Corso d'integrazione 1919.

Oggetto della Geometria superiore

Che cosa è la G. S.? Non si può dare una Def. puramente scientifica, ma solo di carattere didattico e negativo. Oggi è quella parte della G. che non si insegna nè in G. elementare, nè nei corsi di G. analit. o proiettiva;1) oggi; perchè in altri tempi (Chasles - Facoltà di Scienze di Parigi 1846; Cremona. Università di Bologna. novembre 1860) quello che si insegnava sotto il nome di G. S. si sovrapponeva, in buona parte agli odierni corsi di geom. proiettiva. - Soggetto necessariamente limitato di ogni corso di G. S.: argomento di questo sarà lo studio delle superficie rigate, un. tanto per l'interesse che esse offrono in sè, come perchè ci permetterà di toccare, pur senza approfondirli, varii capitoli della G. S. -

1) non parlo della G. descr. dato il suo carattere affatto speciale.

2)

Richiamo dei concetti della geometria proiettiva e della geometria analitica.

In entrambe si considerano non solo figure generate da punti, ma anche da rette e da piani. – Forme fondamentali. –

Geometria proiettiva. Il suo fondamento consiste nello studio delle corrispond. proi. tra forme di una stessa specie. Che cosa sono? p. es. due piani π e π' punteggiati ...; 2 spazi Σ e Σ' punteggiati ... Per le forme di 1ª specie la definizione, più artificiosa, è posta in modo che risultino proi. le omologhe in forme proiett. di specie superiore. – Df.: ne risulta, poi in generale, la conservazione dei birapporti. – Teor.ª fondam. – La g. p. si può definire come quella che studia proprietà (che si conservano nelle trasformazioni) proiettive. – Da tal punto di vista i corsi di g. p. ne studiano solo una parte: una buona parte di questo

corso rientrerà nella g. p. –

Geometria analitica. – La sua caratt. è invece quella di rappresentare gli elementi delle figure mediante coordinate (sist. di num. in corrisp. biun. cogli el.ti delle figure). Così, si stabiliscono coord. entro ciascuna delle forme fondam. P. es. per le forme punt. si possono assumere coord. cartes.; in un fascio proprio di rette o piani coord. tang.; nel piano rigato o spazio di piani le coord. plückeriane ($u = -\frac{1}{p}$, ecc., dove p = ascisse ...) – Esistono altri sistemi di coordin. sia entro le forme fondam. (p. es. coord. proiett. che si possono stabilire entro ciascuna di esse; Df. per quelle di 1ª specie $\ddagger$), o coordin. curvilinee (di impiego frequente p. es. anche nelle fis. mat.) [p. es. per lo spazio punteggiato, poste le coord. cart. uguali a $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$, dove per u, v, w varianti in certi intervalli, f, g e h siano monodrome e invertibili, e inoltre soddis.

si fanno a ulteriori condiz. da fissare caso per caso. p. es. di ammettere certe derivate fino a un certo ordine, o di essere sviluppabili in serie di potenze), si possono assumere $u\ v\ w$ come coord. curv. entro la regione dello spazio defi: nita dalle $x = f$. ecc.); sia per gli elementi di altre figure (es. $x = t$, $y = t^2$, vi è corrisp. biun. tra i pt. della par.^e $y = x^2$ e i valori di t, che si può assumere come coord. dei pt. della par.^e; così $x = f(t)$, $y = g(t)$ [$z = h(t)$], colle cond. che il ~~xy~~ pt. $x\ y\ [z]$ varii con t [su curva] e vi sia corrisp. biun. tra le sue posiz. e i valori di t, es. dica $x = R\cos t$, $y = R \operatorname{sen} t$, $z = ht$; così ancora se $x = f(u, v)$; $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$, dove p. es. $f\ g\ h$ derivab. fino a un certo ordine, siano monodrome, [tali che $x\ y\ z$ non varii solo per una curva cioè:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{matrix} \right\| \neq 0$$

]

e un pt. della sup. provenga generalmente da una sola coppia di valori (u, v) = coord. curvil. sulla sup. rappresentata da $x = f(u, v)$ ecc...) La geom. anal. si può definire come quella che studia le propr. delle figure mediante le coord.: è definita come metodo che adopera, non come fine che si ama, a dif: ferenza della G. proi. in cui è definito lo scopo non il metodo (nei corsi nostri generalm. sintetico, ma che può anche essere analitico). Nei corsi di g.a. solo una parte, cioè studio dei più elementari sist. di coord., e alcune poche loro applic. (studio delle coniche e quadriche, e talvolta rappresent.e analitica delle proiett.à).

Il met.° analit.° consente la immediata introd.e degli elem.ti immaginari, in quanto si ritengono definiti da valori non tutti reali delle loro coord.e (in sist. di rif. reale), permette così, in tal guisa è possibile le ~~immediata~~ estensioni della geom. dal campo reale al campo complesso. Col metodo sintetico si si possono ant.te introdurre gli elem.ti immag.ri, ma in modo più complicato. Precisamente, in alcune questioni è sufficiente di considerarli a coppie, e allora la teoria è relativ.te anche semplice (Segre. Le coppie di elementi imm.i nella Geom.tria proi.e sintetica. Torino Mem. (2) XXXVIII. 1886); quando si tratta di separare i due elem.ti coniug. la teoria si complica (Staudt. Beiträge zur Geom. der Lage. Nürnberg 1856). In gran parte del corso, ci riferiremo a enti complessi, ma li riterremo sempre definiti analit.te: ma potremo fare su essi ragionamenti di g.a sintetica, in quanto essi si possono tradurre in considerazioni analitiche valide nel campo complesso (p. es. proiezioni e sezioni).

Def. an. pt. complessi

Quadriche

Ci riferiamo solo a quadr.e non degeneri. Se sono a centro, cioè se non toccano il piano ∞, la loro eq.ne si può ridurre a

$$ax^2+by^2+cz^2-1=0 \quad \text{con } abc\neq 0$$

(i segni di a, b, c ...) cioè

Q) (1). $\begin{vmatrix} x\sqrt a + y\sqrt b & 1+z\sqrt c \\ 1-z\sqrt c & x\sqrt a - y\sqrt b \end{vmatrix}=0$. I piani π_1: $x\sqrt a+y\sqrt b=0$, π_2: $x\sqrt a-y\sqrt b=0$, π_3: $z\sqrt c+1=0$, π_4: $z\sqrt c-1=0$

(7)

sono facce di un tetraedro. $r\equiv\pi_1\pi_3$, $s\equiv\pi_2\pi_4$.

Piano per r (2) $\lambda(x\sqrt a+y\sqrt b)+\mu(z\sqrt c+1)=0$ insieme col piano per s (3) $\lambda(1-z\sqrt c)\quad+\mu(x\sqrt a-y\sqrt b)=0$

La loro interseq. sta su (1): quindi ogni piano per r sega Q in retta: le rette così trovate sono sghembe a due a due perchè ~~essendo contenute in piani diversi per r si dovrebbero incontrare su r, e per lo stesso motivo su s che sono sghembe~~, (non possono neanche incontrarsi sul r, s, perchè starebbero in un piano per s) ~~quindi inoltre~~ sono tutte app.te a r e a s; tra esse vi è $t\equiv\pi_1\pi_4$ per $\mu=0$ e $u\equiv\pi_2\pi_3$ per $\lambda=0$. Per ogni punto di Q ne passa una: perchè posto le sue coord. in (2) e determ. $\frac{\lambda}{\mu}$ in virtù di (1) risulta soddisfatta (3). Schiera rigata. - Se invece dei piani per r si parte da piani per t di eq. $\Lambda(x\sqrt a+y\sqrt b)+M(1-z\sqrt c)=0$ (4) si trova che le sue rette interseq. ~~con Q~~ con

$$\Lambda(1+z\sqrt c)\quad+M(x\sqrt a-y\sqrt b)=0 \quad (5)$$

sta anche su Q: si trova così una 2a schiera rigata perfett. analoga alla 1a: essa contiene r e s. - La 2a

8) schiera contiene r e s, quindi le due rette non lo incontrano ed è perciò diversa dalla 1ª.

Per ogni pt. di Q passa anche una retta della 2ª schiera. Q è dunque doppiamente rigata. — Due rette di schiere diverse sono sempre incidenti (infatti $\Lambda(2) - \lambda(4)$ dà $\Lambda\mu(z\sqrt{c}+1) - \lambda M(1 - z\sqrt{c}) = 0$, e $M(3) - \mu(5)$ lo stesso).

Il piano tg. in P contiene le due rette per P.

Le rette di una schiera tagliano 2 rette dell'altra schiera in pti. proiettivi. (r, s, t di una schiera, a variab. in 2ª sch.: taglia r in A ed s in A'; (A) e (A') sono sezioni del fascio $s\,a$). Quindi r punteg. e dualmente i proiett. al fascio dei piani tangenti. — Gli stessi risultati valgono anche per il paraboloide $ax^2 + by^2 - z = 0$. — Invertibilità di costrutti... (rette appoggte a 3 rette sghembe; 2 pte sghembe proiettive, 2 fasci di π proi. a assi sghembi). — Le rette su una sfera sono isotrope. Digressione sull'assoluto.

~~Rappr.~~ **Rappr. piana delle quadriche** = proiezione stereografica. (Klein, i) su Q: proiez. su π non per C. Punti e rette fondamentali. ~~Alcune~~ generali bicircolari ~~... corrisp. ... proiett.~~ ...

~~... (Se Q è sfera e il proiettante per ...~~

Le relaz. tra pt. e rette fondam. si possono precisare: curva γ di Q si proietta in γ' di π: se γ passa per C dalla proiezione si stacca c, e il resto taglia c nella traccia T della tangente t a γ in C; (T) e (t) sono proiettivi. Quindi ai punti della retta IJ corrispondono (nel senso ora detto) proiett. le direz. dei Q uscenti da C. ~~Le generatrici uscenti di $\bar{R}(\gamma J)$ hanno per corrisp. rette di π per I [J] e viceversa.~~

Se γ incontra ~~i~~ i in M, γ' passa per I, e ha ivi per tgente la traccia m del piano tg. a Q in M; viceversa se γ' ha per tangente m, γ incontra i, e precisamente nel punto [il cui piano tg. ha per traccia m cioè] M. ~~Ai punti di i corrispondono~~ La corrispondenza tra M e m è proi: quindi ai punti di i corrispondono proi. (nel senso ora detto) le direz. di π uscenti da I; lo stesso per j

10) Le geometrie (i) si proiettano nelle rette del fascio I.....-

Alle sez. piane di Q non per C corrispon-
per IJ
dono coniche di π (anche se degeneri); a quelle
per C una retta + IJ. Viceversa, se si ha
una conica non degenere per IJ 3 pt. $L'M'N'$,
...; se la conica ~~non~~ è deg. ma non contiene
IJ, è l'immag...; se per IJ...: Quindi le
sez. ~~del~~ piane di Q sono rappresentate dalle
coniche per IJ e viceversa.- Mediante la
~~Scarc.~~ proiezione stereografica lo studio della
geometria sopra Q si riduce a quello della
geometria sopra un piano: così si possono
studiare le curve algebriche esistenti su Q
mediante la loro ~~rapp.~~ proiezione, ma
su ciò torneremo tra qualche lezione, dopo che
avremo fissato meglio alcuni concetti sulle
~~rapp.~~ curve algebriche: Osserviamo ancora che,
stabilito un sist. di coord. cartes., quelle di
P si esprimono raz. mediante quelle di P',

(11

e viceversa (tra poco compare esplicito): la corrisp.
tra Q e π è di quelle dette birazionali (generalm.
una sup. non si può porre in corrisp. biraz. con
un piano). ~~Ex. sfera [illegible] proiet-~~
~~tata da C(0,0,1) sul piano diam. ⊥ a~~ OC. Se Q
di centro O
è una sfera, proi. da C su piano diam ⊥ a OC,
le sez. piane corrisp. coniche per le tracce delle
isotrope, su π // a γ, cioè cerchi.- La rappr.
conforme: infatti le direz. uscenti da P si proiett.
quelle uscenti da P', e la corrisp. è proiettiva:
rette isotrope del fascio P hanno per proiez. quelle
per P', quindi gli angoli retti si corrisp. e i fasci sono
uguali.- Analit. $x^2+y^2+z^2=1$ $C \equiv 001$.

$X = \frac{x}{1+\lambda}$ $Y = \frac{y}{1+\lambda}$ $Z = \frac{z+\lambda}{1+\lambda} = 0$; $\lambda = -z$;

$X = \frac{x}{1-z}$ $Y = \frac{y}{1-z}$. Si ricavano così $x = (1-z)X$,

$y = (1-z)Y$; $1-z^2 = (1-z)^2(X^2+Y^2)$. Se $z \neq 1$, $1+z = (1-z)(X^2+Y^2)$; $z = \frac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1}$, $x = \frac{2X}{X^2+Y^2+1}$; $y = \frac{2Y}{X^2+Y^2+1}$.

 Oss. 1.a x, y, z legati da $x^2+y^2+z^2=1$ si possono assumere come coord. su π, o anche come coordinate omog. generali $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ legate da $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2$, coordinate tetracicliche. – Oss. 2.a – Colla proiez. ster. della sfera si può porre corrisp. tra i piani dello spazio e i cerchi di π, e studiare perciò la geom. di π, dove si prende per elem. il cerchio mediante la geom. dello spazio di piani. Si vedrebbe facilmente che la corrisp. è tale che a cerchi ortogonali di π corrispondono piani coniugati rispetto alla sfera, ecc.

Omografie tra due quadriche. – Due Q si dicono omografiche quando sono figure corrisp. in spazi omografici. – ~~Ripassata~~ (Per dare un senso alla def. occorre verificare che in Hm. a quadrica corrisponde quadrica: si può ver. geometr., o analit. vedendo che se $P(x,y,z)$ $P'(x'y'z')$ (coord. cart. ortog.) $x' = \frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}}{a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}}$

$y' = \frac{a_{21}x+\dots a_{24}}{a_{41}x\dots+a_{44}}$, $z' = \frac{a_{31}x+\dots+a_{34}}{a_{41}x\dots+a_{44}}$ con Dtm. $\neq 0$. Allora se $F(x',y',z')=0$ ecc. [illegible]. – Se i rapp. fra le a sono tutti reali, coniugati si possono supporre tali le a stesse. La Hm. si dice reale, se cos... p. 16

La def. è equiv. a questa: le Hm. reali sono quelle che mutano pt. reali in pt. reali; (ossia quelle che coincidono colla coniugata, [illegible]) – Concetto di schiere riferite proiettivamente: due schiere R R' riferite tra loro (1,1) si dicono proiettive quando segano su due rette delle schiere adiacenti punteggiate proiettive: una π tra due schiere è determinata da tre coppie di generatrici omologhe. – Se Q e Q' sono omogr. alle rette di Q corrisp. rette di Q'; a rette di una schiera (seguente), id. id.: siano R e R', S e S' le due coppie di schiere corrisp. – La corrisp. subord. tra R e R' è proiettiva (segando con due rette corrisp. di S e S'). Viceversa data ad arbitrio proiett. tra R e R', e tra S e S' mediante $pqr\ (R)$ $p'q'r'\ (R')$

14) $s\,t\,u$ (S) esiste Hm. tra Q e Q' che le scambi
$s'\,t'\,u'$ (S') 5 l'Hm. (pps pt qsqt ru) e

cui è risulta (pq st / ...) e poi (u r / u' r')

Alle quadriche Q per pqr corrisp. una quadrica per p'q'r' e quindi Q'. —²| Dati 3 pt. A B C non allin. su Q, e cd. id. su Q' vi sono due Hm. che .... —¹| Le Hm. di Q in Q' dipendono da 6 parametri; cioè sono ∞^6. — Le cose dette valgono, in particolare se $Q \equiv Q'$: allora si distinguono Hm. di 1ª specie in cui ~~ogni~~ ciascuna schiera è trasformata in sè, e di 2ª specie. Anche le Hm. di una Q in sè sono ∞^6.

Le cose esposte valgono nel campo complesso, cioè le Hm. che abbiamo trovato sono complesse (non necess. reali), e i 6 param. da cui dipendono quelle fra Q e Q' sono complessi, cioè le Hm tra Q e Q' dipendono da 12 parametri reali (∞^{12}).

Volendo ricercare le Hm. reali di Q reale in Q' reale ~~...~~ ¹) e limitandoci per brevità alle Q reali con pt. reali, subito che Q e Q' debbono essere entrambe a pt.

(pt. iperb. ...)

(15

iperb. o a pt. ellitt. (~~...~~) Esse se Q e Q' reali sono tali, si trova che vi sono ancora ∞^6 Hm. reali tra esse. (Se Q e Q' sono a pt. iperbolici, basta infatti assegnare ciascuna:

¹) Digressione sulle Q reali: si dicono reali quelle che hanno eq. a coeff. reali; possono avere, o no, pt. reali (es. $x^2+y^2+z^2+1=0$). Se Q reale ha 1 pt. reale ne ha ∞^2 (ulteriori intersez. delle ∞^2 rette reali per quel pt.). Se per un pt. reale escono 2 rette reali, oppure imag. coniugate (intersez. del piano tg., reale, con Q reale): se per 1 pt. ~~reale~~ reale M le rette sono reali, r e r' ~~...~~

~~¹) Digressione sulle Q reali: si dicono reali quelle possono avere o no pt. reali (es. $x^2+y^2+z^2+1=0$) ... quelle che hanno eq. a coeff. reali. Se su Q reale vi è una retta reale, vi sono ∞ rette reali ... tutte quelle della schiera~~ ²)

~~...~~ le residue intersez. dei piani reali per r con Q reale (la intersez. completa è conica reale) ~~e anche quelle della schiera (r) ... ha ∞^2 pt. reali ...~~ sono reali: in ogni schiera vi sono dunque ∞^1 rette reali; per ogni pt. reale di Q passano 2 rette reali.

16)

per ogni altro pt. reale N passano anche 2 rette reali (perchè la ~~residua~~ interseq. del piano N_2, reale, con Q reale è una conica reale, di cui fa parte 2 reali, quindi il resto è retta ~~reale~~ per N, id. id. per s).– Chiamando iperb. 1 pt. reale per cui 2 rette reali; tutti i pt. reali sono iperbolici. – Se per 1 pt. P reale escono 2 rette imag. coniugate, id. id. per ogni altro pt. reale (perchè se no anche per P...): in questo caso (chiamando ellittici i pt. reali ....) le rette di una schiera [per i pt. reali] ~~[illegible]~~ hanno le loro ~~imag~~ coniugate nell'altra schiera: ogni schiera è la coniug. dell'altra. – Se Q non ha pt. reali, le rette sono imag. e 2 coniugate stanno nella stessa schiera, perchè se no il pt. interseq. sarebbe reale: ogni schiera è coni. di sè stessa ... $a_{rs} = \lambda \bar{a}_{rs}$, $\rho_{rs} e^{i\theta_{rs}} = \lambda \rho_{rs} \ldots$; e quindi $a_{rs} = 0$, oppure $e^{2i\theta_{rs}} = \lambda$; posto m = una delle 2 determinazioni di $\lambda^{\frac{1}{2}}$, $a_{rs} = \rho_{rs}(\pm m)$. dividendo tutte le a per m, diventano tutte (nulle o) reali

(17)

colle proiett. tra le schiere R e R' (S e S') in tre coppie di generatrici reali allora riprendendo il rag. fatto l'Hm. risulta reale. – Se Q e Q' a pt. ellitt. (e dipende da 6 par. reali) do $\begin{pmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \end{pmatrix}$ tra R, R' e $\begin{pmatrix} \bar p & \bar q & \bar r \\ \bar p' & \bar q' & \bar r' \end{pmatrix}$ tra S e S': allora la Hm. coniugata è $\begin{pmatrix} \bar p & \bar q & \bar r \\ \bar p' & \bar q' & \bar r' \end{pmatrix}$ tra S, S' ec. e coincide con quella, perciò reale. I parametri reali da cui dipende l'Hm. sono ancora 6. Anche tutte queste cose valgono se $Q \equiv Q'$ (allora è sempre soddisfatta la cond. che le 2 quadriche siano a pt. iperbol. o ellitt.): quindi ogni Q reale, a pt. aventi pt. reali, è trasformata in sè da ∞^6 Hm.

Quando Q è iper reale, (a pt. reali) e si rappres. ecc., come prima si è fatto, su π ..., le trasform. proiett. reali di Q in sè si rappresentano su π in trasformazioni reali biunivoche che mutano i cerchi in sè, (affinità circolari reali e corrisp. dir. sim.) e viceversa. Allora la geometria proiettiva reale su Q. è la geometria delle

18) proprietà invarianti per trasf. proiett. su

Q si traduce su π nella geometria della proprietà invarianti

per affinità circolari reali (~~proiett. e affinità~~,

~~[illegible]~~ (~~[illegible]~~

Per sviluppi e estens. di questo concetto

cfr. Klein Einleitung in die höhere Geo-

metrie. p. 378 e sgg.

a pag 13. Infatti se $\Omega\left(x' = \frac{a_{11}x \cdots}{a_{41}x \cdots}\right)$

$\bar\Omega\left(x' = \frac{\bar a_{11}x \cdots}{\bar a_{41}x \cdots}\right)$ Ω e $\bar\Omega$ portano risp.

P e $\bar P$ in P' e $(\bar P')$; se $\Omega \equiv \bar\Omega$, e P è

reale segue $P' \equiv (\bar P')$: pt. reale.

19)

Alcune nozioni sulla teoria ~~generale~~ delle superficie e delle curve alge-

briche

Impieghiamo coordinate proi. omog. (per le

loro teoria cfr. D'Ovidio. G. an. Cap XII per lo

significato delle coord. proi. è anche punto, se

le facce del tetr. sono tutte proprie, le x sono

:: alle distanze del pt. P dalle facce $A_1 A_2 A_3$, etc.

moltiplicate per fattori costanti ($\rho x_1 = k_1 d_1$ ecc.)

se la faccia $A_1 A_2 A_3$ è all'∞, presa ad unit. di spi

18) proprietà invarianti per trasf. proiett. in Q si traduce su π nella geometria ~~invarianti~~ delle proprietà invarianti per affinità circolari reali (~~proiettività e affinità,~~ ~~...~~ (~~...~~

Per sviluppi e estens. di questo un cotto

Bibl.: Salmon. Traité de Géom. analyt. a 3 dim. p. es. (per le sup) e Traité de géom. analyt. ~~per le~~ (courbes planes) per le curve piane; Enriques. Teoria geom.^ca delle equazioni e delle funzioni algebriche (2 voll.)

19

Alcune nozioni sulla teoria ~~generale~~ delle superficie e delle curve algebriche

Impieghiamo coordinate proi. omog. (per la loro teoria cfr. D'Ovidio. G. an. Cap. XII per lo spazio e Cap. XI per le forme di 2a specie). Basti ricordare che un pt. P è definito dai mutui rapporti di quattro numeri $x_1 x_2 x_3 x_4$ non tutti nulli, (coord. proi. omog di pt.) i quali rapporti ~~...~~ risultano uguali a certi birapporti formati considerando opportunamente ~~...~~ il punto P, ~~...~~ insieme con un tetraedro fissato una volta per tutte, $A_1 A_2 A_3 A_4$ (il tetr. fond.) e un punto fisso B (il pt. unità). Il significato delle coord. proi. è anche questo; se le facce del tetr. sono tutte proprie, le x sono :: alle distanze del pt. P dalle facce α_i = $A_2 A_3 A_4$, ecc. moltiplicate per fattori costanti ($\rho x_1 = k_1 d_1$ ecc.) se le facce $A_2 A_3 A_4$ è all'∞, preso il coeff. d'esp.

cart. $A_4 A_1$ $A_2 A_1$ $A_3 A_1$. $x_1 x_2 x_3 x_4$ sono :: alle coord. cart. $x\,y\,z$, e 1 moltiplicate per fattori costanti. ($x_1 = k_1 x$ --- etc.). quindi le coord. cart. om. sono casi... ~~Le c. pt. della~~ Analog. si ~~posso~~ hanno coord. proi. di pt. sulla retta già def. nel piano. - Per i pt. di α_i è $x_i = 0$, e le altre x sono coord. proi. omog. di pt. in quel piano; per $\alpha_i \alpha_j$ $x_i = x_j = 0$ e le altre x sono coord. proi. omog. sulla retta, in A_i solo $x_i \neq 0$ e si può supporre pos. $= 1$. - Si trova poi che le ~~pos~~ coord. proi. om. di un pt. della retta $x\,y$ sono $\lambda x + \mu y$; e $\frac{\lambda}{\mu}$ è coord. proi. sulla retta. Un piano ha eq. della forma (come già ecc.) $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$; le u si definiscono come coord. proi. om. del piano rispetto al sist. di riferimento considerato. [3] [Talvolta si impiegano coord. proi. non om. di pt. od piano; sono i rapporti di 3 delle x (u) alla quarta.] [3] [1] ~~Quella parte~~ Tutte le formule

delle g. an. in coord. cartes., ridotte omogenee, purché riguardino proprietà grafiche, si dimostra che sussistono tali eguali in coord. proiett..] [2] Cambiamento di coord. $x_i' =$ ~~...~~ ecc. Anche qui considereremo enti complessi. (espr. anche di omogr.)

Sup. alg. d'ordine n = F^n: luogo dei punti le cui coord. proi. om. soddisfanno a $f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$ dove f è funz. intera di grado n, omogenea (forma di grado n). La def. è indipend. dal sist. di coord. (come si può verificare facendo la sostituz. $x_i = a_{i1} x_1' + \cdots$). - Es. F^1 = piano ~~Analog. si defini...~~ F^2 = quadrica. F^3 si dice anche sup. cubica. F^4: sup. quartica. ~~nel piano C^n = curva piana algebrica~~ Se f è uguale al prodotto di due o più forme, ciascuna di grado $< n$, la F^n si dice riducibile, e è costituita da due o più sup. di ordine $< n$. (es.: due piani); se no irriducibile (es. quadrica generic. o cono quadrico). Analog. si definisce nel piano C^n = curva piana alg. d'ordine n, e le sue riducibili. ($C^1 C^2 C^3 C^4$ ...) - I punti comuni a F^n e a $x_4 = 0$

22) sono quelli che soddisf. a $x_4 = 0$, $f(x_1\, x_2\, x_3\, 0) = 0$, se la 2ª non è identica, otteniamo quindi C^n. Se la 1ª è identica vuol dire che punto $x_4 = 0$ e $f = 0$ è soddisfatta, cioè che la F^n contiene come parte il piano $x_4 = 0$. Siccome questo è un piano qualunque, così la seg. di F^n con un piano che non ne faccia parte è una C^n. – Così, cercando le intersez. con $x_3 = x_4 = 0$, si ha $f(x_1\, x_2\, 0\, 0)$ eq. om. di grado n, id. soddisf. se la retta sta su F^n, se no vi sono n soluz. alcune delle quali event. coincidenti: anche questa è retta generica; una F^n ha in comune con una retta non già: cioè su essa n pt. alcuni dei quali eventualmente coincidenti. – Si ordini rispetto a x_4.

(1) $c\, x_4^n + x_4^{n-1}\varphi_1(x_1\, x_2\, x_3) + x_4^{n-2}\varphi_2 \cdots + \varphi_n(x_1\, x_2\, x_3) = 0$

dove φ_i: forma di grado i nelle $x_1\, x_2\, x_3$; scelto A_4 sulla F^n, $c = 0$. Giungeremo a qualche concetto importante proponendoci di cercare le intersez. di F^n

(2) con una retta per A_4. Data una retta per A_4 eq.v.e data con pt. $X(x_1\, x_2\, x_3\, 0)$ di α_4: le coord. di pt. della retta sono $(\rho x_1\ \rho x_2\ \rho x_3\ \lambda)$ ovvero $(\rho x_1\ \rho x_2\ \rho x_3\ 1)$. ~~Sost. in (1)~~ (per $\rho = 0$ si ha A_4). Sost. in (1)

$\rho\, \varphi_1 + \rho^2 \varphi_2 \cdots + \rho^n \varphi_n = 0$

eq. di grado n in ρ le cui soluz. ci danno le intersez. Si ha sempre la soluz. $\rho = 0$ corrisp. ad
Se essa è k^{pla} vuol dire che A_4X incontra F^n k volte in A_4.
A_4. Supp. dapprima φ_1 non id. nulla, in tal caso la radice $\rho = 0$ è generalmente semplice: il pt. A_4 si dice allora un pt. semplice della sup. (cioè se una retta generica per esso ha, in esso, 1 sola intersez. colla sup.) In tal caso se la retta ha da avere ivi più di una intersez. colla sup. (cioè da essere tg) le x devono avere valori particolari, cioè devono annullare φ_1; la retta allora appartiene al piano per A_4 che proietta la $\varphi_1 = 0$ di

α_4. piano tg. a F^n in A_4. – (avente per eq. $\varphi_1 = 0$)

Generalm. le $x_1 x_2 x_3$ che annullano φ_1 non annullano contemporaneamente [...] φ_2 ... ; onde $\varphi_1 = 0$ è radice doppia e non di molt. maggiore per la (1), cioè le tg. in A_4 hanno contatto bipunto. - Se ciò non avviene, vuol dire che φ_2 e event. φ_3 ... sono divisib. per φ_1; se per es. $\varphi_2\, \varphi_3 \dots \varphi_i$ sono div. per φ_1, e φ_{i+1} no, $\varphi_1 = 0$ è $(i+1)^{pla}$ per la (1): le tg. nel pt. semplice sul pt. semplice A_4, hanno allora, generalm. contatto $i+1$-punto, anzichè bipunto. Nel caso generale [cioè $i = 1$] in cui φ_2 non è div. per φ_1, vi sono però delle rette tg. a contatto più che bipunto, cioè almeno tripunto, corrispondenti a $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ e sono generalm. 2. - Quindi in generale, cioè in un pt. generico di una sup. generica in un pt. semplice, vi sono 2 tg. a contatto tripunto almeno in un pt. semplice; sono le tg. principali. In ogni pt. semplice esiste dunque ed è unico il piano tg. a F^n. Le rette cor-

risp. a pt. X annullanti oltre φ_1 anche φ_2 sono in generale 2: per esse (tg. principali o tripunte) tre almeno delle intersez. coincidono in A_0. Può darsi che esse coincidano (pt. parabolico), o che per una, o entrambe si annulli φ_3 (contatto 4-pt.) o che $\varphi_2 = 0$ $\varphi_1 = 0$ abbiano ∞ soluz. ($\varphi_2 = \varphi_1 \psi_1$) allora tutte le tg. sono tripunte (punto di osculazione: piano tg. osculatore) e le intersez. di $\psi_1 = 0$ con $\varphi_3 = 0$ danno 3 tg. 4-pt. - Se è $\varphi_1 \equiv 0$, ogni retta per A_4 vi incontra la F almeno 2 volte, e se $\varphi_2 \not\equiv 0$ proprio 2 volte se la retta è generica: pt. doppio. Hanno più di 2 inters. quelle rette (tgenti) per cui $\varphi_2 = 0$, ossia le rette di un cono quadrico non degenere (pt. doppio conico), o spezzato in 2 piani distinti (pto doppio bipl.) o in piano doppio (pt. doppio uniplanare). ~~Peraltro~~. Se per un $\varphi_3 \not\equiv 0$ (caso generale) esse hanno generalmente un contatto tripunto; quadripunto o più quelle per cui $\varphi_3 = 0$ (tg.

principali; generalm. 6 come si può da... che si
2 rette aventi cont. 4-pt. o ev. >
vedrà più avanti). Possono anche essere ∞
(quando φ_3 è div. per φ_2, oppure φ_2 si
spezza in 2 forme lineari, di cui una divide φ_3)
Così se ~~$\varphi_1 \neq 0$~~ $\varphi_1 \equiv 0$, ~~$\varphi_2 \neq 0$~~ $\varphi_2 \equiv 0$, $\varphi_3 \not\equiv 0$ si avrà in A_4 un
(uno di 3° ordine tangenti)
pt. triplo. e si può fare disc. analoga. Nel
caso di $\varphi_1 \equiv 0 \quad \ldots \quad \varphi_{n-1} \equiv 0$, l'eq. è $\varphi_n \equiv 0$,
A_4 è pt. n^{plo}; la x_4 non compare più
nella (1), e se il pt. x sta su F^n vi sta tutta
la retta Ax (punti λ, x, x, sono le stesse...);
la F^n, costituita di rette per un pt. si dice
cono di vertice A_4. (Es. F^2 coni, F^3 ~~cono~~ con
pt. triplo: cono proi. cubica piana)
Consid. analoghe si fanno per le C^n alg. piane:
df. pt. semplice, e tg. in esso, pt. doppio, con
2 rette aventi cont. + che bip. generalm. trip.
se distinte, nodo, se coinc.. cuspide. pt. tripli...
C^n con pt. n^{plo} è cost. di n rette per 1 pt.

Se P è pt. semplice di F^n, π il piano tg. in P,
C^n la sez. di F^n con π (escluso il caso che π
faccia parte di F^n, ~~però supposta~~ il che implica F^n riducibile).
P è almeno doppio per C^n (infatti delle interz.
delle rette del fascio $P\pi$ con F^n, e quindi con C^n
2 almeno cadono in P): le tg. principali a F^n
in P sono le tg. a C^n nel pt. doppio (rette
aventi incontro più che bipunto). Così se in
un pt. doppio il cono quadrico tg. è spezzato
in piani, di cui uno sia π, per la C^n interz.
π F^n P è almeno triplo (stessa dim.): le
tg. in tal pt. alle sez. sono le tg. altre 4-punte
per F^n, ovvero: ~~quindi~~ le 6 rette 4-pt
in pt. doppio bipl. si riducono a 2 terne,
una per piano, in pt. doppio uniplan. a 1
terna.
<u>Cond. per pt. k^{plo}. Eq. del piano tg. in pt. sempl.</u> — Ri-
sultano dallo sviluppo di $f(\lambda x + \mu y)$ secondo le

rot. di λ e μ; basta appl. la form. di Taylor.

Posto $f_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f$, $f_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ ... si ha

$f(\lambda x+\mu y) = f(\lambda x) + \sum_i \mu y_i f_i(\lambda x) + \frac{1}{2}\sum_{ik} \mu^2 y_i y_k f_{ik}(\lambda x)$

...... λy (f_{ik} è un form. ...)

e per l'omogeneità di f e delle sue de.

(1) $= \lambda^n f(x) + \lambda^{n-1}\mu \sum_i y_i f_i(x) + \frac{1}{2} \lambda^{n-2}\mu^2 \sum y_i y_k f_{ik} \ldots$

cambiando λ, x risp. con μ, y si deve ottenere lo stesso risultato quindi il pen. e l'ultimo term. sono $\lambda\mu^{n-1} \sum x_i f_i(y)$. $\mu^n f(y)$.

Bisogna le intersez. della retta xy con F^n equiv. a trovare i valori di $\frac{\lambda}{\mu}$ per cui $f(\lambda x+\mu y)=0$.

Se x sta sulla sup. $f(x)=0$, l'eq. ha la rad. $\mu=0$

Se un'altra intersez. cade in x, deve essere $\mu=0$ almeno doppia per (1) cioè dev'essere $\sum y_i f_i(x) = 0$

Se x è semplice non è identic. rispetto a y, $\sum y_i f_i(x)=0$ e come questa è la cd. perché xy sia tg. a F^n in x: quella è dunque, fissato x e variando la y l'eq. del piano tg. in x. Dire che il pt. x è

è spl. cioè che $\sum y_i f_i(x)=0$ è identica ≡ a dire $f_i(x)=0$ $(i=1,2,3,4)$. ~~Se è ...~~ Se p. es. $\sum y_i y_k f_{ik}$ non è id. 0 allora la x è propria doppia: affinché x sia doppia è nec. e suff. che siano nulle in esso (f e) le der. prime, ma non tutte le seconde, Perché sia k^{pla} analog. occorre e basta che si annullino in esso f, le deriv. 1^e, 2^e, .. $(k-1)^{ple}$, non tutte le k^{ple}. Si vede poi facilm. che basta dire che si annullano tutte le $k-1^{ple}$, ~~dat da~~ e non le k^{ple} (dal che segue tosto l'annullarsi delle $k-2^e$, ecc. e f. col teor. di Eulero.)

Intersez. di 2 curve alg. piane, o di 2 sup. – Due curve piane, d'ord. m e m', senza parti in comune hanno mm' pt. comuni, di cui alcuni eventual. coincidenti. Se tra essi O ha molt. risp. k k' esso assorbe almeno ~~kk' intersez.~~

Cenno sulla polarità rispetto a F^n. – Si consideri, dato

9) (y) la F^{n-1} $\sum y_i f_i(x)=0$; essa dipende da P e dalla F^n, ma non dal sistema di coord., cioè se si prende un altro sist. di coord. e si considera la F^{n-1} analoga per lo stesso pt. P e la stessa F^n, queste due F^{n-1} coincidono. Se infatti si fa la trasf. $x'_k=\sum_i a_{ki}x_i$, punto $y'_k=\sum_i a_{ki}y_i$ $(k=1,2,3,4)$, si ha $f(x)=F(x')$

$$\sum_i y_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \sum_i y_i \sum_k \frac{\partial F}{\partial x'_k}\frac{\partial x'_k}{\partial x_i}$$

$$= \sum_i y_i \sum_k a_{ki}\frac{\partial F}{\partial x'_k} = \sum_k \frac{\partial F}{\partial x'_k}\sum_i a_{ki} y_i$$

$$= \sum_k y'_k \frac{\partial F}{\partial x'_k}.$$

Quindi la F^{n-1} $\sum_i y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ coincide con la $\sum_i y'_k \frac{\partial F}{\partial x'_k}=0$. Si chiama F^{n-1} polare del pt. P rispetto alla F^n, o anche 1ª polare di P rispetto a F^n. La stessa dim. prova che la nozione di F^{n-1} pol. di P rispetto a F^n è proiettiva. Analog. si prova che la F^{n-2} $\sum_{ik} y_i y_k f_{ik}(x)=0$ dipende solo da P e da F^n;

F^{n-2} polare di P rispetto a F^n si chiama 2ª polare di P rispetto a F^n, e così via; si hanno polari fino alla $(n-1)^{esima}$, piano polare di P rispetto a F^n (che per P sulla F^n è il piano tangente). Se Q sta sulla polare r^{esima} di P, P sta sulla polare $(n-r)^{ma}$ di Q (invero la 1ª proprietà porta ad annullare il coeff. $(r+1)^{mo}$ dello sviluppo (1), e la seconda, il termine $(n-r+1)^{mo}$ da destra, cioè ancora il $(r+1)^{mo}$). Queste polari si presentano in molte quest. p. es. in quella di condurre da P i piani tg. alla F^n: infatti supposta per semplicità la sup. priva di pt. multipli se Q è il pt. di contatto di tal piano, P sta sulla $(n-1)^{ma}$ polare di Q, quindi Q sulla 1ª polare di P; viceversa se Q (punto semplice), sta sulla 1ª polare di P, il piano tg. in Q passa per P: quindi per avere i pt. Q basta intersecare la 1ª polare di P, e la curva intersez. sua ~~pt. semplici delle~~ con F^n. – Analog., si ha la teoria delle polarità rispetto a n piani, e a gruppi di pt. su una retta, rappresentati dall'eq. $f(x_1 x_2)=0$, di grado n.

31)

Interz. di 2 C alg. piane, o di 3 superfici:

C^{n_1} e C^{n_2} piane, senza parti in comune, hanno in comune $n_1 n_2$ pt. (di cui alcuni event. coincidenti) (teor. di Bézout). Si dice che se, tra essi, O ha molt. risp. k_1, k_2, esso assorbe $k_1 k_2$ o più interz. Più precisamente, si dice che in O le due curve presentano il caso semplice, quando nessuna delle k_1 tg. a C^{n_1} (anche se event. coincidenti fra loro, isolate o in parte) coincide con nessuna delle k_2 tg. a C^{n_2}: in tal caso O assorbe precisamente $k_1 k_2$ interz. e non più. Per magg. particolari: risp. di Segre. Le molteplicità nelle interez. delle curve piane algebriche con alcune applicazioni ai principi della teoria di tali curve. Batt. G. 36 (1898).

F^{n_1}, F^{n_2}, F^{n_3}, se non hanno in comune

(32

né una parte sup. né una curva, a tre, che a tre tagli hanno $n_1 n_2 n_3$ pt. in comune, di cui alcuni event. coincidenti: se O è risp. k_1^{plo}, k_2^{plo}, k_3^{plo} assorbe almeno $k_1 k_2 k_3$, e precisamente tante se le risp. presentano in O il caso sempl., cioè i coni tg. non hanno generatrici in comune; altrimenti di più.

