Segre trova che il filo è di quelli trovati a p. 505, cioè base ina rete di iperconiche. E così via per le tele, ecc. Le prime basi per lo studio di questi enti iperalgebrici si trovano appunto sviluppate nella Mem. di Segre. Ma voglio ancora accennare a qualche cosa di importante che si trova alla fine della Memoria. Se p. es. su una retta si cercano i punti comuni a due catene, la questione non ammette una risposta affatto generale perchè (cfr. piano di Gauss) possono averne due, ev.te coincidenti oppure nessuno (se i cerchi in osì,per fissqre le idee su un pqrticolqre,per lq rettq r già complessq e ove orq si introducano i punti bicomplessi,prendendo la sua immagind sulla sfera di Gauss,che ora è luogo di inf.4 punti complessi e contiene due schiere ciascuna inf 2 di rette ciascuna di nf 2 punti complessi,si hanno su r le loro immagini,e cioè in due modi diversi la ripartizione dei punti di r in <u>protofili</u> (ognuno dei quali è immagind di una retta).Nascono così queste due <u>schiere di protofili</u>.

P. es. su r si ha una coppia di punti <u>bicomplessi</u> <u>gemelli</u> (da 2 pt. immag. coniug. del piano di Gauss). Quindi 2 rette (ordinarie) su r hanno in comune 2 pt. (diciamo: complessi, oppure bicomplessi gemelli) ecc.

magini non hanno punti comuni). Si ritrova così quella mancanza di generalità che nel campo reale consiglia l'introduzione degli ~~e~~.ti complessi. Così, più in generale

sempre su una retta per restare a questa se prendo due fili di ordine n, n' no sulla sfera di Riemann C^{2n} $C^{2n'}$ reali immagini, e non si può dare un'espressione generale per il n.° dei punti reali di int.ne (immediata invece nel campo complesso; pensare a proi. stereogr. $2n.2n'-n^2-n'^2 = 2(nn'-n^2-n'^2)$) Così se prendiamo due tele nel piano e così via. Questi inconvenienti si eliminano se si dà per la retta r o il piano α ecc. un significato anche ai punti complessi delle varietà immagini reali, p es della sfera di Riemann oppure V_4^6. Questo, osserva Segre, (VOLENDO) può farsi senza ricorrere ad ulteriori rapp.ni, p. es. su r può farsi definendo i pt bicomplessi in base alle involuzioni ellittiche nel piano di Gauss. I nuovi punti così introdotti vengono chiamati da Segre bicomplessi, per i quali si può sviluppare una nuova geometria (e a nuovi enti biiperalgebrici), la quale si può poi ampliare in modo analogo, e così via indefinitamente. Come analit.te introdurre (sulla retta) accanto ai reali i punti complessi vuol dire introdurre i n.i complessi ordinari, così introdurre i pt. bicomplessi vuol dire introdurre come loro coordinate dei nuovi n.i complessi a 3 unità distinte $h\ i\ k$ (x_i reali)

$$x_1 + h x_2 + j x_3 + k x_4$$

con $h^2 = j^2 = -1$ $k^2 = 1$, $hi = k$, $ik = -h$, $kh = -i$

a moltiplicazione commutativa.

i sistemi di n.i complessi a più unità sono stati studiati (e restano nelle teorie delle Algebre) fin dal secolo scorso (n.pla di numeri reali $a_1 \dots a_n$ scritti come un unico simbolo $a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ con le n unità $e_1 \dots e_n$. Si ha lo zero per le $a_i = 0$. L'addizione si fa in modo formale, e anche la moltiplicazione dove però occorre definire il modo di moltiplicarsi delle unità, in funzione delle unità stesse. Weierstrass ha dimostrato che i n.i complessi ordinari (e i sist.i equivalenti, definiti da $e_i' = \alpha_{i1} e_1 + \dots + \alpha_{in} e_n$ ecc. con le α_{ij} reali a det. non nullo) sono i soli per cui vale la p.tà associativa commutativa e distr. ~~dell'~~ rispetto all'addizione e per di più la cd. nec e suff. per l'annullarsi di un prodotto è quello di almeno un fattore. Nonostante questo possono avere interesse a che altri tali sist. pure venendo a mancare alcune di tali p.tà. P.es. nel sist. ora detto, valendo le altre proprietà, non varrà quella dello zero, si hanno cioè dei DIVISORI DELLOZERO. P. es. tali sono $h+i$ e $h-i$ poiché $(h+i)(h-i) = h^2 - i^2 = -1-(-1) = 0$.