Sviluppi. — Nel piano (vedi. alla Gen. dual.) il concetto duale di curva alg. è quello di inv. di rette. Precisamente si chiama inv. alg. di classe n' le figure delle rette le cui coord. pr.-om. sodd. a $f(u_1 u_2 u_3)$, dove f è forma di grado n' nelle u. Le tg. a C alg. piana, non costituita da tutte rette, formano un inv.: se $f(x)=0$ è l'eq. della curva, quella dell'inv. si ha eliminando le x fra $u_i = f_i(x)$ e $f(x)=0$, (oppure $\Sigma_i u_i x_i = 0$). Dualm. a pt. sempl. tg. in sp., si ha allora rette semplice, e suo pt. di contatto: se l'inv. è quello formato dalle tg. a C alg. (e anche se non alg.) si dimostra che il pt. di contatto così definito è proprio quel pt. della C^n dove la retta considerata tocca la C^n. — Dualm. a pt. molt. rette molt.: p. es. ~~retta~~ tg. doppia (tale che conta come 2 fra quelle condotte alla C^n da un suo pt. generico), si trova che ha 2 pt. di contatto: distinti (bitang.) o coinc. (tg. di flesso). Delle intersez. di una tg. di flesso colla curva si trova poi che 3 coincidono col pt. di contatto.—

Come si esprime la classe di una data C^n irriducibile? Se essa ha d pt. doppi e r cuspidi si ha un sistema di formule che danno in funzione di n, d, r, ~~...~~ i numeri n', d' (tg. doppie) e r' (tg. di flesso): sono le formule di Plücker. Consideriamo per semplicità il solo caso in cui le cuspidi sono tali

che la tg. cusp. non è tripunta (e dualm. per le tg. di flesso). Se P è pt. gen. del piano i pt. di contatto delle tg. uscenti da P sono i pt. semplici di C^n situati sulla prima polare di P; le intersez. delle 2 curve sono $n(n-1)$, da cui per avere n' bisogna levare quelle che cadono nei pt. doppi di C^n. Ora, se O è un nodo di C^n, si verifica che la 1ª polare di P ha in O un pt. semplice e non tocca ivi le tg. in O a C^n; le due curve presentano il caso spl. e O assorbe 2 intersez. Se O è cuspide, la 1ª polare di P passa per O, e vi tocca la tg. cusp.; le due curve non presentano più il caso semplice, e sono assorbite da O almeno 3 intersez.: si dimostra che nelle ipotesi fatte sono proprio 3. Quindi

$$n' = n(n-1) - 2d - 3r. \qquad (1)$$

Dualm. $n = n'(n'-1) - 2d' - 3r'$: (2)

A altre relaz., differenti dalla prec. si arriva

mediante il concetto di genere. Si dim. che
C^n irrid. non ha più di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ pt.
(il massimo però non raggiunto)
doppi*) se la C^n ha solo pt. doppi, ed ~~sono~~ è
$\geq D$. le sp. dip. $3D$ + la differenza ≥ 0

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - \varkappa = p \text{ : genere.}$$

Analog. si definisce il genere di un invil. piano
algebrico. Si dice poi che 2 curve alg. piane
(luogo, o inv.) sono in corr. biunivoca
alg. o birazionale quando le coord. di ogni
pt. (o tg.) dell'una si esprimono come
funz. raz. delle coord. del pt. o retta
corrisp. Sussiste allora il teor. di Riemann:
due curve piane algebriche in corrisp.
biunivoca alg. hanno lo stesso genere. (lo

*) Infatti nell'eq. di C^n vi sono $(n+1)+n+\dots+1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ term.: per $\dots - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ pt. passa almeno C^n; per $\frac{(n-1)(n+1)}{2}$ almeno una C^{n-1}. ~~Ora~~, se C^n ha $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ pt. doppi per essi + $n-3$ altri (in tutto $\frac{n^2-3n+4+2n-6}{2} = \frac{n^2-n-2}{2}$:

dimostreremo poi). ~~Segue allora~~. Ora, se C^n è
~~...~~ inviluppo (una retta) e a ogni pt. si fa
corrisp. la relativa tg. nella stessa curva inv., la
corr. tra curva luogo è alg. birazionale (perché
$u_i = f_i(x)$, e analog...) : quindi genere della curva
luogo = genere della curva inviluppo. cioè

(3) $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - \varkappa = \frac{(n'-1)(n'-2)}{2} - d' - \varkappa'$

Elim. d' fra (3) e (2) si ha

$(n-1)(n-2) - 2d - 2\varkappa = (n'-1)(n'-2) - 2d' - 2\varkappa'$

Sottraggo (2)

$n^2 - 3n + 2 - 2d - 2\varkappa - n = -2(n'-1) + \varkappa'$

$\varkappa' = n^2 - 4n + 2 + 2n' - 2 - 2d - 2\varkappa = 3n(n-2) - 6d - 8\varkappa$ (4)

e dualm.

$\varkappa = 3n'(n'-2) - 6d' - 8\varkappa'$ (5)

Le (1) (2) (4) (5) costituiscono le form. di Plücker:

: $\frac{(n+1)(n-2)}{2}$) passa almeno 1 C^{n-2}, che ha con C^n
già almeno $(n-1)(n-2) + 2 + n - 3 = n(n-2) + 2$
interse...).

37) ove si riducono a 3 sole indip. perchè (4) e (5) sono conseguenze di (1) (2) (3). (41) Si può porre la questione se, dati 6 num. n, d, ecc. che soddisfano le (1)..(5) esista sempre una C^n corrispondente. Per i valori più bassi di n si trova di sì; però in un lavoro di Brone "Sur une espèce de courbes symétriques de 6me classe" Acta Math. II (1883) si trova incidentalmente dimostrato che non esiste nessuna curva per cui

$n=6,\ d=1,\ r=7,\ n'=7,\ d'=3,\ r'=10$

cioè che non esiste C^6 con 8 pt. doppi di cui 7 cuspidi e 1 nodo. Non si conoscono altre conseguenze.

Le formole di Plücker si estendono al caso (e la definizione di genere) che la curva presenta pt. multipli qualunque e tg. multiple qualunque; però allora bisogna considerare un pt. multiplo come equivalente a un certo n° di nodi e cuspidi, ordinatamente (equivalenti plückeriani). P. es. un pt. r^{plo} ordinario (cioè a tg. tutte distinte) si trova che equ. a $\frac{r(r-1)}{2}$ nodi.

(37)

Dim. del teor. di Riemann.

Digressione sul principio di corrispondenza per le forme fondamentali di 1a specie. — (Enunciato da Chasles nel 1864, ma già usato precedentemente da de Jonquières e da Cremona). — Due forme di 1a specie p. es. 2 pt. punteggiate si dicono riferite in una corrispondenza algebrica (α, β) o di indici α e β, quando a ogni pt. della 1a corrisp. β pt. della 2a, a 1 della 2a α della 1a, e di più il legame tra pt. corrisp. è espresso algebricamente ~~la corrisp. è algebrica~~, cioè le coord. di p. es. pos. di 2 pt. corrisp., x e y sono legate da eq. alg. $f(x, y) = 0$, che sarà di gradi risp. α e β in x e y. (cioè $\Sigma\, x^{\alpha} y^{\beta} \ldots = 0$). Il principio dice che se le due pt. sono sovrapposte, e non ogni pt. è unito, i pt. uniti sono $\alpha+\beta$ (coll'avvertenza che qualche pt. unito può ora da contare più volte. In altri ~~punti~~ riferite le due pt. a uno stesso sist. di riferimento i pt. uniti sono dati da $y=x$, cioè $f(x, x)=0$, di grado $\alpha+\beta$ in x. Potrebbe dasi che $K=0$, cioè che manchi il termine in $x^{\alpha+\beta}$ nell'eq. dei pt. uniti, ma introducendo coord. omog. si vede che ciò è dovuto al fatto che vi sono allora dei pt. doppi per cui $x=\infty$, e il principio resta vero. — Nelle applic. del p. d. c. può nascere qualche difficoltà per sapere quante volte vada contato un elem.to unito. Possono riuscire utili le seg.ti oss.ni. Se per un pt. M avviene che considerato sulla 1a forma, 2 dei suoi β corr. nella 2a cadono in M, e considerato nella 2a, analog., allora M conta almeno 2 volte tra gli elem.ti uniti (Per dim. prendo 2 assi cart. ortog. per O e considero la curva C: $f(x,y)=0$, curva della corrispondenza. — La ricerca dei pt. uniti eq. alla ricerca delle interz. della curva C colla retta $x=y$. Supp. che il pt. M corrisponda a $(x=y=\infty)$: allora C passa per O; per ip. gli assi hanno incontro bip. con C in O; quindi O è doppio, e r ha incontro almeno bip.

con C in O). La condiz. è sufficiente ~~[illegible]~~ ma non ~~suff.~~ necessaria (perchè potrebbe C ~~[illegible]~~ avere in O un pt. semplice, perchè la tg. sia r). La condiz. è però nec. e suff. nel caso che la corrisp. sia simmetrica (cioè $f(x,y)$ funz. simm. di x e y, ossia un pt. ha gli stessi corrisp. in qualunque forma $(\alpha=\beta)$) In tal caso allora, se i termini di grado più basso in x, y, sono) $ax+by+cx^2+dxy+ey^2\ldots=0$ dovendo essere $a+b=0$, e quindi $a=b$, $a=b=0$, e O è doppio per C, e quindi gli assi hanno incontro almeno bip. in O.

Per dimostrare il teor. di Riemann, basta considerare il caso di due curve luogo piane C, C_1 in corrisp. birazionale (operando eventualmente una o due reciprocità, che non alterano il genere). (43) Sia $C(n\ d\ r\ p)$. $C_1(n_1, d_1, r_1, p_1)$; siano A e A_1 due pt. corrisp. nella supposta corrisp. biraz. tra C e C_1. Prendo O generico, e O_1 generico risp. nei piani di C, C_1. Una retta passante per O

41) A una sua intersez. con C, B_1 una [delle n_1-1] intersez. di C_1 con $O_1 A_1$ [oltre A_1] sia il corrisp. di B, pongo $r' \equiv OB$. La corrisp. ~~tra r r' si può quindi definire~~ così: diciamo corrisp. due rette r e r' quando segano C risp. in A e B tali che $A_1 B_1$ passi per O_1. [quelli a ritroviamo, dato r'...]

La corrisp. [nel fascio O] è quindi simmetrica, d'indici $n(n_1-1)$, ed è algebrica per la natura delle costr. fatta

[Per vederlo in modo più preciso, fisso due piani coord. [proiett.] p.es. non omog. x, y, e X, Y; sia $A(x_a\, y_a)$ $B(x_b\, y_b)$ $A_1(X_a\, Y_a)$, $B_1(X_b\, Y_b)$; $O_1(X_0\, Y_0)$ (x,y) (X,Y) siano $p=0$ $q=0$ le eq. di due rette passanti per O; allora se $OA \equiv p+\lambda q=0$ $OB \equiv p+\lambda' q=0$ (λ è coord. proi. di OA nel

Nota a pag 37. Da ciò segue

$$d' = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9) - (2d+3r)(n^2-n-6) + 2d(d-1) + \frac{9}{2} r(r-1) + 6dr$$

e la duale

(42)

fascio O) e sia $f(x\,y)=0$ l'eq. di C, sarà

$$p(x_a\, y_a) + \lambda\, q(x_a\, y_a) = 0$$
$$f(x_a\, y_a) = 0$$
$$p(x_b\, y_b) + \lambda' (x_b\, y_b) = 0$$
$$f(x_b\, y_b) = 0$$
$$\begin{vmatrix} X_a & Y_a & 1 \\ X_b & Y_b & 1 \\ X_0 & Y_0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

X_a, Y_a essendo funz. raz. di $x_a\, y_a$, e così quindi si hanno 5 eq. alg. tra $x_a\, y_a$ $x_b\, y_b$ λ, λ': elim. le 1e quattro resulta $\varphi(\lambda,\lambda')=0$ dove φ è un polinomio. Però non è questa ancora l'eq. della corrisp. tra r e r', perchè non si è ancora tenuto conto del fatto che $A_1 \not\equiv B_1$ (in generale), e le 5 eq. prec. non sono soddisfatte per $r \equiv r'$, $A \equiv B$, $A_1 \equiv B_1$: cioè $\varphi(\lambda,\lambda')=0$ è soddisfatta sempre da $\lambda'=\lambda$: quindi $\varphi(\lambda,\lambda')$ è divisibile per una certa potenza di $\lambda'-\lambda$; ~~$\varphi = \lambda$~~ se $\psi(\lambda\,\lambda')$ è il quoz. sarà $\psi(\lambda\,\lambda')=0$ l'eq.]

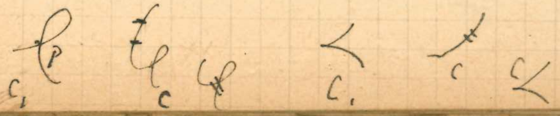
45) ~~Nella corrisp.~~ coincidenti per degenerazione dei pt. O, O_1
Nella corrisp. fra 2 e 2, vi sono quindi $2n(n_1-1)$ rette unite. - Su una di queste, contenente i pt. A e B, avviene certo o l'uno o l'altro di questi due casi: 1) A e B sono <u>due</u> intersez. della retta OAB con C, ~~(distinte o eventualmente A e B coincidenti)~~ 2) A e B coincidono e la retta

(45)! Su C e C_1 facciamo le consuete ipotesi; però si desidera che il teor. di Riemann sia valido anche se non sono soddisfatte. - Premetto poi il seg. ragionamento. Se C e C_1 sono in corrisp. biunivoca algebrica, si dimostra, e noi lo ammettiamo come intuitivo, che se P è ~~doppio~~ un nodo di C_1 ad esso corrisp. sopra C 2 pt., e non 1 solo; saranno in generale 2 pt. semplici, i quali potranno eccezionalmente coincidere in un nodo di C. Se il nodo diviene una cuspide, i due corrisp. di P su C vengono a coincidere fra loro; ma si avranno almeno 2 punti

(47) OA ha 1 sola interseg. con la C^n che cade in A. Includo dunque in 1) anche i casi, che eventualmente si possono presentare, di $A \equiv B$, ma che A e B contino come 2 interseg. di OAB con C^n, il che avviene nell'eventualità che si corrispondano nodi di C^n e C^{n_1}, o cuspidi di C^n e C^{n_1}. Sia ν il numero di volte che si presenta il 1° caso; quante volte si presenta il 2°? Se ora $A \equiv B$, e quindi $A_1 \equiv B_1$; se $A_1 \equiv B_1$ è semplice su C^{n_1}, è il pt. di contatto di una ~~retta~~ tg. a C^{n_1} per O_1, si presenta n_1' volte; se $A_1 \equiv B_1$ è doppio, non è un nodo (perchè allora, avendo supposto $A \equiv B$, ~~A e B sono distinte~~)

---

fra loro coincidenti su C che corrisp. a quella cuspide. Reciprocamente possono i due pt. fra loro coincidenti su C coincidere proprio in una cuspide di C_1



non potrebbero A e A' che coincidano in un punto di C^n, e si ricadrebbe in un caso già contemplato in 1)), e quindi è una cuspide di C^{n_1}, ~~anzi~~ di quelle (per lo stesso motivo) che rappresentano l'eccezionalità di avere come corrispondente su C^n un'altra cuspide. Se le coppie di cuspidi corrispondenti sono K, quest'ultimo caso si presenta $r_1 - K$ volte.

~~Le~~ Le coincidenze $r \equiv r_1$ sono dunque date dalle ν di 1), e dalle n'_1 e $r_1 - K$ dei due sottocasi ~~di~~ $2)_1$. Con quale moltiplicità va contato ognuno dei 3 tipi di soluzioni? Per il caso 1), si potrebbe applicare una regola esposta e trovare che ogni soluzione è almeno doppia; ma siccome la molteplicità ~~delle~~ di tali soluzioni non ci interessa, chiamiamola x;

dell' 1) parte quindi un contributo $x\nu$ al numero totale di coincidenze; ogni retta unita proveniente da $2)_1$ fornisce una soluz. semplice (applicando il criterio dato per le corrisp. si num. perchè una soluz. conta per 2), e lo stesso per le soluzioni provenienti da $2)_2$. Si ha dunque

$$2n(n_1 - 1) = x\nu + n'_1 + r_1 - K.$$

Scambiando le 2 curve fra loro, ν resta inalterato (esprime quante volte avviene che ci sia una retta r per O e una r_1 per O_1 tali che le 2 intersez. rC^n abbiano per corrisp. nella corrisp. alg. ... fra C^n e C^{n_1} 2 intersezioni $r_1 C^{n_1}$ e poi) è definito simmetricamente rispetto alle 2 curve; quindi

$$2n_1(n-1) = x\nu + n' + r - K.$$

donde

$$2n_1 - 2n = n'_1 - n' + r_1 - r$$

Ora $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$; $2p = (n-1)(n-2) - 2d - 2r$

$n' = n(n-1) - 2d - 3r$

47)

$2p = n' - 2(n-1) + 2\left\{ ... n' - 2(n-1) ... \right\}$ $2(n+p-1)-2$

$n' - p$ $\quad n' - 2p = 2n - 2 - 2$; $n' = 2(n+p-1) - 2$.

Analog. $n_1' = 2(n_1 + p_1 - 1) - 2$, Sottraendo

$2n_1 - 2n = 2n_1 + 2p_1 - 2 - 2 - 2n - 2p + 2 + 2$

$+ 2 - 2 \quad p_1 = p.$ c.d.d.

La Dim. esp. è dovuta, salvo qualche modif. a Schubert, Ueber die Erhaltung des Geschlechts .... Math. Ann. XVI. (1880) p. 180, v. anche Bertini Introduz. alle G. p. degli ip. p. 206; e Sturm. Die Lehre von den geom. Verwandtschaften. I. p. 238, dove è invece altro: Guida e Zeuthen X. Cenni sul genere secondo Riemann. X.

(43). Se la corr. fosse identica, vi sarebbe in ogni r almeno una coppia di pt. i cui corr. in C^n sarebbero allin. con O_1. Scartando ad es. un num. finito di posiz. di O_1 lo si può evitare.

(48

Sulle curve di genere 0. – Una C^n piana si chiama raz. se le coord. omog. dei suoi pt. si possono esprimere con t [in] funz. raz. di un parametro $(x_1 : x_2 : x_3 : P_1(t) : P_2(t) : P_3(t))$. Per un teor. di Lüroth (v. una dim. in Severi. Lezioni di geom. alg. p. 18), se un pt. generico di C^n proviene da più valori del parametro (es. $x = t^2$, $y = t^4$), si può sostituire un nuovo parametro, tale che vi è corrisp. biuniv. tra i due pt. vecchi e i pt. di C^n (p. es. $t' = t^2$). – Allora se t si interpreta come coord. su una retta r, tra i suoi pt. e quelli di C viene una corrisp. alg. biuniv. (biuniv. per costruzione; di più le coord. di un pt. di C sono ...; e viceversa. Posto $x = \frac{x_1}{x_3}$ $y = \frac{x_2}{x_3}$; si avrà $x = R(t)$, $y = S(t)$ con R e S funz. raz.: si avrà t in funz. di x e y cercando le soluz. comuni di $x = R$, $y = S$; il risultato è raz. in x e y.). – Il gen. delle retta è zero; quindi, pel teor. di Riemann, le C^n raz. sono di genere 0. ~~Viceversa~~ (limit.

dim. al caso delle solite ipotesi su C^n: $n \geq 3$)

questa ha $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ pt. doppi ~~[illegible]~~;

siano $A(x,y,\ldots)=0$ $B(x,y,\ldots)=0$ le eq. di 2 C^{n-2}

più $n-3$ altri in tutto $\frac{(n-2)(n+1)}{2}-2$

distinte per essi; per essi passano tutte le

C^{n-2} del fascio $A+\lambda B=0$, ~~[illegible]~~

genericoP

~~raz.~~ Per un pt. di C passa una curva del

fascio; e aggiungendo questo pt. con quelli imposti, co-

muni a tutte le C^{n-2} per

esaminiamo le interseg. con C^n (~~[illegible]~~) $=(n-1)(n-2)$

$+n-3+1 = n(n-2)$) ; le coord. di P si hanno

dopo risolvendo $A+\lambda B=0$ $f(x,y)=0$; la x di P di-

pende da un'eq. di grado $n(n-2)$ a coeff. raz. in λ,

le cui soluz. sono tutte note salvo 1, si abbassa

al 1° grado; x è funz. raz. di λ, e così y.) Per

$n=3$, basta considerare $n=2$ (analogamente le

rette è evidente), (conica irriducibile) e sostituire colle C^n, le

rette per un pt. fisso della conica. Le

C di genere 0 coincidono dunque colle C raz.

~~Dunque~~ Su ogni curva di genere 0 si può

applicare il princ. di corr.; due C^n di gen. 0 sono birazion. identiche. Le curve di $p=1$

si chiamano anche ellittiche perché la

loro rapp. param. dipende non più dalle

funz. raz., ma da funz. ellittiche. (es. C^3

senza pt. doppi; se invece ha 1 pt. doppio $p=0$).

Cenni sulle curve sghembe algebriche v. pag. 52.

Delle curve sghembe si generano (retta

tg. piano osculatore), v. ~~Fano~~, e la totalità

dei piani osculatori; figura duale della curva

sghemba; ~~[illegible]~~ proiez. della curva sghemba p. 65)

v. Fano G. D. cap. VII. § 3 e 4). Una C sghemba

si dice algebrica quando da ogni pt. dello

spazio è proi. secondo un cono algebrico, ossia

a due quando è algebrica ogni sua proiezione

piana; riducibile se è tale ogni sua proi.

piana, se no irriducibile. ~~Se~~ Si dice che C è

58) proi. sempl. da P si una generatrice ge-
nerica del cono PC contiene un solo pt. di
C; se no doppiamente, triplamente, ec. Da
un pt. generico dello spazio le C si proiettano
semplicemente (basta prendere P su una
1-secante di C). Se le C si proiettano spl.
da A e B (punti di C) i 2 coni proiett. hanno lo
stesso ordine (ciò fatto; se AB non incontra la
C: allora se n è l'ord. del cono AC, ogni
piano per AB ne contiene n gen-
erat. (diverse da AB), e perciò n pt. di C, e quindi
n generatr. del cono BC, che sarà perciò
d'ordine n; se AB incontra C, basta
passare pel tramite di un pt. D tale
che AD e BD non incontrino C)
È quindi cost. l'ord. dei coni che proiet-
tano spl. le C da pt. esterni ad esse.
Si chiama ordine della C sghe. algebrica

segue che C^n ha più contenere con un piano (59
che non ne contenga una parte n pt. (ri-
sulta al cono proi. sempl. C^n da un
punto generico di quel piano). Se da
P punto di C essa è proi. K-plamente, le
n interz. di C^n con piano generico per P
stanno k a k su generatrici di quel cono, che
ha perciò ordine $\frac{n}{k}$. Convenendo di contarlo
k volte, si può dire che una C^n è proi.
da ogni pt. esterno secondo un cono d'ordine
n eventualm. multiplo (cioè costituito da
un cono d'ord. minore, contato più volte);
ogni proi. piana di C^n fatta da un pt. esterno
è d'ordine n (event. multipla) (v. 60)

(60) Quindi per le curve di $p=0$ il teor. di Riemann
è invertibile. Però se $p>0$, si dim. che il teor. di
Riemann non è invertibile.

Sulle curve piane di genere 1. – (p. 49). –

Ogni C^n piana di genere 1 si può porre in corrisp. alg. biunivoca con C^3 senza pt. doppi.

Lo dim. nelle solite ipotesi. Allora C^n [$f(x,y)=0$] avrà $\frac{(n-1)(n-2)}{2}-1$ pt. doppi. Per essi e altri $n-2$ pt. di C^n, in tutto $\frac{(n-2)(n+1)}{2}-1$ passano $\infty\, C^{n-2}$; siano $A(x,y)=0$, $B(x,y)=0$ le eq. di 2; per cui passano tutte le C^{n-2} del fascio $A+\lambda B=0$; Nei pt. fissi cadono almeno $(n-2)(n-1)-2$ $+n-2 = n(n-2)-2$ intersez. di C^{n-2} e C^n; le interz. residue, variabili con λ, sono perciò in numero ≤ 2., ma non 0 perchè per un pt. generico di C^n passa una C^{n-2} del fascio, e nemmeno 1, perchè se no C^n sarebbe raz. e perciò di genere 0; quindi proprio 2. Perciò la interz. rimanenti variabili di $A+\lambda B=0$ con $f=0$, cadono per x (9) a una eq. di 2° grado, con coeff. ~~razionali~~ polinomi in λ: $L(\lambda)x^2+M(\lambda)x+N(\lambda)$.

Da cui si ricava ~~x in funzione razionale~~:

~~da~~ $x = \frac{-M(\lambda)\pm\sqrt{M^2-4LN}}{2N} = \frac{M\pm\sqrt{R}}{2N}$ (posto $M^2-4LN=R$)

x è funzione raz. di λ e di $\sqrt{R(\lambda)}$, cioè $x=S(\lambda,\sqrt{R(\lambda)})$; $y=T(\lambda,\sqrt{R(\lambda)})$. ~~$R(\lambda)$ si può supporre un polinomio in λ senza radici multiple. Posto $R(\lambda)$ Introdotta la variabile μ~~ Posto $\sqrt{R(\lambda)}=\mu$, avremo,

$x=S(\lambda,\mu)$, $y=T(\lambda,\mu)$ (59) con $\mu^2=R(\lambda)$: interpr. λ e μ come coord. p.es. cartes. in un piano, $\mu^2=R(\lambda)$ rappresenta una curva Γ che risulta in corrisp. alg. biun. con C^n. Infatti x e y sono funzioni alg. di λ e μ, e viceversa. ~~Se~~ $R(\lambda)$ fosse un polin. con qualche radice multipla. p.es. fosse divisib. per $(\lambda-\lambda_0)^i$ con $i\geq 2$, pongo $R(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^{2j}R_1(\lambda)$ dove $2j$ è il mass. multiplo di 2 contenuto in i, allora $x=S(\lambda,(\lambda-\lambda_0)^j\sqrt{R_1(\lambda)})$ etc $=S'(\lambda,\sqrt{R_1(\lambda)})$ etc. Quindi si può supporre che $R(\lambda)$ abbia tutte radici semplici.

55) Da $A(\lambda)=0$ si ricava λ in funz. raz. di x e y. Si ha poi $\mu = \sqrt{R'(\lambda)} = \frac{\sqrt{R(\lambda)}}{\text{cost.}(\lambda-\lambda_0)^i}$

Ora $\sqrt{R(\lambda)} = \frac{2Nx+M}{\dots}$ = funz. raz. di x, y. quindi anche μ = funz. raz. di x, y. C e Γ sono quindi in corrisp. biraz. Ora ~~detto il~~ ~~la ... Γ $\mu^2 = R(\lambda)$~~ grado del polin. $R'(\lambda)$ è certo 3 oppure 4. Per dim. ciò consideriamo $\mu^2 = R(\lambda)$ dove R è di grado l in λ. Posto $\mu = \frac{\xi_2}{\xi_3}$, $\lambda = \frac{\xi_1}{\xi_3}$ $\Gamma \equiv \xi_3^{l-2}\xi_2^2 = R_l(\xi_1, \xi_3)$ dove R_l è pol. omog. in $\xi_1 \xi_3$. Per trovare i pt. multipli di Γ, ricerchiamo si annullano le derivate 1e della eq. cui

$$\frac{\partial R_l}{\partial \xi_1} = 0$$

$$2\xi_3^{l-2}\xi_2 = 0.$$

$$(l-2)\,\xi_3^{l-3}\xi_2^2 = \frac{\partial R_l}{\partial \xi_3}$$

Dalla 2a deriv. $\xi_2 = 0$. $\frac{\partial A_l}{\partial \xi_1} = 0$ $\frac{\partial A_l}{\partial \xi_3} = 0$, imp.

(56)

Quindi dovremo avere $\xi_3 = 0$; $\xi_1 = 0$. cioè il solo pt. multiplo è A_2, molt. $l-2$; le tg. in esso sono $\xi_3 = 0$, cioè tutte coinc. in una tg. a cui contro l pt. Si dim. che quel pt. equiv. a $\frac{(l-2)(l-3)}{2}$ + h pt. doppi dove $h = \frac{l-2}{2}$ se l è pari, $\frac{l-3}{2}$ se l è dispari. Quindi il genere di Γ è risp.

$$\frac{(l-1)(l-2)}{2} - \frac{(l-2)(l-3)}{2} - \frac{l-2}{2} = \frac{l-2}{2} \quad (l \text{ pari})$$

$$- \frac{l-3}{2} = \frac{l-1}{2} \quad (\text{dispari}).$$

Quindi perchè abbiamo $p=1$, per l sarà $l=4$, oppure $l=3$. Se $l=4$, facciamo la trasf. biraz. ~~$\mu'=\mu$~~. ~~$\lambda'=\lambda$~~ $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'(\lambda'-\lambda_0)$ dove λ_0 è una radice di $R'(\lambda)$; la cui inversa è evidentemente raz. in $\lambda' = \lambda$ $\mu' = \frac{\mu}{\lambda - \lambda_0}$; in essa Γ ~~risulta~~ quindi C risulta risp. biraz. a:

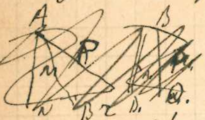
$$\mu'^2(\lambda'-\lambda_0)^2 = \text{cost.}(\lambda'-\lambda_0)(\lambda'-\lambda_1)\dots(\lambda'-\lambda_3)$$

$$\mu'^2(\lambda'-\lambda_0) = \text{cost.}(\lambda'-\lambda_1)(\lambda'-\lambda_2)(\lambda'-\lambda_3)$$

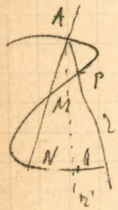
c.d.d.

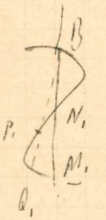
[la C ... ha pt. doppi, se una radice [illegible]]

Siano γ e γ_1^* due C^3 di $p=1$ in corrisp. birazionale. Si corrisp. M e M_1, N e N_1; siano A e



B le res. interz. di MN con γ, etc.
Introduco la seguente corrisp. del γ passanti per A in sé: a $r \equiv \cancel{AM}$ AP faccio





corrisp. $r' \equiv \cancel{BM}$ AQ, dove Q_1 è la resid. interz. di γ_1 con BP_1; la corrisp. è simm. di indici 2, 2,

γ γ_1 e perciò avendo come unite le 4 (or le pen. tg. ...) alle 2 corrisp. ai 4 pt. P_1 di contatto di γ_1 con altre tg. per B ad essa condotte da B, per AMN ha tutti i raggi uniti. cioè ogni retta r per A taglia ult. γ in 2 pt. i cui corrisp. sono allineati su B; ... centri omologhi di proiezione. Nasce fra i fasci A e B corrisp. algebr.

(1, 1) cioè proiett., in quanto si toccano corrisp. raggi come AMN, BM_1N_1; quando AMN diviene tg. per A, cioè $M \equiv N$, per la simm. $M_1 \equiv N_1$, cioè BM_1N_1 è tg. e perciò alle 4 tg. a γ per A per A corrisp.: quelle tre quaterne hanno perciò in ordine conv. lo stesso birapporto. [Digr. Considero 1 $p=1$ arbitraria; essa ha sempre trasf. alg. birazionale in sé in cui si corrisp. P e P' tali p. es. la proi. in sé dalle P residue interz. con PP'; in tale corr. i centri omol. di proi. sono i tg. di P e P'. Quindi si possono dare ad arbitrio i centri om. di proi. A, B e definire, nel modo ora detto, la corrisp. facendo corrisp. al pt. di contatto di tg. per A ....
Segue che le quaterne di tg. alla C^3 per A e B [qualunque] sono proiettive, cioè il birapp. delle 4 tg. è costante (Salmon)

~~Altrimenti: se $y = f(x, y) = 0$ il birapp. delle 4 tg. uscenti da $A(x, y)$ è determ. da una eq. algebrica (?) Quindi~~ a ogni curva di genere 1 compete un certo birapporto: se f e f_1 sono in corrisp. algebrica biunivoca devono avere lo stesso birapporto. Viceversa abbiamo 2 C^3 dip. 1 lo stesso birapp.: Pongo le loro eq. sotto la forma fr. notica ~~ad esempio (v. ... a pag. 55 tutte C^3 (pag. 61) ... (C bir. f ... C' bir. f_1) di eq.~~

$$\mu^2 = k(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \quad (1)$$

$$\mu'^2 = k'(\lambda' - \lambda'_1)(\lambda' - \lambda'_2)(\lambda' - \lambda'_3) \quad (2).$$

~~(si può dim. che a tal forma si possono ridurre già le eq. di f e f_1) e ... lo stesso birapporto~~; si ha per tg. $\lambda = \lambda_i$ e anche la retta all'∞ come si vede (di flesso, e perciò.....) (passando a coord. un. cioè $\lambda = \infty$; e analog. Il birapp. delle 1e quattro ~~...~~ eg. a quello delle 2e p. es. nello stesso ordine. allora

$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \infty) = (\ )$; pongo per $\lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$ con $c = 0$, cioè $\lambda'_i = a\lambda_i + b$. Allora faccio su (2) le trasf. omogr.

$$\mu' = \mu \sqrt{\frac{k'a^3}{k}} \quad \lambda' = a\lambda + b$$

Risulta

$$\mu^2 = k'a^3(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \cdot \frac{k}{k'a^3}$$

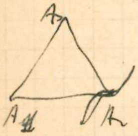
cioè (1). Quindi coord. mediante... perchè due C^3 piane ellitt. si possono porre in corrisp. alg. biunivoca che abbiano lo stesso birapp. o modulo. Se si prendono 2 C piane ellittiche di ordine qualunque, quale sarà la condiz. Quando una di esse si trasforma biraz. in C^3 piana, questa C^3 ha (53) Quanto a y, il rad. quadr. da cui dipende si può supporre essere ancora $\sqrt{R(\lambda)}$; perchè da $A(x, y) - \lambda B(x, y) = 0$ $f(x, y) = 0$, si deduce y in funzione razionale di x e λ, e perciò di λ e $\sqrt{R(\lambda)}$

sempre lo stesso [illegible] modulo; potremo dire[illegible] quel valore modulo delle C ellittiche. Altre d[illegible] risulta che per 2 C ellittiche qualunque la cond. nec. e suff. perchè ~~[illegible]~~ possano porsi in corrisp. biunivoca alg. è che abbiano lo stesso modulo. Anche per le C alg. di genere $p > 1$ si trova che affinchè si possano porre in corrisp. alg. biunivoca è che esse abbiano eguali un certo numero di moduli, cioè ~~che~~ un certo numero di espressioni calcolate per l'una e per l'altra curva.

51) Per C^n sghembe si possono definire pt. multipli analog. alle C^n piane: A si dice s^{plo} se per ~~tutti~~ i piani generici per A s delle n intersez. con R^n cadono in A. Per un pt. s^{plo} si trova che vi sono s tg. di cui alcune [illegible] coincidenti per $s = 2$ nodo e cuspide. La proiez. piana di A s^{plo} è ~~[illegible]~~ C^{n-s} (dim. per esercizio) [illegible]

~~[illegible] a quello del principio~~ anche da A s^{plo} di C però dove che la proiez. non si faccia ugualmente: ~~[illegible]~~ 2 [Genere di C^n: è quello delle sue proiez. piane (fatte da A fuori o sopra C^n) le quali risultano tutte tra loro [illegible]

(58) C^3 di $p = 1$ ha (Plücker) 9 flessi: pongo in uno di essi A_2 e prendo $A_1 A_2$ nella tg. di flesso: l'eq.



è $x_2^2 \, \cancel{\varphi_1(x_1, x_3)} \, x_3 + x_2 \varphi_2(x_1 x_3) + \varphi_3(x_1 x_3) = 0$ dove $\varphi_2(x_1, 0)$ si deve [illegible] 0, e perciò $\varphi_2 = x_3 \psi_1(x, x_3)$. La C^2 pol. del flesso A_2 è $(2x_2 + \psi_1[x_1, x_3])\, x_3 = 0$ cioè si spezza in tg. di flesso e una retta non per A_2 (pol. arm. del flesso): prendo come $A_1 A_3$, $\psi_1 = 0$ e l'eq. diventa $x_2^2 x_3 + \varphi_3(x_1 x_3) = 0$ in coord. $x\,y$ $y^2 + \varphi(x) = 0$, che scriviamo

$$y^2 = k(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0.$$

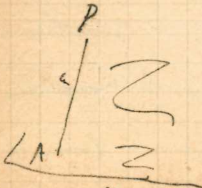
dove le x_i sono diverse tra loro se la C^3 non [illegible] da aver pt. doppi [se $x_1 = x_2$, il pt. $x = x_1$ $y = 0$ risulta doppio]

62) in corrisp. biraz. - Vale anche per esse il teor. di Riemann; quello sulle rappresentate delle C di genere 0; quello sulle cond. di equ. di C ellittiche. -]₂ Si dim. che: F^m e F^n senza parti a comune si segano in C^{mn} (non però ogni C alg. è intersez. compl. di 2 F; v. C3); che C^m e F^n che non ne contengono una parte hanno mn pt. d'incontro di cui alcuni contati ecc. (per es. i pt. multipli di C^m su F^n e viceversa). - [ ]₂ Per un punto generico P dello spazio passa un certo numero $\underline{d}$ di corde delle C^n, ci dovrà, come risulterà, da P (si può dim. che sono proprie corde e non trisecanti); si dice allora che C ha d punti doppi apparenti; sarà, se la C^n non ha pt. doppi effettivi $d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$. (C) - Si dim. poi che la totalità ∞^2 di piani osculatori a C^n è una sviluppabile algebrica, che anzi

risulta in corrisp. biraz. colla C^n luogo; se ne si può quindi definire un numero n'; classe, duale di n, che esprime quanti piani osculatori di C^n passano per un punto generico. Si chiama poi rango² della C^n il numero, che risulterà costante, delle rette tg. a C^n appoggiate a una retta generica dello spazio: n, n', r, ~~p, d, il numero di~~ e anche l'ordine della (sua sezione con un piano π della) sviluppabile circoscritta a C ~~pt. doppi effettivi (nodi e cuspidi), i numeri delle singolarità duali (piani bi-osculatori, in pt. distinti o coincidenti) e altri caratteri sono legati da un sistema di formule, estensioni~~ di ~~quelle di Plücker, le formule di~~ Cayley. Al concetto di pt. doppio delle C^n corrisponde per dualità nello spazio quello di piano osculatore doppio nelle sviluppabili dei piani osculatori; un tal piano si chiama bi-osculatore se è osculatore in 2 pt. distinti

64)

(duale unito) o piano ~~osculatore~~ stazionario, e i due pt. di osculaz. coincidono. In quest'ultimo caso si trova che, mentre per un piano osculatore generico 3 delle intersez. con C^n coincidono nel pt. di contatto, ne coincidono ora 4. Però anche dimostra che C^n ... delle tg. ~~stazionarie~~ di flesso: si vede che la tg. in P è ~~stazionaria~~ di flesso quando essa contiene non solo 1, ma 2 pt. infinit. vicini a P. Ciò... Chiamando D, K il num. di pt. doppi e cuspidi; D' e K' i duali, N quello delle tg. di flesso, e notiamo, e i precedenti e altri di cui non ci siamo avuto occasione di parlare, sono legati dalle formole di Cayley. Se C si proietta da P generico su π, la proiez. con C' ha classe r, ordine n, $d+D$ nodi, e cuspidi, quindi



$$r = n(n-1) - 2(D+d) - 3K \quad (1)$$

C' ha poi flessi nelle proiez. dei flessi di C e nei pt. di contatto dei piani osculatori a C passanti per P; quindi

(65

$$N + n' = 3n(n-2) - 6(d+D) - 8K$$

moltiplicando la (1) per 3 e sottraendo risulta

$$N + n' = 3(r - n) + K \quad (2)$$

Altre due formole si hanno per dualità; per vederle si osservi che le tg. di flesso per dualità corrispondono a se stesse (infinitesim. P ... A B C ... Q) e si chiami d' il duale di d, cioè il numero di rette giacenti in piano generico per cui passano 2 piani osculatori di C^n; ~~altro~~ r è autoduale; allora

$$r = n'(n'-1) - 2(D'+d') - 3K' \quad (3)$$

$$N + n = 3(r - n') + K' \quad (4)$$

---

49 ... a p. 218 ... che, se si considera la superficie (svil.) delle tg. a C e si taglia, in tutti i pt. di una generatrice tangente in A essa è toccata da un stesso piano, che coincide col piano osculatore a C in A

Si hanno altre due formule introducendo i seguenti caratteri. Una tg. a di C incontrerà in generale un certo numero di altre tangenti; variando a nascerà una curva luogo di punti intersez. di tg. non consecutive di C; ma i tracciati nella svilupp. e ogni suo pt. P è doppio (ed è in generale proprio doppio) per la svilupp. prendendo 2 piani tgenti: la linea (P) luogo di P si chiama curva nodale della sviluppabile; sia t' il suo ordine. Il numero duale t è ~~quello~~ la classe della sviluppabile dei piani bitangenti. Supponiamo poi, per maggior generalità che la C abbia anche T' bitangenti (e quindi duale) Allora C' (p. 64) avrà $T+t$ bitg. e poi

$$n = 2(r-1) - 2(T+t) - 3(N+n') \qquad (5)$$

e dualmente

$$n' = 2(r-1) - 2(T+t') - 3(N+n) \qquad (6).$$

Si ha poi

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (d+D) - K$$

e dualmente (il genere si conserva)

$$p = \frac{(n'-1)(n'-2)}{2} - (d'+D') - K$$

che combinate colle (1)...(6) danno naturalmente luogo ad altre relazioni fra tutti i caratteri considerati; p. es. scrivendo

$$p = \frac{(r-1)(r-2)}{2} - (T+t) - (N+n')$$

eliminando $T+t$ e $N+n'$ fra questa, la (2) e la (5) risulta

$$r = 2(n+p-1) - K. \qquad (7)$$

colla duale $r = 2(n'+p-1) - K'$ (8)

Non esistono C^2 sghembe irriducibili. — Esistono invece C^3 p. es. $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \theta^3 : \theta^2 : \theta : 1$ (infatti, accettato perché $\theta = \frac{x_3}{x_4}$ vi è biunivoc. di corr. tra i valori di θ e i pt. della curva; le intersez. di C con $\pi \equiv \Sigma a_i x_i = 0$ sono date da $a_1\theta^3 + \dots = 0$ che determina 3 valori di θ, quindi

è C^3, e ciò è piana punti da una la
prec. eq. dovuta alla sostituzione identic. per
valori non tutti nulli delle a). Dunque risul:
terà poi che tutte le C^3 si possono rappre:
sentare nel modo ora detto. La prosp. pia
di C^3 da un suo pt. è C^2, di genere 0;
quindi C^3 ha genere 0, Non ha pt. doppi
(punti il piano dei quali per cui è di 2 altri
pt...); non tg. di flesso (perchè il
piano per esso e un altro pt...); i suoi
piani biosc., nè stazionari; nè rette
bitangenti; inoltre $t=t'=0$. Da $d=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-p$ segue
che ha un pt. doppio apparente, ecc...
La (7) dà $r=4$, e la (8) $n'=3$; cioè la
sviluppab. dei piani osc. corrisponde per dualità
nello spazio alla C^3 luogo. — C^3 sta su ∞
quadriche: due di queste si segano ulter:
riormente in $\underline{2}$, corda di C^3 (sicchè a P

non è un pt. La corda di C^3 per P apparte:
tiene a entrambe le Q, e quindi coinci:
de con $\underline{2}$); viceversa le ulteriori inter:
sezioni di 2 Q ~~indivisibili~~ per $\underline{2}$, se irriducibile
è C^3 sghemba (non però cono piano
punto....). C^3 è individuabile di ~~...~~ genere. una:
dratic forma fondam. proiett. tra cui si
può riguardare come luogo ~~dei raggi~~ delle interz. dei piani omo:
loghi di 3 fasci a 2 a 2 proiett.; o anche
come luogo delle intersezioni di coppie di raggi
omologhi di 2 stelle omografiche. — In ten

~~Teor.~~: per 6 pt. A...F di cui mai 4 in
un piano passa una C^3. Infatti, se è φ appar:
tenente al cono quadrico $A(BC...)$ indefinito, ψ al cono $B(AC...)$;
ne deriva segmenti di AB in C^3
co tali generazioni si dice che per 6 pt.
dello spazio, di cui mai 4 in un piano passa
$\underline{una}$ C^3. — Quando $p=0$, si può porre $x_i=$

70/ $R_i(t)$ le B... polinomi. Si può supporre che essi non abbiano un divisore a comune e che vi sia biunivoc. di corrisp. tra i valori di t e i pt. della curva. Allora l'eq. $\Sigma a_i R_i(t) = 0$ ha 3 radici in t, e perciò le R_i sono di grado ≤ 3, uno almeno di grado 3. Faccio un cambiamento di coord. prendendo il nuovo tetraedro fond. in modo che il vertice A_4 coincida col pt. della C^3 corrisp. a $t=0$, A_1 col pt. $t=\infty$, A_3 sia l'interseg. della tg. in A_4 col piano osc. in A_1, e A_2 l'interseg. di tg. in A_1 col piano osc. in A_4. Allora in A_4 la tg. è A_4A_3 e il piano osc. $A_4A_3A_2$; per A_1 la tg. A_1A_2 e il piano osc. $A_1A_2A_3$. Le nuove coord. $y_1 .. y_4$ sono lineari nelle x, e perciò polinomi di 3° grado in t.

$$y_1 = a_1 t^3 + \cancel{a_2} t^2 + \cancel{a_3} t + \cancel{a_4}$$
$$y_2 = \cancel{b_1} t^3 + b_2 t^2 + \cancel{b_3} t + \cancel{b_4}$$
$$y_3 = \cancel{c_1} t^3 + \cancel{c_2} t^2 + c_3 t + \cancel{c_4}$$
$$y_4 = \cancel{d_1} t^3 + \cancel{d_2} t^2 + \cancel{d_3} t + d_4.$$

Per $t=0$ ho A_4, quindi $a_4 = b_4 = c_4 = 0$; la tg. in un pt. è la congiungente col pt. le cui coord. sono le derivate delle x rispetto a t, cioè per $t=0$, col punto (a_3, b_3, c_3, d_3) che deve stare su A_4A_3 e perciò $a_3 = b_3 = 0$; similmente il piano osc. in A_4 è $x_1 = 0$ quindi, posto $y_1 = 0$, dà per $t=0$ radice tripla, però $a_2 = 0$. Ragionando analog. su A_1 (per ottenere il valore ∞ della variabile, nella derivazione, prendo come nuovo parametro provvisorio $t' = \frac{1}{t}$ e faccio $t'=0$) si trova $b_1 = c_1 = d_1 = c_2 = d_2 = d_3 = 0$. Si eseguisce ora il cambiamento di coord. $y_1 = a_1 z_1$, $y_2 = b_2 z_2$, ecc. e $z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = t^3 : t^2 : t : 1$. Eq. del piano osculatore. Dalla 1ª col. sottraggo la 2ª $\times 3t$. resta

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t^3 & t^2 & t & 1 \\ 3t^2 & 2t & 1 & 0 \\ 6t & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad z_1 - 3t z_2 + 3t^2 z_3 - t^3 z_4 = 0$$

Le coord. u del piano osc. sono dunque $u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = 1 : -3t : 3t^2 : -t^3$ che costituiscono curva di 3ª classe la C^3. Scritte le

71

72) prendete eq. sotto la forma $u_1:u_2:u_3:u_4 =$

$\xi_4 : -3\xi_3 : 3\xi_2 : -\xi_1$, si ha ogni pt. dello spazio

(ξ) si fa corrisp. il piano (u). La corrispond. che nasce è una reciprocità (fra spazi sovrapposti) (posi tra ...), direi anche involutoria, e tale che pt. e piano sempre si appartengono: polarità nulla. – Quindi i piani osc. a C^3 corrispondono ai pt. di contatto in una polarità nulla. (73)

Tutte le C^3 sono tra loro proiett. (mediante la riduz. delle eq. parametr. alla forma precedente): si potrebbe provare che si possono dare ad arbitrio 3 coppie di pt. corrispondenti. (75)

C^4 sghemba irriducibile. Sta su almeno 1 Q; se ne passano due di eq. $A(x)=0$ $B(x)=0$ sta su tutte le Q del fascio $A(x)+\lambda B(x)=0$, ma non su altre, perchè se una $C(x)=0$ è una Q per la C^4, la Q del fascio per un pt. di una ... C^4 ha in comune con essa ... C^4 più ...

pt. quindi un punto superficiale (piano (73) osquadrica, {si esclude il piano perchè tutte le Q per C^4 irriduc. sono irreducibili). Nel 1° e 2° caso C^4 si chiamano rispett. di 2^a e 1^a specie. ~~Bisettrice della specie~~ L'esistenza delle C^4 di 1^a specie è evidente; quelle di 2^a specie risulteranno dal seguito. – ~~Ogni~~ ~~C^4~~ ~~ogni~~ C^4 sghe. irrid. sta su una quadrica ~~non cono~~

[Si osservi anzitutto che una C^4 con pt. doppio è certo di 1^a specie, perchè le Q (∞) per il pt. doppio e 7 alt. punti semplici la conten- ~~gono~~] Una C^4 (sghe. irrid.) con pt. doppio è certo di 1^a specie (perchè le (∞) Q per essa

(1(2)) 2 esempio. I tre piani della C^3 per ciascun di C^3 da un pt. generico sono allineati: Risulterà poi che ogni C^3 con un ~~...~~ pt. doppio è proi. di C^3 sghemba; quindi .....

e altri 7 pt. spl. di C^4 la contengono); non può avere più di 1 pt. doppio perchè il piano di 2 di cui e di un pt. spl. .... (genere è 0, o 1 (proiett. da ~~..~~ in C^3 piana)) — C^4 di 2^a specie hanno $p = 0$ {Prendo 9 pt. generici $P_1 \dots P_9$, sia ~~$A(x)$~~ $A(x,y,z) = 0$ l'eq. di Q non per C^4 per $P_1 \dots P_7 P_8$, $B(x) = 0$ id. id. per $P_1 \dots P_7 P_9$. Nessuna Q del fascio $A(x) + \lambda B(x) = 0$ contiene C^4, perchè se ciò avvenisse per $\lambda = \bar\lambda$ avendosi su C^4 $A(x) + \bar\lambda B(x) = 0$, quindi in P_9 $A(x) = 0$ e $A(x) = 0$ conterrebbe C^4. Per un pt. P di C^4 passa una Q del fascio, e P ne è però la sola interseg. ~~fuori~~ con C^4 fuori di pt. fissi; segue, come a pag. 48 che la C^4 è raz.: e infatti $f_i(x,y,z) = 0$ ~~....~~ $(i = 1 .. 4)$ siano le eq. di 4 sup. la cui interseg. cpl. è la C^4. tra esse (che ammettono ∞ sist. di solu. $x\,y\,z$. che le soddisfano) e $A + \lambda B = 0$ si possono eliminare p. es. y, z, e risolvere per x. tenuto conto delle soluz. note una eq. di 1° grado a coeff. raz. in λ.} C^4 di 1^a sp. senza pt. doppi ha $p = 1$. {Infatti le curve di ... proiettanti per un pt. P generico ...

75) Le C^3 di cui abbiamo ora accertata l'esistenza e diremo, come è detto a p. 62, il più semplice esempio di C non interseg. complete di 2 F alg. C^3 ~~..~~ è però interseg. cpl. di 3 sup. alg. Infatti i due coni (quadrici) che la proiettano da 2 suoi pt. A_1 e A_2 si segano in $C^3 + A_1A_2$; il cono quadrico che la proietta da $A_3 \neq A_1, A_2$, sega A_1A_2 in $A_1 A_2$, e quindi C^3 è l'interseg. cpl. dei coni di v. $A_1\ A_2\ A_3$, cioè di 3 sup. alg. Il risultato si estende a tutte le C spl. alg. sotto questa forma: ogni C alg. è interseg. cpl. di 4, o meno, sup. algebriche. La dim. per brevità per le C irriducibili. Una tal C^n è proi. da 2 pt. generici dello spazio $A_1\ A_2$ secondo coni irriducibili, d'ordine n, i quali (non potendo aver in comune parti separatamente) si segano in una $C^{n^2} = C^n + C^{n(n-1)}$. Proietto C da un pt. A_3 tale che il cono proiettante non

b) partecipa alle Q. certo esistenti per P e C^4, ~~[illegible]~~ Q che, se P è generico, non è un cono (altrimenti tutte le quadriche del fascio contenente la C^4 sarebbero coni, e allora (dim. Lemma alla pag. ~~[illegible]~~) la C^4 sarebbe riducibile). Viceversa le due rette per P della Q per P e C^4 sono corde di P e C^4 (infatti C^4 è la interz. di quella Q con un'altra quadrica, la quale sega ciascuna di quelle 2 rette in 2 pt.). Quindi C^4 contenga nessuna componente irriducibile di $C^{n(n-1)}$ (per es. prendo un pt. P di C^n non su $C^{n(n-1)}$ [$\times$ p. 83] condurre per esso retta 2 non appoggiata a nessuna comp. irrid. di $C^{n(n-1)}$ e scelgo A_1 su 2). Ma se ciò allora $C^{n(n-1)}$ sia in un numero finito di pt. $P_1 \dots P_K$: l'interz. di due coni $A_1 C$, $A_2 C$, $A_3 C$ è C^n + $P_1 \dots P_K$. Se questi stanno su C^n, l'interz. di due coni è C^n: se no prendo un 3° cono $A_4 C$, non contenente nessuno dei pt. $P_1 \dots P_K$ (basta prendere A_4 fuori dai coni $P_i C$, ecc. in modo generico). - Esistono C^n ~~[illegible]~~ che effettivamente sono interz. di λ coni non ~~[illegible]~~ supp. algebriche.

(27) ha 2 pt. doppi apparenti per le

$$p \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (D+d) - K$$

ecc. $p = 1$, invece la C^4 ha 1 pt. doppio $p = 0$]. **Lemma**. - Se un fascio di quadriche è tutto costituito di coni quadrici, tutti doppi, o coni hanno tutti lo stesso vertice, oppure hanno in comune una generatrice e hanno lungo di essa uno stesso piano tg. - Pertanto le 2 sp. 1) se 2 ~~supp. etc.~~ F^n hanno in comune un pt. doppio, esso è doppio per tutte le supp. del loro fascio [$f(x) = 0$, $g(x) = 0$, $f_i = g_i \neq 0$; $\lambda f(x) + \mu g(x) = 0$ $\lambda f_i + \mu g_i = 0$]; 2) se $f = 0$ $g = 0$ sono 2 Q. e la C^4 ha 1 pt. doppio in A, A ha lo stesso piano polare rispetto a tutte le Q del fascio $\lambda f + \mu g = 0$ [~~tg.~~ se A (a). L'eq. del suo piano polare rispetto a $\lambda f + \mu g = 0$: $\sum y_i (\lambda f_i^{(a)} + \mu g_i(a)) = \rho \sum y_i g_i(a) = 0$ / y. indipendente da μ.] Siano A e B (distinti per 1)) i vertici di 2 coni di un fascio di coni non aventi tutti uno stesso vertice: A ha uno stesso piano polare

78) [per 2)) rispetto a tutti i coni del fascio; cioè passa per B e analogamente per tutti i vertici dei coni. La linea luogo dei vertici dei coni (certamente A) sta dunque in α, e anche A sta in α. Quindi A sta sul cono B, e su tutti i coni del fascio. La linea (A) sta dunque su tutti i coni del fascio, e in un piano (cioè α), polare di A rispetto al cono di vertice B, e quindi tg. in A al cono di vertice B; la intersez. di α col cono di vertice B è dunque la generatrice g per A (contata 2 volte); la linea $(A) \equiv g$, situata sul cono di vertice B e analog. su tutti i coni del fascio e siccome A ha lo stesso piano polare (tg.) rispetto a tutti i coni del fascio, essi si toccano lungo $\underline{g}$. Segue dal lemma che non possono essere coni tutte le Q per C^4 di 1^a specie irriducibile.}. Applic. delle formule di Cayley alle C^4 senza pt. doppi $D=K=0$; per entrambe $D'=0$ (perché un piano ...). (79) $T'=0$ (perché un piano per bitg. e un altro pt. ...). Quanto alle tg. di flesso, le C^4 di 1^a specie non possono averne (perché una tal tg. contenendo 3 pt. di C^4 apparterrebbe a tutte le Q per C^4, mentre queste si tagliano nella sola C^4 (lo stesso rag. prova che C^4 non ha trisecanti)); per quelle di 1^a specie risulterà dal seguito (per proiez. stereogr. di Q) che generalmente non ne hanno, ma possono eccezionalmente averne 1, o 2. Per trattare il caso più generale faccio $N=0$. Allora

	C^4 di 1^a — $n=4,\ p=1,\ d=2$	di 2^a specie — $n=4,\ p=0,\ d=3$
(7) $r=2(n+p-1)-\kappa$	$r=8$	$r=6$
(2) $n'=3(r-n)+\kappa$	$n'=12$	$n'=6$
(8) $r=2(n'+p-1)-\kappa'$	$\kappa'=16$	$\kappa'=4$
(5) $n=2(r-1)-2(T+t)-3(N+n')$	$t=8$	$t=4$
(6) $n'=2(r-1)-2(T'+t')-3(N'+n)$	$t'=16$	$t'=6$
(3) $r=n'(n'-1)-2(D'+d')-3\kappa'$	$d'=38$	$d'=6$.

80) Se C^4 di 2ª specie acquista delle tg. di flesso, si ha $r=6$, $n'=4$, $K'=0$, ecc. Tale è p. es. la C^4 $x_1:x_2:x_3:x_4 = t^4:t^3:t:1$ (verificare ciò che i 2 pt. $t=0$, e $t=\infty$ sono di flesso; (perciò è di 2ª specie) trovare le coord. dei piani osculatori in pt. generico; verificare $n'=4$, cfr. Sopra una certa curva gobba di quart'ordine - Cremona Op. mat. t. II. p. 402-404); ritroveremo tali C^4 parlando delle F^3 rigate. – Trisecanti; mancano, come già osservato per le C^4 di 1ª specie. Per C^4 di 2ª specie, da un suo pt. A essa si proietta in C^3 piane raz. dotate di 1 pt. doppio: perciò per A passa retta ulteriormente appoggiata a C^4 in 2 pt.; per A passa cioè una trisecante; C^4 di 2ª sp. ha ∞ trisecanti, per ogni suo pt. ne passa una, il loro luogo è la Q per C^4. – Risulta anzi di qua che la Q per C^4 di 2ª sp. non è un cono

(punti dal suo vertice la C^4 verrebbe proiettata triplamente secondo un cono quadrico, e più l'ordine di C^4 risulterebbe 6) Confrontando con quanto si è detto sulle C^4 di prima specie, risulta che ogni C^4 giace su una Q non cono. A ulteriori proprietà delle C^4 giungeremo dunque studiando le C algebriche esistenti su una Q non cono. –

C algebriche su Q non cono. — C^n su Q incontra le rette di una schiera in uno stesso numero p (q) di punti. Con $p+q=n$ (sia è (f) una retta della prima (2ª) schiera segata da C^n in p (q) punti; e $p+q=n$ perchè essendo ... una sezione piana di Q .... se c è un'altra retta della prima schiera, intersezioni c C^n + $q=n$; quindi ecc....

 Indico con (p, q) una C^n tale che ..... (p e q sono minori di n, se C è irriducibile come supporrò perchè se no avrebbe una n-secante ecc....) Proietto stereograficamente Q da C_0 (non su C^∞) su π (pag. 9). Sia C'^n la proiezione di C^n, $C'n$ ha in I e ~~[illegible]~~ J rispettivamente punti p^{plo} e q^{plo} (perchè i e j sono risp. p e q-secante. Viceversa C'^n di π avente I J rispettivamente come punti p^{plo} e q^{plo} è immagine di una $C^n_{(p,q)}$ di Q non per C_0.

(Infatti la Curva C di cui C'^n è immagine incontra un piano generico ω in tanti punti quanti sono le intersez. di C'^n con la conica Ω per i e j immagine della sezione di Q con quel piano, escluse quelle che cadono in I e J. (punti fondamentali). cioè in $2n-p-q$ punti (la conica presenterà generalmente il caso semplice $p = \frac{n}{2}$ [Esempi:

$n = 3$ $(1, 2)(2, 1)$ segue che ogni C^3 piana con punto doppio è proiezione di C^3 sghemba, come preannunc. a pag. 73.

$n = 4$ 3 [3 famiglie : $(3.1)(2.2)(1.3)$ (quelle della seconda famiglia, non annullandosi le tangenti sono di prima specie)]^2 [di A_1 e delle tg. a C^n in un suo punto P

*) p. 76] Se dubbio che la $C^{n(n-1)}$ contenga ancora C^n, nel qual caso il ragion. cadrebbe, si elimina così. Se P di L^{fm} interz. di F^{l}, F^{m} è doppio per L, (e semplice su F^l, F^m) queste hanno in P lo stesso piano tg. (infatti preso un piano α generico per P, se P è p.to doppio su L^{lm} le C^l, C^m sez. di α con F^l F^m si toccano in P, cioè i piani tg. a F^l F^m in P segano α insieme due rette e più coincidono). Quindi il caso supposto si presenterebbe verificare solo se i coni $A_1 C$, $A_2 C$ si toccassero lungo C^n; avrebbero lo stesso vertice ~~basta prendere A_2 fuori del piano~~ ~~perchè allora coincidere le generatrici del 1° con quelle del 2°, e più $A_1 = A_2$~~

84) La C^n non passa per ℓ_0, ma solo le sue proiezioni d'ordine $< n$. e risulta (p.9) sulle I e J sono risp. p^{plo} e q^{plo} per C^n). Esistono certo delle C^n in tali condiz. (p. es. prendendo in π il triangolo di rifer. con 2 vertici rispettiv. I e J): quindi esistono certo delle ~~...~~ C^n (p.q) sulle Q: ~~...~~ ~~...~~ $[\ ]_2$ - quelle delle F^n e C^n aventi trisecanti sono di 2a specie; resta così accertata l'esistenza di C^n di 2a specie}},

{Altre proprietà delle C^n di Q e dettagli delle proiez. stereogr. p. es. $(p\,q)$ e $(p_1 q_1)$ di Q si segano generalmente in $pq_1 + qp_1$ punti (le loro proiez. si segano in punti, fuori di I e J in $(p+q)(p_1+q_1) - pp_1 - qq_1 = pq_1 + p_1 q$ pt (le curve passanti generalmente in I e J il caso semplice:); p. es. 2 C' (2,2) in 4 pt; (2,1) e (1,2) in 5 pt. ecc.)}, {Prendiamo (3,1). essa

avrà delle tg. di flesso solo quando per J passi una tg. di flesso di C^4, ciò che generalm. non avviene. cfr. p 79). }, (85

Sugli inviluppi di ∞^2 piani. – Nel piano il concetto duale di C^n algebrica, è quello di inviluppo algebrico di rette, di classe n. Analog. si può procedere nello spazio, e introdurre, come concetto duale di quello di F^n, quello di inviluppo algebrico, di classe n, di ∞^2 piani, definito da $f(u) = 0$ con f forma di grado n. - Dualizzando i concetti di pt. spl. e multiplo di F^n, si introdurranno quelli di piano spl. e multiplo dell'inviluppo; in particolare si hanno piani tg. doppi di tre tipi, tangenti in tutti i pt. di una curva, in una coppia di pt., in un solo pt. - Nel piano le tg. a C^n (pensata come costituita da sole rette) formeranno un inv. algebrico di ∞^1 rette, di cui avevamo enunciate alcune proprietà

86) avevamo chiamato classe di C^n la classe dell'inv. delle sue tgenti: anche questo si estende alle F^{ie}, però col seguente eccezione. I piani tg. a sup. sono generalmente ∞^2; però possono eccezionalm. essere solo ∞^1 (ciascuno ~~tocca~~ la sup. in ∞ punti); p. es. ciò avviene per le sup. sviluppabili, (sviluppabili) e anche per i coni. (cilindri e coni sviluppabili) Dim. ~~a suo tempo che~~. anzi: che ciò avviene solo per queste superficie. Per tutte le altre F algebriche si potrà dunque definire la classe = numero dei piani tg. per una retta generica, o anche = classe del cono circoscritto a F da un punto generico dello ~~spazio~~.
(Consideriamo sup. F, rappresentata in coord. cartesiane con equaz. che risolta rispetto a z ne $z = f(x,y)$ (1) La dim. vale anche per sup. non algebriche, purchè rappresentabile ...

dalla (1) con f derivabile un certo numero di volte. Pongo $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Dimostro anzitutto che se F ha solo ∞^1 piani tg. è $rt - s^2 = 0$ e viceversa. Infatti, in un pt. generico di F. x, y, z. il piano tg. ha per equaz.

$$p(X-x) + q(Y-y) - (Z-z) = 0.$$

dove X, Y, Z sono coord. correnti. [Infatti l'eq. è $a(X-x) + b(Y-y) + (Z-z) = 0$. e deve essere soddisfatta qualunque siano dx e dy da $X-x = dx$, $Y-y = dy$, $Z-z = p\,dx + q\,dy$]. cioè

(2) $pX + qY - Z + (z - px - qy) = 0$.

Le coord. di ~~questo~~ (omogenee) piano sono } con un omogenee prendo $p, q, z-px-qy$

$$p, \quad q, \quad -1, \quad z - px - qy.$$

(funzioni di x e y): affinchè il piano presenti ∞^1 e non ∞^2 posizioni, ~~cui~~ cioè $p, q, z-px-qy$ siano funzioni di un'altra, occorre e basta che sia nulla la matrice jacobiana delle tre funzioni ottenute facendo i rapporti di 3 di quelle 4 coord. alla 4a. cioè, per es. di $p, q, z - pq - qy$. Tale

88) matrice è

$$\begin{Vmatrix} r & s & -rx-sy \\ s & t & -sx-ty \end{Vmatrix}$$

però $rt-s^2=0$, $y(rt-s^2)=0$ $(s^2-rt)x=0$.

è dunque nec. e suff. che sia $rt-s^2=0$. Dim. ora che tale cond. è nec. e suff. perchè F sia sviluppabile. Infatti p e $z-px-qy$ saranno funzioni l'una dell'altra; cioè

$$q=\varphi(p) \qquad z-px-qy=\psi(p).$$

(Oss. se p e q fossero entrambe cost. $z=ax+by+c$, la F è un piano, cioè svilupp. però può neppure p non cost.). Scrivo l'altra: cioè

$$z-p\,x-\varphi(p)\cdot y-\psi(p)=0 \quad (3).$$

Derivo rispetto a x e y. ho

$$-r\,(x+\varphi'(p)\cdot y+\psi'(p))=0.$$

$$-s\,(x+\varphi'(p)\cdot y+\psi'(p))=0$$

non essendo r e s entrambi nulli; (se no $p=$ cost.). $x+\varphi'(p)\cdot y+\psi'(p)=0.$ (4).

Tra le coord. $x\,y\,z$ di un pt. di F, e p, passano le (3) e (4); l'eq. della sup. si ottiene eliminando p fra (3) e (4). Considero ora il piano di eq.

$$Z-pX-\varphi(p)\,Y-\psi(p)=0. \qquad (5)$$

al variare di p esso assume ∞^1 posizioni; ognuna di esse considero la retta g sua interz. col piano infinit. vicino; il luogo delle rette g così ottenute è proprio la sup. F. Infatti l'eq del piano infinit. vicino è

$$Z-(p+dp)X-\varphi(p+dp)\,Y-\psi(p+dp)=0.$$

cioè

$$Z-(p+dp)\,X-(\varphi(p)+dp\cdot\varphi'(p))\,Y-(\psi(p)+dp\,\psi'(p))=0.$$

Poi, sottraendo da (5) un pt. di g serve.

$$dp\,(X+\varphi'(p)\cdot Y+\psi'(p))=0.$$

cioè $X+\varphi'(p)\,Y+\psi'(p)=0$ (6).

(5) e (6) si segano in g. Ora (3) e (4) coincidono con (5) e (6) quando si faccia $X=x$, $Y=y$, $Z=z$

90] cioè ogni pt. $x\,y\,z$ sta una delle rette g ora definite, cioè $F \equiv$ luogo di g. Ora, se i piani (5) passano per un pt. fisso, il luogo di g è un cono, e così F; se no, inviluppo i piani oscul. di C rispettivam., a cui le rette g sono tg. e perciò F è sviluppab. circ. a C rispettivam. Segue ~~di qui~~ della dim. fatta che se tutti i pt. di una sup. F sono parabolici, F è sviluppabile. [Sia F algebrica rappresentata della (1), e si supponga ~~f svilupp. in serie di potenze di x che $x_0\,y_0$ appartengono al campo dove è definita~~ f, ma ~~f~~ svil., nell'intorno di $x_0\,y_0$, è allora certo sviluppabile in serie di pot. di $x-x_0$ $y-y_0$: ~~la cond. è certo soddisf. per le F algebriche~~. Posto $z_0 = f(x_0\,y_0)$ ~~ora~~ e indicando con $p\,q\,r,\,s,\,t,$ ecc. i valori loro definiti, presi nel pt. $P(x_0\,y_0\,z_0)$ sarà

$$z = z_0 + p(x-x_0) + q(y-y_0) + \tfrac{1}{2}\left(r(x-x_0)^2 + 2s(\ )(\ ) \text{ ecc.}\right) + \dots$$

termini di grado sup. al 2° in $x-x_0$ $y-y_0$.

(91

L'eq. del piano π tg. in P è ($x\,y\,z$ coord. corr.)

$$p(x-x_0) + q(y-y_0) - (z-z_0) = 0.$$

Quindi i pt. prossimi a P della curva $C \equiv \pi F$ hanno le coord. $x\,y$ che soddisfanno a

$$\tfrac{1}{2}\left(r(x-x_0)^2 + 2s(x-x_0)(y-y_0) + t(y-y_0)^2\right) + \dots = 0 \quad (*)$$

cioè questa è l'eq. ~~di C~~ della proiez. di C sul piano $z=0$: essa ha un pt. doppio nella $(x_0\,y_0)$ proiez. di P: le tg. in esso coincidono se $rt - s^2 = 0$.[1] Quindi se tale cond. è soddisfatta in ogni pt. P ....]

[1] Ciò sarebbe dim. se la (*) si riducesse a un polinomio, ma resta valido anche se si tratta invece di una serie. Per dim. si osservi che, fatto per sempl. $x_0 = y_0 = 0$, presa la retta $(y = \mu x)$ per l'origine, avremo per le sue interseg. con (*)

$$r + 2s\mu + t\mu^2 + x(\dots) = 0.$$

Se queste interseg. tendono all'orig. cioè h a una tg. nell'origine avremo

$$r + 2s\mu + t\mu^2 = 0 \quad \text{cioè} \quad rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0$$

che sarà l'eq. della coppia di tg. nell'origine.

non dim

92) Relativamente ai piani tg. di una sup. avremo a applicare anche il seg. teor. di Charles (valido anche per superficie non algebriche). Se F è una sup. rigata non svilupp. e g ne è una retta generatr. non singolare (= tale che il piano tg. lungo g non sia fisso), i piani tg. a F nei singoli punti di g costituiscono un fascio di asse g, che risulta riferito proiett. alla punteg. dei pt. di contatto. [Consideriamo F rigata; coord. cartes. x. y. z. F sia la ∞¹ di rette (1) $x = l(t)\,z + m(t)$, $y = n(t)\,z + p(t)$ dove le fun. $l(t)$ ecc. sono definite in un intervallo dove sono derivabili. [con t e $z = z$ daremo eq. param. dei pt. di F] Sia $P(x\,y\,z)$ un pt. di F: il piano π tg. in esso contiene la generatrice g per P, di eq. $X - lZ - m = 0$, $Y - nZ - p = 0$ [(X Y Z) coord. correnti]: ha eq. del tipo

(2). $X - lZ - m + \lambda(Y - nZ - p) = 0.$

Per determ. λ avremo che π contiene il pto. di F corr-

pt. cont. si hanno le gen. te., i cui pt. dipendono da g.

rispondente a $t + dt$, per cui

$X = x + (l'z + m')\,dt$ dove $l' = \frac{dl}{dt}$, ecc.

$Y = y + (n'z + p')\,dt$.

$Z = z$. Basta sostituire in (2), tenuto conto di (1) resta $\lambda = -\frac{n'z + p'}{l'z + m'}$. Quindi λ (cioè π) dipende da z (cioè P), a meno che non ne dipenda il 2º membro cioè che sia $n'm' - p'l' = 0$. Questa è dunque la condiz. perchè π tocchi F lungo tutta g. Altrimenti λ è funz. lineare fratta di z; λ e z sono rispett. coord. proiettive di π nel fascio (g) e di P su g. Quindi il teor. di Charles è dimostrato).

Segue dal teor. di Charles, applicato a F rigata algebrica, ~~non~~ sghemba (= gobba = sviluppabile) che, essendo i piani tg. di una tal F tutti quelli passanti per le sue — che sarà comp. coord. proiett. di quei pt. sulla generatrice.

94) generatrici, l'ordine di F coincide colla classe: numero delle gen. delle rigate algebriche appoggiate a 2 generatrici: grado delle rigate.

r) e quindi le F con pti. tripli: anche i pti. multipli che troveremo nelle F^3 saranno doppi

Superficie rigate del 3° ordine.

considero solo superficie irriducibili

Escludiamo i coni!) Una F^3 con 2 doppia è rigata (perchè i piani per 2 ...) : viceversa F^3 rigata irriducibile contiene una retta doppia {II F^3 rigata non cono non è sviluppabile [in tal caso sarebbe luogo delle tg. a una curva sghemba C, che risulterebbe doppia per F^3 (I ~~generatrice~~ ~~una retta per~~ data C, una C sghemba di rango 2 e una retta per un suo pt. P si appoggiano 2·2 rette tg. a C, fuori di P; ~~le corde di C apparterrebbero tutte a~~ anche P è doppio per F (uniplanare, C = curva cuspidale di F)); le corde di C apparterrebbero tutte a F, mentre le corde di C riempiono una regione di spazio, e non solo una superficie, come è intuitivo, e come si può dimostrare] III.

Su ~~ogni~~ una generatrice generica (non uniplanare) g

96) vi è un pt. doppio di F^3 [se P è generico di g. il piano π tg. a F^3 in P sega, oltre che in g, F^3 in una conica C^2 passante per P (perchè l'interz. compl. π F^3 deve avere pt. doppio in P); essa sega ulteriormente g in un pt. Q; ma π non è tg. in Q (pel teor. di Chasles) quindi Q è doppio per F^3 perchè se no solo il piano tg. in Q seghrebbe F^3 in curva avente un pt. doppio in Q]][1]; variando g Q varia, (se no cono): quindi vi è una linea doppia per F^3; le sue corde appartengono a F^3, quindi si esclude, come segue che quella linea sia sghemba; se è piana è una retta, il piano fa parte di F^3, quindi è retta).

1) il dubbio che sia Q ≡ P si elimina così, se fosse Q ≡ P, ciò può avvenire solo perchè C^2, non degenere toccando g in P, ma allora P sarebbe parabolico; o perchè C^2 si spezzi in 2 rette che non intersecano g fuori di P e quindi

(97 [2 La retta doppia della F^3 incontra tutte le generatrici di F^3 (contenendo un pt. doppio su ogni generatrice), è perciò la direttrice doppia. Oltre ad essa, vi è generalmente]1 [Dal ragionamento fatto segue che, oltre alla retta doppia trovata, non vi è su F^3 nessun'altra linea doppia: si può però escludere addirittura l'esistenza di ulteriori pt. doppi perchè le rette congiungenti uno di essi coi pt. di 2, e perciò il piano di uno di essi e di 2 farebbe parte di F^3]1 [2]2 un'ulteriore retta direttrice di F^3, semplice (Prendo infatti 4 generatrici di F^3 a, b, c, d sghembe a due a due e non appartenenti a una quadrica il che è possibile perchè .....; allora le rette incidenti ad a b c d passerebbero entrambe per P. ~~...~~ P. pt. generico di F^3 sarebbe pt. di osculazione. Tutte le tg. di F^3 sarebbero tripunte, la sez. di F^3 ~~con piano generico sarebbe retta, e quindi~~ F^3 ~~si ridurrebbe a piano~~ costituita da rette (3)

98) saranno (tante quante le intersezioni delle quartiche per a b c con d, cioè) due o ~~...~~ eccezionalmente una. Esse hanno in comune con F^3 4 pt. e perciò le appartengono). (103)

Una direttrice ulteriore già nota è la 2 doppia. Quindi potrà darsi che vi sia un'ulteriore direttrice semplice (rigata cubica generale) o nessuna (rigata cubica di Cayley): di entrambi i tipi mostreremo poi l'esistenza. Se vi è $\delta \neq 2$, δ è certo sghemba con 2 (infatti a b c d giacciono nel piano 2δ, a meno che passassero pel pt. 2δ (uno al più) quindi le altre tre stando in un piano non sarebbero sghembe). – Un piano generico

Ove la F^n algebrica è segata da piano generico in n rette, F^n è costituita da n piani. (Dunque compon. multiple) Prendo infatti P semplice generico in F^n (certo esistente) fuori delle rette 2 dello segno generico per P; ogni piano per P conterrà una retta di F^n per P; quindi per P ∞ piani ∞ rette tutte su F^n, che stanno in un piano (tg. a F^n in P) quindi F è costituita da piani

π per una retta direttrice sega ulteriormente la F^3 in generatrici (se P è un pt. dell'ulteriore intersezione π F^3 la generatrice per P ha 2 pt. in comune con π), 1 se la direttrice è doppia, 2 se la direttrice è semplice. (99

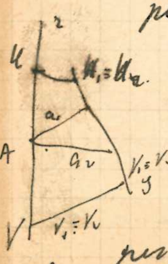
F^3 rigata generale. – Per un pt. A di 2 passano 2 generatrici $a_1 a_2$ (il piano δA sega ult. F^3 in 2 generatrici; la sez. deve avere un pt. doppio in A) seganti δ in A_1, A_2; per un pt. A_1 di δ una sola (~~generatrice~~ la residua interseg. di F^3 con $r A_1$). Chiamiamo allora tra 2 e δ la corrispondenza che si ha considerando analoghi pt. con A e A_1 (o A_2)

Il ragionamento in rispetto se F^n non ha pt. spl. allora vuol dire che è costituita da più componenti multiple; quindi la sup. F' costituita da tali componenti 1 volta sola, ogni due F' è costituita da piani, e quindi anche F.

100) cioè pt. di appoggio di una stessa generatrice di F^3; la corrispondenza è di indici (1,2) e certo algebrica (poiché il legame tra A_1 e A è esprimibile analit. con relazioni algebriche; p. es. osservando che A sta nel piano tg. a F^3 in A_1). Introdotte su r e s rispett. coord. proiettive u e v l'eq. della corrisp. sarà $\varphi(u,v)=0$ dove φ è polinom. di grado 1 in u e 2 in v; cioè l'eq. è:

$$av^2+bv+c+u(dv^2+ev+f)=0. \quad (1)$$

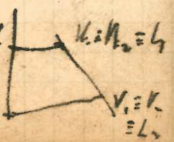
Viceversa si ~~rif.~~ stabilisca tra due rette r e s corrisp. algebrica (1,2); la retta congiungente pt. omologhi descrive una F^3 rigata (generale). (in fatti per calcolare il grado della rigata così generata prendo retta generica m e conto quante generatrici sghembe a r e s si appoggiano ad essa; basterà per questo che pt. comune A_2 ... A e A_1 stiano in un piano per m. Considero allora la corrisp. (1,2) del fascio m in sé chiamando corrisp. i piani mA_1 e mA, cioè tra piani uniti [non conto ∞ piani se ... rette AA_1 appartenenti a generatrice e AA_1 si corrisp. in (1,1).)$_2$ [Lo stesso ragionamento prova che se tra r e s sghembe pongo corrispondenza alg. (α,β) la rigata delle congiungenti pt. omologhi è di ordine $\alpha+\beta$]$_2$ [La F^3 rigata risulta generale, perché r e s non 'direttrici']$_1$; così è provata la sua esistenza]$_1$. Fissato A_1, cioè u, la (1) presenta la coppia di pt. A, A_2; al variare di u, la (1) indica che tutte le coppie A, A_2 ~~...~~ appartengono a una involuzione. Quella involuz. ha 2 pt. doppi reali o imm. ma certo distinti; quindi avviene 2 volte che sia $A_1 \equiv A_2$; cioè per 2 posiz. di A sopra r, siano U e V avviene che risp. $U_1\equiv U_2$, $V_1\equiv V_2$. I pt. A di r $\not\equiv U, V$ sono biplanari, U e V uniplanari (se $A \not\equiv U, V$, ciascuno dei piani rA_1, rA_2 sega F^3 in C^2 avente in A un pt. triplo; quindi le rette ... per A hanno ... tripl. contatto; quindi il cono quadrico tg. in A è costituito da questi due piani



102/

ni, A è triplanare. Quando A viene pos. in 106 U questi piani tangenti vengono a coincidere): U e V si chiamano anche pt. cuspidali: o pinch-points (in generale per F^n algebriche questi pt. della curva doppia da cui escono 2 generatr. coincidenti). Le generatrici $(u_1 \equiv u_2)$, $v_1 \equiv v_2$ sono singolari, cioè ~~lungo esse~~ in tutti i pt. semplici di ciascuna di esse F^3 ammette uno stesso piano tangente. (infatti ∂A sega F^3 in $\partial a_1 a_2$ quando A tende a U, ∂U sega in $\partial u_1 u_2$; le eq. hanno come doppi tutti i pt. di u_1 perché tutti solo U è doppio quindi quel piano è tg. a F^3 in tutti gli altri pt. di u_1). Il ragionamento è invertibile, quindi non vi sono altre generatrici singolari: quelle 2 si chiamano anche pandrottiline, ossia luogo di pt. pinch.

<u>Eq. della F³</u>. Pongo i vertici del tetr. di riferimento $(L_1 L_2 L_3 L_4)$ risp. in $U_1 \equiv U_2$, $V_1 \equiv V_2$, U, V. $L_3 \equiv U$



Il 1° membro dell'eq. deve contenere, in

(13)

ogni suo termine x_1 e x_2 compl. a 2° grado, pel fatto che $A_1 A_2$ è doppia (infatti perché $A_1 A_2$ sta su F^3 la sua eq. è soddisfatta per $x_1 = x_2 = 0$, cioè il 1° membro è nullo se $x_1 = x_2 = 0$, cioè contiene in ogni termine x_1 o x_2; l'eq. sarà $x_1 H + x_2 K = 0$ con H e K forme quadratiche nelle x: le deriv. 1ᵉ del 1° membro $H + x_1 H_1 + x_2 K_1$, $K + x_1 H_2 + x_2 K_2$, $x_1 H_3 + x_2 K_3$, $x_1 H_4 + x_2 K_4$ devono annull. per $x_1 = x_2 = 0$ cioè per $x_1 = x_2 = 0$ si annullano H e K, che entreranno poi in ogni term. x_1 o x_2); perché $L_1 L_2$ è ~~pt.~~ ogni termine dell'eq. contiene x_3 o x_4. L'eq. ~~che contiene~~ è dunque

$$a\cancel{x_1^2 x_3} + b \cancel{x_1 x_2 x_3} + c x_2^2 x_3 + d x_1^2 x_4 + e \cancel{x_1 x_2 x_4} + f \cancel{x_2^2 x_4} = 0$$

L_3 è cuspid. cioè $x_4 = 0$ piano tg. quindi ... ... punto $x_4' = \frac{d}{c} x_4$, e scrivendo ancora x_4 invece di x_4'

<u>resta</u> $x_2^2 x_3 + x_1^2 x_4 = 0$

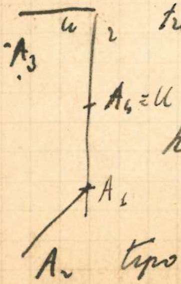
(98) Queste due rette sono direttrici: infatti una di esse (eventualmente l'unica) è la retta doppia a, pertanto direttrice, quanto all'altra s, deve incontrare la sezione piana $c^3 g$, essendo una qualsiasi generatrice, ed essendo sghemba con a, ecc....

104) F^3 rigata di Cayley. – Sia r la una retta dir. doppia; il pt. di appoggio ad ogni di una generat. variabile della F^3 non può esser fisso, quindi per un pt. generico di r passa qualche generatrice, e precisamente ~~una~~ una sola, diversa da r (Se per A pt. di r passassero a_1, $a_2 \neq r$, non possono stare in piano per r, il piano $a_1 a_2$ taglierebbe F^3 in retta g; le generatrici generiche g non potendo incid. a_1, a_2 incontrerebbero r. – Le generatrici generiche non possono incontrare p.es. a_1, perchè il pt. di intersez. risulterebbe doppio per F^3, giacchè in generale su F^n rigata un pt. P comune a due generatrici è doppio [infatti una retta generica incontra n generatrici, retta generica per P incontra fuori di P solo $n-2$ generatrici); viceversa se P doppio escono due generatrici [perchè retta generica per P incontra fuori di P solo $n-2$ generatrici). Quindi un pt. generico di r, A, doppio

l'ulteriore generatrice uscente da esso sia a (105. coincidente con r, che è quindi insieme dir. e generat. La corrisp. che nasce facendo corrisp. a A il piano ra è alg. ~~biunivoca~~ (1,1) e quindi proiettiva. Quando a tende a r, A tende a pt. U, e il piano ra a un certo piano υ per r, che sechi F^3 in r^3. $A \neq U$ è bipl. con ra e υ come piani tg. (perchè risultano luoghi di tg. limite), U uniplan. con υ^2 tg. U è l'unico pt. cuspidale di F^3. L'eq. della F^3 si può ridurre a

$$x_4(x_2 x_4 + x_1 x_3) + x_3^3 = 0.$$

Preso $A_4 \equiv U$, $A_1 \neq A_4$ su r, A_2 nella generatrice $\neq r$ per A_1, e A_3 nel piano υ.