(Volendo ~~immagini~~ esempi rapidamente più concreti ~~d...~~ si cerchino a piacimento si possono definire con tali le matrici $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ponendo p.es. $e_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ $e_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ $e_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ $e_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ definendo somma e prodotto di matrici per cui $h \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} ha & hb \\ hc & hd \end{vmatrix}$ con h reale, ecc. Allora ... (moltiplicazione per ...)

~~$e_1^2 = e_1, \; e_1 e_2 = 0$.~~ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a e_1 + b e_2 + c e_3 + d e_4$

$e_1^2 = e_1$ ma $e_1 e_2 = 0$ ~~ecc.~~). $e_1 e_3 = e_2$

(1) x per scalare

$$(x_1 + h x_2 + i x_3 + j x_4)(h+i) =$$

$$x_1 h + x_2 + j x_3 - i x_4$$

$$- h x_4 \quad + k x_2 \quad + i x_1$$

$$- x_3$$

$$= -(x_2 + x_3) + i(x_1 - x_4) + h(x_1 - x_4) + k(x_2 + x_3)$$

Dipendente da due soli parametri reali

$\perp$ e (1)

Più in generale è divisore dello zero

$(x_1 + i x_2 + h x_3 + k x_4)(h+i)$ (1)

perchè moltiplicato per $(y_1 + i y_2 + h y_3 + k y_4)(h-i)$ (2)

dà appunto per prodotto zero. E anzi risulterebbe che i soli divi sori dello zero sono i n. (1) Ora si trova che questi divisori del lo zero sono strettamente legati ai protofili prima accennaati: ~~&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&~~ punti di un protofilo p es della prima schiera è lo stesso che punti che hannole coordinate differenti (per differenza) per un divisore dello zero del tipo (1) o del l'qltro tipo (2) .

Come ho già detto, gli studi di Segre sulla geometria com plessa sono stati ripresi per la teoria delle funsioni di più variabili complesse,e da Cartannel suo volume sulla geom proiettiva complessa,e paricolarmente da M.Villa. Lo stesso Segre è poi tornato una sola volta su un arogomento analogo ,in relazione con un lavoro di Predella seguendo in sostanza l'idea ; come Staudt prende per punti complessi le involuzioni ellitti che prendere come punti di una nuova geometria le omografie non più involutorie ma paraboliche;analit.te equivale a defini re come punti p es le quaterne di n. $x + \varepsilon y$

dove ε è una nuova unità tale che

(le cost. e così gli altri coeff. sono numeri complessi ordinari)

p es

Abbiamo così passato in rassegna una parte soltanto delle opere di Segre, con un programma che è rimasto molto limitato rispetto a quello iniziale. Per valutare numericamente la parte esaminata delle opere di Segre in relazione con la restante possiamo dire di avere esaminato e nemmeno completamente la sua attività negli otto anni 1883-91, mentre ha continuato a produrre attivamente fino alla morte avvenuta nel 1924. I campi di ricerche verso i quali si è poi orientato Segre sono stati spe

cialmente della geom. su una V algebrica dal punto di vista invariantivo per trasf. birazionali e 4) la geometria proiettiva differenziale. A questi campi di ricerca ~~[illegible]~~ Segre è giunto per primo [illegible] coi contatti fra loro sempre guidato dal primo campo delle sue ricerche cioè quello della iperspaziale della geom. proiett. diff. ha ~~raccolto~~ ~~[illegible]~~ [illegible] hanno [illegible] stati staccati e lontani uno dall'altro, per questo

"Preliminari per una teoria delle varietà luoghi di spazi" Rend. Palermo 1911 contengono alcuni risultati fond. della ~~[illegible]~~ geom. su una varietà algebrica ~~[illegible]~~ specialmente per una curva Segre è arrivato con un

547

evoluzione naturale perché le sue

[illegible] delle cause [illegible]

Di alcune delle quali ci siamo occupati

[illegible] giorni [illegible] spesso hanno

[illegible] a vedere in esse

dei modelli [illegible]

[illegible] per

[illegible]

[illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] nuovo metodo

[illegible] per lo [illegible]

[illegible] accanto [illegible]

[illegible] algebrico, [illegible] e

aritmetico