Perchè A_4 ecc. il termine con x_4 sarà $h x_4 x_2^2$, quindi l'eq. $h x_4 x_2^2 + \dots = 0$. dove .... non contiene più x_4 e è del (perchè r è doppia) tipo $x_2 x_3 \alpha(x_2 x_3) + x_2^2 \beta(x_1 x_2) + x_3^2 \gamma(x_1 x_3)$ β e γ non contengono risp. x_3 e x_2,

106) giacciono in α... – Poiché $U \equiv x_2 = 0$ si sceglie $A_1 A_4$, fatto $x_2 = 0$ dovrò tenere $x_3^3 = 0$, quindi γ non contiene x_4, resta

$h x_4 x_2^2 + x_2 x_3 \alpha + x_2^2 \cancel{\beta}(x_1, x_2) + k x_3^3 = 0$.

Poiché $A_1 A_2$ ($x_3 = x_4 = 0$) sta su F^3; $\beta \equiv 0$).

α contiene effett. x_1, se no F^3 sarebbe cono, faccio cambiamento di coord. $x_1' = \alpha$, $x_2' = x_2$ ecc.. (a determ. $\neq 0$ per l'ipot. fatta) resta

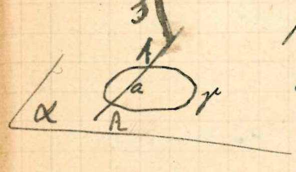
$h x_4 x_2^2 + x_1 x_2 x_3 + k x_3^3 = 0$.

$\frac{h}{k} x_4 x_2^2 + \frac{x_1}{k} x_2 x_3 + x_3^3 = 0$

Pongo $\frac{h}{k} x_4 = x_4'$, $\frac{x_1}{k} = x_1'$, scrivo ancora x_4 x_1 ecc. Così è provata l'esistenza di F^3 di Cayley.

107 Le coppie dei piani tg. nei pt. di r appartengono a un'involuz. nel fascio r (ponendo quei piani le coppie della involuz. $A_1 A_2$ su r).

L'esistenza delle 2 specie di F^3 rigate si può anche dimostrare da alcune generazioni. Sia a una gen. generica di F^3 (di specie qualunque) (non fra le direttrici) ~~ ~~ ~~il piano generico per a~~, che seghi F^3 tg. in A secondo la conica γ residua. Certo esiste perché se γ si spezzasse, una delle componenti sarebbe direttrice di F^3. Dei 2 pt. γa uno è



pt. di contatto del piano α con F^3, sia A; l'altro R è il pt. doppio di a, intersez. con r doppia. – Se ora la F^3 generale: s incontra α, ma non γ (non fuori di a se no giacerebbe in α, e non sta a ~~per le generatrici di a~~ perché s è sghemba con r, e d'altra parte ~~tg.~~ ~~non tg.~~ basta scegliere il vero del piano tg. nel pt. A) ~~ ~~ α un piano generico per a, non contenente nessuna altra direttrice, che seghi in:

108). Una generatrice generica g sega γ
in un pt. (non segando α), e così s; viene così
fra i pt. di γ e di s corrispondenza
algebrica (1,1) cioè proiett. La F^3 appare
come luogo delle congiungenti pt. omologhi
di γ e di r non incidenti, rispettiv.
$\overline{\pi}$ tra loro. Viceversa date γ e g in tali
condizioni, il luogo delle rette congiungenti
γ pt. omologhi è F^3 rigata generale. (prendo
retta generica, e faccio corrispondere
nel fascio dei piani proi. pt. corrisp.
su γ e su s, la corrisp. è alg. (1,2);
vi sono 3 piani uniti, e perciò le rigate
è F^3. In un piano per $\underline{s}$ vi sono 2 gen. ∓ 2
perciò le F^3 è generale). Per F^3 di Cayley
si giunge per analog. sostituendo alla dir. $\underline{s}$
la dir. unica $\underline{r}$, passante per R, che risulta
per mezzo delle generatrici in corrisp. alg. (1,1)

e perciò proi. colla γ. La diff. rispetto al
caso prec. è che ora la retta r e γ sono incidenti:
R però non è unito perché come pt. di r
ha per corrisp. A. Viceversa dati r e γ in tali cd.
il luogo delle rette congiungenti è F^3 di Cayley. (Dim.
che è F^3 come nel caso generale: di Cayley perchè
per un suo pt. di r esce 1 gen. $\mp r$, e in un
piano per r sta 1 gen. $\mp r$; o anche perchè la
~~generatrice~~ direttrice r è anche generatrice. Nel caso che
si abbia che R fosse unito, tutte le rette per
R sarebbero congiungenti pt. uniti; le altre rimanenti
descrivono una Q (esercizio.)).
Un'altra gen. semplice per le F^3 gen. è seguente:
le gen. incontrano r, s, γ, appariscono generali
come rette appoggiate a 2 rette sghembe r, s e a una
cm. γ, che incontra 1 delle 2 rette. Viceversa, dati r, s,
γ in tali cd. le rette appoggi. in pt. distinti
a r, s, γ descrivono F^3 generale (app. in pt. dist.
perchè se no anche le rette del piano $r\gamma$ — s appart.

110) al luogo. (Per dim. ~~consideriamo~~ determiniamo più in generale l'ordine della ~~la~~ rigata delle rette incid. tre C algebriche - a 2 a 2 distinte sghembe e prime di ordini α, β, γ, ~~sottoposte~~ razionali, aventi da ~~tre~~ α rispetto rispettiv. x, y, z pt. com. a $C^\beta C^\gamma$, $C^\alpha C^\gamma$, $C^\alpha C^\beta$, e nessun pt. comune alle tre curve. - Suppongo dapprima ~~che~~ $x = y = z = 0$, cioè che si possa levare la cd. dell'incidenza in pt. distinti. Ho allora succ.

per $\alpha = \beta = \gamma = 1$ $n = 2$

$\alpha = \beta = 1$ $n = 2\gamma$

$\alpha = 1$ $n = 2\beta\gamma$, e così $n = 2\alpha\beta\gamma$.

Allora in generale, ~~rette~~ $n = 2\alpha\beta\gamma - x\alpha - y\beta - z\gamma$.

Per un pt. di C^α passano tante generatrici quante sono le rette per esso appogg. a $C^\beta C^\gamma$, cioè $\beta\gamma$, da cui però bisogna sottrarre le x che vanno alle interseg. $C^\beta C^\gamma$. Quindi C^α ~~tre~~ è alla rigata mult. (multipla) d'ordine $\beta\gamma - x$, ecc. - Altrimenti pur p. es. $C^\alpha = 2$, $C^\beta = 5$, $C^\gamma = \gamma$, se ~~[illegible]~~ $x = 0$. $y = 1$, $z = 0$, e più $n = 3$, e ~~[illegible]~~ risulta dunque già ciò che F^3 con 2 dir. doppia e 3 sempl.).

Ad altre gen. sempl. delle F^3 rigate si giunge in base alla oss. che come curve di 3ª classe, le propr. delle F^3 rigate, come invil. di piani, si deducono ~~da~~ per dualità da quelle delle stesse F^3 luogo. ~~Le~~ I concetti di rette gen. e quindi anche di dir. si conservano, quindi anche le div. delle F^3 in generali e di Cayley; coll'avv. che per la generale, le due dir. vengono a scambiare il loro ufficio (piani per 1 bitangenti, e per 2 tg. sempl.) Quindi le gen. si possono trattare per dualità. P. es.: Date due fasci di piani ad assi sghembi, cioè rette corrisp. alg. (1, 2) il luogo delle interseg. dei piani corrisp. è F^3 rig. gen. - ogni tal sup. è generab. in tal modo. - Date due rette 2 e 3 sghembe e un cono quadrico Γ tg. a una di esse. Il luogo di rette appogg. a 2, 3 e tg. a Γ è F^3 rigata generale, ecc..

112) Le ~~sup~~ gen. viste per le F^3 rigate perciò tan di certa da questi param. dip. per le generale. però si può dare 2, 3 e le corrisp (1, 2) di pag 100; 13 ~~param~~ cost. ossia le retta 0, le curve ... persist. si hanno 4 + 8 + 3 = 15 param. ogni F^3 si ottiene con ... ∞^2 modi; ... ∞^2 anche: ossia 13. Analog. per le F^3 di Cayley si riduce a ... 8 + 3 + 3 − 2 = 12 parametri: —

<u>F^3 rigate proiettive</u>. — ~~Corrispondenti~~ ~~a F^3 ...~~ ~~...~~ Ora Hm. a F^3 rigate corrisp. F^3 rigata, le diremo omografiche: potrei anche considerare resp. e F^3 rigate luogo delle corrisp. F^3 rigate inviluppo, ma essendo nello spazio ... si riduce al caso precedente. Quindi pel riferim. proiet. di 2 F^3 basta considerare le F^3 Hm. — Ora Hm. a F^3 rigate ~~di 1ª o 2ª~~ ~~specie~~ gen. o di Cayley, corrisp. id. id.: quindi se 2 F^3 rigate han ... hm. devono essere

entrambe gen. o di Cayley. Il risultato (113) si inverte: Due F^3 rig. gen. (di Cayley) sono sempre hm. in ∞^2 (∞^3) modi diversi. (Due F^3 rigate dello stesso tipo sono sempre hm. almeno in un modo, in base alla eq. canonica ~~...~~ ~~...~~. p.es. per le rigate generali; ~~...~~ diamo F^3 e F'^3 2. r. g. — applico a F^3 le ∞^{15} hm. ottengo ∞^{15} sup. rigate gen. tra cui c'è F'^3. ma le rig. gen. sono ∞^{13} e quindi ottengo ogni F'^3, poi F''^3, in ∞^2 modi. ~~Il ragionam. è difettoso perchè lascia questo dubbio che ci sia una famiglia meno ampia che ∞^{13} tra le tre sup. di F^3, ∞^m con $m < 13$,~~ tale ~~che si ottenga ogni sua sup. ∞^{15-m} volte (più di ∞^2) mentre le altre si ottengono meno di ∞^2 volte~~, ciò che ~~non~~ potrebbe escludersi]. ~~più volte~~ infinite volte. Se p.es. ottengo F'^3 in ∞^m modi, dico che ogni altra sup rig. gen. F''^3 la ottengo anche in ∞^m modi [infatti essendo F'^3 e F''^3 certo hm. tra lo ogni ~~[illegible]~~ de F^3 e F'^3 dà luogo pel trasf. d'una Hom. posta tra F'^3 e F''^3 a una Hom di F^3 e F''^3 e viceversa, cioè [illegible] una corrisp. biunivoca tra le Hom $F^3F'^3$ e $F^3F''^3$]. Allora poichè le F^3 r.g. un ∞^1: $m=2$. Analog. per le rigate di Cayley). Troviamo effett. le Hom. tra F^3 e F'^3 rig. di 1ª (~~[illegible]~~).

Siano $F^3 F'^3$ quali $x_1^2 x_3 + x_2^2 x_4 = 0$ $x_1'^2 \ldots$ come a pag. 102. Sarà certo $\ldots$ $\frac{l_1 l_2}{l_1' l_2'} \frac{l_3 l_4}{l_3' l_4'}$ ~~[illegible]~~ oppure $\frac{l_1 l_2 l_3 l_4}{l_2' l_1' l_4' l_3'}$ e quindi

$x_1' = a x_1 \quad x_2' = b x_2 \quad x_3' = c x_3 \quad x_4' = d x_4$

con $b^2 c \pm a^2 d = 0 \quad abcd \neq 0$

oppure

$x_1' = a x_2 \quad x_2' = b x_1, \quad x_3' = c x_4 \quad x_4' = d x_3$

colle stesse condizioni. Si hanno quindi 2 serie ∞^2 di Hom. tra F^3 e F'^3. Se ne deduce: dati $P(y)$ e $P'(y')$ generici risp. su F^3 e F'^3 esistono 2 Hom., una di ciascuna serie, che mutano F^3 in F'^3 e P in P' (Avrei infatti p. es. per le Hom. della 1ª serie. $a = \frac{y_1'}{y_1}$ etc. la cond. $a^2 d \pm b^2 c = 0$ diventa $\frac{y_1'^2 y_4'}{y_1^2 y_4} = \frac{y_2'^2 y_3'}{y_2^2 y_3}$ ~~[illegible]~~ ed è certo soddisfatta: analog. trovo una Hom. della 2ª serie). Analog. si potrebbe procedere per le F^3 di Cayley, ma tralasciamo il calcolo perchè un po' più complicato. — Le cose dette valgono, in particolare quando $F'^3 \equiv F^3$: quindi F^3 ~~[illegible]~~ rig. generale è trasf. in sè da 2 serie ∞^2 di Hom: di Cayley possiede ∞^3 Hom. in sè. Questa proprietà delle F^3 rig. di Cayley. è in certo senso, invertibile: un teorema di Sophus Lie (Th. d. Transf. Grupp. vol. ~~III~~ p. 196) che solo ammettiamo dice che le sole superficie non sviluppabili che ~~[illegible]~~ siano trasformate in sè da ∞^m Hom con $m > 2$, sono le quadriche ($m = 6$) e la F^3 rigata di Cayley ($m = 3$).

Il cilindroide di Cayley o ~~conoide~~ conoide di Plücker

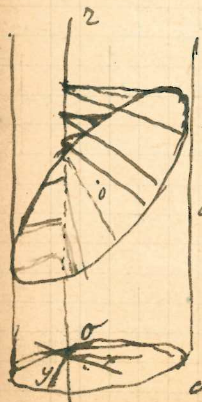
~~Il Plücker~~ Plücker. – È la F^3 che ha, in coord. cart. ort. l'eq. $z = \frac{2Kxy}{x^2+y^2}$ con K cost. $\neq 0$.

Tale F^3 ha per eq. in coord. omog. $x_3(x_1^2+x_2^2) = 2Kx_1x_2x_4$ e quindi la retta $x_1 = x_2 = 0$ (cioè l'asse z) è retta doppia, quindi la F^3 è rigata, e contiene inoltre la retta $x_3 = x_4 = 0$ cioè la retta all'∞ del piano $z=0$ che incontra tutte le generatrici, non appoggiandosi alla retta doppia, ed è quindi direttrice semplice: il cilindroide è quindi F^3 rigata ~~della specie generale~~.

Si chiama conoide una sup. rigata le cui generatrici sono appogg. a una retta propria, e parallele a un piano fisso, cioè le F rigate che hanno due direttrici rettilinee, di cui una impropria. Conoide retto se la dirett. impropria è la gir. coniugata ⊥ alla dir. della propria): il

cilindroide è un conoide retto (con. di Plücker).

L. Sia C un cilindro di rotazione, γ una ellisse sua sezione, non retta, z una generatrice di C: il luogo delle rette ⊥ a z condotte per i pt. di γ è una sup. rigata chiam. cil. (come di Pl.); che risulta F^3 ~~di~~ di rig. generale, potendosi considerare come generate da una retta appoggiata a γ, a z e alle rette s_∞ all'∞ del piano ⊥ z; z è app. a γ: dir. doppia, s_∞ dirett. semplice. – Supponendo p. es. il cilindro C a generatrici verticali, la parte reale della F^3 risulta ~~compresa~~ situata nella striscia limitata dai piani aventi la giacitura s_∞ e passanti per il pt. più basso e il più alto di γ (che risultano gli estremi dell'asse di maggiore di γ)



. Le generatrici del cilindroide per questi 2 pt. risultano paraboliche, cioè i loro pt. diventano 2 punti cuspidali J_1 e J_2.

117). Presa un sist. di coord. cart. $x\,y\,z$ di cui z // alle gen. di C l'eq. del cilindroide è

$$z = \frac{hx^2+2kxy+ly^2}{x^2+y^2} \qquad (1)$$

e viceversa ogni eq. di questo tipo rappr. un cilindroide. (Presa $z \equiv z$, orig. in un pt. qualsiasi di z, x e y in modo da compl. la terna ort.: se coord. del centro del cerchio sez. retta del cilindro con $z=0$ sono p e q cosicchè, se R è il raggio del cilindro $p^2+q^2=R^2$. l'eq. del cilindro è la stessa che quella di questo cerchio cioè

$(x-p)^2+(y-q)^2=R^2$ cioè $x^2+y^2-2px-2qy=0$. eq. del piano sez. ρ, scritta rispetto a $z\equiv z = ax+by+c$. Se $x_0\,y_0\,z_0$ sono le coord. ~~del pt~~ di un pt. di Γ sarà $x_0^2+y_0^2-2px_0-2qy_0=0$

$$z_0 = ax_0+by_0+c$$

Le eq. delle gen. del cilindroide per esso sono $z=z_0$, $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}$ cioè $y_0=\frac{y}{x}.x_0$. l'eq. del cild. risulta elim. $x_0\,y_0\,z_0$ tra queste 5 eq. -

Ho $x_0^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)-\left(2p+2q\frac{y}{x}\right)x_0 = 0$ (118

$$x_0 = \frac{2(px+qy)}{x^2+y^2}\,x \qquad y_0 = \frac{2(px+qy)}{x^2+y^2}.y.$$

e quindi

$$z = \frac{2(px+qy).ax+2(px+qy).by+c(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{(c+2ap)x^2+2(aq+bp)xy+(c+2bq)y^2}{x^2+y^2}. \quad (\ldots$$

della forma (1). Viceversa data un'eq. ~~della~~ (1) posso sempre ridurla alla forma (2). Prendendo p e q ad arbitrio e determ. poi $a\,b\,c$ in modo che i coeff. dei 2 num. di (1) e (2) risultino uguali (si verifica che il determ. dei coeff. delle 3 eq. lin. in $a\,b\,c$ che vi sopperisce a ~~[illegible]~~ è $\neq 0$) e la (2) si può considerare come il risult. dell'elim. fra le eq. scritte e quindi le $\overset{eqz.}{(1)}$ è quindi la eq. un cilindr. cioè è un cilindroide. La eq. (1) si può semplif. con un cambiamento d'assi e ridurla alla stessa forma con $h=l=$ ecc.:

(14) $z = \frac{2kxy}{x^2+y^2}$ (3).

(Trasp. orig. in un nuovo pt. di asse z ~~...~~ lasciando gli altri assi // a sè stessi cioè $z = z' + \lambda$

$$z' = \frac{(k-\lambda)x^2 + 2Kxy + (l-\lambda)y^2}{x^2+y^2} \qquad (4)$$

Il num. di questa eq. eguagliato a zero rappr. nel piano $z=0$ una coppia di rette per l'origine; determin. λ in modo che queste 2 rette siano $\perp$ (se ne hanno per eq. $y - \mu_1 x = 0$ $y - \mu_2 x = 0$ la cond. è $\mu_1 \mu_2$ ~~...~~ $+1$; cioè poichè si ottiene $(l-\lambda)(y-\mu_1 x)(y - \mu_2 x) = (k-\lambda)x^2 \ldots$ etc.

$\frac{k-\lambda}{l-\lambda} + 1 = 0$ $k + l - 2\lambda = 0$ che dtm λ). Se si assumono gli assi x e y assumendo come nuovi assi x' e y' queste due rette. Allora il num. di (4) diviene cost. $\times\, x'y'$, e il den. $x'^2 + y'^2$ si ha così l'eq. (3').). Tutti i cilind. sono simili: perchè in effetti (3) e (3') $z' = \frac{2K'x'y'}{x'^2+y'^2}$ la simil. $x' = \frac{K'}{K}x$. $y' = \frac{K'}{K}y$. $z' = \frac{K'}{K}z$ porta (3') in (3).

(15) Il cilind. è generab. nel modo che ha servito di def. in ∞^2 modi: precis. se lo si vuol generare (in ∞^2 modi) come luogo di rette app. a 2 ~~..~~ assi sghembe non complanari, si trova che ~~x~~ ognuna di queste gen. è di quelle che hanno servito alla def. del cilindroide (Le gen. di (3) sono al variare di m date da

$$(5) \begin{cases} y = mx \\ z = \frac{2Km}{1+m^2} \end{cases}$$

Un piano per una di esse ha eq. $z - \frac{2Km}{1+m^2} = \mu(y - mx)$. La sua interz. con (3) ha per proiez. orig.

$$\frac{2Kxy}{x^2+y^2} - \frac{2Km}{1+m^2} = \mu(y - mx). \quad \text{cioè}$$

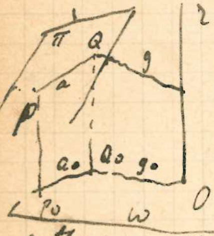
$$\left(2K \frac{(1+m^2)xy - m(x^2+y^2)}{(1+m^2)(x^2+y^2)} = \right) 2K \frac{(y-mx)(x-my)}{(1+m^2)(x^2+y^2)} = \mu(y-mx)$$

oltre a $y - mx = 0$ proiz. di g. si trova la proiez. della seconda interz. γ di π: ~~$x - my$~~

$$2K(x - my) = (1+m^2)\mu(x^2+y^2) \qquad (6)$$

che è un cerchio, cioè γ è una sez. piana del cilindro circolare retto che ~~...~~ per questa retta questo cerchio). — [Un'altra notevole gen.

121) Del cild. è: sono dati piano π e un pt. P retta r non $\perp$ a π (tutti propri): il luogo delle $\perp$ comuni alle retta r e alle singole rette del fascio $P\pi$ è un cild. (Prendo r vert., cambio poi ω orizz.).



Sia a retta di $P\pi$, g la $\perp$ com. relativa, Q il piede su a, a_0, g_0, Q_0 le proiez. allora l'angolo retto ga col lato g orizz. si proietta in ang. retto $g_0 a_0$ cioè Q_0 è sul cerchio di diam. $P_0 O$, al variare di a, Q sta sull'ellisse in cui il piano π è segato dal cilindro retto di cui questo cerchio è sez. retta; si torna alla prec. def.). Il rag. è invert. e quindi ogni cild. è generabile così: $\rfloor_2$

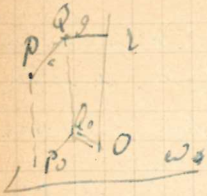
Il luogo dei piedi delle $\perp$ abbassate da un pt gen. P dello spazio è una linea piana

Fano G.D. p. 85.

La (6) è l'eq. di un qualsiasi cerchio per O, nel piano xy, ossia, nello spazio, di un qualsiasi cilindro di rotazione contenente la r come generatrice: segue che un cilindro di rotaz. per la retta doppia r del cild. lo seg. ulteriorm. in una conica γ (L'interz. completa del cild. e del cilindro risulta completata dalle due rette che proiettano da r_∞ i pt. ciclici del piano xy. $\rfloor_2$

Un'altra propr. notev. del cild. si riattacca alla consideraz. del luogo dei piedi delle perpend. abbassate da un pt. P dello spazio sulle sue generatrici: tale luogo è una linea piana (mentre generalm. per una rigata è una linea sghb.) e precisamente una conica γ se P è in posiz. generica, e una retta (la r) se P sta su r (Se P sta su r.... Se P è generico, considero (come a pag. 121) la retta doppia r

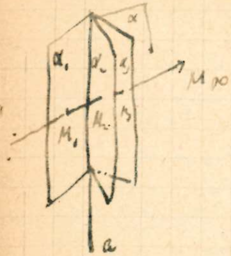
(123) Vediamo: il piano ω, O, P_0, una



gen. g del cild. a per P ⊥ g in Q; a_0 g_0 Q_0; a g è retto e perciò anche a_0 g_0, Q_0, variando g si muove ~~su~~ sopra un cerchio di centro O, e però Q sta su un cilindro circolare per r; il luogo di Q fa parte della intersez. di questo cilindro col cild. e viceversa (potendo ciò non avvenire solo per le gen. ⊥ al piano a P) per le gen. gen. di g Q è punto di r, e vale. [illegible]). La proprietà è caratt. per il cild. e per i cilindri (a base qualunque)[1]: precisamente se una sup. rigata reale gode della propr. che il luogo dei piedi delle perpendicolari abbassate da un pt. qualsiasi dello spazio sulle sue gen. sia o piano. [illegible]

[1] Appell Propr. caract. du cylindroïde. Bull. de la Soc. Math. de France vol. 28 (1900). ~~Franc~~ Altre dim. di Bricard e Demoulin nel vol. 29. Questa dim. di Appell nel '95 [illegible]

cilindro (a sez. qualunque) o un cilindroide.



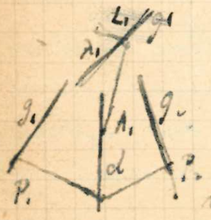
Partiamo dall'osservazione che se α_1 α_2 α_3 sono tre piani per una retta propria a e se r è una retta non incidente a soggetta alla condizione che, se M_1 M_2 M_3 sono risp. le sue intersez. con α_1 α_2 α_3 il rapporto $\frac{M_1M_3}{M_2M_3}$ sia costante, la retta r si mantiene parallela a un piano fisso, indicando infatti con M_∞ il punto all'∞ di r si avrà $(M_1\, M_2\, M_3\, M_\infty) = \text{cost.}$ e perciò M_∞ sta nel piano α per a tale che $(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha) = \text{cost.}$

Divido la dimostraz. in 3 parti: I° una sup. rigata (reale sottinteso anche per il seguito) gode della propriétà rispetto le sue gen. sono parallele a un piano fisso.

Ne risulta spec. nell'ipotesi che le rigate fanno un angolo retto. - Le dim. che si è quella di Appell, quasi senza modif.

II°. Se essa non è un cilindro è un conoide retto – III° Il solo conoide retto che gode della proprietà supp. è un cilindroide. [illegible]

I°: Per ip. il luogo dei piedi ecc... relativo a un punto A è un piano α che dirò ancora piano corrisp. ad A. Fisso 3 gen. gen. g_1 g_2 e g' (sghembe a 2 a 2) due pt. P_1 P_2 risp. su g_1 g_2 tali che $P_1 P_2$ non incontri g' (certo poss. perchè per P_1 passa 1 retta appogg. a g_2 e g' prendo P_2 fuori del suo pt. d'appoggio su g_2). I piani $\perp$ a g_1 g_2 in P_1 P_2 si incontrano in retta (propria) d. Prendo su g'

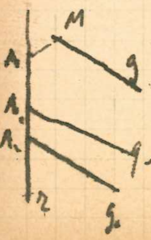


L_1 L_2 L_3; i piani λ_1 λ_2 λ_3 per essi $\perp$ g' incontrino d in A_1, A_2 A_3 risp. (propri perchè se no g_1 g_2 g' sarebbero // a uno stesso piano). I piani corrisp. a A_1 A_2 A_3 sono risp. $\alpha_1 \equiv P_1 P_2 L_1$, $\alpha_2 \equiv P_1 P_2 L_2$,

1) Suppongo le generat. non // a un piano fisso e faccio vedere che si arriva a un assurdo:

$\alpha_3 \equiv P_1 P_2 L_3$ passanti per una medesima retta $a \equiv P_1 P_2$ sia ora g una gen. gen. incidente $\alpha_1, \alpha_2\, \alpha_3$ risp in M_1, M_2 M_3 che saranno per ipotesi le proiezioni ortogonali di A_1 A_2 A_3 su g essendo A_1 A_2 A_3 allineati, si ha $M_1 M_2 : M_1 M_3 = A_1 A_2 : A_1 A_3$ perciò il rapporto $M_1 M_2 : M_1 M_3$ è costante al variare di g e perciò g sarebbe parallelo a un piano fisso, contro l'ipotesi. La concl. cesserebbe di valere se g incontrasse $P_1 P_2$ il che però non può avvenire per posizioni generiche di P_1 P_2 e g (cfr. quanto detto per g')

II° Le gen. della sup. sono quindi parallele a un piano fisso. Suppongo non parallele a una retta fissa (cilindro) e dimostro che incontrano una retta fissa perp. al piano fisso, formando un conoide retto. Siano: g_1 g_2 due gen. gen. non parallele, r la perp. comune, appog. risp. a A_1 A_2



A un punto gen di r, g una ulteriore gen. gen. (perp. per I° a r) il piede di perp. da A su g M se $AM \neq$ il piano α corrisp. ad $A \equiv A_1 A_2 M$ g risulta perp. α (essendo perp. $A_r M$): variando g resta perp. a piano fisso cioè pass. retta

127 fine centro ipotesi, quindi M coincide con r. cioè g è appoggiata a r

III Prendo anche $z \equiv$ dir. propria cosicchè piani xy // generatrici. L'eq. di gen. piano $y = mx$, $z = \varphi(m) = \frac{\psi(m)}{1+m^2}$. Sia $P(\alpha\beta\gamma)$, il piano per esso perp. a g è $x-\alpha+m(y-\beta)=0$ (il piano è verticale): le coord. $x_0\, y_0\, z_0$ del piede Q della perp. da P a g sono date da

$$x_0-\alpha+x_0m^2-\beta m=0$$

$$x_0=\frac{\alpha+\beta m}{1+m^2} \qquad y_0=\frac{\alpha m+\beta m^2}{1+m^2} \qquad z_0=\frac{\psi(m)}{1+m^2}$$

Se $Ax+By+Cz+D=0$ è l'eq. del piano cercato a P sarà (per ogni m)

$$A(\alpha+\beta m)+B(\alpha m+\beta m^2)+C\psi(m)+D(1+m^2)=0$$

dove $A\,B\,C$ sono indip. da m (per dip. da $\alpha\beta\gamma$)

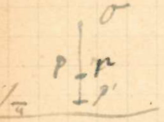
Posto $\psi(m) = -\frac{1}{C}\{A(\alpha+\beta m)+B(\ )+D(\cdot\cdot)\}$ è funz. di 2° grado di m ~~[illegible]~~

$\psi(m) = lm^2+2km+h$ l'eq. di sup. è

$$z=\frac{ly^2+2kxy+hx^2}{x^2+y^2} \equiv \text{alla (2)}\ )$$

128

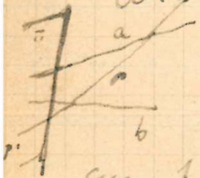
<u>Rappr. piana delle F^3 rigate</u>. — Le F^3 rigate (sempre esclusi i coni) sono, come le quadriche, sup. raz.; vale a dire si possono rappresentare pt. per pt. su un piano, in modo biraz. (alg. biun.), cioè tale che le coord. di un pt. della F^3 sono funz. raz. delle coord. del pt. corr. del piano, e viceversa. Il vantaggio di ciò è che la geom. sopra la F^3 si riduce allo studio della geom. di un piano. — La eq. ~~di~~ non solo delle F^3 rigate, ma di ogni F^3 con pt. doppio O risulta da ciò che, fissato un piano π non per O, un pt. generico



di F^3, P, è proi. da O secondo retta p che sega π in P', e viceversa P' è proi. da O secondo p che, fuori di O sega F^3 in un pt. P. La corrisp. tra P e P' è generalm. biunivoca (dico generalm. perchè p. es. a tutti i pt. di una retta di F^3 per O corrispondono su π pt. coincidenti nella

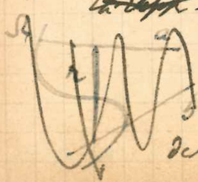
(129) traccia di quella retta) è algebrica, cioè
biraz. (vedere il rag. fatto per la proiezione
stereogr. delle Q). – La rappr. di F^3 su π
risulta tale che a ogni piano di F^3 corrisp.
su π delle C^3: ora quando una sup. è
rappr. su un piano, conviene spesso fare in
il grado della rappresentazione
modo che l'ordine delle immagini delle
sez. piane sia il più piccolo possibile:
effettiv. si può rappresent. una F^3 rigata su
un piano in modo che quell'ordine sia 2
(naturalm. non 1).

Siano a e b due gen. di F^3 rig. (gen.
gen. oppure di Cayley) tra loro



sghembe; ~~piano~~ π un piano
non per esse; per P di F^3 passa
gen. 1 retta p appogg. ad ~~a~~ a e b
che taglia π in P'; viceversa per P' passa p
app. ad a e b, che passi di a, b ha 1

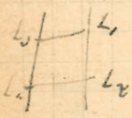
(130) pt P incomun. con F^3; la corrisp. tra
P e P' è generalm. biunivoca (generalm. poichè
per a tutti i pt. di una retta direttr. di F^3 corri-
sponde 1 P') e algebrica (perchè dato p.
es. P' le eq. della retta p contengono raz.
le coord. di P'; la ricerca ~~delle~~ delle sin-
gole coord. di P dipende da eq. di terzo
che si riduce al 1° grado, i cui coeff. sono
funz. raz. delle coord. di P' i. e. dato P). Si ha
così una rappr. di F^3 su π (proiezione sghemba) ~~Qual è l'ordine~~
~~delle imag. di ogni piano di F^3? Se P in una~~
~~[illegible] ogni piano [illegible] (che [illegible] a e~~
~~b in 1 pt. ciascuno), p descrive una rigata~~
~~di ordine 2.3+1−1−1=4, e quindi P'~~
~~una C^4 su π.~~



~~La rappr. a~~ (Si osservi che il ragion. che prova
che la F^3 è razionale è tutto fon-
dato su questo fatto, che esistono sulla

F^3 due rette, le quali non si incontrano, e quindi; poichè si dimostra che su un ~~ogni~~ F^3 ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ generica anche non rigata, esistono delle coppie di rette sghembe (27 rette) risulta che sono regionate tutte le F^3 anche non rigate). (La rapp. per π generico si dimostra che è del 5° grado) Per F^3 rigate possiamo ora di sceglier ~~a e b sulle generatrici parabolich~~e il piano π passante per la direttrice doppia: dimostriamo che la rappr. che si ottiene in questo caso di F^3 su π è del 2° grado, scrivendo le effettive formule di rappresentazione.

F^3 rig. gen. è ridotta a forma canonica.



~~Come~~ $x_1^2 x_4 + x_2^2 x_3 = 0$. come generatrici $\underline{a}$ e $\underline{b}$ scelgo risp. le gen. parabol. $L_0 L_1$ e $L_3 L_2$ (non sarebbe essenz.) Come piano π $x_1 = x_2$ (potrei prendere $x_1 = k x_2$). La corrisp. tra F^3 e π risulta chiamando omologhi 2 pt. rispett. di F^3 e π situati su una retta appogg. ad a, b. Le

a) $x_2 = x_4 = 0$. b) $x_1 = x_3 = 0$

Retta μ appogg. ad a, b è intersez. di 2 piani per a b dati da $x_4 - \lambda x_2 = 0$, $x_3 - \mu x_1 = 0$.

Le coord. di P' sua intersez. con π $(x_1 = x_2)$ sono $1, 1, \mu, \lambda$. Quelle di P si hanno da

$\lambda x_1^2 x_2 + \mu x_2^2 x_1 = 0 \quad x_1 x_2 (\lambda x_1 + \mu x_2) = 0.$

Per $x_1 = 0$ segue $x_3 = 0$ e quindi la corrisp. intersez. della retta con F^3 è su b; analog. per $x_2 = 0$, quindi l'ulteriore intersez. di p con F^3 si ha da $\lambda x_1 + \mu x_2 = 0$ da cui $\dfrac{x_2}{x_1} = -\dfrac{\lambda}{\mu}$ e poi $x_3 = \mu x_1$, $x_4 = \lambda x_2$.

Preso $x_1 = -\mu$ segue $x_2 = \lambda$ $x_3 = -\mu^2$ $x_4 = \lambda^2$: coord. di P. Come coord. proiettive su π si possono prendere $x_2\, x_3\, x_4$ (essendo $x_1 = x_2$); se le chiamiamo $y_1\ y_2\ y_3$ le coord. di P' saranno $y_1 = 1$, $y_2 = \mu$, $y_3 = \lambda$. Allora si possono esprimere le coord. di P in funz. di quelle di P' (e) ricavando dapprima λ, μ: $\lambda = \dfrac{y_3}{y_1}$ $\mu = \dfrac{y_2}{y_1}$, da cui:

$$x_1 = -y_2 y_1 \quad x_2 = y_3 y_1, \quad x_3 = -y_2^2 \quad x_4 = y_3^2 \quad (1)$$

[133]

Viceversa, ricavo $\lambda = \frac{x_2}{x_1}$ $\mu = \frac{x_3}{x_1}$, e

$$y_1 : y_2 : y_3 = 1 : \frac{x_3}{x_1} : \frac{x_2}{x_1} = x_1 x_2 : x_2 x_3 : x_1 x_3 \quad (2)$$

La rp. è del 2° grado (Quando P sta nel piano $a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = 0$ P' descrive la

$$-a y_1 y_2 + b y_1 y_3 - c y_2^2 + d y_3^2 = 0 \quad (3)$$ conica

di π. Alle rette generiche di π che incontrano in 2 pt. le coniche precedenti, corrispondono in F^3 cubiche incontranti ogni piano in 3 pt. e per ciò [illegible]. La cosa si generalizza: se una sup. F è rappr. su un piano in modo che alle sez. piane corrisp. C^m, alle rette di π corrispondono nella F curve di ordine m/. Chiamiamo $M_1 M_2 M_3$ il Δ fond. delle coord. su π: le imag. delle sez. piane su π passano per M_1 e inoltre

M_1 M_2 e M_3 sono coniug. rispetto ogni

M_2 * M_3 dice; e viceversa (Perfin. da $M_2 M_3$ sono coniug. [illegible] che le coni-

delle intersez. di (3) con $M_2 M_3$ son dati da

$-c y_2^2 + d y_3^2 = 0$ da cui $\frac{y_2}{y_3} = \pm\sqrt{\frac{d}{c}}$, e con tutto ciò risulta a $\frac{y_2}{y_3} = 0, \infty$ cioè $M_2 M_3$. Il rag. è invertib.). Elem.ti eccez. nella rappresentazione

Vi sono dei pt. particol. su F^3 e π per cui le (1) e (2) non individuano più il corrispondente: per individ. si deve ancora ricorrere a def. che si dà in modo tale da mantenere la contin. della corrisp. anche dopo le introd. di queste nuove coppie di pt. corrispond: le (1) non individ. P solo quando sia $y_2 = y_3 = 0$, cioè il pt. M_1 non ha, per ora corrisp. Facciamo tendere un pt. M di π a M_1 in modo che $\frac{y_2}{y_3}$ o $\frac{y_3}{y_2}$ tenda a un lim. det. e finito ρ: allora per

$$\lim (x_1 : x_2 : x_3 : x_4) = \lim (\rho y_1 : y_1 : -y_2 \rho : y_3)$$

e perciò al limite $= -\rho : 1 : 0 : 0$. Quindi a M_1 faremo corrispondere tutti i pt. della retta: il corr. che si trova per M_1 dipende dalla direzione secondo cui M tende a M_1 della dir. semplice di F^3: (~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ vale un fatto ana-

logo a quello già visto per le Ω: cioè le
img. delle curve di C che incontrano le
dir. spl. s in uno stesso pt. passano per
M_1 con una medesima tg: nasce cioè tra i
pt. di s e le corrispondenti rette di π per
M_1 una corrisp. proiettiva.) Le (2) non and.
p.ᵗ per $x_1 \pm x_3 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$. $x_1 = x_2 = 0$.
Nel 1° caso $x_1 = x_3 = 0$ rappr. i pt. della gen. $A_2 A_4$
uno di questi sia $P(0\; x_2\; 0\; x_4)$: facciamo tendere
(di F°) $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ ad esso i essendo $x_1^2 x_4 + x_2^2 x_3 = 0$
ho $\frac{x_3}{x_1^2} = -\frac{x_4}{x_2^2}$. Il 2° membro è finito per
$x_2 \neq 0$ (come si può supporre) quindi il 1°, col
tendere del pt. a P tende ad un limite finito
ρ. Allora $y_1 : y_2 : y_3 = x_2 : x_2 \rho x_1 : x_4$ al
limite $y_2 = 0$ $y_1 : y_3 = x_2 : x_4$. Così al pt. P viene
condotti per cont. a fare corrisp. 1 solo pt. di π:
l'eccezionalità del pt. P sparisce. (Si osservi
che il luogo di tutti questi pt. P' è $y_2 = 0$.)

Analog. visto ci pt. di $L_1 L_3$ vi è condotto
a far corr. un pt. ben det. per ciascuno
sulla retta $y_3 = 0$. Resta $x_1 = x_2 = 0$. cioè i
rimanenti pt. della dir. doppia. Se P_0 è uno di essi,
e P della F° tende a P_0 essendo $\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_3}{x_4} = 0$
sarà finito (almeno per $x_4 \neq 0$, il che considereremo
$\frac{x_2^2}{x_1^2}$) $\lim_{P \to P_0} \frac{x_1^2}{x_2^2} = \pm\sqrt{-\frac{x_3}{x_4}}$. Allora
$y_1 : y_2 : y_3 = x_1 : x_3 : \frac{x_1}{x_2} x_4 = 0 : x_3 : \pm\sqrt{-}\; x_4$
Quindi a P_0 facciamo corrispondere 2 pt. P_0'
P_0'' esistenti sulla retta $M_2 M_3$ definiti dalle
precedenti relazioni. Ogni pt. della retta dop-
pia di F° ha dunque 2 corrisp. su π, ...
tanti su $M_2 M_3$ e coniugati rispetto
a $M_2 M_3$. Si può precisare: quando P tende
a P_0, $P P_0$ tende a una tg. nel pt. doppio
tripl. P_0, che starà nell'uno o nell'altro
dei 2 piani tg. in cui si spezza il cono tg.
in P_0: l'eq. cpl. di questi 2 piani è (Si cons.

osr.) ~~$X_1 \cdot 2x_1x_3 + X_2 \cdot 2x_2x_3 + X_3 \cdot x_2^2 + X_4 x_1^2$~~ $=$

cioè ~~$\frac{X_3}{X_4}$~~ $\quad x_1 \cdot 2X_1X_3 + x_2 \cdot 2X_2X_3 +$

$x_3 X_2^2 + x_4 X_1^2 = 0$ cioè $\frac{X_1}{X_2} = \pm\sqrt{-\frac{x_3}{x_4}}$: perciò

il valore del lim $\frac{X_1}{X_2}$ quando P tende a P_0 di-

pende dal fatto che ~~la tg.~~ PP_0 tende

a una tg. dell'uno o dell'altro dei 2 piani

tg. in P_0 (in quella linea): si dice che a P_0 corrisponde l'uno

o l'altro dei 2 pt. [illegible] di $M_2 M_3$, secon-

do che si considera l'una o l'altra delle due

falde della sup. per P_0. Ricordando gli

el.ti ecc. ecc. ... ~~A ciascuno dell'altra~~

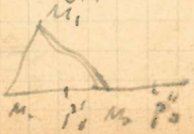
~~[illegible] che se P_0' è un pt.~~ Ai pt.

cusp. di 2 corrisp. su π risp. M_1', M_2' (come

da quanto si è detto). {A ciascuno dell'altra

[illegible] si osservi che se P_0' è un pt. di

$M_2 M_3$, le coniche sing. di ogni piano per P_0'



passano per P_0', quindi 2

di esse hanno 1 sola intersez.

variabile; perciò 2 piani per P_0, cioè

una retta per P_0 avrà ant.° una sola int.

variabile (perciò P_0 è doppio di F^3) — Le imag.

su π delle gen. di F^3 sono le rette per M_1

(risulta dalle formule) (perchè tali rette

hanno colle coniche imag. delle gen. una

1 intersez. fuori di M_1, e più uno imag. di

rette: cioè analit. retta ult. int. di F^3 è

$x_1 = Kx_2$ cioè $x_3 = -K^2 x_4$ è data da $y_1 : y_2 : y_3 = Kx_2 : x_3 : x_4 =$

$Kx_2 : -K^2x_4 : x_4$ ~~che al variare di $\frac{x_2}{x_4}$~~ rappr.

punti da cui $y_2 : y_3 = -K^2$ eq. di retta per M_1.

In part. le cose già dette risulta che alle

2 gen. parab. corrisp. M_1M_2 e M_1M_3.

La curva alg.^{he} di π sono imag. delle c alg.

di F^3, cioè si possono studiare quelle; le rette

di π già viste; coniche di π, se passano per M_1

e non sono con. M_2M_3, sono imag. di C^3

(perchè ...) sghembe; se no di C^4 sghembe:

1) p. 141

generale
be, di genere 0, senza pt. doppi ~~(trovato)~~.
generale (se no di 1ª con 1 pt. doppio)
e perciò di 2ª specie? - (Se C ha 1 pt. doppio,
cioè passa 2 volte per 1 pt. se questo pt.
non sta su $\overline{2}$, C' passa 2 volte per 1 pt.
e perciò ha 1 pt. doppio, oppure sta
su $\overline{2}$; e allora C' contiene 1 coppia di $M_1 M_2$
di pt. cons. rispetto a $M_2 M_3$). Alle C^3 di
π gen. corrispondono su F^3 C^6 di genere 1,
C^5 ~~ecc.~~ di genere 1 se la C^3 passa per M_2,
generale (senza pt. doppi perciò di 2ª sp.)
C^4 di gen. 0, se la C^3 ha 1 pt. doppio in
M_1, e così via. - In generale, se n, n' sono gli
ord. di C, C' e α è molt. di $C^{n'}$ in M_1, si ha
$n = 2n' - \alpha$. Per trovare tutte le C^n di F^3
posso prendere n' ad arbitrio (entro certi
limiti) e poi $\alpha = 2n' - n$ $(0 \le \alpha \le n'-1)$. P. es.

per $n=3$ $\quad n'=2 \quad \alpha=1$. (già trovato)
per $n=4$ $\quad n'=2 \quad \alpha=0$ (generale 2ª sp. ")
$\quad n'=3 \quad \alpha=2$ (" " ")

e basta, perché ~~$n'=4$~~ non vi sono C^4 di 1ª

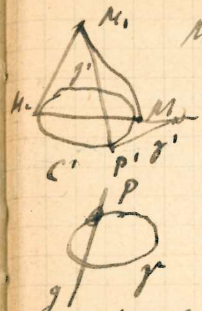
senza pt. doppi
specie: curve di 2ª specie generale sono due
tipi distinti: quelle del 1° tipo incontrano
le gen. in 2 pt. e sono ∞^5, quelle del 2°
tipo in 1 pt. e sono ∞^6. - Due C^{n_1}, C^{n_2}
di F^3 che incontr. le gen. risp. in q_1, q_2 pt.
si segano in $q_1 n_2 + q_2 n_1 - 3 q_1 q_2$ pt. (Infatti
per le loro imag. si hanno risp. n_1', α_1 etc. α_2 etc.
~~Vi~~ $n_1 = 2n_1' - \alpha_1$, $\quad n_2 = 2n_2' - \alpha_2$; le interseg.
delle ~~...~~ due curve sono tante come quelle
delle imag. fuori di M_1 cioè $I: n_1' n_2' - \alpha_1 \alpha_2$
ora $\alpha_1 = n_1' - q_1$, $\alpha_2 = n_2' - q_2$, due colle
preced. danno $n_1' = n_1 - q_1$, $\alpha_1 = n_1 - 2q_1$, etc.
$I = (n_1 - q_1)(n_2 - q_2) - (n_1 - 2q_1)(n_2 - 2q_2) =$
$q_1 n_2 + q_2 n_1 - 3 q_1 q_2$ ~~...~~. (Per le Q, si è
trovato il num. delle interseg. I di 2 C.
se si dicevano n_1, n_2 gli ord. delle 2 curve,
q_1, q_2 il num. delle loro interseg. colle
gen. di $\underline{1}$ sist., si poi scrive $I = q_1 n_2 + q_2 n_1 -$

(51) 29.9₂ · Su genere su F^2 rigata.

$I = q_1 \pi_2 + q_2 \pi_1 - \pi q_1 q_2$ (Segre · Lincei Rend. (4) III_2 1887. considera anzi un caso più generale — Intorno alla geom. su una rigata algebrica) (Form. di Story. ma senza dim.)

¹) p. 138 · Per proporzione giova osservare: se C ha 1 pt. doppio in P non su 2, C' ha un pt. doppio in P'; se P sta su 2, gli corrisp. $P'P''$ di $M_2 M_3$; e C' o ha 1 pt. doppio in P' (o P'') o passa per entrambi $P'P''$ (risulta dalla rappr. piana. o più brevemente così: se C passa 2 volte per P, nel 1° caso C' passa 2 volte per P'; nel secondo secondo che C passa 2 volte per P su una stessa falda, o su due diverse...). — Se C C_1 sono tg. in pt. generico P, C' C'_1 sono tg. nel pt. P' (per la continuità delle corrisp. di C, C_1 avremo in comune P e 1 pt. inf. vicino...).

Le ∞^1 coniche di π per $M_2 M_3$, ivi tg. a (132



$M_1 M_2$, $M_1 M_3$ sono immag. di ∞^1 C^4 di 1ª specie per i 2 pt. cusp. due generatrici di una notevole proprietà. Sia C' una di esse, P' un suo pt. g' la $M_1 P'$, γ' la tg. a C' in P'; il pt. $g' \cdot M_2 M_3$ ha per polare rispetto a C' la retta $M_1 P' \equiv g'$ così le intersez. di g' e γ' con $M_2 M_3$ sono c.a. risp. $M_2 M_3$, e perciò la conica $g' + \gamma'$ è l'immag. di una piana contenente la retta g e la conica γ di F^2; quando P' sta su g' γ' sarà P su g e γ e così P sarà uno dei pt. di contatto della F^2 col piano $g\gamma$. Essendo g' e C' tg. in P' saranno C e γ tg. in P; la tg. a γ in P è tg. principale e perciò la tg. a C in P, che è un suo pt. generico è tg. principale di F^2. La curva C' gode della proprietà che tutte le sue tg. sono tg. princ.

143) i pt. di F^3. Le curve di una sup. qualunque che godono di questa proprietà si chiamano asintotiche della sup.: per un pt. generico di una sup. (non svilup. pab.) passano 2 tg. principali, e quindi 2 asintotiche; ~~se la sup. è rigata un sist.~~ ~~di asint. è costituito~~ cioè le asintotiche si dividono in 2 sist. e per un pt. di sup. passa una asint. di ciascun sistema. Se la sup. è rigata un sist. di asintotiche è dato dalle ~~altre~~ gen., se Q, ..., se non Q. vi è un 1 sist. di asintotiche curve. Quindi le asintot. della F^3 rig. gen. sono C^4 sghembe di 2ª specie per i 2 pt. cuspidali. Si può aggiungere che le tg. alle C^4 asint. nei pt. cusp. sono tg. di inflessione, cioè che le C^4 risultano dotate di 2 tg. di flesso. (Per provare che la tg. a una C^4 in un

suo pt. di [illegible] è di flesso basta provare (145 che un piano per essa ha fuori del pt. 1 interseg. con C^4: ora la sup. ~~[illegible]~~ in un piano per la tg. a C^4 nel pt. cuspidale che ha per seg. M_2 ha per seg. una conica

che contiene M_2 e il pt. ad esso inf. vicino su C^4, cioè se $M_1 M_1$ è M_1, è che sega $M_1 M_2$ in M_2 (e ... M_2) contato 2 volte, quindi di contatto di $M_1 M_2$ e di una residua retta per M_2: una sega quindi C^4 fuori di M_2 in un solo pt.

Per le F^3 rig. di Cayley si può procedere in modo analogo: si trova ancora una rappresentaz. di 1° grado, ma le coniche del piano rappr. ti imag. delle sez. piane risultano disposte in modo diverso, sono ancora coniche per 1 pt, e osculantisi a cui ulteriore condizione. Le loro asintotiche sono cubiche sghembe.

(145) Digressione sulle asint. di una sup.- Data sup. $x = x(u,v)$. $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$
(x, ... funz. non alg. o cont.)
(anche non alg. purché le x, y, z ammettano derivate ~~...~~ fino a un certo ordine.). Dal pt. (u,v) escono 2 ~~asint.~~ tg. principali che vanno a 2 pt. vic.). Vicini $(u+du, v+dv)$ (du, dv ... di 2 ordine) quei valori di du, dv sono determinati in funz. di u,v, da un'equazione del tipo

(1) $L(u,v)\,du^2 + 2M(u,v)\,du\,dv + N(u,v)\,dv^2 = 0$

~~...~~ dove L, M, N sono certe funz. che ora ... . Precisamente, in tratt. di geom. inf. si trova

$$L = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \end{vmatrix} \qquad M = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \cdot \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \cdot \end{vmatrix} \qquad N = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \cdots \end{vmatrix}$$

Dalla (1) si ricavano per sup. non svilupp. 2 valori per $\frac{dv}{du}$ (o $\frac{du}{dv}$)

$\frac{dv}{du} = h(u,v)$ (2) $\qquad \frac{dv}{du} = g(u,v)$ (3)
(supp. ...)

(146) dove h e g sono funz. note di u, v; ciascuna delle (2), (3) è una eq. diff. ord. del 1° ordine che ammette un integrale della forma risp.

(4) $H(u,v) = \text{cost.}$ $\qquad G(u,v) = \text{cost.}$ (5)

~~Ciascuna~~ Dalla 2 pt. delle sup. per cui $H(u,v) =$ a una certa cost. costituiscono una linea, lungo la quale valgono le (2) e quindi le (1), vale a dire sulla linea stessa asint.: si hanno quindi i 2 sist. di asint. risp. dalle (4) (5).- La ricerca delle asint. è così ricondotta alla int. di 2 eq. diff. ord. del 1° ordine che però in generale **non** si sanno integrare, cosicché in gen. non si sa risolvere in term. finiti il probl. della ricerca delle asint. di una data sup. - Per una rigata non svilupp., in generale non si sanno determinare le asint. in termini finiti, ma se se ne conosce 1, si hanno tutte ~~...~~ (se le eq. $x = l(t)z + m(t)$, $y = n(t)z + q(t)$. [$z = z$]. Avremo
(rigata con piano dir. // al piano z.

(147) (portone ξ e ζ al posto di u, v)

$$L = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M = \begin{vmatrix} l' & n' & 0 \\ l & n & 1 \\ l'_j + m' & n'_j + q' & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} l' & n' \\ m' & q' \end{vmatrix} \ (\neq 0)$$

$$N = \begin{vmatrix} l''_j + m'' & n''_j + q'' & 0 \\ l & n & 1 \\ l'_j + m' & n'_j + q' & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} l''_j + m'' & n''_j + q'' \\ l'_j + m' & n'_j + q' \end{vmatrix}$$

Da (1) dà $dt = 0$ (quantità) e

$$-d\xi \, \zeta \begin{vmatrix} l' & n' \\ l'' & n'' \end{vmatrix} + dt \begin{vmatrix} l''_j + m'' & n''_j + q'' \\ l'_j + m' & n'_j + q' \end{vmatrix} = 0$$

donde

(6) $$\frac{dz}{dt} = P(t) z^2 + Q(t) z + R(t)$$

eq. di Riccati della cui risol. dipende la ricerca delle assint. comuni. Nota una soluz. di (6), z_1, si possono determinare tutte le altre; posto infatti $z = z_1 + z_2$, si ha per determinare z_2, $\frac{dz_2}{dt} = P z_2^2 + (2 P z_1 + Q) z_2$ (1) eq. di Bernoulli, che si risolve con quadrature. Bastando porre $z_2 = \frac{1}{w}$ per ridursi a

(148)

un eq. lineare.

$$-\frac{dw}{dt} = (2 P z_1 + Q) w + P(t)$$

cioè

$$\frac{dw}{dt} = \alpha(t) w + \beta(t) \quad (8) \text{ dove } \alpha = \ldots, \beta = \ldots$$

che si sa integrare [posto $w = \varphi_1 \psi_2$,

$\varphi_1' \psi_2 + \varphi_1 \psi_2' = \alpha \varphi_1 \psi_2 + \beta$. Determino ψ_2 con $\psi_2' = \alpha \psi_2$. $\log \psi_2 = \int \alpha + C$, $\psi_2 = K e^{\int \alpha}$,

$\varphi_1' = \frac{\beta}{\psi_2}$, $\varphi_1 = \frac{1}{K} \int \beta \, e^{-\int \alpha} + K'$.

$w = e^{\int \alpha} \int \beta e^{-\int \alpha} + c e^{\int \alpha}$ (dove $c = KK'$ cost. arbitr.) $= f_1(t) + c f_2(t)$

(9) $$z = z_1 + \frac{1}{w} = z_1 + \frac{1}{f_1(t) + c f_2(t)} = \frac{f_3(t) + c f_4(t)}{f_1(t) + c f_2(t)}$$

dove le f sono funzioni note.]. L'insieme delle soluz. di (6) si presenta sotto la forma (9), che cioè è una funzione di 1° grado rispetto alle cost. arbitr., nella il doppio rapporto di 4 soluz. note: ~~quindi è costante. Dette dette z relative a c'', c''', c^{IV}, avremo $C' \, C'' \, C''' \, C^{IV}$ e le loro~~ ... integr. ~~con ... corrispondenti alle ... pel ...~~

149) Sia g gen. gen. $P' \ldots P^{IV}$ 4 suoi pt.
$C' \ldots C^{IV}$ le cost. corr. per cui rappresentate dalle
(9) in cui si attr. a c 4 val. part. $C' \ldots C^{IV}$.
La g è coord. proi. sug. quindi $(P'P''P'''P^{IV})$ =
bir. delle coord. dato da (9) = $(C'C''C'''C^{IV})$
non dipende da t: quindi quattro asint. generalmente di una rigata sghe. incontrano le generatrici
in 4 pt. il cui rapporto non dipende dalla
generatrice considerata (già visto per le Q.) –
(Nel caso che 1 o più delle linee [illegible] le
delle (9) non sia uniforme, cioè se molti:
4 le di più valori, bisognerà prendere in
$P'P''P'''P^{IV}$ per ciascuna di una stessa
determinazione. In questo caso, una asintotica
incontra una generatrice in più punti,
e nell'enunc. del teor. precedente ~~[illegible]~~ si
considerino quelle intersez. delle 4 asint.
con una generatrice che si ottengono per

(150
cost. da $P'P''P'''P^{IV}$). – Un'altra conseguenza:
se una rigata (ett. sghemba) ha 1 dir. rettilinea,
essa è asintotica del sist. delle asint. curvil.
(anche nel caso in cui una sia autoreciproca.
generatrice per. 1° di Cayley, poiché
se g è gen. gen. la asint. del 2° sist. uscente
da g tocca 2 ed è perciò 2): quindi di esse
si sanno determ. tutte le asint. (A maggior
ragione se 2 fa. Ricerca delle asintot. di
rigate con 2 dir. rett.: essendo una sghemba
(se no piano o cono), si può, a meno di trasf.
considerare come direttrici rette $(x=x)$ e $y = tx$,
$z = \varphi(t)$ eq. delle rigate $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ove x e t

Quindi, con questa osserv. si può dire che per
una rigata sghemba, le asint. del 2° sistema
segano le generatrici secondo punteggiate
proiettive (teor. di P. Serret)

151) Quindi

$$L = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & x & \varphi' \end{vmatrix} = 0 \qquad M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & x & \varphi' \end{vmatrix} = -\varphi'$$

$$N = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \varphi'' \\ 1 & t & 0 \\ 0 & x & \varphi' \end{vmatrix} = \varphi'' \cdot x \; ; \; dt = 0, \text{ e}$$

$$-2\varphi' dx + \varphi'' x\, dt = 0 ; \; \frac{dx}{x} = \frac{\varphi''}{\varphi'} dt \qquad \underline{\quad} \; 0 \; x^2 = c\,\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$2 \log x$ ~~cost~~ : $\log \varphi'$ + cost. $x^2 = k\varphi'(t)$. ~~(II)~~

eq. delle asint. del 1° sistema [1] ~~(trascendenti~~ ~~quadratiche)~~ - Una conseguenza notevole è questa: mentre in generale le asint. del 1° sistema di rigate alg. non sono algebriche (basti pensare che, anche ove risolva le eq. della (1) ciò ad esigere altre due quadrature che introducano funz. non alg. per sopprimerle ecc.). le asint. di rigate alg. con 2 dir. rettilinee sono alg.

"Es. ~~cilindroide~~ $\varphi = \frac{2xt}{1+t^2}$; ~~eq. cost.~~ φ; $f^3 x_2 x_3$. $x_1 x_4 = 0$ dove $x_1 x_4$ di. una cond. cost. sono

(152

(Si ha infatti come un cilindro retto c.s. di eq.: $F(x, y, z) = 0$: ... più generale funz. ... la F si generalizza ; ... posto $\frac{y}{x} = t$, la $F(x, tx, z) = 0$ come eq. in z ha radici che dipendono solo da t, non da x, cioè, a meno di un fattore non cont. z si riduce a $\Phi(z, t) = 0$, (Φ polinomio) ; da cui z è definita come funz. a più valori di t. (una sua det. sarebbe la φ di sopra) ; ~~quindi~~ $\frac{dz}{dt}$: posto $\Phi_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$, $\Phi_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ $\frac{dz}{dt} = -\frac{\Phi_2(z, t)}{\Phi_1(z, t)}$

e quindi le ast. sono $x^2 + c\, \dfrac{\Phi_2\left(z, \frac{y}{x}\right)}{\Phi_1\left(z, \frac{y}{x}\right)} = 0$, eq. alg. che unita con $F = 0$ dà $\quad_{2 x_1}$ eq. per le ast. del 1° sistema.

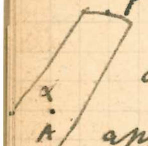
(eq. di Q per le ~~rette~~ ~~...~~ $x\,y = 0$ che eq. ~~ottenute~~ ~~...~~ gen. parabol. ($x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_3 = 0$)

$z = -\frac{x^2}{y^2}$ $\quad \varphi = -\frac{t^2}{t^2}$ $\varphi' = \frac{2}{t^3}$; ast. $x^2 = c \cdot \frac{2x^3}{y^3}$

~~$= c \cdot 2 \cdot x$~~ $1 = \frac{2cx}{y^3} = \frac{2c}{y}\left(-\frac{2}{x}\right)$; $xy + 2cz = 0$

153) Contorno apparente su un piano di F^3 rigate.

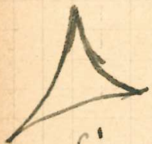
~~α~~ - Data sup. F non svil. i piani α ad essa tg. che passano per un punto P inviluppa un cono Γ che ha il vertice in P. La linea L di F luogo dei pt. A di contatto di F coi piani α si chiama contorno app. della sup. rispetto al pt. P. Essa



appartiene anche al cono Γ come luogo di rette (trad. per dualità a Γ sezione corrisponde linea luogo C sez. di π con F, le tg. a questa linea sono le tracce su π dei piani tg. nei suoi pt. a F; trovando a Γ risulta che le sue generatrici sono le congiungenti PA): cioè ~~la linea L è anche il luogo~~ il cono Γ è anche luogo delle rette tg. a F per P. - Si dice anche per cont. app. di F su un piano ω, rispetto a un pt. P la linea L' traccia di Γ su ω (cioè la proiez. di L su ω da P. - Quando

(155

F è rig. (non svil.) i piani α per P sono i piani per P e le generatrici di F; cioè le tg. di L' sono le proiezioni (da P) delle generatrici di F. - Se F è F^3 rigata, e P è generico, L' è una C^4 di 3ª classe, ~~3 cuspidi~~ (trad. per dualità al Γ luogo di cui L' è una sez. piana corrisp. come si è visto l'inv. delle tg. a una sez. piana di F^3, ora questa è di 3° ord. con 1 pt. doppio (gen. nodo) e però ha classe 4.). L' ha una bit. (per dualità) e quindi 3 cuspidi (per le f. di Pl. $\kappa = 3\nu'(\nu'-1) - 6\delta' - 8\iota'$) - Le 3 tg. cusp. di



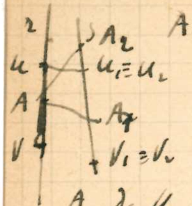
C' concorrono in 1 pt. (basta per il duale. Ora C^3 con 1 pt. doppio

C' è sempre proiez. di C^3 sghemba (ricorrendo alla proi. stereogr. delle quadriche da un pt. O, i pt. di flesso A_1', A_2', A_3' di C' sono le proiez. di $A_1 A_2 A_3$ i cui piani osculatori

155 per 0, e stanno perciò in ∞ per 0 ass. risp. a 0 nelle pol. nulle...)   Se P sta in un pt. gen. di F², L' e L'' (su dette), ~~non~~ è più tg. gen. di F²...). — Nel caso di P generico, l'indice 4 di Γ eguaglia la classe 4 di una sup. piana generica della sup.: ciò avviene per ogni sup., giacchè ord. di Γ = numero delle tg. di F contenute in un fascio generico = classe di sup. piana (= rango di F). Quindi le F² rigate sono di rango 4.

F² rigate reali. — Sono quelle che in sist. di rif. reale hanno eq. a coeff. reali. — Ad esempio delle Q possiedono sempre ∞^2 pt. reali perchè ogni retta reale le incontra almeno in un pt. reale (la ricerca delle intersez. di F² e una retta reale dipende da eq. di 2° grado a coeff. reali con 1 rad. almeno reale): quindi la ogni retta reale di una stella F² ha almeno

[illegible] pt. [illegible] con l'intorno di cui.; 10. per gen. un pt. reale. La generatr. passante per un pt. reale semplice è reale (se no per quel pt. passerebbe anche la sing. coniugata e il pt. sarebbe doppio): Quindi F² ha ∞ gen. reali; su ciascuna delle quali il pt. doppio è reale. quindi la dir. doppia è reale. Anche la dir. semplice (per F² gen.) è reale, giacchè la dir. son le rette appogg. a 4 generatrici reali, e anche reale una di esse... Per le F² generali la coppia di pt. cusp. U e V essendo definita mediante un' inv. può essere reale, o immag. Nel 2° caso da ogni pt. della dir. doppia escono 2 gen. reali (perchè pt. A su r 2 gen. e 1 e più 2 gen. reali; variando A con continuità su r le 2 gen. per A non potranno mai diventare immag. potendo ciò solo avvenire attraversando a passag. di A per cui le gen. uscenti da A coincidano [eqz. di 2° grado a coeff. variabili]./ in questo caso (vi sono detta) lungo tutta la dir. doppia si [illegible] 2 falde reali. — Nel 1° caso, quando 156 per cui A descrivono 2 gen. inf.



AA_1A_2, $A_1 A_2$ risp. $U_1 \equiv U_2$ e $V_1 \equiv V_2$, quando A_1 va da $U_1 \equiv U_2$ a $V_1 \equiv V_2$ in 1 segm. A va da U a V in lor., A_2 da U_1 a V_1 nel segm. compl. di quello percorso da A_1; invece mentre A va da U in V, A_1 e A_2 esauriscono la s.; dai pt. di 2 dell'altro segm. UV escono 2 gen. imag. coniugate: la F^3 ha 2 falde che si segano lungo il 1° segm. UV, oltre quanto la 2 procede isolata. Vi sono quindi, dal pt. di vista di realtà 2 tipi dist. di F^3 rig. gen.

cfr. Cremona:

Sulle superficie gobbe del terz'ordine (op. I. p. 261)

Sur les surfaces gauches du 3me degré. (op II p. 46)

Rappresentazione della sup. di Steiner e delle superficie gobbe di terzo grado sopra un piano (op II p. 389)

E. Weyr.- Geom. der räuml. Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung. (Leipzig. 1870)

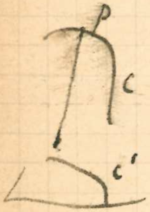
Salmon III. p. 44 (ed. 1892)

159)

Superficie rigate del 4.° ordine

(esclusi i coni). - È irriducibili

Ve ne sono di notevoli aventi per spig. di regresso C^3 sghemba e non altre (Se C è spig. di regr. P un suo pt. generico, da cui C si proiet. ti da π in C' a retta 2 gen. per P si appoggiano



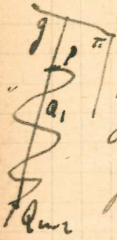
2 tg. di C diverse dalle tg in P, e quindi per la sua traccia escono 2 tg. di C' che è quindi una conica). - Escludiamo del quarto anche queste notevoli.

Genere di Rig. alg. - Due sez. piane di una rigata alg. in quanto si facciano corrisp. ai di esse le tracce di una generatrice che descrive la rigata risultano in corrisp. biunivoca e, si potrebbe verificare facilm. alg., hanno quindi lo stesso genere: ciò vale anche se una di esse, quindi sez. con piano gen. è la

residua interz. di un piano per generat. (160

Quel genere costante delle sez. piane si dice genere della rigata. Es. per le F^3 (non coni) il genere è 1, per le F^4 rigate (non coni) il genere sarà quello di una C^3 residua interz. con un piano per generatr. cioè 0 o 1. - [Si dimostra che affinchè una rigata sia rappr. su un piano è nec. e suff. che sia di genere 0 - si dicono anche razionale.]

Un piano gen. π per gen. gen. di F^n sega ulteriormente



F^n in C^{n-1}, che sega g in n-1 pt.: uno di essi P è pt. di contatto di π, gli altri n-2 $Q_1 \dots Q_{n-2}$ sono pt. multipli di F^n: i pt. Q sono generalm. dist. da P (se una C^{n-1} toccasse g in P che sarebbe parabolico, o avrebbe un pt. almeno doppio in P che sarebbe almeno pt. di contatto. v. le F^3). - poi punti doppi ...

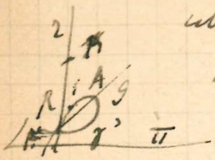
161) coincid. parz. o tot. tra loro: il caso che si può prendere come il più generale è che siano tutti dist.; quindi su ogni generatr. di F^n rigata vi sono in generale $n-2$ pt. mult. di F^n, eventualmente meno (ma almeno 1); cioè F^n rigata ha una lin. mult. ~~incontrata dalle~~ (ev. rid.) che è incontr. dalle gen. in k pt. con $p \leq k \leq n-2$. (Per le F^4 $1 \leq k \leq 2$).

Partendo dalle preced. oss. si possono clas. sif. le F^4 rig. sghe. in 12 tipi diversi[1] (Cremona. Sulle sup. gobbe di quarto grado Op III p. 421): la classif. era già stata fatta da Cayley, il quale però aveva dist. solo 8 tipi e ne ometteva altri 2. Mancando il tempo di dare una classif. compl. questa sarà solo accennata. (v. Salmon III p. 78)

[1] dipend. dalla costituz. della linea multipla e ulteriormente dalla esist. di eventuali rette → dir. semplici

~~Una linea~~ F^4 non ha pt. quadrupli. – 162

quindi la molt. della linea molt. non può essere > 3. Se $i = 3$, non può essere due rette (perchè le cong. di 2 suoi pt. stanno sulla sup.; in tal caso la sup. non può avere altri pt. molt. (perchè se P doppio, le cong. P coi pt. di 2....), e perciò l'(almeno uno) pt. molt. esist. ne esce gen. gen. deve appart. 2; cioè F^4 ha retta direttr. luogo di pt. tripli. - Viceversa F^4 con retta tripla è rigata (comp:a). Le F^4 con r tripla si dividono in vari tipi: anzitutto per un pt. gen. P di r passano tre gen.: possono essere tutte diverse da r, o 2 sole div. da r e allora r è generatr., o 1 sola div. da r e allora r conta due volte tra le gen uscenti da P: dicesi trev. due è gen. doppia. Esistono effett. F^4 di questi tre tipi: sia g generatrice generica per R, π piano per per g che incontra



ult. F^4 in $g^{(1)}$ avente pt. doppio

in R, A la resid. intersez. di

g con g'; nei tre casi le quante

intersez. tra ~~[illegible]~~ r e g corrisp. alg.

risp. (1,3) (1,2) (1,1) in cui a R su

~~[illegible]~~ r corrisp. risp. su g (RRA), (RA)

A. Viceversa, si parte da r e g con

corrisp. così fatte; esse generano F^4

dei 3 tipi (col principio di corrisp.

cerco quante gen. si appogg. a retta su

gen. p. es. nel 1° caso, [illegible] nel piano

in corrisp. (3,3) con 6 piani uniti;

tra cui [illegible] R conta due volte. Tutte

regola risp. analog. negli altri casi

si trova F^4, ~~In tutti i casi R su g la~~

~~2 corrisp. su r, di cui risp. 0, 1, 2 distinti~~

~~da R; quindi [illegible] risp. [illegible] gen.~~ In tutti

i casi r è dir. tripla, poichè un piano per

r contiene 1 gen.^{nte} ≠ r, e per un pt. di r pas-

sano risp. 3, 2, 1 gen ≠ r). Vi è luogo a consid.

teorica dist. delle F^4 con retta tripla in base

alla ~~[illegible]~~ event. esist. di una ulteriore retta dir.

sempl. s. Se vi è, è sghemba con r, e perciò

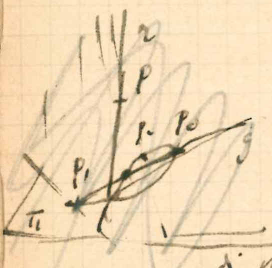
non potrà esservi nessuna nelle F^4 del 1° tipo:

in tal caso, colla generaz. precedente, le tre

gen. uscenti da P gen. di r, devono appoggiarsi a

s stanno nel piano Ps e perciò segano g in

3 pt. $P_1 P_2 P_3$ allin. tra loro e colla traccia S



di s su π, cioè

la corrisp (1,3)

tra r e g è tale

che le terne

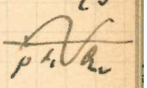
di pt. di g corrisp ai singoli pt.

di r sono le interseg. di g colle rette di

un fascio S che risulta in corrisp. alg. (1,1) cioè

164) proietti. con r. Viceversa si parta da
r e g incid. in R, e si riferisca proi.
r a un fascio S di π, in modo che a
R su r corrisp. SR; la corrisp. che nasce
tra r e g dà luogo a F^4 del 1° tipo: I
piani del tipo $PP_1P_2P_3$ contengono 3 gen.
e sono piani tangenti tripl. (per dualità...) o
tritangenti; e poi passano tutti per
una retta s (per dualità..), che risulta
appoggiata a tutte le gen. e poi sta
su F^4 e ne è retta dir. (semplice): ...
... 1° tipo ... dir. spl (8 Cr.)., o
con dir. (9 Cr.), con F 2° tipo (3 Cr). 3°
(10 Cr.)

Tra le F^4 rig. ~~con~~ sole linee doppie consideriamo solo quelle le cui sezioni piane generiche presentano solo cuspidi con tg. a contatto tripunto (compl. 2 o 3

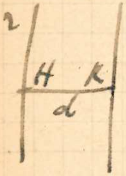
secondo il genere 1, 0) _ Per p=1 la linea
doppia è del 2° ord. ~~una piana~~, e perciò
consta di due rette sghembe 2.3: non vi sono
altri pt. doppi (a meno sez. piana per cui anche
p=0). Se genericamente g. g vi sono 2
pt. doppi (~~uno 1 perchè se no~~ 
~~la linea da π passa per g, e~~
~~alt. C^3, questa non ha pt. doppi~~, quindi
i ~~2 pt doppi~~ i pt. Q_1Q_2 (il dubbio che si
ridurrebbero a uno solo si elimina oss. che le
sez. per C^3 devono avere oltre a P 2 pt. doppi
sulle traccie della linea doppia ~~2 rette doppie~~, e
che C^3 non ha pt. doppi, quindi non coincid.
con le interz. ~~di~~ C^3 g che risultano perciò
distinte): perciò le 2 rette doppie sono
direttrici doppie: da ciascun pt. P di una, gen. 2
escono quindi 2 gen. (entrambe distinte da
r) e contenute nel piano Ps. Tra r e s dir.

166) quindi corrisp. le loro intersez. con una stessa gen. nasce corrisp. (2,2): viceversa si parta da corrisp. (2,2) tra 2 e 3. La sup. generata è certo F^4 (pel principio di corrispond. [illegible], già usato a propos. delle F^3), e ha 2 e 3 come doppie (da ogni pt. escono 2 gen.). Sarà di genere 1? In generale sì; ma non sempre: sì, se F^4 non ha altra linea, cioè una ult. retta ~~multipla~~ doppia. Ma l'esist. di una ult. retta dir. doppia è esclusa (se no quadrica, oppure...). quindi con ulteriore retta doppia d, non potendo essere dirett. sarebbe generatr. (giacchè le generatr. appogg. a d, dipendendo da un'eq. alg. non id. sarebbero in numero finito, e quindi d luogo di pt. di gruppi. Vi sarebbero dunque 2 pt. dist. di d su una stessa generatr. che perciò coincid. con d)[1], cioè generatr. doppia.

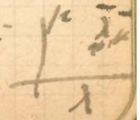
1) perciò, e lo applicheremo poi, su una F^n rigata una retta non gen. è dir. (perchè se no....)

(167

Quindi il piede è solo che la corrisp. (2,2) tra 2 e 3 sia tale che vi sia una generat. doppia. Se questa vi è, appogg. a 2, 3 risp.

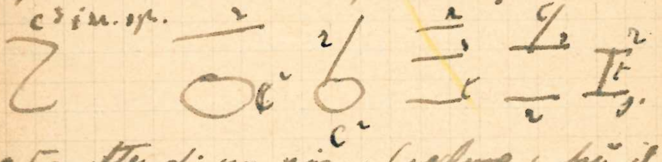


in HK, le 2 gen. uscenti da K, contenute nel piano 2K, che sega pi su 2 H^2, coincid. con d, e quindi i 2 corrisp. di K coincid. con H. e così i 2 corrisp. di H coincid. con K: il reg. è invert. Così a ciò accade d è generat. doppia. Ora per una corrisp. generale (2,2) tra 2 e 3 ciò non avviene, ma può avvenire con una particol. (si prendano su 2, 3 coord. proi. diciamo λ, μ, in modo che i valori che competono ad H, K $\bar\lambda\,\bar\mu$ siano finiti: l'eq. di corrisp. è
$$\lambda^2(a_1\mu^2+b_1\mu+c_1)+\lambda(a_2\mu^2+\dots)+a_3\mu^2+\dots+c_3=0$$
Interpr. $\lambda\,\mu$ come coord. cart. in un piano questa è l'eq. di C^4 quadrica piana avente come doppi i pt$_\infty$ degli assi λ, μ;



l'ipotesi fatta su H, K equiv. a quella che $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ sia uno nuovo ulteriore pt. doppio. Così è riconosciuta l'esist. di una F^4 di gen. 1 (11 Cr.) ~~accanto~~ nulla di un nuovo tipo di F^4 di $p=0$ (5 Cr.) !!

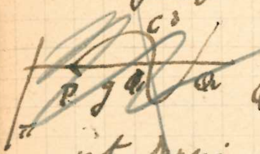
Se F^4, di $p=0$ ha solo linea doppia, nell'ipotesi fatta, essa una compl. del 3° ord. e una a priori di uno dei seguenti tipi



o tre rette di un piano (escluso perchè il piano farebbe parte della superf.) o tre rette per un pt. (escluso pel motivo duale). Si esclude il 2° caso perchè le 2 rette per P genera...

I) Oss. F^4 con 2 rette doppie sghembe è tutta rigata, perchè le rette per un nuovo pt. P appoggiate ad esse .... – L'esist. di una ult. ~~due~~ retta dirett. è esclusa per ~~entrambi~~ i tipi.

di F^4 app. a 2 e γ starebbero su F, ~~e passa doppio pt.~~, analog. il 5° (rette app. a 2β, $2H$); si esclude il 4° perchè le rette ~~...~~ delle ∞^{2} 1 appartenessero a F^4. Gli altri 3 casi risulteranno invece tutti possibili. Per ciascuno di cui per P passa una ~~corda~~ – gen. $x\,y$ o gen. gen. per cui π etc., Q_1 e Q_2



risultano distinti; infatti, se $Q_1 \equiv Q_2$, dovendo g e C^3 avere 3 pt. doppi, oltre P, C^3 avrebbe 2 pt. doppi e perciò si spezzerebbe; delle sue cp. una sola potrebbe non essere generatrice. Quindi ~~almeno un'altra~~ sarebbe gen. e quindi ogni

1) Se F^n rigata è irriduc., e una sua sez. piana è riducibile in più cp. $C_1, C_2 \ldots C_n$, una sola di queste può non essere una generatrice. Se infatti il piano seg. è π_1, e π_2 è un altro piano seg. F^n in C^1 ~~...~~ etc.

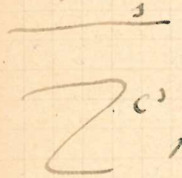
~~piano per una gen. gen. sarebbe almeno bitangente.~~ Perciò g sarà risp. ~~a~~ corde di C^3, app. a r e C^2, appoggiata a r, s. Nell'ultimo caso, si ritorna su un caso già noto. I primi due casi risulterano entrambi possibili; si vede subito che nel caso di r C^2 doppie è esclusa a priori l'esist. di un'ulteriore retta dir. spl. (che dovrebbe essere sghemba con r e allora le rette app. ad essa, r e C^2 (sec. a r) descriverebbero F^3), e col primo no; e che, sempre a priori, il secondo caso dà luogo a due ulteriori, sarebbero 2 ~~[illegible]~~ non sec., o sia generatrici. Mostrerò, per ordine, che effettivamente esistono F^4 rig. sghembe con C^3 doppia e un'ulter. retta spl. dir. (specie 7ª Cl.)

id. id. senza ult. retta spl. dir. (specie 1ª Cl.)

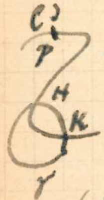
~~id.~~ id. con r C^2 doppie e non generat. (specie 2ª Cl.)

id. id. id. con 2 generatrici (specie 4ª Cl.)

Per la specie 7ª si osservi che il ~~luogo delle~~ date C^3 sghembe e s non incidenti, il luogo delle ~~rette~~ corde di C^3 app. a s costituisce appunto F^4 del tipo richiesto (se dir. spl., e in un piano per s vi sono 3 gen., quindi F^4; e per pt di C^3 escono 2 gen. quindi C^3 doppia).



Per la 1ª parto da C^3 e conica γ incid. ad essa in 2 pt, il luogo delle corde di C^3 incid. a γ (esclusi i coni HC^3, KC^3) costit. F^4 del tipo richiesto (l'ordine delle sup. generata da rette app. a C^3 e conica γ generica è (v. sopra) 8, altrimenti bisogna sottrarre i 2 coni quadrici HC^3, KC^3: resta 4. - C^3 è doppia perchè il cono quadrico PC^3 sega γ fuori di H, K, in due punti: - Non



172)

(che starebbe ~~sempre~~ nel piano di γ)
non

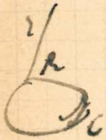
vi è retta dir. spl. s, giacchè se no

per i suoi pt. e quelli di γ sarebbe determinata dalle gen. corrisp. pen. e allora si avrebbe F^3.

Per la specie 2ª si pongo tra r e C^2 corrisp.

(2,2) in cui a $R \equiv r C^2$ corrisp.

su R o su C^2 corrisponde RR risp. su C^2, o su R; il princ. di corr. applicato nel solito modo mostra che così si genera F^4, r e C^2 sono doppie perchè da ogni loro pt. escono 2 gen.

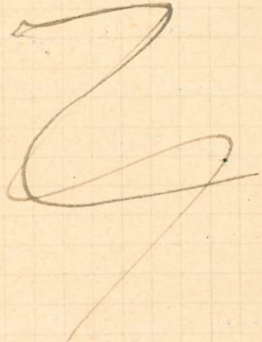


Per la 4ª si pong. tra r e C^2 corrisp. (2,1) in cui a R su C^2 corrispondono su r 2 pt. di cui uno coincide con R.

Se si leva l'ip. aceta. di pag. 164 si ottengono ancora 2 specie, risp. di ~~fra~~ = 1,0 ~~tra~~ come limiti delle specie 11 e 5 (α). quando le due dir. stesse coincidono, che sono risp. 12 (α), e 6 (α).

(173)

I piani tg. multipli di F^4 rigate ogni costituiscono sempre tale alla linea multipla di una F^4 rigata, non necessariamente della stessa specie; un esame più accurato mostra che le specie 3ª e 4ª, 7ª e 8ª son duali, le altre duali ciascuna di sè stessa.



Geometria differenziale

1925-26.

di Catania

<u>Introduzione</u> (come nelle dispense). Aggiungere alla fine: ~~[illegible]~~ La g. d. è molto ampia; e un anno come di una non basterebbe nemmeno per esporre la parte che ormai si può riguardare come classica. Questo corso nella sua maggior parte sarà appunto dedicato all'esposizione, sia
~~con particolare riguardo alla teoria delle [illegible]~~
pure parziale della parte classica; ~~particolarmente~~ superficie (teoria che ha avuto del resto una parte pre: ~~per quanto riguarda lo studio delle superficie.~~ ponderante nello sviluppo delle S. D.).

Ma, per qualche argomento particolare, cercherò di approfondire meglio lo studio, e di dare un'idea di alcuni sviluppi più recenti.

Trattati: Bianchi, Darboux.

Cap. I.

<u>Generalità sulle superficie</u>[1]: <u>rappresentazione parametrica</u>, <u>piani tgenti</u>. <u>Esempio delle rigate e teorema di Charles. – Le superficie sviluppabili come superficie con ∞^1 piani tangenti</u>. (L'eq. $rt-s^2=0$). Dispense pp. 10-31. <u>Asintotiche</u> pp. 31-42

[1] prima richiamo sulla rappr. param. di linee; retta tg. e piano osculatore (Disp. pp. 4-9)

[Variante a p. 16 × aggiungere. Avviene qualche volta di cambiare i parametri (coord. curv.) ponendo (1) $u = u(u';v')$, $v = v(u';v')$ (funzioni a un sol valore). Se $\frac{\partial(u,v)}{\partial(u'v')} \neq 0$, è soddisfatta la restrizione, perchè: $\frac{\partial(f,g)}{\partial(u';v')} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} \frac{\partial(u,v)}{\partial(u';v')} \neq 0$. In tale ipotesi, inoltre, le (1) sono invertibili, nel senso che limitando il campo di variabilità, si ricava $u' = u'(u,v)$, $v' = v'(u,v)$. Che si verifica come a pp. 12-14. [e viceversa] cioè anche $\frac{\partial(u';v')}{\partial(u,v)} \neq 0$ $\left(\text{è} = 1\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(u';v')}\right)$]

Variante a pp. 17-18. [ ] Sostituire: se analogamente $\chi(u,v) = \text{cost.}$ è un altro sist. di linee distinto da quello, si faccia il cambiamento di parametri $u' = \varphi$, $v' = \chi$; è lecit. perchè supporre $\frac{\partial(u'v')}{\partial(u,v)}$ ≠ 0 è equivale a supporre φ e χ funzionalmente indipendenti, cioè i due sist. non coincidenti (giacchè da $\varphi = \text{cost.}$ seguirebbe $\chi = \text{cost.}$). Allora risulta che

a p. 15 - (1). Ciò nel campo reale: nel campo complesso basta applicare che da $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ si ricavano, se per dati u, v $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, u e v come funz. analitiche di x, y. V. per. Picard II, 2ª ed. p. 267, dove c'è un teorema più generale.

× a p. 35. Nel campo reale il teorema di Cauchy, con le cond. di Lipschitz (per la dim. cfr. p. es. Goursat. II pp. 366-368 e 369); nel campo complesso il teorema di esistenza di Cauchy, dim. col calcolo dei limiti (ibid. pp. 347-51) o estendendo il procedimento delle approssimazioni successive (ibid. pp. 371-73).

× p. 36 in nota ..., ma l'ipotesi è eliminata da quanto si dirà più avanti sulle [illegible] delle lg. coniugate (ed in quanto sarà iperb., o ellittica, o dopp., [illegible] che il pt. è ....)

p. 35 Se pt parab. non si può dire
L'eventualmente si riferisce al caso
che L N - M² = 0 valga superficialmente
(svp. svil., come si vedrà più avanti).

p. 36 (Dici per ogni pt. iperbolico ~~o parabolico~~ 2 ast. ~~[illegible]~~ so d'un pezzo non contenente pt. ellittici (e perciò tutti ip. o parabol.) 2 ast: nessuna per pt. ellittici. (Se pt. tutti parabolici, come; ma si vedrà subito che il caso non ha interesse)

Continua il Cap. I | Asintotiche sulle rigate disp. pp. 42 - 51; ~~t~~ digressione sul concetto di linea sghemba appartenente a cpl. linear (pp. 71-75). Teoremi di Lie sulle rigate appartenenti a cpl. lineari (pp. 75-78). - Tgti coniugate pp (78-84) Sist. coniugati e digressioni svp. inviluppi di ∞' piani (pp. 84-93)

Varianti a pp. 85-86. Anticipate l'osservazione di p. 92.

→ aggiunta a p. 91: per giungere alla conclusione basta sapere che le tg. p.es. alle linee di Σ_1 nei pt. delle linee di Σ_2 costituiscono svil. (come risulta dalla stessa dimostr.)

L'eq. di Lap. relativa a un doppio sist. coniugato etc. pp. 93 - 103. Oss. sulle eq. di Laplace. (Si) a p. 97: sostituisco così. Se assi mobili $x'y'z'$ $\parallel xyz$ di cui O' descrive $(A(u)\ C(u)\ E(u))$ e rispetto a cui ho curva parametr. $B(v)\ D(v)\ F(v)$, la sua eq. è la F. Dunque intanto essa è generabile per traslazione p. es. da $A(u_0) + B(v)$ etc: poi la traslazione di un pt. $v = v_0$ è $A(u) + B(v_0)$. c. d. d.

a p. 103 aggiunto. Può però le F rappresentare più eq. di Lap. del tipo più generale
$A x_{uu} + \dots + F x = 0$.
(riferendoci p. es. a coord. non omog.)
p. es. se essa è riferita alle ast., la Dl è soddisfatta per $du = dv = 0$ cioè $N = 0$, e analog. $L = 0$. Ora

x y z sono soluzioni di

$$\begin{cases} \theta_{uu} = a\,\theta_u + b\,\theta_v \\ \theta_{vv} = c\,\theta_u + d\,\theta_v \end{cases}$$

e viceversa, in tal caso le F risulta riferite alle asint.

Del resto, ogni F rappresenta 2 eq. di Lap. distinte

(e viceversa con esse tutte le loro ~~rapp.~~ comb. lineari)

ma non altre se F non è piana. ~~Infatti (ancora p. es. in coord. non hom.)~~ ~~non~~ per i pt. (anticip. le notaz. di p. 105-6)

~~(x, y, z)~~ $(x_u\ y_u\ z_u)$ . . . $(x_{vv}\ y_{vv}\ z_{vv})$

~~$x = (x, x_u, \ldots)$~~ P_u, P_v, P_{uu}, P_{uv}, P_{vv}.

~~vengono~~ ne prendo 4 lin. ind. Allora gli altri 2 si possono esprimere come loro comb. lineari, cioè vengono 2 eq. di Lap. Ora c'è da osservare che 4 pt. lin. ind. esistono certo: se no quei pt. starebbero tutti al massimo in uno stesso piano. — Poiché x, x_u, x_v sono lin. ind. ~~ne verrebbe~~ ~~x_{uu}~~ $(x\ x_u\ x_v)$

a p. 100. — Però, in coord. non omogenee, si aggiunge allora che anche la 1ª coord. 1 sia soluz. dell'equazione il che importa che manchi il termine contenente a fattore la funzione incognita, come subito si verifica.

Infatti (anticip. le notaz. di pp. 105-6). Osservo anzitutto che per i 6 pt. $P, P_u, P_v, P_{uu}, P_{uv}, P_{vv}$, se la F non è piana, non possono i 3 ultimi essere cb. lineari dei primi tre. Se no da $\{P_{uu} = (P\,P_u\,P_v)$ ecc. si dedurrebbe che F rappresenterebbe un sistema

$$\theta_{uu} = (\theta_u\ \theta_v\ \theta)$$
$$\theta_{uv} = (\quad).$$
$$\theta_{vv} = (\quad)$$

ultimi 3 svaniscono anche il risultato continua, come si vede subito, a sussistere.

Passando a coord. non hom. verrebbe $L = M = N = 0$, allora le asint. sarebbero ~~indeterminate~~ indeterminate e F sarebbe piano, come si è visto a suo tempo. Perciò, dicevamo d'altro lato i 1i tre sono lin. ind. (se no F rappresenterebbe un'eq. del 1° ordine), ma degli altri 3 se con essi 4 pt. lin. ind. il 5° e il 6° dan loro cb. lin.: si hanno così 2 eq. di Lap. distinte. Non di più, perché se fossero 3, si avrebbe altrettante relazioni lin. ind. fra i 6 pt.: se da esse si potessero ricavare P_{uu}, P_{uv}, P_{vv}, ne verrebbe che F è un piano; se no, viene un'eq. del 1° ordine, essendo

3 eq. con 2 qualunque dei pt. (più precisamente dei

Le superficie P: considerazioni duali.

pp. 103-116.

a p. 116 aggiungere. Se delle sup. in questione si vuole una rapp. param. per punti, basti ragionare così. Come per una sup $x(u,v)$ il piano tg. è di x, x_u, x_v; così per sup-inv. $\xi = \xi(u,v)$ il pt. di contatto è il punto comune ai piani ξ, ξ_u, ξ_v. At: tualmente è il punto comune ai piani $\Sigma(U_i+V_i)x_i = 0$ e $\Sigma U_i' x_i = 0$, $\Sigma V_i' x_i = 0$. ~~Il così il 2°~~ Ri: facendosi alle gen. di Darboux per le sup. inviluppo il 1° è il piano radicale di S_1 (di Σ_1) e S_2 (di Σ_2); il 2° di S_1 e delle inf. vicine in Σ_1; il 3° di S_2 e delle inf. vicine. Dunque il punto di contatto di ogni piano con l'invi: luppo è il centro radicale delle quattro sfere che si hanno prendendo, oltre a S_1 e a S_2, le inf. vicine. [ricordando che 4 sfere hanno in generale un centro radicale)

Altri esempi di sistemi coniugati: un primo cenno sulle linee di curvatura e sulle superficie minime. pp. 116-134.

a p. 117 aggiungere: ~~le linee di~~ i due sist. di linee di curvatura si possono dunque definire come due sistemi coniugati ortogonali.

a p. 120. - Le due df. si equivalgono: ma la 2ª ha una portata più vasta, in quanto non esige l'a: naliticità delle sup. Ma, in parte la maggior generalità è solo apparente: perchè per un teorema già affermato da Weierstrass e poi dimostr. da altri (Bernstein, ecc.) le soluzioni della (51) con derivate seconde continue in un certo campo sono analitiche (v. pel. Müntz. Die Lösung des Plateauschen Problem über Konvexen Bereichen. M. A. t. 94. 1925).

~~[illegible]~~ Le trasf. di Laplace: pp. 155-159 e 166-167. Poi digressione sulle congruenze rettilinee 155-169

a p. 158 detto: cioè a dire stanno in un piano i pt. a, b, $\lambda_u a + \mu_u b$ ... cioè a, b, $\lambda a_u + \mu b_u$, $\lambda a_v + \mu b_v$

p. 165. Se infatti t è una linea generica di Θ le tangenti alle linee Σ uscenti dai suoi pt. inviluppano su Φ' ~~una svilupp.~~, e perciò formano una svilupp.le.

Cenni sulle tangenti (e linee) di Darboux e di Segre. - pp. 170-184.

a p. 174. (in nota). Invero se $z = \varphi_2 + \dots$, $y = \psi_2 + \dots$ sono le loro eq. sulla intersez. è $(\varphi_2 + \psi_2) \dots$; o cioè O è almeno doppio sul cilindro proiett. l'interseq. secondo l'asse z; ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ e perciò sulla intersez. Viceversa,

se la 2ª disp. non tocca $z = 0$, dalle $y = \psi_1 + \psi_2 \dots$ le sue eq. con $\psi_1 \equiv 0$, ~~[illegible]~~ e le proi. di C su xy secondo dir. y non avrebbe in O pt. doppio: perciò nemmeno C.

p. 180 continua a sussistere ma va dimostrato diversamente. In tal caso, in cui le terne di pt. della retta hanno un pt. fisso M, la terna con pt. triplo è unica (MMM): pensando però questo caso come limite del generale si può dire che vi stanno tre terne coincidenti; e siccome MMM è un gruppo della retta) così il risultato continua a sussistere. (avendosi però in sostanza una sola terna triplo.)

~~A~~ Quest caso si presenta (cfr. le disp. p. 181) se φ_2 e φ_3 non sono primi, cioè se una fra le tgenti principali è quadripunte (tutte e due non possono essere) (In un tal punto si ha dunque una sola tg. di Darboux, che coincide con quella ~~[illegible]~~ tg. 4-punta ... È il caso delle rigate/.

p. 187 annullate la fine.

p. 182 | qualcuna delle | entrambe le

p. 20.- (1

Ancora sulle tangenti di Darboux e Segre.-

Proviamo ~~che~~ anzitutto che la terna delle tg. di Darboux ammette come coppia Hessiana (nel fascio delle tg.) la coppia delle tangenti principali. ~~Mi limito a considerare un pt. non~~. Richiamo sulle Hessiana di $f(x,y)=0$ nel campo binario $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}=0$

e sul suo carattere di covarianza. Allora, posso limit. a considerare un pt. non parabolico e mediante una π, eventualm. immaginaria, mi riduco al caso in cui le tg. principali in O coincidono coi due assi x e y, cioè che $\varphi_2 \equiv Kxy$ con K costante. L'eq. della rete, cioè la (88) diventa

$$(1) \qquad \frac{\nu}{K}\varphi_3 + xy(\lambda x+\mu y)=0.$$

Cerchiamo i cubi perfetti contenuti nella (1) che scrivo, posto $\varphi_3 = Ax^3+3Bx^2y+\dots$ $\quad 3l=\frac{\lambda K}{\nu A}$, $m=\dots$

$\cancel{A}x^3+3\frac{B}{A}x^2y+3lx^2y+3mxy^2=0$. Ho cubi perfetti per $\begin{cases} \frac{C}{A}+m=\left(\frac{B}{A}+l\right)^2 \\ \frac{D}{A}=\left(\frac{B}{A}+l\right)^3 \end{cases}$

2) Quindi ritrovo i tre cubi perfetti, assumendo

$$\begin{cases} l = \sqrt[3]{\frac{D}{A}} - \frac{B}{A} \\ m = \left(\frac{B}{A}+l\right)^2 - \frac{C}{A} \end{cases}$$

le forme lineari di cui sono cubi sono i tre valori di $x + \sqrt[3]{\frac{D}{A}} \cdot y$. La terna di tg. di Darboux si ottiene annullando il prodotto di queste tre forme lineari cioè $x^3 + \frac{D}{A} y^3 = 0$, cioè $Ax^3 + Dy^3$. La sua Hessiana, a meno di un fattore vale xy c.d.d.

A questo premettere ~~una~~ breve digr. sul concetto di inv. e cov. di forme binarie[1]. Per $f(x, y)$ si intende come inv. una funzione Φ dei suoi coeff. tale che se le x, y si trasf. linearm. in X, Y quella funzione Φ abbia lo stesso valore sia che la si calcoli nel vecchio, sia nel nuovo sist, a meno di un fattore che si deve ridurre a potenza del determ. delle sost: cioè detta $\overline{\Phi}$ la nuova Φ e posto $X = \alpha x + \beta y$, $Y = \gamma x + \delta y$

con $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, sia $\Phi = \overline{\Phi}\Delta^m$ con m intero. (o, ciò che è lo stesso $\overline{\Phi} = \Phi\, \delta^m$ dove δ è il determ. delle sost. inversa con cui si passa da x, y a X, Y). Così, p. es. per la forma quadratica $ax^2 + 2bxy + cy^2$ il suo discr., come si verifica subito direttamente è invariante. — Covarianti df. analoga: ne è una forma in x, y che si deve riprodurre. ~~Se f, g sono forme, in x, y, il loro jaco~~. — Invarianti e covarianti simultanei: Se f, g sono forme di x, y, il loro jacobiano $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$ ne è un covariante simultaneo. Infatti vale

$$\begin{vmatrix} \alpha\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y}\gamma & \beta\frac{\partial f}{\partial X} + \delta\frac{\partial f}{\partial Y} \\ \alpha\frac{\partial g}{\partial X} + \frac{\partial g}{\partial Y}\gamma & \beta\frac{\partial g}{\partial X} + \delta\frac{\partial g}{\partial Y} \end{vmatrix} = (\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{\partial(f,g)}{\partial(X,Y)}.$$

1) citare per generalità elementari Enriques Chisini I, cap. I e poi Salmon. Alg. sup. i →

Dig. ... che per una data forma, il suo Hessiano Clebsch. Theorie der bin. alg. Form.; Faà di Bruno, T. d. f. bin.

5)

no è covariante: esso è definito con

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial(x,y)} = \Delta \frac{\partial}{\partial(x,y)}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \gamma\frac{\partial f}{\partial y}, \beta\frac{\partial f}{\partial x} + \delta\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha f_{xx} + \gamma f_{xy} & \alpha f_{xy} + \gamma f_{yy} \\ \beta f_{xx} + \delta f_{xy} & \beta f_{xy} + \delta f_{yy} \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta^2 \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

Così ancora si troverebbe che è covariante il jacobiano Q della forma e del suo He[ssiano]

Per una forma cubica, si giunge ad esso (e anche all'Hessiano) nel seguente modo. (Supposti A, B, C distinti, per limitarci al caso generale) Se A, B, C è la terna p. es. di pt. rappresentati dalla forma $= 0$, se p. es. A_1 è c. a. di A rispetto BC, le tre coppie $\begin{cases}A\\A_1\end{cases}$, $\begin{cases}B\\B_1\end{cases}$, $\begin{cases}C\\C_1\end{cases}$ app. a un' inv. ~~[illegible]~~ $\overline{\pi}$ e inoltre le

(5

due terne sono in relazione reciproca. [$ABCB_1 \overline{\pi}$ $ACBC_1$.·. inv. AA_1, BC, B_1C_1; il suo altro pt.-unito è A_1. ~~Perciò AA_1, BC, B_1C_1 sono coppie di inv.~~ Perciò intanto AA_1 sono c. a. anche rispetto a B_1C_1; e analog. Ora $AA_1BC \overline{\pi} A_1AB_1C_1$ ~~$AA_1 A_1C_1 B_1$~~, ne viene che esiste un' inv. AA_1, BB_1, CC_1]. Orbene, le due forme ~~che~~ cubiche che si annullano risp. in ABC, e in $A_1B_1C_1$ sono ciascuna il covariante Q dell'altra; esse hanno il medesimo Hessiano (a meno di fattore costante), che si annulla nei pt.-uniti di quell' inv. [Sia f la forma che si annulla in A, B, C. ~~Supposti distinti~~ Suppongo che il suo Hessiano si annulli p. es. nei due pt. fond.^{li} (col che si esclude il caso che l'Hessiano sia un quadrato perfetto, ~~che ciò che~~ ~~caso che ci esiguirefiamo~~ ~~prescindere~~ $\exists$: si potrebbe verificare che questo caso non si presenta se A, B, C sono distinti [p. es. supponendo che $x^2 = 0$ sia l'eq. dell'Hessiano; e osservand. che tutte le terne sono $\overline{\pi}$, c.a.]): la coppia Hessiana ha

b) allora è cioè $xy = 0$. Se la f è: $\alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma x y^2 + \delta y^3$
si ha l'Hessiana $= (\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) - (\beta x + \gamma y)^2$
però $\alpha\gamma - \beta^2 = \beta\delta - \gamma^2 = 0$. Ora $\alpha \neq 0$ (se no viene $\beta = 0$ e poi $\gamma = 0$, e si ha cubo perfetto); si ha $\beta = 0$ perchè se no $\gamma = \frac{\beta^2}{\alpha}$, $\delta = \frac{\gamma^2}{\beta} = \frac{\beta^3}{\alpha^2}$ e si ha cubo perfetto. Quindi anche $\gamma = 0$. La forma è dunque $\alpha x^3 + \beta y^3$. Quella che si annulla in A, B, C, è $\alpha x^3 - \beta y^3$.] Ora queste tre forme hanno lo stesso Hessiano, come subito si verifica, che appunto si rappresenta geom. in quella coppia di pt. uniti: di più ~~Jacob.~~

$$\frac{\partial}{\partial(x,y)}(\alpha x^3 + \beta y^3,\ xy) = \begin{vmatrix} 3\alpha x^2 & 3\beta y^2 \\ y & x \end{vmatrix} =$$

$= \alpha x^3 - \beta y^3$ c.d.d.]

Alla relazione fra una forma cubica e la sua Hessiana si può anche dare un'altra forma, introducendo il concetto di apolarità di due forme binarie. $a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \dots$ e $b_0 x^n + \binom{n}{1} b_1 x^{n-1} + \dots$ si dicono apolari quando è nullo il loro invariante bilineare

$a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} \dots$ (di cui effettivamente (7)

si potrebbe dimostrare che è un invariante, ciò che qui non faccio). – Si dice poi che una f_m e una f_n sono apolari, con $m > n$ se f_n è apolare a tutte le f_m contenute e ... le f_n ...

p. 6. = come si trova ant.: ~~sotto~~ la 1ª si annulla per $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{\alpha}}$. Si hanno così tre valori che sono quelli, e lo stesso moltiplicati per ω, ω^2 dove ω è una radice terza imag. dell'unità: si vede subito che i tre numeri con. arm. di ~~K, ...~~ come fa i tre $K, \omega K, \omega^2 K$ rispetto agli altri due è risp. $-K, -\omega K, -\omega^2 K$. perciò ...

Chiusale di queste si può dire che le terne di tg. di Darboux e di Segre costituiscono ciascuna il covariante cubico dell'altra: che le tg. principali costituiscono la comune coppia hessiana o apolare.

b) allora è es. $xy=0$. Se le $f_3 = \alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma x y^2 + \delta y^3$

si ha l'Hessiano $= (\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) - (\beta x + \gamma y)^2$

però $\alpha\gamma - \beta^2 = \beta\delta - \gamma^2 = 0$. Ora $\alpha \neq 0$ (perchè se no viene

$\beta = 0$ e poi $\gamma = 0$, e si ha cubo perfetto); invece $\beta = 0$

perchè se no $\gamma = \frac{\beta^2}{\alpha}$, $\delta = \frac{\gamma^2}{\beta} = \frac{\beta^3}{\alpha^2}$ e si ha cubo

perfet

$\alpha x^3 +$

è αx

lo stesso

si suppo

~~facob~~.

∂_1

$= \alpha x^3$

Alla relazione fra una forma cubica e la sua Hessiana si può anche dare un'altra forma, introducendo il concetto di apolarità di due forme binarie. $a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \dots$ e $b_0 x^n + \binom{n}{1} b_1 x^{n-1} + \dots$ si dicono apolari quando è nullo il loro invariante bilineare

$a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1}$ ... (di cui effettivamente (7)

si potrebbe dimostrare che è un invariante, ciò che qui non faccio). Si dice poi che una f_m e una f_n sono apolari, con $m > n$ se f_m è apolare a tutte le f_m contenenti a fattore la f_n.

Ora è facile vedere che ~~la~~ ogni forma cubica ammette come f_2 apolare la sua Hessiana, e [1]

1) per es. per $n = 2$ viene la armonicità

una altra. Se invero si suppone ridotta la f_3 a $\alpha x^3 + \beta y^3$ come sopra, è chiaro che (applicando le def.) che essa è apolare ~~tutte e 2~~ a xy e una altra forma quadratica. Si può dunque dire invece di "hessiana di f_3" le "f_2 apolari di f_3".

Chiusale di queste si può dire che le terne di tg. di Darboux e di Segre costituiscono ciascuna il covariante cubico dell'altra; che le tg. principali costituiscono la comune coppia hessiana o apolare.

8)

: notizie §21 [...] (Stuccio) Italiano

Digressione sulle trasf. crem. nel piano. – ~~Per~~

Come le tg. di Darboux generalizzano le tg. principali; ora ~~ritorniamo poi le teorie di G. di Darboux e dopo le~~ accenneremo estensione di tg. coniugate (in relazione con quelle) ~~un altro punto di vista facciamo digressione~~ ....

Darboux e Segre. Premetto digressione ... O

~~Tra alte ogni~~ due pti. spaziati ogni corrisp. alg.

biunivoc. è proiettiva. – Tra piani non ci

più così: vi sono corrisp. alg. e puntualmente biunivoc.

non proiettive (ex^{plo} inversione risp. cerchio,

dove a rette (in un sistema) corrispondono cerchi nell'altro

sistema). Esse si chiamano biraz. e più

precisamente cremoniane. Le formule con

cui si passa da un piano ($\cancel{y_1 y_2 y_3}$ $x_1 x_2 x_3$) all'altro

$x_1 x_2 x_3$) sono del tipo (1) $y_1 : y_2 : y_3 = f(x) : g(x) : h(x)$

cioè mediante forme non lineari ma forme di

grado n giudicate >1. Esse non sono però arbitrarie

perchè le (1) devono essere risolubili e potersi

esprimere le x :: a forme nelle y (2) $x_1 : x_2 : x_3 =$

$F(y) : \varphi(y) : H(y)$ [dove anche si vedrà i

2 membri sono ancora di grado n]. Come può essere

19

possibile ciò? Frattanto se f, g, h sono generiche si può solo dire che: a ogni punto x corrisp. un punto y; che alle rette del piano y corrispondono curve della rete

$a f + b g + c h = 0$ (3)

anzi si osservi che tale rete risulta π al piano rigato, ciò che servirà in seguito. A un punto y centro di un fascio di rette, corrisp. perciò il gruppo base per un fascio della rete.

O su ~~tr~~/. biraz. o cremoniane fra piani: (corrisp.)

cioè corrisp. tali che ~~a ogni~~ pt. le coord. pt. cl. pur. non omog. ~~...~~ di $P(x, y)$ si esprimono con funz. raz. di quelle di $P'(x'y')$ e viceversa. ~~: ...~~ ~~...~~

~~...~~ Sono dunque generalmente biunivoche, ma non di una proiettiva (la differenza che fra forme di 1° spec.) Ex^{plo} inversione risp. a cerchio raggio R

$x' = \frac{R^2 x}{x^2+y^2}$ $y' = \frac{R^2 y}{x^2+y^2}$ (viceversa (pure è inv.) $x = R^2 x'/(x'^2+y'^2)$, etc.

[rettificando ~~...~~, risolvendo numeri. (x, y) ~~...~~

[sia $(x'^2+y'^2)(x^2+y^2) = R^4$; e dunque $x = x' \frac{x^2+y^2}{R^2} = R^2 x'/(x'^2+y'^2)$]: in quanto a rette corrisp. cerchi per O (verif.)

Passando a coord. omog. si verifica facilmente che

~~...~~ si viene scrivendo che le curve generiche della rete (le quali vengono ad essere poste in corrisp. biraz. con le rette del piano y) sono razionali;

un

fn

unt

x

e

Ha

ndo

no

on

vie

on

ogr

18) : notizie §21 [imposs. ... (Stud.) ...] "Pitturn"

<u>Digressione sulle trasf. crem. nel piano</u>: ~~Per~~

Come le tg. di Darboux generalizzano le tg. principali, così ora ~~ritorniamo poi le ... di G. di Darboux e dipende~~ accenneremo estensione di tg. coniugate (in relazione con quelle) un altro punto di vista facciamo digressione.... Durante e Segre. Premetto digressione.... ~~.....~~

~~Tra tutte ogni~~ due ptgziali ogni corrisp. alg.

tg ... ...stante — Tra piani con ci

~~.....~~ ~~Fr~~ p. 8. A tutto premettere che una <u>rete</u> di C^n ... $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ si può riferire π alle rette ~~...~~ di π' (λ_i) dove λ_i sono coord. di rette ponendo $\lambda_i = \Sigma\, a_{ik}\, u_k$

allora a curve di fasci corrisp. rette a fasci; e si potrebbe dunque ... p. es. si pone $\lambda_i = u_i$

... chiarita anche la differenza fra le trasf. <u>crem.</u> - birazionali in tutto il piano — e quelle birazionali fra due curve (p. es. la $x' = x$, $y' = y^2$ che è birazionale sulla $x^2 + y^2 - 1 = 0$ mutata $x = x'$

$$y = \frac{y'}{1 - x'^2}$$). cioè — chiamando grado di una rete il n.° di intersez. di due sue curve generiche fuori dei pt. base — le reti sono di grado uno o omaloidiche

$F(y) = \varphi(y) \cdot F_1(y)$ [dove ... curve di grado n.] Come può ...

(19

possibile ciò? Frattanto se f, g, h sono generiche si può solo dire che: a ogni punto x corrisp. un punto y sì che alle rette del piano y corrispondono curve della rete

$$af + bg + ch = 0 \qquad (3)$$

anzi si osservi che tale rete risulta π al piano rigato, ciò che servirà in seguito. A un punto y — centro di un fascio di rette, corrisp. pertanto il gruppo base per un fascio della rete cioè un gruppo di n^2 punti. Per ottenere una trasformazione cremoniana bisogna fare in modo che al variare di y, il gruppo dei punti base variabili che gli corrisp. ~~nel piano~~ x si riduca a uno solo e che perciò di quei punti base $n^2 - 1$ siano fissi per tutte le curve della rete. Occorre dunque fare in modo che la rete (3) abbia $n^2 - 1$ punti base.

~~Viceversa se questa condizione è soddisfatta riferendo proiettivamente le sue curve alle rette di un piano rigato $\mathfrak{Y}$ e facendo corrispondere a ogni punto y il residuo punto base ecc. si ottiene una trasformazione cremoniana~~ birazionale fra due piani punteggiati V. p. 17.

V. p. 17

Il problema è così ricondotto a quello delle reti nelle prec. condiz. cioè <u>omaloidiche</u>. (Partendo da una dimostr. rappr. a piani rigati ...)

Se la rete possiede h ~~...~~ punti base con le rispett. molt. $z_1, \dots z_h$ si dovrà dunque avere

$$n^2 - \sum z_i^2 = 1 \qquad 4$$

Un'altra condizione devono soddisfare i numeri z_i: essa si ottiene scrivendo che le curve generiche della rete (le quali vengono ad essere poste in corrisp. biraz. con le rette del piano y) sono razionali, Per scriverla, si osservi che i punti multipli di una tal curva cadono tutti nei punti base perchè, se la generica fra esse avesse un punto doppio fuori di quelli, ogni altra curva per esso verrebbe a incontrarla in due punti almeno fuori dei punti-base. ~~Perciò~~ e quella sarebbe riducibile. ~~[illegible]~~ e si potrebbe dimostr. che tal caso si può escludere.

$$(5) \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \Sigma \frac{r_i(r_i-1)}{2} = 0$$

cioè

$$n(n-3) + 2 - \Sigma r_i(r_i-1) = 0$$

o ancora

$$(6) \quad 3n-3 = \Sigma r_i$$

(le parti variabili per essendo una rete aven più di un pt. a comune) 6

Viceversa si potrebbe dimostrare che le relazioni 4 e 6 caratter. le reti omaloidiche nel senso che se le curve che si ottengono corrisp. ad esse sono gen. irriducibili formano una rete omaloidica. (se riducibili, può non essere rete, o [illegible])

Come primo esempio attiamo il caso $n=2$. allora cfr. la (4) si ha una rete di coniche con tre punti base - e onde la [illegible] risulta [illegible]. Si hanno così le trasf. quadratiche (c. Enriques vol. I libro I cap. II e Bertini) p. es.

$$y_1 : y_2 : y_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2 \quad (7)$$

(Mus. i punti base e invertibile in

~~$y_1 : y_2 : y_3 = x$~~

$$(8) \quad x_1 : x_2 : x_3 = y_1 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2$$

[~~come es. di esse le inversioni~~].

Altri es.^{mi} trasf. di Jonquières: 1 pt. $(n-1)^{plo}$ e $2n-2$ pt. sempl. (casi $n=2$, $n=3$).

Oss.^{ni}: 2° I pt. fondamentali. - Le (11) vengono a mancare di senso per x pt. base o fondamentali della rete. Essi non hanno dunque, per ora, corrispondenti. Li vengono a avere per continuità facendo tendere nel piano (x) un pt. a x e vedendo che cosa avviene per y. P. es. per la (7) in $A_1 (1, 0, 0)$ considero come limite di $(1, m, n)$ dove m e n tendono a zero, cioè $mn : n : m$, cioè $m : 1 : \frac{m}{n}$ che per $m \to 0$ in [illegible] $0 : 1 : t$ con t indeterminato. Viene il fatto nelle relaz. limite [illegible] si enuncia talora dicendo che dunque tutta la retta $y_1 = 0$. Così, in generale, si ai pt. di π inf. vicini a A_1 corrispondono i pt. di $y_1 = 0$ terra che (in generale: nascerebbero divenute per le condiz. valide [illegible] per pt. r^{pli} ambedue oltre r^{a} [illegible] multipl. inf. vicini), a un pt. base r^{plo} corrisponde una curva fondamentale d'ordine r

1° Si è detto che F, G, H sono curve di ordine n: mentre f, g, h sono d'ordine n, e ∞ una retta r di (x) e a s di (y) corrispondono rispettivamente $C^{\bar n}$, e $C^{\bar n}$, si corrisp. le interz. di $r\, C^{\bar n}$. $s\, C^{\bar n}$ e così $n = \bar n$. n si chiama l'ordine della trasf. (per le quadratiche $n = 2$).

3° Ancora sulle trasf. quadratiche - Vi sono 3 pt. S ecc. se sono distinti assunto come Δ fond.... e le $\lambda_1 x_2 x_3 + \dots = 0$; però si ottiene (ex. le inversioni) trasf. di sopra. - Inoltre che alle singole rette rispondono le singole rette per A_1'. - che alle A_1 come s_1^{pla} etc. corrisponde linee di ~~molt.~~ ordine $2n - s_1 - s_2 - s_3$ [si vede osservando che alle sue interz. variabili con retta corrispondono in π le interz. fuori di $A_1 A_2 A_3$ di C^n con conica circoscritte... ; anche analitic. si ha da $\varphi_n(x_1, x_2, x_3) = \varphi_n(y_2 y_3, \dots) = 0$ ma se φ_n ha pt.

s_1^{plo} in A_1, consiste le sue eq. è

$x_1^{n-s}\, \varphi_s(x_2 x_3) + x_1^{n-s-1}\, \varphi_2(x_2 x_3) + \dots = 0$

Questa diventa

$y_2^{n-s} y_3^{n-s}\, \varphi_s(y_1 y_3, y_1 y_2) + \dots = 0$

e si stacca y_1^{s}]. Tale $C^{2n - s_1 - s_2 - s_3}$ p.n. ha in A_1' molt. $n - s_2 - s_3$, come si vede ~~[illegible]~~ chiamando x le molt. cercate e osservando che $2n - s_1 - s_2 - s_3 - x = n - s_1$, da cui $x = \dots$; ~~anche~~ e si conferma anche osservando che agli a ciascuna delle $n - s_2 - s_3$ interz. di C^n con $A_2 A_3$ corrispondono altrettanti passaggi di C' per A_1'. Anzi, di qui si vede che alle possibili coincidenze fra quelle interz. corrispondono id. fra le $n - s_2 - s_3$ tg. di C' in A_1' (e analog. scambiando i due piani): così se 2 distinte, unite, se comuni, cuspide, etc. - Ex. gr.

C^2 per $A_1 A_2 A_3$	retta
A_1, A_2	C^2 per $A_1' A_2'$
A_1	C^3 con A_1' doppio, $A_2' A_3'$ semplici
C^3 con $A_1'^2 A_2' A_3'$	C^4 con $A_1' A_2' A_3'$ doppi
	....

1° Si è detto che F, G, H sono anche d'ordine n: invece f, g, h sono d'ordine n, e n rettae r di (x) e s di (y) corrispondono rispettivamente $C^{\bar n}$, e $C^{\bar{\bar n}}$, si corrisp. le interz. di $r\,C^{n}$, $s\,C^{\bar n}$ e mi $n = \bar n$.

n si chiama *l'ordine della trasf.* (per le quadratiche $n = 2$).

3° Ancora sulle *trasf. quadratiche* – Vi sono 3 pt. fissi: se sono distinti assunto come Δ fond...., la rete di cambio è le $\lambda_1 x_2 x_3 + \dots = 0$; perciò si ottiene proprio le trasf. di sopra. – Sicché alle singole rette per A_1 corrispondono le singole rette per A_1'. – A una C^n che abbia A_1 come s_1^{pla} etc. corrisponde linea di ~~molt.~~ ordine $2n - s_1 - s_2 - s_3$ [si vede osservando che alle sue interz. variabili con retta corrispondono in π le interz. fuori di $A_1 A_2 A_3$ di C^n con conica circoscritta.... ; anche analitic. si ha da $\varphi_n(x_1, x_2, x_3) = 0$ $\varphi_n(y_2 y_3, \dots) = 0$ ma se φ_n ha pt.

s_1^{plo} in A_1 ossia che le sue eq. è

$$x_1^{n-s}\,\varphi_s(x_2 x_3) + x_1^{n-s-1}\,\varphi_{s+1}(x_2 x_3) + \dots = 0$$

Questa diventa

$$y_2^{n-s}\, y_3^{n-s}\,\varphi_s(y_1 y_3, y_1 y_2) + \dots = 0$$

e si stacca y_1^{s}]. Tale $C'^{\,2n-s_1-s_2-s_3}$ p.n. ha in A_1' molt. $n - s_2 - s_3$, come si vede ~~subito~~ chiamando x le molt. cercata e osservando che $2n - s_1 - s_2 - s_3 - x$: $\alpha = \dots$; ~~anche~~ e si conferma anche .... a ciascuna delle $n - s_2 - s_3$ interz. A_1 corrispondono altrettanti passaggi di Anzi, di qui si vede che alle possibili coincid. .... r per $\dots$ alle interz. corrispondono ivi fa le $n - s_2 - s_3$ tg. di C' in A_1' (e analog. scambiando i due piani): cioè se 2 distinte, nodo, se coincidenti, cuspide. etc. – Ex.^{pli}

C^2 per $A_1 A_2 A_3$	retta
$A_1 A_2$	C^2 per $A_1' A_2'$
A_1	C^3 con A_1' doppio, $A_2' A_3'$ semplici
C^3 con $A_1'^2 A_2' A_3'$	C^5 con $A_1' A_2' A_3'$ doppi
	....

C^4 con $A_1' \; A_2' \; A_3' \ldots$

con $A_1'' \; A_2'' \ldots$

e così via

.- Se poi i pt. base non sono tutti distinti: si avrà rete omaloid. di coniche tg. in un pt. e passanti per un altro ($y_1 : y_2 : y_3 = x_1 x_3 : x_3 x_1 : x_2^2$ che ha l'inversa in $x_1 : x_2 : x_3 = y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1^2$); o osculatrici in un punto.

4°.- Estensione allo spazio.- Il concetto di trasf. crem. si estende allo spazio: ex.to la trasf. cubica $y_1 : \ldots : y_4 = x_2 x_3 x_4 : \ldots$. Si ha nel 1° spazio un sist. lin. ∞^3 di F^3 con 4 pt. doppi.

5°.- Le relazioni (5) e (6) si sono scritte nell'ipotesi che i pt. base siano tutti distinti (non vene ...... inf. vicini), vale a dire che per ognun di essi di molt. r_i ne assorba r_i^2 intersez. - Ma il concetto di rete omalo. dice vale anche se ciò non avviene e così per la trasf. cremoniana: ex.no di C^n già citato. Un altro esempio: che interviene poi. C^3 con

un pt. doppio così fatto che assorba 8 intersez. (invece di 4, come in generale). ~~Bisogna~~ Basta fare in modo che le C^3 passino per quel pt. con le stesse tg.ti (allora quel pt. assorbe almeno 6 intersez.) ~~...~~ e poi imporre a quel ~~...~~ ulteriore particolarità in modo che se ne ass. ... di 6 e precisamente 8. Ciò avviene per es. te individuate da $x^2 y$, xy^2, $xy + \varphi_3 (x . y)$ (generica) si viene ... di C^3 per O con le stesse due tg.: un esame più accurato mostrerebbe che per due di una C^3 delle rete uno ramo dell'una osculi in O un ramo dell'altra: il che spiega perchè quei pt. assorbiti siano 8. Ma ce ne vogliamo dare ragione direttamente, approfittando del fatto qui già invocato che un pt. ~~doppio~~ r-plo per due C^n, con ~~molte~~ ~~le stesse~~ alcune tangenti comuni, assorbe almeno r^2 intersez. + tante quante sono le tg. comuni (v. complementi). Passando a coord. ... $x_1 x_2 x_3$

C^4 con $A_1' A_2'^2 A_3'^2 \ldots$

con $A_1'^2 A_2'^2 \ldots$

e così via

.– Se poi i pt. base non sono tutti distinti: siano rette omaloid. di cui le tg. in un pt. e passanti per un altro ($y_1 : y_2 : y_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_2^2$ ~~$x_2 x_3 : x_2^2 : x_1 x_3$~~ che si invertono in $x_1 : x_2 : x_3 = y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1^2$); i omaloidica in un punto

4°.- Estensione allo spazio.- Il concetto di cremon. si estende allo spazio: es.[te] le t. $y_1 : \ldots : y_4 = x_2 x_3 x_4 : \ldots$. Si ha nel 2° sp. sist. lin. ∞^3 di F^3 con 4 pt. doppi.

5°.- Le relazioni (4) e (6) si sono scritte nell'ipotesi che i pt. base siano tutti distinti (non vi siano inf. vicini), vale a dire che per ognun di essi di molt. r_i uno assorbe r_i^2 intersez. - Ma il concetto di rete omalo. dice vale anche se ciò non avviene e così per le trasf. cremoniane: es.[io] di C^2 già citato. Un altro esempio: che intervenir poi C^3 con

un pt. doppio così fatto che assorba 8 intersez. (invece di 4, come in generale). ~~Bisogna~~ Basta fare in modo che le C^3 passino per quel pt. con le stesse tg.[ti] (allora quel pt. assorbe almeno 6 intersez.) ~~ossia più che 2 rami abbiano un contatto di 2° o~~ ~~Dire. ciò avviene per le C^3~~ e poi imporre qual: che ulteriore particolarità in modo che se ne ass: siano più di 6 e precisamente 8. Ciò avviene per es. per le reti individuate da x^2y, xy^2, $xy + \varphi_3(x, y)$ (generica) si tratta evidentemente di C^3 per O con le stesse due tg.: un esame più accurato mostrerebbe che per due di queste C^3 delle rete ciascun ramo dell'una osculi in O un ramo dell'altra: il che spiega perchè qui i pt. assorbiti siano 8. Ma ce ne spieghiamo d'una ragione direttamente, approfittando del fatto quivi già invocato che un pt. ~~doppio~~ r^{plo} per due C^n, con ~~le stesse~~ tangenti comuni, assorbe almeno r^2 intersez. + tante quante sono le tg. comuni (v. complementi). Passando a coord. Longueur X, Y, Z

10) e vi quindi due che due curve generiche

(1) A_2' $\lambda_1 x_1^2 x_2 + \lambda_2 x_1 x_2^2 + \lambda_3 [x_1 x_2 x_3 + \psi(x_1, x_2)] = 0$

fuori di A_1 hanno 1 sola intersez. Faccio trasf. quadratica

$y_1 : y_2 : y_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2$

e (1) diventa, salvo fattore y_3^2

$$\lambda_1 y_1 y_2^2 y_3 + \lambda_2 y_1^2 y_2 y_3 + \lambda_3 [y_1^2 y_2^2 + y_3 \psi(y_1, y_2)] = 0 \quad (2)$$

e così quante sono le intersez. di due curve (2) fuori oltre (oltre a $y_3 = 0$ che corrisponde ai passaggi delle C^3 per A_1). Inoltre devo anche trascurare le intersez. in A_1' A_2' A_3' che provengono da pt. generalmente diversi di $A_2 A_3$, etc. (occorrerebbe in qualche generalmente un esame più minuto, ma va bene). Ora in A_1' ho pt. semplice con tg fissa; e curve tutte osculatrici*) almeno 3 intersez.; id. in A_2'; in A_3' pt. triplo ~~...~~ fisso almeno 9 + ~~...~~: dunque le intersez. di due (2) nei pt. A_1' A_2' A_3' sono almeno 15: dunque le intersez. di due (2) che ci interessano non più di uno. Ciò vale dunque quando per due (1). Dunque la rete (1) è al massimo di grado uno. Anzi è proprio

di grado uno: se no sarebbe di grado zero. Ora una rete di grado zero è tutta costituita di curve riducibili (perchè preso un pt. generico su una di una il fascio da esso determinato ha altri n^2-1 pt. base ... $XY + \psi = 0$ di ... che ... una ... le ... generiche ... 6°. Esso F_2 qualunque ... remmo ... tiche ... ne ... ne ...

*) Infatti p.es. in A_1' passo a coord. non. provvisorie X, Y dividendo per y_2 viene

$$\lambda_1 XY + \lambda_2 X^2 Y + \lambda_3 [X^2 + Y \psi(X, 1)] = 0$$

posto $\psi(X, 1) = \varphi(X)$ viene

$$Y = -\frac{\lambda_3 X^2}{\lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 \varphi(X)}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-2\lambda_3 X}{\vdots} + \frac{\lambda_3 X^2 (\lambda_1 + 2\lambda_2 X + \lambda_3 \varphi')}{(\vdots)^2}$$

e all'origine

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{-2\lambda_3}{\lambda_3 \varphi(0)} = \frac{-2}{\varphi(0)}$$

~~e viene~~ cioè il valore è lo stesso per qualsiasi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

e per fasci corrispondenti ai pt. di questi corrispondenti di fasci, i centri variabili dei fasci corrisp. [Invece si può fare in modo scegliendo opportunamente le coord. ... che la corrisp. sia $u_i :: \lambda_i$; e allora vengono corrisp. due pt. tali che le eq. in λ $\sum \lambda_i y_i = 0$ e $\sum \lambda_i \xi_i = 0$ abbiano le stesse soluz. cioè c.s. $y_1 : y_2 : y_3 = \xi : \eta : \zeta$]

16) e vi gira due due curve generiche

(1) A_2: $\lambda_1 x_1^2 x_2 + \lambda_2 x_1 x_2^2 + \lambda_3 [x_1 x_2 x_3 + \varphi(x_1, x_2)] = 0$

passi d. A_1 hanno 1 sola intersez. Faccio trasf. quadratica

$y_1 : y_2 : y_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2$

e (1) diven[illegible]

$\lambda_1 y_1 y_2 y_3$

e cuba [illegible]

ottie[illegible] (o

delle C^3

le intersez.

geriancln[illegible]

qual ge[illegible]

bunu). [illegible]

intersez.;

alcun [illegible]

pt. $A_1' A_2' A_3'$ sono almeno 15: dunque le intersez. di due (2) che ci interessano non più di uno. Ciò vale dunque anche per due (1). Dunque la rete (1) è al massimo di grado uno. Anzi è proprio

di grado uno: se no sarebbe di grado zero. Ora una rete di grado zero è tutta costituita di curve riducibili (perchè preso un pt. generico per una d'una il fascio da esso determinato ha altri n^2-1 pt. base, cioè ..); invece per la $Xy + \varphi = 0$ non è riducibile. Dunque la (1) è proprio di grado uno. — Uno studio accurato delle accidentalità molt. inf. vicine — che qui non possiamo studiare — mostrerebbe che la trasf. definita dalla rete (1) è di Jonquières coi 4 pt. spl. inf. vicini al doppio. | 6° Esta F qualunque

v. a p. 9. — Perciò si ottengono (tutte le) corrisp. cremon. partendo da ~~[illegible]~~ f, g, h, tali che la loro rete sia omaloid. e poi prendo le (1). Si può anche dire: partendo da rete omaloid. riferita a piano rigato e poi facendo corrispondere ai pt. di questo curve centri di fasci, i centri variabili dei fasci corrisp. [Invero si può far in modo, scegliendo opportunamente le coord. [illegible], che la corrisp. sia $\lambda_i : \lambda_i :: \lambda_i$; e allora vengono corrisp. due pt. tali che le eq. in λ $\Sigma \lambda_i y_i = 0$ e $\Sigma \lambda_i f_i = 0$ abbiano le stesse soluz. cioè c.s. $y_1 : y_2 : y_3 = f : g : h$]

§22. La corrispondenza di Segre.

La teoria delle tangenti coniugate consisteva essenzialmente in ciò: preso P generico su F si ~~studiano~~ prendevano ~~i pt. di~~ i vari pt. P_1 di F inf. vicini a P e le intersezioni dei loro piani tg. col piano π tg. in P: ~~...~~ queste rette intersezioni erano le tg. coniugate della PP_1. — La teoria si può estendere così (Segre; Complem. alla teoria delle tg. coniugate di una sup. Rend. Lincei 1908). — Fissato sempre su F P col relativo π, considero (invece che uno) due ~~pt. inf. vicini~~ successivi pt. inf. vicini a P (uno del 1° e uno del 2° ordine: il concetto sarà tra poco reso rigoroso) P_1, e P_2: allora i tre piani tg. π, π_1, π_2 hanno in comune un pt. ~~su π~~ M su π. Allora si può (analog. a sopra) studiare la corrispondenza fra il piano $\mu \equiv PP_1P_2$ variabile intorno a P (descrive cioè una stella) e il punto $M \equiv \pi\pi_1\pi_2$ variabile nel piano π. Troviamo una corrispondenza cremoniana del terz'ordine: proprio del tipo considerato nell'oss. 5ª.

Il concetto sopra esposto coi pt. inf. vicini si precisa così: ~~Preso da piano ... per~~ Considero curva γ di F passante per (regolarmente) per P, ~~e considero~~ e prendo su essa i pt. P_1 e P_2 di sopra cioè) chiamo μ il suo piano osculatore in P; poi considero i vari piani tg. a F nei singoli pt. della linea γ e (le interseg. di 3 inf. vicini) cioè) i loro pt. 2° caratteristici; il pt. 2° caratteristico di π è proprio il pt. M.

Suppongo per semplicità di avere sup. analitica, e punto P in un pt. non parabolico cioè (nel campo complesso) ho in P due tg. principali distinte, ~~Assunte come assi x e y per terne cartesiane~~ che con trasf. proiettiva faccio (se del caso) diventar reali; crediamo ridurmi sempre a questo caso. Prendo tali come assi cartesiani x e y, e moltiplicando la z per ~~...~~

29) veniente astante assunno (seppure che si ripet.)
l'eq. di F sotto la forma

$z = xy + \varphi_3(x,y) + \dots$

essendo P l'origine e π il piano $z=0$.

Nel seguito accanto alle coord. cart. non omog. d. pt. $(x y z)$ si assumono anche le omog. x_i $(x y z 1)$ e come coord. ξ_i omog. di piano si assumeranno i coeff. di $\Sigma a_i x_i = 0$: ove occorra fissare il fattore di proporzionalità si assume $\xi_3 = -1$ cosicché il piano tg. a (1) in $(x y z)$ ha le coordinate $(p, q, -1, z - px - qy)$.

Supponiamo un momento di usare coord. curv. u, v qualunque. La γ si può avere un'equazione $v = v(u)$ (tale che passi per P): pongo $v' = \frac{dv}{du}$ e $v'' = \frac{d^2v}{du^2}$ in P. Allora il piano osculatore in P è $x, \frac{dx}{du}, \frac{d^2x}{du^2}$ cioè il piano che ha per coord. omog. i minori estratti dalla matrice

$$\left\| \begin{matrix} x \\ x_u + x_v v' \\ x_v v'' + x_{uu} + 2 x_{uv} v' + x_{vv} v'^2 \end{matrix} \right\|$$

(con segni alternati). Perciò le singole coord. di μ sono date (ponendo qui indici alle ξ, e alle $P^{(i)} \dots R^{(i)}$) da

(2) $\mu :: h v'' \xi + P^{(1)} + \left[2 Q^{(1)} + P^{(2)}\right] v' + \left(R^{(1)} + 2 Q^{(2)}\right) v'^2 + R^{(2)} v'^3$

dove $h = h(u,v)$ è un fattore di proporzionalità e che

$P^{(1)} :: \begin{vmatrix} x \\ x_u \\ x_{uu} \end{vmatrix}$ $Q^{(1)} :: \begin{vmatrix} x \\ x_u \\ x_{uv} \end{vmatrix}$ $R^{(1)} :: \begin{vmatrix} x \\ x_u \\ x_{vv} \end{vmatrix}$ ecc. (con segni alterni).

In modo del tutto analogo (dualmente) risulta che le coord. di M sono date (indicandole con m) da

(3) $m :: K v'' x + \pi^{(1)} + \left[2 \chi^{(1)} + \pi^{(2)}\right] v' + \left[\rho^{(1)} + 2 \chi^{(2)}\right] v'^2 + \rho^{(2)} v'^3$.

dove K è c.s. e con $\pi^{(i)}$, etc.

Ora assumiamo le x e le ξ come si è detto sopra. ~~Si ha la seguente~~ Percalcolare la (2) si ha la seguente tabella di valori

21)

$i =$	1,	2.	3,	4.
ζ	0	0	-1	0
P''	0	0	0	0
Q'''	0	-1	0	0
R'''	0	0	0	0
$P^{(2)}$	0	0	0	0
$Q^{(2)}$	1	0	0	0
$R^{(2)}$	0	1	0	0

~~Tab~~

$i =$	1.	2.	3.	4
x	0	0	0	1
x_u	1	0	0	.
x_v	0	1	0	.
x_{uu}	.	.	$r:0$	.
x_{uv}	.	.	$s:1$	.
x_{vv}	.	.	$t:0$	.

e però

Perciò le (2) porgono oltre a ($\mu_4 = 0$ come era da aspettarsi)

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = 2v'^2 : -2v' : hv'' \qquad (4)$$

Per calcolare le (3) ~~parto~~ calcolo le tabelle

$i =$	1	2	3	4.
$\zeta =$	p	q	-1	$z-px-qy$.
z_u	r	s	.	$-rx-sy$
z_v	s	t	.	$-sx-ty$
z_{uu}	z_{xxx}	z_{xxy}	.	$-r \ldots$ (termini nulli all'origine)
z_{uv}	z_{xxy}	z_{xyy}	.	$-s \ldots$
z_{vv}	z_{xyy}	z_{yyy}	.	$-t \ldots$

dove $z_{xxx} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ etc. e però all'origine

$$\varphi_0 = \frac{1}{6}(ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + 3dy^3.)$$

z_{xxx}, etc $= a, b, c, d$.

cioè all'origine

$i:$	1	2	3	4
z	0	0	-1	0
z_u	0	1	0	0
z_v	1	0	0	0
z_{uu}	a	b	0	0
z_{uv}	b	c	0	-1
z_{vv}	c	d	0	0

(2) Fuischeli

=	1	2	0	4
$''''$	0	0	0	$-a$
$''''$	-1	0	0	$-b$
$''''$	0	0	0	$-c$
$''''$	0	0	0	b
$''''$	0	1	0	c
$''''$	0	0	0	d
x	0	0	0	1

...ricchi oltre a $m_3 = 0$ viene

$$m_1 : m_2 : m_4 = -2v' : 2v'^2 : \cancel{K}$$
$$: Kv'' - a - bv' + cv'^2 + dv'^3 . \quad (5)$$

...i corrispondono un piano μ dato dalle (4) e un pt. M dato dalle (5) corrispondenti agli stessi v' v''. Ora dalle (4) si ha [far mutare le incognite di risolvere coi 2 i mutri omogenei]

$$v' = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \; ; \; \frac{hv''}{2v'} = \frac{\mu_3}{\mu_2} \text{ cioè } v'' = -\frac{2}{h} \frac{\mu_1 \mu_3}{\mu_2^2}$$

e perciò

$$m_1 : m_2 : m_4 = 2\mu_1\mu_2^2 : 2\mu_1^2\mu_2 : -2\frac{K}{h}\mu_1\mu_2\mu_3 + (-a\mu_2^3 + b\mu_1\mu_2^2 + c\mu_1^2\mu_2 - d\mu_1^3)$$

cioè si ha una rete omaloidica come al § precedente. alla fine, e tutto è dimostrato.

Potrei far l'inverso (partendo dalla (5)): allora si vedrebbe che le p.es. le tg. fisse alle C^3 in π sono le tg. principali.

~~§ 23. Corrispondenza piana~~ Estensione del

Segre ha condotta più avanti la ricerca: egli ha mostrato che, per P generico su F (non sviluppabile) avviene questo: vi sono ∞^1 piani μ per P che offrono la particolarità che presi su ~~una~~ di essi una due ma tre pt. succ. di F risp. vicini a P, $P_1 P_2, P_3$, i quattro piani tg. $\pi_1, .. \pi_3$ concorrono in un pt. M di π: si hanno così ∞^1 pt. M del piano π. Il loro luogo è C^6 che ha in P un pt. quintuplo: le tg. sono le due principali e le tre tg. di Segre. Darboux fa vedere un cono di 6ª classe che ha π come piano tg. 5.^plo, ~~certo~~ e lo tocca lungo le due tg. principali, e le tre di Darboux.

In tal modo le teorie del punto § vien collegari con quelle delle già viste tg. di Darboux e di Segre

§ 23. Estensione del risultato precedente a corrispondenze puntuali qualunque fra due superficie. Sistemi associati

Il risultato trovato riguarda in sostanza la totalità degli ∞^2 pt. P di F e quella degli ∞^2 piani tg. di F π, tra cui si ha poste la corrispondenza che a ogni P fa corrispondere il relativo piano tg. π. Sostituiamo per ora a la seconda ∞^2 un altro ∞^2 di pt, sup. F' in corrisp. biunivoca ptuale con F: troviamo un risultato ~~da~~ in cui si ingloba il precedente.

~~Anzitutto: fissiamo~~ premettiamo ciò: 2 pt. corrispondenti P e P': ~~A ogni pt. P_1 di F inf. vicino del 1° ordine a P corrisponde P_1'...; se a ogni retta $t = PP_1$ del fascio $P\pi$ facciamo corrispondere la $t' = P'P_1'$ in $P'\pi'$ dico che la corrispondenza fra t e t' è proiettiva. Ciò~~

a curve di F tg. in P corrispondono, come ora si vedrà, ~~biunivoc.~~ curve di F' tg. in P', cosicché viene una corrisp. biunivoca fra le tg. in P e le tg. in P': dico che è proiettiva [Sia F luogo di P: $x(u,v)$, e F' luogo di P': $y(u,v)$ e sia la corrisp. quella tg. che si possono chiamare corrisp. nella corrisp. fra F e F' ottenuta cogli stessi valori dei parametri. Sia $v = v(u)$ linea γ su F per P e γ' su F' per P'. Le due tg in P è le congiunte di x con $x_u + v' x_v$, dove $v' = \frac{dv}{du}$ in P. Analog. la tg. a γ' in P' è la y. $y_u + v' y_v$. Ho su P ~~cioè~~ le ultime rette tg. per $v = v(u)$ diverse con gli stessi valori per v' in P; id. su F'..... Quanto alla proiettività basta osservare che v' è - come già sappiamo - coord. π della retta tg. in P e id. in P']

In modo più intuitivo si può dire che ai P_1 di F inf. vicini del 1° ordine a P corrisp. P_1'...; e la corrisp fra $t = PP_1$ e $t' = P'P_1'$ è π; cioè che ogni corrisp. puntuale fra F e F' nell'intorno del 1° ordine di pt. corrisp. opera proiettivamente.

26)

Prima di entrare nella vostra questione che consisterà nello studio della corrisp. e del suo modo di operare nell'int. di 2° ordine di P e P', notiamo (considerando il solo caso interessante di sup. non sviluppabili) qualche conseguenza. Anzitutto dico che (nel campo complesso ~~...~~ ~~analitico~~) o tutti i sist. doppi ~~ort.~~ di F e F' si corrispondono; oppure ~~...~~ vi è uno e un ~~...~~ solo doppio sist. con. su F, a cui corrisponde id. su F'. [Invero, ~~nelle π ...~~ ~~...~~ se P e P' non sono paraboliche, nelle π fra ~~P~~ i fasci Pπ e P'π' o si corrispondono le tg. principali, e allora a ogni coppia di tg. c.c. rispetto alle due in P, corrisp. (per le π..) id. id., cioè le tg. coniugate ~~...~~ si conservano tutte nel passaggio da P a P'; oppure no e allora, la coppia c.c. ~~...~~ rispett. alle tg. principali in P e alle omologhe nello stesso fascio [nelle π] di quelle in F' dànno l'unica coppia di tg. con. in P le cui corrisp. sono id. id. Se si parte ora per le prime caratteristiche ....; se no,....... Il sist. coniugato ....., si dice

anche comune alle due sup., o permanente per le trasf. della F nella F' (Esso può essere immaginario). Inoltre discende anche il teor. di Tissot: se fra F e F' vi è corrisp. puntuale biunivoca, vi è ~~...~~ uno e un solo doppio sist. ortogon. su F cui corrisponde ....: fa eccezione solo il caso che a tutti i doppi sist. ortog. di F corrispondano id. id. (La dimostr. è ~~...~~ analoga alla precedente: è solo da osservare che attualmente il doppio sist. ortog. è ~~...~~ comune è sempre reale], s'intende per trasf. reali tra sup. reali).

Prendiamo ora P e P' corrisp.: ne consideriamo i loro intorni di 2° ordine. Avremo allora: a linee di F per P con determinato piano osculatore corrisponde su F'....; nasce così corrisp. biunivoca fra i piani osculatori .. (piani della stella P) e quelli... (piani della stella P'). Si tratta di studiare questa corrispondenza. Ecco il risultato

28)

Del § 22 si estende nel senso che tali corrispondenze (generalità) cremoniane del 2° ordine.

Invero, rappresento analyt. F e F' come e le corrisp. come sopra. Suppongo che il doppio sist. ~~con~~ u, v non dia coniug. né su F né su F'. Come si è visto [cfr. Oss. sulle eq. di Lap. (qui aggiunte alla p. 97).] la F rappresenta 2 eq. di Lap. e precisamente visto che x_{uv}, x, x_u, x_v sono lin. ind. conciliati $x_{uu} : (x x_u x_v x_{uv})$, $x_{vv} : $ id. id. 2 eq. del tipo

$$\begin{cases} x_{uu} = a_1 x_{uv} + b_1 x_u + c_1 x_v + d_1 x \\ x_{vv} = a_2 x_{uv} + b_2 x_u + c_2 x_v + d_2 x. \end{cases}$$

con le a_i, etc. funzioni di u, v. Analog. per F'

$$\begin{cases} y_{uu} = l_1 y_{uv} + m_1 y_u + n_1 y_v + p_1 y \\ y_{vv} = l_2 y_{uv} + m_2 y_u + n_2 y_v + p_2 y. \end{cases}$$

Il piano osc. ~~at~~ a $v = v(u)$ in P ha per eq. in coord. correnti X

$$\begin{vmatrix} X \\ x \\ x_u + v' x_v \\ v'' x_v + x_{uu} + 2 v' x_{uv} + v'^2 x_{vv} \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{vmatrix} X \\ x \\ x_u + v' x_v \\ (a_1 + 2v' + v'^2 a_2) x_{uv} + (b_1 + v'^2 b_2) x_u + (c_1 + v'^2 c_2 + v'') x_v \\ + (d_1 + v'^2 d_2) x \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$(c_1 - b_1 v' + c_2 v'^2 - b_2 v'^3 + v'') \begin{vmatrix} X \\ x \\ x_u \\ x_v \end{vmatrix} + (a_1 + 2v' + a_2 v'^2) \left(\begin{vmatrix} X \\ x \\ x_u \\ x_{uv} \end{vmatrix} + v' \begin{vmatrix} X \\ x \\ x_v \\ x_{uv} \end{vmatrix} \right) = 0 \quad (*)$$

o con evidenti funzioni

$$(c_1 - b_1 v' + c_2 v'^2 - b_2 v'^3 + v'') \Phi + (a_1 + 2v' + a_2 v'^2) (\Psi + v' \Omega) = 0 \quad (*).$$

dove Φ, etc. $= 0$ sono altrettanti piani della stella P; cosicché la (*) mette in evidenza che il piano osc. ... sta nella stella P. Assumendo, in questa, i coeff. di Φ etc. come coord. π di piano ξ_1, ξ_2, ξ_3 nella stella si ha

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = c_1 - b_1 v' + c_2 v'^2 - b_2 v'^3 + v'' : a_2 v'^2 + 2v' + a_1 : v'(a_2 v'^2 + 2v' + a_1)$$

sup. Analog. entro le stelle P' si possono assumere come coord. π hug. del piano osc. a $v:v(u)$ η_i le

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = n_1 - m_1 v' + n_2 v'^2 - m_2 v'^3 + v'' :$$

$$l_2 v'^2 + 2v' + l_1 : v'(l_2 v'^2 + 2v' + l_1)$$

Date v', v'' (in P) è dato il piano osculatore, e viceversa [per le delle precedenti si ha

$$v' = \frac{\xi_3}{\xi_2} \quad e \quad \frac{c_1 - b_1 v' + c_2 v'^2 - b_2 v'^3 + v''}{} = \frac{\xi_1}{\xi_2}(a_2 v'^2 + 2v' + a_1)$$

cioè

$$v'' = \frac{\xi_1}{\xi_2}\left(a_2 \frac{\xi_3^2}{\xi_2^2} + 2\frac{\xi_3}{\xi_2} + a_1\right) - c_1 + b_1 \frac{\xi_3}{\xi_2} - c_2 \frac{\xi_3^2}{\xi_2^2} + b_2 \frac{\xi_3^3}{\xi_2^3} \quad]$$

e perciò resulta dal piano osc. in P (attraverso v', v'') definito quello in P' con cui è detto. Ciò alle formole effettive di trasf. cioè

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = \xi_1 (a_2 \xi_3^2 + 2\xi_2\xi_3 + a_1 \xi_2^2) +$$
$$+ (n_1 - c_1)\xi_2^3 - (m_1 - b_1)\xi_2^2\xi_3 + (n_2 - c_2)\xi_2\xi_3^2 - (m_2 - b_2)\xi_3^3 : \xi_2 (l_2 \xi_3^2 + 2\xi_2\xi_3 + l_1 \xi_2^2)$$
$$: \xi_3 (l_2 \xi_3^2 + 2\xi_2\xi_3 + l_1 \xi_2^2). \qquad (1)$$

Le formole sono così invertibili (perchè le

due sup. compaiono symm. nella questione: perciò si ha corrisp. cremoniana del 3° ordine fra le due stelle di piani. [cfr. l'esposizione di Bompiani: Proprietà generali della rappr. puntuale fra due sup. Ann. di Mat. (4) I. 1924.] Si tratta di ricerche fatte contemporaneamente da lui, Bianchi e Castelnuovo] La corrisp. per via di oss. particolari... : si è ~~...~~ ... i f. f. si dicono ...

Piani fondam. Pes. nelle stelle P vi è $\xi_2 = \xi_3 = 0$ (cioè $\Phi = 0$) cioè il piano tangente, e poi quelli per cui

$$l_2 \xi_3^2 + 2\xi_2\xi_3 + l_1\xi_2^2 = 0 \quad e \quad \eta_1 = 0$$

~~che vengono~~ cioè, come si vede subito[1] altri due (generalmente distinti dal 1° a differenza di quanto avveniva nello caso puntuale del § precedente). casi (Tech, Fubini) in P, P'

[1] i piani per $\xi_3 = \lambda\xi_2$, con il detto la $\eta_1 = 0$ danno per $\frac{\xi_1}{\xi_2}$.

L'intersezione di questi due ulteriori piani fond.

32)
si chiama ___asse delle corrisp. relativo al pt. P___:
(analog. asse ... P').

Determinando esplicitamente ... di ... di avere ... il sist (u,v) in quello delle ast. p. es. di F' cosicchè $l_1 : l_2 = 0$ [ciò è ... in coord. non omogenee, e con la nota trasf. si passa a coord. omogenee]. Allora i due piani fond. della stella P segati sull'asse sono

$$\begin{cases} \xi_2 = 0 \\ a_2\xi_1 - (m_2 - b_2)\xi_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_3 = 0 \\ a_1\xi_1 + (n_1 - c_1)\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Per trovare l'intersezione rappresentiamo le ___rette___ della stella 3 con $\Phi : \Psi : \Omega = \rho_1 : \rho_2 : \rho_3$ essendo le coord ρ_i dove in coord di piano ξ $\Sigma\rho_i\xi_i = 0$ è l'equazione della retta stessa {cosicchè i pt. della retta $\frac{\Phi}{\rho_1} = \frac{\Psi}{\rho_2} : \frac{\Omega}{\rho_3}$ ~~posto le due eq. nella~~ p. es. ... per essa passa $\rho_2\Phi - \rho_1\Psi = 0$, ecc.) il piano $(\rho_2, -\rho_1, 0)$ ... ~~$\xi_i \Sigma\rho_i\xi_i$ ... coincidono~~}. Allora la retta ha le ρ :: $\begin{Vmatrix} m_2 - b_2 & 0 & a_2 \\ (n_1 - c_1) & -a_1 & 0 \end{Vmatrix}$ cioè,

chiamandole ancora ρ

$$\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 = a_1 a_2 : \cancel{a_2(c_1} \;\; n_1) \, a_2 (n_1 - c_1) : - a_1(m_2 - b_2).$$

___Digressione sui sist. assiali su una sup. F. - Sia data___

F e una congruenza di rette Γ, in modo ~~π~~ che per ogni P generico di F passi r di γ non in π. Domandiamoci se esiste su F un sistema di linee tali che il piano osc. in P a ogni linea del sist. che passi per P (e analog. in ogni altro pt.) contenga la r. La risposta è che esiste un sist. ∞^2 in quelle condizioni. ~~Tali~~ Tali sist. ∞^2 (aventi dunque la proprietà che per le ∞^1 linee del sist. passanti per ogni P i piani osc. formano ~~fascio~~ intorno a retta per P) si chiamano ___assiali___. L'enunciato si giustifica pensando che le rette date per P ... - con le notazioni di prima - le eq $\Phi : \Psi : \Omega = \rho_i(u,v)$. Allora cercando $v = v(u)$ ...., la (*) fa vedere che la ricerca ...

35)

duce a un'eq. diff. del 2° ordine per v (risolubile rispetto a v''*): l'eq. non è di primo ordine se $\rho_1 \neq 0$ cioè se le rette non sono tgti): te comparendo 2 cost. arb. nel suo $\int$ generale, si hanno ∞^2 linee soddisfacenti alle condizioni imposte.

Sist. assiali corrispondenti su F e F' in corrisp. puntuale biunivoca. – Domandiamoci .... esistono sistemi assiali corrispondenti? Occorre e basta

*) $$\rho_1 v'' = (\rho_1 b_2 - \rho_3 a_2) v'^3 - (\rho_1 c_2 + \rho_2 a_2 + 2\rho_3) v'^2 + (\rho_1 b_1 - 2\rho_2 - \rho_3 a_1) v' - (\rho_1 c_1 + \rho_2 a_1)$$

che ~~queste equazioni~~ vi siano $\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 \, (u,v)$ e $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 \, (u,v)$ tale che le precedente equazione coincida con l'analoga scritta per F'. Fatto $\rho_1 = \sigma_1 = 1$ occorre e basta che si

$b_2 - \rho_3 a_2 = m_2 - \sigma_3 l_2$; $c_2 + \rho_2 a_2 + 2\rho_3 = n_2 + \sigma_2 l_2 + 2\sigma_3$,

$b_1 - 2\rho_2 - \rho_3 a_1 = m_1 - 2\sigma_2 - \sigma_3 l_1$; $c_1 + \rho_2 a_1 = n_1 + \sigma_2 l_1$

cioè

$$\begin{cases} -\rho_3 a_2 + \sigma_3 l_2 = m_2 - b_2 \\ \rho_2 a_1 - \sigma_2 l_1 = n_1 - c_1 \\ \rho_2 a_2 + 2\rho_3 - \sigma_2 l_2 - 2\sigma_3 = n_2 - c_2 \\ -2\rho_2 - \rho_3 a_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3 l_1 = m_1 - b_1 \end{cases}$$

Le ρ, σ, ricavate di qua condurranno precisamente a due congruenze di rette tali che i corrispondenti sistemi assiali si corrispondono.

Ora il sistema nelle ρ, σ è ~~è~~ generalmente determinato: si vede riferendo F' alle ass. cinetiche $l_1 = l_2 = 0$, e il determinante, a meno di un fattore, si riduce a $a_1 a_2$ [dunque $\neq 0$ se nessuno dei sistemi d'ass. si corrisponde su F, F'], Allora ~~tutti~~ ~~due di esse diverse~~ le prime due porgono

$$\begin{cases} \cancel{\rho_2 a_2 + 2\rho_3 = n_2 - c_2} \\ \cancel{2\rho_2 - \rho_3 a_1 = m_1} - b_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_2 = \dfrac{n_1 - c_1}{a_1} \\ \rho_3 = \dfrac{-(m_2 - b_2)}{a_2} \end{cases}$$

~~dati~~

$\rho_2 =$ cioè

$\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 = a_1 a_2 : a_2 (n_1 - c_1) : -a_1 (m_2 - b_2)$. Come

36) frontando con p. 33 in principio si ha che in generale (cioè quando non vi sono assi di ast. corrisp.) si ha un solo sist. conico corrispondente: le ~~sue~~ rette delle relative congiunte sono gli assi delle corrispondenze qui già incontrati.

§ 24. Primi concetti metrici: la prima forma ~~fondamentale~~ quadratica fond. La 2ª. id. id. Eq. delle linee di curvatura. Teorema di Meusnier e di Eulero. Curvatura totale e curvatura media. Teorema di Gauss. Eq.ni fond.li - Linee di curvatura e teor. di Dupin.

Coord. cart. ort. - origine O - Campo (salvo contrario avviso) reale.

Qualche volta useremo notazioni vettoriali. Se $P(u,v)$ con le coord. x, y $z(u,v)$ è il pt. che descrive la superficie porremo $\mathbf{x}(u,v) = P(u,v) - O$ (comp. x, y, z);

$\mathbf{x}_u = \frac{\partial P}{\partial u}$ (comp. $\frac{\partial x}{\partial u}, \ldots$), analog. $\mathbf{x}_v$.

Per il quadrato dell'el.to d'arco di una linea tracciata su di essa

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + x_v dv\right)^2 + \ldots =$$

$$= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \qquad (1)$$

con $E = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2$, $F = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$. $G = \Sigma x_v^2$.

[Vettorialmente è $ds^2 = (d\mathbf{x})^2$; $E = \mathbf{x}_u^2$, $F = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$. $G = \mathbf{x}_v^2$]

La (1) è la 1ª forma (differenziale) (quadr.) fond.

È, per il suo significato, definita positiva

onde

$$EG - F^2 > 0 .$$ come si vede dal seguito che $EG-F^2 = \left\|\begin{matrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v\end{matrix}\right\|^2$

Anche $E>0$, $G>0$.

La sua conoscenza è sufficiente per calcolare gli archi finiti (mediante integrazione del ds), ~~...~~ Anche $E>0$, $G>0$.

Anche l'angolo di due linee tracciate su F si calcola mediante i coeff. di (1). Prendo γ e γ' uscenti da $P(u,v)$. Il coseno del loro angolo in P è dato, indicando con c_1, c_2, c_3, c'_1, c'_2, c'_3 i tre cos. dir. delle 2 risp. tg. da $c, c', \dots$, se diciamo p. es. le c_i sono ... ai diff. dx, dy, dz presi lungo γ, e le c' a quelli δx lungo γ' è (indicando poi coi segnati con Σ ..)

$$\cos\gamma\gamma' = \frac{\sum dx\,\delta x}{\pm\sqrt{E du^2 \dots}\ \sqrt{G\delta u^2 \dots}}$$

$$= \sum (x_u du + x_v dv)(x_u \delta u + x_v \delta v)$$

cioè

(2) $$\cos\gamma\gamma' = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\pm\sqrt{E du^2 \dots}\ \sqrt{E \delta u^2 \dots}}$$

dove il doppio segno dipende dagli orientamenti.

Quindi la condizione di ortogonalità è

(3) $$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + \delta u\,dv) + G\,dv\,\delta v = 0 .$$

In particolare, la cond. di ortogonalità dei due sist. coord. è $F = 0$ (perchè (3) deve risultare soddisfatta per $du = 0$, $\delta v = 0$).

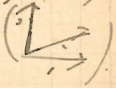
Dipende l'angolo delle linee coordinate dato da

(4) $$\cos\omega = \frac{F}{\pm\sqrt{EG}} \qquad \text{da cui } \operatorname{sen}\omega = \pm\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}$$

dove ancora è $\pm$ dipendente dagli orientamenti.

La (1) da sola, ~~non basta a ...~~ pur contenendo già tutti gli el.ti per la determinazione di lunghezze e angoli di F, non è però ancora sufficiente a esprimere tutte le proprietà della F: si vedrà invece dal seguito che una stessa (1) può convenire a più superficie di forma affatto diversa. Però

40)

introduciamo la seconda forma fondamentale. Prendiamo in ogni pt. la normale positiva (dipende dall'orientamento dei parametri); in modo che il triedro formato da x_u etc., x_v, e da essa sia congruente al triedro xyz. ()

e indichiamo con X, Y, Z i suoi cos. dir. Se si indica con n il vettore (unitario) che ha quelle componenti è

$$n = \frac{x_u \wedge x_v}{\mathrm{mod}(x_u \wedge x_v)} \quad ; \text{ossia } X = \frac{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} \quad \text{etc. (v. p. 38)}$$

Ora la forma

$$-dx \times dn$$

si definisce come la 2ª f.f. Essa vale $-(x_u\,du + x_v\,dv) \times (n_u\,du + n_v\,dv)$

$\cancel{-(\Sigma (x_u\,du + x_v\,dv)(X_u\,du + X_v\,dv))}$

che si pone uguale a

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2.$$

Quindi ~~posto~~

$$D = -\Sigma x_u X_u = -x_u \times n_u$$
$$2D' = -(\Sigma x_u X_v + \Sigma x_v X_u) = -x_u \times n_v - x_v \times n_u$$
$$D'' = -\Sigma x_v X_v = -x_v \times n_v.$$

evidentemente

Ora (4) $x_u \times n = 0, \quad x_v \times n = 0$

da cui:

$$x_{uv} \times n + x_u \times n_v = 0$$
$$x_{uv} \times n + x_v \times n_u = 0$$

da cui, sommando

$$(5) \qquad x_{uv} \times n = D'$$

) a p. 51(:) Per K si ha anche, come si verifica

$$K = -\frac{1}{4(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} E & F & G \\ E_u & F_u & G_u \\ E_v & F_v & G_v \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\left(\frac{E_v - F_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_v + \left(\frac{G_u - F_v}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_u\right\}.$$

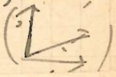
(Dove già i seguenti s[illegible])

*)

Serviamoci delle due f.f. per studiare la (1ª) curvatura delle linee di Σ passanti per P. Ricordiamo le formule di Frenet

$$\frac{dT}{ds} = \frac{N}{\rho}, \quad \frac{dN}{ds} = -\frac{T}{\rho} + \frac{B}{\tau}; \quad \frac{dB}{ds} = -\frac{N}{\tau}.$$

Dove....

introduciamo la seconda forma fondamentale. Prendiamo in ogni pt. la normale positiva (dipende ~~dalla~~ dunque dalla parametrizz.) in modo che il triedro formato da x_u, x_v, e da essa sia congruente al triedro $x y z$. 

*) Le due F. fond. permettono di scrivere subito l'eq. diff. delle linee di curvatura. Infatti, ...

$$E\, du\, \delta u + F(du\, \delta v + \delta u\, dv) + G\, dv\, \delta v = 0.$$

Or. $$D\, du\, \delta u + D'(\qquad) + D'' \qquad = 0$$

cui
$$\delta u (E\, du + F\, dv) + \delta v (F\, du + G\, dv) = 0$$
$$\delta u (D\, du + D' dv) + \delta v (\qquad) = 0.$$

da cui (c).
$$\begin{vmatrix} E\, du + F\, dv & F\, du + G\, dv \\ D\, du + D' dv & D' du + D'' dv \end{vmatrix} = 0$$

~~che è la~~ (e viceversa) cioè (c) è l'eq. delle linee di curvatura

$$2D' = -\left(\Sigma x_u X_v + \Sigma x_v X_u\right) = -x_u \times n_v - x_v \times n_u$$
$$D'' = -\Sigma x_v X_v = -x_v \times n_v.$$

evidentemente

Ora (x) $x_u \times n = 0$, $x_v \times n = 0$

(tra

da cui:

$$x_{uv} \times n + x_u \times n_v = 0$$
$$x_{uv} \times n + x_v \times n_u = 0$$

da cui, sommando

$$(5) \qquad x_{uv} \times n = D'$$

Poi, ancora da (x) ho $x_{uu} \times n = -x_u \times n_u = D$ (6)

cioè da (6) e (5) ho.

$$D = \Sigma X x_{uu} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} \\ x_u \\ x_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{L}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$D' = \frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$D'' = \frac{N}{\quad''}$$

Inoltre la condizione di ellitticità, parab., iperbolicità è $DD''-D'^2 \gtreqless 0$ *)

dove L, M, N sono le quantità già note (cioè le 2ª f.f. uguagliata a zero ~~...~~ è l'eq. diff. delle asint.). Perciò se il sist. u, v è coniug. $D' = 0$. (in particolare per le linee di curvatura $F = D' = 0$)

Serviamoci delle due f. f. per studiare la (1ª) curvatura delle linee di ... passanti per P. Ricordiamo le formule di Frenet

$$\frac{dT}{ds} = \frac{N}{\rho}, \quad \frac{dN}{ds} = -\frac{T}{\rho} + \frac{B}{\tau}; \quad \frac{dB}{ds} = -\frac{N}{\tau}.$$

Dove....

42) Ora prendiamo una γ di F per P, riferita all'arco s. Lungo di essa

$$\cancel{\frac{dx}{ds}\times n = 0}, \text{ cioè } T\times n = 0$$

(dove n si può riguardare funzione di s) da cui

$$\frac{N}{\rho}\times n = -T\times\frac{dn}{ds}$$

$$= -\frac{dx}{ds}\times\frac{dn}{ds}$$

$$= \frac{2^a \text{ forma fond.}}{1^a \text{ forma fondamentale}} \qquad (*)$$

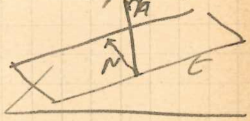
~~cioè~~ (i du, dv, del 2° e del 1° membro vanno presi lungo γ).
La (*) mostra subito che γ con lo stesso piano osc. (e quindi con la stessa retta tg. - cioè d'uso con π) (e quindi con gli stessi $\frac{du}{dv}$ e N) hanno la stessa ρ in P.

~~Paragoniamo~~ Quindi a ogni linea γ sopra avere la sua curvatura ρ in P si può sostituire una sezione piana di F.

Paragoniamo ora le sezioni piane prodotte da piani per una data retta G (t) (cioè per un dato valore di $\frac{du}{dv}$). La (*) mostra che per esse

$\frac{N\times n}{\rho}$ = costante ~~cioè cos θ~~ K cioè

$\frac{\cos\theta}{\rho}$ = cost. (dove θ è l'angolo fra n e la normale alle sez. piane, cioè l'angolo del piano segante con n. vedi v. figura)



Da cui (××) $\rho = R\cos\theta$ che consideriamo solo in valore assoluto.
dove R è una costante, ~~da cui~~ (inerente alla t) il cui significato è che per $\theta = 0$ $R = \rho$ cioè è il raggio di curvatura della sezione normale per t. ~~Della (××) si ha subito il teor. di Meusnier, secondo il quale i cerchi di curvatura delle sezioni piane per t giacciono su una sfera.~~ Perciò il ρ di una sez. piana si ottiene da quello della sezione normale (omonima?), moltiplicandolo pel coseno dell'angolo delle due sezioni. In ciò (o in un enunciato eq.) consiste il teor. di Meusnier: esso riduce dunque la ricerca della curvatura in P delle γ a quella delle sezioni normali.

23)
Finalmente le curvature delle varie sez. normali si paragonano fra loro mediante la formola di Eulero.

Per trovarla prendiamo $z = z(x,y)$ e ~~supposto~~ $O \equiv P$, piano tg. $z=0$ e per far più presto supponiamo la $z(x,y)$ analitica. Essa è
$z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \ldots$ e x e y son tg. coniugate dovendo $L\,dx\,dz \ldots = 0$ viene $M = b = 0$

All'origine $E = G = 1$, $F = 0$; $D = a$, $D' = 0$, $D'' = c$.

Quindi la (X) diventa, indicando ora il raggio di curvatura delle sez. normali
$$\frac{N \times n}{R} = \frac{a\,dx^2 + c\,dy^2}{dx^2 + dy^2}$$

Ora $N \times n = \pm 1$ secondochè i vettori N e n hanno o no lo stesso verso; cioè siccome N è dirett. verso quella parte da cui la curva volge la sua concavità [1]. R (raggio di curvatura) è sempre e le nuove parti c'è no...

[1] perchè per la curva sghemba si assume (Bianchi) come pagina positiva del piano "tang-binormale" quella dalla cui parte sta la curva

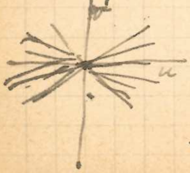
essenzialmente positivo. Ma qui trattandosi di paragonare vari raggi che sono situati sulla normale (orientata) generante si conviene di attribuire a R un segno $\pm$ secondochè ~~la~~ ~~direzione~~ il verso dal centro di curvatura al piede della normale coincide o no con quello positivo della normale. Con tale convenzione l'ultima formola diventa
$$\frac{1}{R} = -a\frac{dx^2}{dx^2+dy^2} - c\frac{dy^2}{dx^2+dy^2}$$ cioè in coord. curv. generali $\frac{1}{R} = -\frac{D\,du^2 + \ldots}{E\,du^2 + \ldots}$ (XX)

Ora nel piano xy chiamiamo φ l'angolo xt (essendo t la tg. alla sezione normale). È evidente $\frac{dx^2}{dx^2+dy^2} = \cos^2\varphi$, $\ldots = \sin^2\varphi$.
$$\frac{1}{R} = -a\cos^2\varphi - c\sin^2\varphi.$$

e per $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ chiamando ~~$\frac{1}{R_1}$ rispettivi~~ R_1, R_2 i rispettivi raggi (cioè $a = -\frac{1}{R_1}$, $c = -\frac{1}{R_2}$
$$(\Sigma)\quad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$$
formola di Eulero che dà la curvatura di ogni sez.

46/ normale in seguito di quelle delle sez. normali principali (sez. norm. per le tg. coniugate; non confondere). R_1 e R_2 si chiamano i raggi principali di curvatura nel punto P.

Se R_1 e R_2 hanno lo stesso segno, anche tutti i valori di R risultano con lo stesso segno e perciò (per le convenzioni fatte) tutte le sezioni normali ~~(in prossimità di P)~~ volgono le loro concavità tutte da una stessa parte, cioè la ~~curva~~ S in prossimità di P sta tutta da una stessa parte del piano tangente; invece per R_1 e R_2 di segni opposti si hanno R ~~[illegible]~~ + e R − ")più precisamente ciò dipendendo, secondo la form. di Eulero, dalla $|\operatorname{tg}\varphi| \gtrless$ di una certa quantità"), cosicchè vi è un angolo completo in cui le sezioni normali ..., e nell'angolo completo contrario .... : S attraversa il piano tangente



~~[illegible]~~ Questi casi sono rispettivamente quelli del pt. ellittico e del pt. iperbolico: perchè $DD''-D'^2 = ac = \frac{1}{R_1 R_2}$.

La definizione di R_1 o R_2 viene a mancare (diventa ∞) se $ac=0$ cioè (rammentando che $D=a$, etc.) se il punto è parabolico.

Se $R_1=R_2$ anche ogni altro $R=R_1=R_2$: ciò avviene quando e solo quando il punto è un ombelico. Infatti l'invol. delle tg. coniugate in P è (detti i valori di a, etc.) $a\,dx\,\delta x + c\,dy\,\delta y = 0$ diventa circolare quando e solo quando $a=c$.

") precisamente, supposto p. es. $R_2>0$, $R_1<0$ ~~dalla~~ $R<0$ se $\operatorname{tg}^2\varphi > \frac{R_2}{|R_1|}$ cioè $|\operatorname{tg}\varphi| > \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$. Il passaggio da un angolo all'altro avviene per le rette dove $|\operatorname{tg}\varphi| = \sqrt{\frac{R_2}{|R_1|}}$ cioè in coord. cartesiane:

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{R_2}{|R_1|} = \left|\frac{1/c}{1/a}\right| = \left|\frac{a}{c}\right| \text{ cioè } |a|x^2-|c|y^2=0 \text{ cioè } ax^2+cy^2=0$$

cioè lungo le asintotiche

48) La curvatura delle sez. norm. in P è dunque legata nel modo più stretto a R_1 e R_2; e può anche quello che corrisponde al nostro concetto intuitivo di curvatura di $\mathcal{S}$ in P. Le due espressioni

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} \qquad H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

(le cui curvature equivalenti a quelle di R_1, R_2) si dicono risp. curvatura totale e media in P (la 1ª anche di Gauss).

Come si calcolano K, H in coord. curviline gen.: bisogna, delle due F fondamentali? Ricordando l'eq. delle linee di curvatura (p. 40) risulta che per uno spostamento rispettivo lungo una di esse esiste (ogni) $\lambda(u,v)$ tale che

$$(1)\begin{cases} E\,du + F\,dv = -\lambda\,(\mathcal{D}\,du + \mathcal{D}'\,dv) \\ F\,du + G\,dv = -\lambda\,(\mathcal{D}'\,du + \mathcal{D}''\,dv) \end{cases}$$

D'altro lato, se prendo la sez. normale secondo quella tangente il suo raggio di curvatura R_1 è detto da (p.

45 in 2000)

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{\mathcal{D}\,du^2 + \dots}{E\,du^2 + \dots}$$

(con lo stesso $\frac{dv}{du}$) cioè

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{\cancel{du(\mathcal{D}du + \mathcal{D}'dv)}\ \mathcal{D}du^2 + 2\mathcal{D}'du\,dv + \mathcal{D}''dv^2}{-du.\lambda(\mathcal{D}du + \mathcal{D}'dv) - dv\lambda(\mathcal{D}'du + \mathcal{D}''dv)}$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

cioè il λ che compare nelle (1) di p. 48 non è che lo R_1 delle sez. norm. tg. a quelle linee di curvatura. Analog. per R_2. Perciò R_1, R_2 soddisfano entrambi a (1) considerato come un sistema in λ. Eliminando da questo sistema $\frac{du}{dv}$ se viene l'eq. di 2° grado in λ, che ammette come radici R_1, R_2

$$(E + \lambda\mathcal{D})(G + \lambda\mathcal{D}'') - (F + \lambda\mathcal{D}')^2 = 0 \quad \text{cioè}$$

$$(\mathcal{D}\mathcal{D}'' - \mathcal{D}'^2)\lambda^2 + (E\,\mathcal{D}'' - 2F\mathcal{D}' + G\mathcal{D})\lambda + (EG - F^2) = 0 \qquad (2)$$

da cui (pensando a trasformare in $1/\lambda$)

$$(3)\quad K = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'' - \mathfrak{D}'^2}{EG - F^2}$$

$$(4)\quad H = \frac{2F\mathfrak{D}' - E\mathfrak{D}'' - G\mathfrak{D}}{EG - F^2}$$

notare, per p. 41 applicate al num. $K>0$, $K<0$ risp. ai pt. ellittici e iperbolici

La (3) mostra che nei punti parabolici e solo in essi $K=0$. (cosicché il piano e le sviluppabili sono le sole sup. a curvatura nulla)

Un risultato – che del seguito risulterà molto importante perchè... – è questo che, nonostante la (3), K si può esprimere unicamente mediante i coeff. della 1ª forma (teorema di Gauss.) Infatti, ho, da (3).

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{ \begin{vmatrix} x_{uu} \\ x_u \\ x_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{vv} \\ x_u \\ x_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{uv} \\ x_u \\ x_v \end{vmatrix}^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{ \begin{vmatrix} x_{uu}\times x_{vv} & x_{uu}\times x_u & x_{uu}\times x_v \\ x_u \times x_{vv} & x_u^2 & x_u \times x_v \\ x_v \times x_{vv} & x_v \times x_u & x_v^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{uv}^2 & x_{uv}\times x_u & x_{uv}\times x_v \\ x_u \times x_{uv} & x_u^2 & x_u \times x_v \\ x_v \times x_{uv} & x_v \times x_u & x_v^2 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{ \begin{vmatrix} x_{uu}\times x_{vv} - x_{uv}^2 & \frac{1}{2}E_u & x_{uu}\times x_v \\ x_u \times x_{vv} & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} \right\}$$

Poi ho

$$x_u \times x_{vv} + x_{uv} \times x_v = F_v$$

cioè $x_u \times x_{vv} = F_v - \frac{1}{2}G_u$. e analoghe.

Che sostituisco e poi

$$x_{uu} \times x_{vv} = F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} - x_u \times x_{uvv}$$

D'altro lato

$$\cancel{x_u \times x_{uvv} = \frac{1}{2}E_{vv} - x_{uv}^2}$$

$$x_{uv}^2 = \frac{1}{2}E_{vv} - x_u \times x_{uvv}$$

Ottenendo la $x_{uu} \times x_{vv} - x_{uv}^2$ che sostituisco ecc. ho il risultato ~~formula di Gauss~~ di Gauss v. p. 40

$$K(EG-F^2)^2 = \begin{vmatrix} -\frac{E_{vv}}{2} + F_{uv} - \frac{G_{uu}}{2} & \frac{E_u}{2} & F_u - \frac{E_v}{2} \\ F_v - \frac{G_u}{2} & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & E & F \\ \frac{G_u}{2} & F & G \end{vmatrix}$$

92 Linee di curvatura. A proposito delle linee di curvatura, osserva che le df. note equivalenti a quelle che le normali lungo una linea di curvatura costituiscono una svil. ~~Infatti la 2a df. porta a ciò che lungo essa~~

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ dx & dy & dz & . \\ X & Y & Z & . \\ dX & dY & dZ & . \end{vmatrix} = 0,$$ ossia i due vettori dx,

~~dX~~ dn, n sono complanari. Ora da $n \times dn = 0$ viene che dn sta con dx nel piano tg. in P e siccome questo non contiene n, i due vettori dx e dn sono paralleli (e viceversa). Dunque le 2 df. equivalgono a quelle che esista h per cui

$$\left.\begin{aligned} x_u\,du + x_v\,dv &= h(X_u\,du + X_v\,dv) \\ y_u\,du + y_v\,dv &= h(Y \quad\quad) \\ z_u\,du + z_v\,dv &= h(Z \quad\quad) \end{aligned}\right\} (1)$$

$\times$ $(x_u y_u z_u)$, $(x_v y_v z_v)$, XYZ viene

$$\begin{cases} E\,du + F\,dv = -h(D\,du + D'\,dv) \\ F\,du + G\,dv = -h(D'\,du + D''\,dv) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

(1') $dx = h.dn$

Moltiplicando scalarmente per x_u, x_v, n, viene

$x_u \times (x_u\,du + x_v\,dv) = h \ldots$

$$\begin{cases} E\,du + F\,dv = -h(D\,du + D'\,dv) \\ F\,du + G\,dv = -h(D'\,du + D''\,dv) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

e viceversa (poichè si è scritto che le componenti dei due membri di (1') rispetto a 3 vettori non copl. coincidono). Poi se ne ricava le già scritte (C) di p. 50] e per le pp. 58-59 $h = -R$. Si ha $-dx = +R\,dn$ (Olinde Rodrigues)

Oltre alcune formule già trovate, due altre formule. Per trovarle esprimiamo dapprima x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} come comb. lin. dei tre vettori x_u, x_v, N. Posto per

$x_{uu} = \alpha x_u + \beta x_v + \gamma N$

si ha $\times x_u$, $\times x_v$, $\times N$.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} E_u = \alpha E + \beta F \\ F_u - \frac{1}{2} E_v = \alpha F + \beta G \\ D = \gamma \end{cases}$$

da cui si traggono α, β, γ. Viene così

Il segno è come in Bianchi: Maxwell ha l'opposto.

32 Linee di curvatura. A proposito delle linee di curvatura osserviamo le df. note equivalenti a questa, che le normali lungo una linea di curvatura costituiscono una svil. ~~Infatti la 2ª df. porta a ciò che~~ lasciato così

~~lungo una $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ dx & dy & dz & \cdot \\ X & Y & Z & \cdot \\ dX & dY & dZ & \cdot \end{vmatrix} = 0$ cioè i due vettori dx,~~

~~dn, n sono complanari. Ora da $n \times dn = 0$ viene che dn sta con dx nel piano tg. in P e riceve questo normale a n, i due vettori dx e dn sono paralleli (e viceversa). Dunque quest'ultimo h per cui~~

~~$x_u\,du + x_v\,dv = h(X_u\,du + X_v\,dv)$~~
~~$y_u\,du + y_v\,dv = h(Y\ \ldots$~~
~~$z_u\,du + z_v\,dv = h(Z\ \ldots$~~ (1)

~~$\times\ (x_u y_u \ldots),\ (x_v y_v z_v),\ X Y Z$ ecc~~

~~$E\,du + F\,dv = -h(D\,du + D'\,dv)$~~
~~$F\,du + G\,dv = -h(D'\,du + D''\,dv)$~~
~~$0 = 0$~~

(*) $dx = h\,dn$

Moltiplicando scalarmente per x_u, x_v, n, si ha

$x_u \times (x_u\,du + x_v\,dv) = \ldots$

$$\begin{cases} E\,du + F\,dv = -h(D\,du + D'\,dv) \\ F\,du + G\,dv = -h(D'\,du + D''\,dv) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

e viceversa (perchè si è scritto che le componenti dei due membri di (*) rispetto a 3 vettori non cpl. coincidono). Poi ne viene le già scritte (C) di p. 50] e per le pp. 48-49 $h = -R$. Si ha così $dx = \pm R\,dn$ (Olinde Rodrigues)

Equazioni di Codazzi. Oltre alle formule già trovate, le E, ... D'' sono legate da altre formule. Per trovarle esprimiamo anzitutto x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} con c. l. dei tre vettori x_u, x_v, N. Posto per

$x_{uu} = \alpha x_u + \beta x_v + \gamma N$

si ha $\times\, x_u$, $\times\, x_v$, $\times\, N$.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} E_u = \alpha E + \beta F \\ F_u - \frac{1}{2} E_v = \alpha F + \beta G \\ D = \gamma \end{cases}$$

da cui si ricavano α, β, γ. Viene così

Il segno è come in Bianchi: Nicoletti ha l'opposto.

54)
$$x_{uu} = \left\{ {11 \atop 1} \right\} x_u + \left\{ {11 \atop 2} \right\} x_v + D N$$
$$x_{uv} = \left\{ {12 \atop 1} \right\} x_u + \left\{ {12 \atop 2} \right\} x_v + D' N \qquad (1)$$
$$x_{vv} = \left\{ {22 \atop 1} \right\} x_u + \left\{ {22 \atop 2} \right\} x_v + D'' N$$

ciascuna delle quali esprime [illegible] [illegible] e dove i simboli di Christoffel di 2ª specie valgono

$$\left\{ {11 \atop 1} \right\} = \frac{G E_u - 2F F_u + F E_v}{2(EG - F^2)}, \quad \left\{ {11 \atop 2} \right\} = \frac{-F E_u + 2 E F_u - E E_v}{=}$$

$$\left\{ {12 \atop 1} \right\} = \frac{G E_v - F G_u}{=} \qquad \left\{ {12 \atop 2} \right\} = \frac{E G_u - F E_v}{=}$$

$$\left\{ {22 \atop 1} \right\} = \frac{-F G_v + 2 G F_v - G G_u}{=} \qquad \left\{ {22 \atop 2} \right\} = \frac{E G_v - 2 F F_v + F G_u}{=}$$

[Per ritrovare i simb. di Christoffel conviene scrivere la forma quadratica $a_{11} du_1^2 + 2 a_{12} du_1 du_2 + a_{22} du_2^2$ (e così in generale per più variabili). Allora i simboli di Christoffel di 1ª specie valgono

$$\left[{ik \atop l} \right] = \frac{1}{2}\left((a_{il})_k + (a_{kl})_i - (a_{ik})_l \right)$$

Allora posto $\frac{A_{ik}}{A} = \alpha_{ik}$ è

$$\left\{ {ik \atop r} \right\} = \sum_l \left[{ik \atop l} \right] \alpha_{rl}.$$

e si verifica facendo il calcolo che si [illegible] [illegible] gli stessi valori. P. es. abbiamo, [illegible]

$$\left\{ {11 \atop 1} \right\} = \sum_l \left[{11 \atop l} \right] \alpha_{1l} = \left[{11 \atop 1} \right] \frac{G}{EG - F^2} - \left[{11 \atop 2} \right] \frac{F}{EG - F^2}$$

$$= \frac{G E_u - F(2F_u - E_v)}{2(EG - F^2)} \quad \text{etc.}]$$

~~Le (1) [illegible] alle formule [illegible] [illegible] Scrivere le condiz. di integrabilità relative a x_{uuv}. Ve~~

Accanto alle (1) sono da scrivere le

$$N_u = \frac{F D' - G D}{EG - F^2} x_u + \frac{F D - E D'}{=} x_v \qquad (2)$$
$$N_v = \frac{F D'' - G D'}{=} x_u + \frac{F D' - E D''}{=} x_v.$$

che si ottengono analogamente scrivendo

$$N_u = \alpha x_u + \beta x_v + \gamma N$$

e x x_u, x_v, N (e ricordando $\gamma = 0$) [illegible]

$$-D = \alpha E + \beta F$$
$$-D' = \alpha F + \beta G \quad \text{etc.}$$

56) Dalle (1) segue le formule di Codazzi, scrivendo le cond. di integrabilità p. es. per x_{uv}. Viene

$$\left[\left\{{11 \atop 1}\right\} x_u + \left\{{11 \atop 2}\right\} x_v + \mathcal{D} N\right]_v = \left[\left\{{12 \atop 1}\right\} x_u + \left\{{12 \atop 2}\right\} x_v + \mathcal{D}' N\right]_u$$

sviluppando le derivate e tenendo conto delle (1), (2) si ha al 1° membro delle c. l. lineari di x_u, x_v e N che devono risultare identiche (perchè quei 3 vettori differ.). Se si fanno i calcoli per i coeff. di x_u e x_v si ritrova tutte l'eq. di Gauss. Facendolo per N si ha

$$\left\{{11 \atop 1}\right\}\mathcal{D}' + \left\{{11 \atop 2}\right\}\mathcal{D}'' + \mathcal{D}_v = \left\{{12 \atop 1}\right\}\mathcal{D} + \left\{{12 \atop 2}\right\}\mathcal{D}' + \mathcal{D}'_u$$

e scrivendola con l'analoga si hanno le due eq. di Codazzi o Mainardi

$$\begin{cases} \mathcal{D}_v - \mathcal{D}'_u + \left\{{12 \atop 1}\right\}\mathcal{D} + \left(\left\{{11 \atop 1}\right\} - \left\{{12 \atop 2}\right\}\right)\mathcal{D}' + \left\{{11 \atop 2}\right\}\mathcal{D}'' = 0 \\ \mathcal{D}''_u - \mathcal{D}'_v + \left\{{22 \atop 1}\right\}\mathcal{D} + \left(\left\{{22 \atop 2}\right\} - \left\{{12 \atop 1}\right\}\right)\mathcal{D}' - \left\{{12 \atop 2}\right\}\mathcal{D}'' = 0 \end{cases}$$

Viceversa, si può dimostrare che queste formule, insieme a quella di Gauss sono anche sufficienti per l'esistenza di una sup. con altri dati due forme fondamentali. La sup. è allora determinata a meno di movimenti. - Per quanto le due

~~Sostituire alle ... Infatti se muovendo lungo una linea le normali si mantengono tg. a curva z ... lungo ... $z = x + \rho n$, con ρ da determinarsi e poi con diff. lungo essa ... lungo la ... ciò che ... $dz \parallel n$ cioè $dx + \rho\, dn + d\rho\, n = \lambda n$~~

~~$dx + \rho\, dn = -$ [illegible] e viceversa (perchè allora le tg a linea z sono $\parallel n$ e vi ... un punto...). Tutto vale anche per ... ($\lambda = 0$) e viceversa~~

54) forniranno, in base a questa teoria, già pienamente sufficienti a individuare una sup. Si suole spesso anche parlare di una terza forma. Ma prima digressione sulle linee di curvatura a p. 52-53. Poi

<u>Digressione sul teor.ª di Dupin sui sist.mi tripli ortogonali</u>. - Se ci si propone p. es. di trovare le linee di curvat. di una quadrica, il procedimento più rapido è fondato sull'importante teor.ª di Dupin. Si dice che tre sistemi ∞^1 di sup. formano un sistema <u>triplo</u> <u>ortog.</u> quando <u>ogni</u> sup. di un sist. e una dell'altro (cioè i loro piani tg.) sono $\perp$.

Se $\varphi(x, y, z) = u,\quad \psi = v,\quad \chi = w \quad (1)$

sono le eq. dei 3 sistemi, si possono (entro limitate regioni dove le (1) son invertibili) assumere u, v, w come coord. curv. nello spazio. Allora x, y, z son funz. u, v, w come altrimenti x variabile si può riguardare come funz. di u, v, w (tenendo fisso p. es. w descrive la sup. w = costante, che sono appunto le 3 famiglie costituenti il sist. triplo). Introduciamo l'ipotesi dell'ortogonalità che si traduce subito in

$$(2)\quad x_u \times x_w = 0, \quad x_u \times x_v = 0; \quad x_v \times x_w = 0$$

(Infatti se prendo le tre sup. per P che si tagliano a due a due lungo linee dove varia un solo parametro, le cui tg sono a 2 a 2 perp. come spigoli di un triedro tri-r.). Le (2) derivate ordin

60) rispetto a u, v, w danno

$$x_{uv} \times x_w + x_v \times a_{uw} = 0$$

$$x_{uv} \times x_w + x_u \times a_{vw} = 0$$

$$x_{uw} \times a_v + x_u \times a_{vw} = 0$$

che (prima sommandole e poi dal risultato sottraendo queste tre) e pure subito) danno p. es.

$$x_{uv} \times a_{w} = 0.$$

Però x_{uv}, x_u, x_v sono complanari ~~~~. Quindi se mi riferisco a sup. $w =$ costante ho $D' = 0$ e siccome è già $F = 0$, tutto è dimostrato.

Applichiamolo p. es. a un sist. di quadriche confocali:

$$(1)\ \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0$$

dove suppongo p. es. $a^2 > b^2 > c^2$

per $\lambda > -c^2$ ellissoidi reali

$-c^2 > \lambda > -b^2$ iperb. a una falda

$-b^2 > \lambda > -a^2$ iperb. a 2 falde

$-a^2 > \lambda$ ellissoidi immaginari

Prescindendo da questi ultimi si hanno tre famiglie di un sist. triplo ortog.

[Anzitutto per P passa una sup. di ogni famiglia. Infatti dato P, ho chiamando $f(\lambda) \ldots$, $f(-c^2) = -\infty + \infty$, $f(\infty) = -1$, quindi c'è un valore fra $-c^2$ e ∞ per cui $f(\lambda) = 0$; e analogamente. Chiamando u, v, w i tre valori ... trovo che le normali alle tre sup. (1) per P per i coseni ... a

$$\frac{x}{a^2+u}, \quad \frac{y}{b^2+u}, \quad \frac{z}{c^2+u}$$

ancora è da provare p. es.

$$\frac{x^2}{(a^2+u)(a^2+v)} + \cdots = 0$$

ora sottraendo ho

$$a^2\left(\frac{1}{a^2+u} - \frac{1}{a^2+v}\right) + \cdots = 0$$

cioè proprio quella. Quindi le linee di curvatura delle F^2 quadriche a centro sono le due si ottengono.... (e per F a centro si può riguardarle come facente parte di sist. triplo: per le F^2 non a centro si hanno cose analoghe)

La terza forma fondamentale. - Si chiama così la $dN^2 = N_u^2 du^2 + 2 N_u \times N_v du dv + N_v^2 dv^2$. Essa ha significato geom.: considero imag. sferica con centro il punto O (// normale positiva e spunta

contraria): la d^2 forma è il ds^2, in quanto dN^2, il ds^2 della sfera (rispetto alle coord. curvilinee relative alle F). La indico con $e du^2 + 2f du dv + g dv^2$

~~ha~~ Troviamo ora i valori espliciti di e, f, g e insieme proveremo che le tre forme sono lin. dip. Ho (n. 54)

$$e = N_u^2 = \cancel{\frac{(FD'-GD)x_u + (FD-ED')x_v}{(EG-F^2)^2}}$$

$$= \frac{1}{(EG-F^2)}\left\{(FD'-GD)x_u + (FD-ED')x_v\right\}^2$$

$$= \frac{1}{\cdot}(FD'-GD)^2 E + 2(FD'-GD)(\ \ )F + \cdots$$

Ma il calcolo è troppo lungo. Meglio fare così. Ho (form. Rodrigues) per spost. lungo le linee di curvatura

$$d_1 x = +R_1 d_1 N \ , \quad d_2 x = +R_2 d_2 N$$

~~Ora qualunque spostamento d, se (vettore nel piano tg) si può considerare con ... e~~

(¹) ~~si possono assumere (moltiplicando i fattori) le componenti proposte come $d_1 x$ e $d_2 x$. Allora~~ . Se come le ~~due~~ forme hanno signif. intrinseco (è in sostanza da dimostr. le dipendenze fra dx^2, $dx\,dN$, dN^2) ci si riferisce alle linee di curvatura. Allora si p. es. le 1ª (d_1) sono v = costante etc.

$x_u = +R_1 N_u$, $x_v = +R_2 N_v$.

da cui (indicando con φ, ψ, χ le tre forme) (e $F = 0$)

$$\chi = \frac{1}{R_1^2} E\,du^2 + \frac{1}{R_2^2} G\,dv^2$$

$$\psi = \frac{1}{R_1} E\,du^2 + \frac{1}{R_2} G\,dv^2$$

$$\varphi = E\,du^2 + G\,dv^2$$

da cui

$$\begin{vmatrix} \varphi & 1 & 1 \\ -\psi & 1/R_1 & 1/R_2 \\ \chi & 1/R_1^2 & 1/R_2^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ ossia}$$

$$K\varphi + H\psi + \chi = 0. \quad (1)$$

Però

$$\begin{cases} e = -KE - HD \\ f = -KF - HD' \\ g = -KG - HD'' \end{cases}$$

Significato in Bianchi opposto a Blaschke

Teor.ª di Beltrami - Enneper - Come applicazione della 3ª form., dim. il teor.ª cioè che (limitandoci al campo reale) le due asint per P iperbolico hanno ivi la stessa torsione (in valore assoluto) e il loro quadrato vale $-K$ { il caso delle asintotiche rettilinee sfugge all'e.

66) enunciato. Si potrebbe precisare nel senso che i due segni sono opposti (ma qui non lo faremo). Per γ tracciata su F ho, se è ast. che binormale coincide con normale alla F cioè $b = \pm N$. Riferendo γ all'arco ho

$$\frac{db}{ds} = \pm \frac{n}{\tau} \ (\text{Frenet}), \quad \text{ma} \ \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 = \frac{(dN)^2}{(ds)^2} \ (n^2 = 1)$$

(per 3 prod. misti) Ora per le formule a p 65 ho per le ast ($\psi = 0$) $\underline{K}\, ds^2 + \chi = 0$, cioè

$$-K = \frac{\chi}{ds^2} \quad \therefore \text{ cioè}$$

$$\frac{1}{\tau^2} = -K \qquad \text{c. d. d.}$$

§25. Le geodetiche

Curvatura geodetica

Digressione sulle sup. applicabili. – Già si è accennato alle coppie di sup. applicabili. Hanno lo stesso ds^2. Si chiamano isometriche o applicabili due sup. con lo stesso ds^2 (senza preoccuparsi delle possibilità di realizzare in modo continuo l'applic. dell'una sull'altra, come sup. flessibile e inestendibile o deformate l'una dell'altra, ottenute per flessione).

Le svil. sono applicabili sul piano e viceversa.

Pel viceversa risulta che per le sup. applic. sul piano è $K = 0$, cioè svil. Pel diretto è intuitivo..... Ma lo dimostro così (per es. per svil. circoscr. a linea sghemba β: [illegible] è $y = y(u)$ con arco) le svil. $x = y + v y'$ (con $y'^2 = 1$). Per Frenet ho $x_u = y' + \frac{n v}{\rho}$ (dove n è norm. princip.). Per $x_v = y'$.

Allora $ds^2 = (1 + v^2/\rho^2)\, du^2 + 2\, du\, dv + dv^2$

68) Se si ha un piano per C con curvatura $\rho = \rho(s)$, la [illegible] ha la stessa che nelle curve sghembe (è certo possibile, dipende da eq. diff.) e rappresenta il [illegible] alla sup. ad una circoscritta (cioè il piano) ovviamente lo stesso ds^2.

Curvatura geodetica o tangenziale. – Per γ su F, dove $x = x(s)$

definisco $\frac{1}{\rho_g} = \begin{vmatrix} x_s \\ x_{ss} \\ X \end{vmatrix}$ (si vedrà poi il perché del nome)

È indipendente dagli assi e dalle coord. curvilinee per il suo significato geometrico (che poi si trasformerà): 6 volte il vol. del parallelepipedo costruito su x_s (costante sue tangenti), x_{ss} (vettore lungo la normale principale, (lungo $1/\rho$), e su N). È invariante per deformazioni o flessioni: basta far vedere che dipende solo dal ds^2. Prendo coord. ortogonali $(F=0)$, in modo che per γ sia $v =$ costante. Allora $x_s = x_u \frac{du}{ds} = \frac{x_u}{\sqrt{E}}$

$$x_{ss} = \frac{1}{E} x_{uu} - x_u \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)$$

Dunque $\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{(\sqrt{E})^3} \begin{vmatrix} x_u \\ x_{uu} \\ X \end{vmatrix}$ e per le eq. precedenti

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{E^{3/2}} \begin{vmatrix} x_u \\ \left\{ {11 \atop 2} \right\} x_v \\ X \end{vmatrix} = \boxed{\left(\text{se } F=0 \text{ è } \left\{ {11 \atop 2} \right\} = -\frac{E_v}{2G}\right)}$$

$$= \frac{-E_v}{2E^{3/2}G} \begin{vmatrix} x_u \\ x_v \\ X \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-E_v}{2E^{3/2}G} \cdot \sqrt{EG} = \frac{-E_v}{2E\sqrt{G}} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\sqrt{E}\right)_v$$

c. d. d.

Per sapere esprimere più in generale la ρ_g di linea data come eq. $\varphi(u,v)=0$ conviene introdurre i parametri differenziali: [illegible] il 1°. 2

Se due sup. si toccano lungo linea γ hanno ivi ovunque la stessa ρ_g, come segue dalla definizione contenente x_s, x_{ss}, X. Ne segue un semplice significato per ρ_g: si sviluppi la sup. circoscritta a F lungo γ: la curv. geodetica di γ in P è = la ρ curvatura della linea piana dove si porta γ. (infatti ρ_g coincide sulle F e sulle sup. ~~poi sulle si~~ che si toccano lungo γ; poi sulle sup. e sul piano) $\frac{1}{\rho_s} = \begin{vmatrix} x_s & y_s \\ x_{ss} & y_{ss} \end{vmatrix}$ dove nel piano $\rho_g = \rho$ 1

70) Per una F di dato ds^2, e una data funz. arbitraria $\varphi(u,v)$, si chiama par. diff. ogni espressione formata con le derivate della φ, e coi coefficienti di ds^2 (e eventualmente le loro derivate) che sia indipendente dal sist. u,v. (cioè tale che ....). ~~Il par.~~ ~~par. diff.~~ (si chiama ord. d'un p.d. quello della più ~~$\Delta_1\varphi$~~ alta derivata della funz. arbitraria che vi compare)

Analog. si possono definire (e ne vedremo esempi) par. diff. relativi a più funzioni arbitrarie. Definiamo anzitutto il seguente par. diff. primo (del 1° ordine) Δ_1 (di Beltrami)

$$\Delta_1\varphi = \frac{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}{EG-F^2}.$$

Si tratta di provare il suo carattere di par. diff.

[Ho $d\varphi^2 = \varphi_u^2\, du^2 + 2\varphi_u\varphi_v\, du\, dv + \varphi_v^2\, dv^2$. Il valore di λ per cui $ds^2 - \lambda\, d\varphi^2$ è quadrato perfetto è evidentemente indipendente dal sist. di riferimento. Ora esso è determinato da

$$(E-\lambda\varphi_u^2)(G-\lambda\varphi_v^2) - (F-\lambda\varphi_u\varphi_v)^2 = 0.$$

cioè

$$EG-F^2 - \lambda(E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2) = 0$$

da cui ....]. Il par. diff. (primo) misto di φ, ψ è

$$\nabla(\varphi,\psi) = \frac{E\varphi_v\psi_v - F(\varphi_u\psi_v + \psi_u\varphi_v) + G\varphi_u\psi_u}{EG-F^2}.$$

[Il suo carattere di par. diff. segue da ciò che $\Delta_1(\varphi+\mu\psi)$ in particolare è

$$\frac{1}{EG-F^2}\left\{E(\varphi_v+\mu\psi_v)^2 - 2F(\varphi_u+\mu\psi_u)(\varphi_v+\mu\psi_v) \dots\right\}$$

$$= \Delta_1\varphi + 2\mu\nabla(\varphi,\psi) + \mu^2\Delta_1\psi.$$

e siccome ciò deve valere per tutti i sist. di coord. curv.... vien $\nabla(\varphi,\psi)$ invariante...]. Introduciamo anche il par. diff. secondo Δ_2 (che nel piano si riduce al solito Δ_2)

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\left(\frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{\sqrt{\ }}\right)_u + \left(\frac{E\varphi_v - F\varphi_u}{\sqrt{\ }}\right)_v\right\}.$$

Il suo carattere inv. (che qui ci limitiamo ad enunciare) si può verificare in vari modi, p. es.

71) con verifica diretta. Ciò posto per avere ρ_g di $\varphi(u,v)$ = arbitraria, partendo dall'eq. che, per $ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$ è

o p. es. con la trasf. di cilindri come Darboux III p. 200.

$$\Delta_1 \varphi = \frac{E\varphi_v^2 + G\varphi_u^2}{EG}$$

$$\nabla(\varphi,\psi) = \frac{\varphi_v \psi_v}{G} + \frac{\varphi_u \psi_u}{E}.$$

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\left(\varphi_u \sqrt{\frac{G}{E}}\right)_u + \left(\varphi_v \sqrt{\frac{E}{G}}\right)_v\right].$$

quindi

$$\Delta_1 v = \frac{1}{G}.$$

$$\nabla(v, \sqrt{G}) = \frac{(\sqrt{G})_v}{G} =$$

$$\Delta_2 v = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\right)_v = \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} - \frac{(\sqrt{G})_v}{G\sqrt{G}}.$$

Dunque

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{-(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} = \frac{-\Delta_2 v}{\sqrt{\Delta_1 v}} - \nabla\left(v, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 v}}\right)$$

Quindi

$$\frac{1}{\rho_g} = -\frac{\Delta_2 \varphi}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}} - \nabla\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}}\right).$$

Scrivendola in forma esplicita, viene la formula di Bonnet

$$-\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{1}{\sqrt{\Delta_1}}\left\{\left(\frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_u + \left(\frac{E\varphi_v - F\varphi_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_v\right\}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta_1\varphi}}\right) + \cdots\right\}.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{\sqrt{(EG-F^2)\Delta_1\varphi}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{E\varphi_v - F\varphi_u}{\sqrt{(EG-F^2)\Delta_1\varphi}}\right\}.$$

Quindi si ha la form. di Bonnet:

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{F\varphi_v - G\varphi_u}{\sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{F\varphi_u - E\varphi_v}{\sqrt{\quad}}\right\}.$$

Deduciamo ancora il seguente sign. geom. della curv. geod.: coincide con la curvatura ordinaria di γ' in P, indicando con γ' la proi. ort. di γ sul piano tg. in P (non mi preoccupo del segno di ρ_g. $\boxed{\rho_g > 0}$). Ho $\frac{1}{\rho_g} = t \wedge \frac{n}{\rho} \times N = \frac{b \times N}{\rho} =$ (per il teor.ª che prima per γ, γ' applicato al cilindro proiett. fra γ' ortogonale a γ la sup. piana osculatrice e poi Meusnier) $\frac{b \times N}{\rho_0 \cos\Sigma}$ dove ρ_0 è raggio di curv. di

75

γ in P e ε è angolo del piano ~~oss.~~ $t\,n$ con π.

$= \dfrac{\cos\varepsilon}{\rho_0 \cos\varepsilon} = \dfrac{1}{\rho_0}$. c. d. d. Si chiama centro di c.g. di γ in P quello di c. di γ' in P.

Linee geodetiche. - Sono quelle i cui piani ~~os.~~ sono normali a $\mathcal{F}$, cioè i sist. assiali definiti dalle normali a $\mathcal{F}$. Applicando la df. di ρ_g si può anche dire che sono le linee a curvatura geodetica nulla (perchè da $\frac{1}{\rho_g} = 0$ segue x_s, x_{ss}, N complanari, cioè il piano os. a γ per N). La nuova df. ha il vantaggio che si applica anche alle rette di $\mathcal{F}$ che effettivamente si dicono geodet. secondo la nuova definizione.[1] Quanto si è detto sui sist. assiali prova che le dett. della (∞^2) geod. su $\mathcal{F}$ data dipende da eq. diff. ord. del 2° ordine, e che per un pt. generico di $\mathcal{F}$ con data eq. ne passa una.

Eq. diff. delle geodetiche. - ~~Altro geod. ... ...~~

[1] Inoltre ciò prova subito che le geodetiche si conservano nelle applicabilità.

~~e parimenti~~ ... cioè esprimendo ... ~~...~~

Si può scrivere sotto più forme. Accingiamoci a cercare l'eq. $v = v(u)$ delle geodetiche [restano escluse le eventuali geodetiche $u = \text{cost}$: verranno date da $u = u(v)$]. Basta applicare la df. alla formula di Bonnet. Allora essendo $\varphi = \overset{u + v(u) = v = 0}{~~...~~}$ per $v' = \frac{dv}{du}$. ~~...~~ si ha:

$$\left(\frac{F + Gv'}{\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}}\right)_u - \left(\frac{Fv' + E}{\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}}\right)_v = 0.$$

cioè

$$2(E + 2Fv' + Gv'^2)(F_u + G_u v' + Gv'' - F_v v' - E_v)$$

$$- (F + Gv')\frac{\partial(E + \dots)}{\partial u} + (Fv' + E)\frac{\partial\, E + \dots}{\partial v} = 0.$$

Ora, derivando totalmente (sulle geodetiche)

$$(F + Gv')\frac{d(E + \dots)}{du} = (F + Gv')\frac{\partial(\dots)}{\partial u} + (F + Gv')v'\frac{\partial(\dots)}{\partial v}$$

$$= (F + Gv')\frac{\partial(\dots)}{\partial u} + \{(\dots) - E - Fv'\}\frac{\partial(\dots)}{\partial v}.$$

Portando quest'espressione nell'eq. ottenuta,

26)

viene come eq. delle geodetiche

$$(E+2Fv'+Gv'^2)\left(2F_u+2G_u v'+2Gv''-2F_v v'-2E_v+2F_v v'+E_v+G_v v'^2\right)-(F+Gv')\frac{d(E+2Fv'+Gv'^2)}{du}=0.$$

cioè

$$(E+2Fv'+Gv'^2)\left\{2\frac{d(F+Gv')}{du}-(E_v+2F_v v'+G_v v'^2)\right\}$$

$$-(F+Gv')\frac{d(E+2Fv'+Gv'^2)}{du}=0 \qquad (1).$$

Oss. sulle linee nulle. — Loro def. (già note dalle 3. p. d.), cenno di estensione al campo complesso (caso analitico). Su esse $E+2Fv'+Gv'^2=0$. Dunque esse sono geodetiche: del resto anche la def. geom. è verificata, perchè (proprietà analitica) i piani osc. sono ⊥ alle loro tangenti, onde contengono la normale alla sup.

1) Queste linee minime sono nulle perchè $dx^2+dy^2+dz^2=0$. Cioè $ds^2=0$.

Lacuna, ... [illegible]

Le geodetiche come linee di lunghezza minima fra A e B. Si tratta di trovare per $A(u_0\, v_0)$, $B(u_1\, v_1)$ $v=v(u)$ con $v(u_0)=v_0$, $v(u_1)=v_1$ e tale che

$$\int_A^B ds$$

estendentesi sulle linee sia minimo cioè minimizzare

$$\int_{u_0}^{u_1}\sqrt{E+2Fv'+Gv'^2}\,du.$$

La già nota eq. di Eulero per le estremali di per $\int\Phi(u,v,v')du$. $\frac{\partial\Phi}{\partial v}-\frac{d}{du}\frac{\partial\Phi}{\partial v'}$ cioè

$$\frac{\partial\sqrt{\ }}{\partial v}-\frac{d}{du}\frac{\partial\sqrt{\ }}{\partial v'} \quad \text{cioè}$$

$$\frac{E_v+\cdots}{2\sqrt{\ }}-\frac{d}{du}\frac{F+Gv'}{\sqrt{\ }}=0 \quad \text{cioè}$$

$$\cdots-\frac{(F+Gv')_u}{\sqrt{\ }}+\frac{(F+Gv')(E+2Fv'+Gv'^2)_u}{2(E+2Fv'+Gv'^2)\sqrt{\ }}=0$$

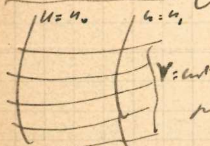
e moltiplicando per $2\sqrt{\ }$ viene la (1) di p. 26. Ciò prova che le linee che danno il minimo vanno ricercate fra le geodetiche (così che l'...

78/ una linea geod.ca è necessario perchè..., tra poco risulterà che sotto certe cond. è anche sufficiente.

Forma geodetica dell'elemento lineare. – Se (in una regione conv. limitata) si prendono a linee u le geod. ∞' geod. e a linee v le loro traiettorie ortogonali ho $F=0$. In più le linee $v=$ cost. risultano a loro volta geod. nulle ... (p. 69) $\sqrt{E}=U(u)$ cioè $ds^2=U^2du^2+G\,dv^2$, cambio il parametro u ponendo $du'=U\,du$ (e riscrivo u) e ho

(1) $$ds^2=du^2+G\,dv^2.$$

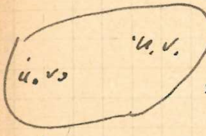
[Viceversa per questo ds^2 le linee u sono geod. e ~~...~~ le v loro traiet. ortogonali]. Ne segue che se prendo un sist. ∞' di geodetiche, e due loro traiet. ortogonali $[u=u_0,\ u=u_1]$ queste staccano su



tutte quelle geod.che archi uguali perchè dati da $\int_{u_0}^{u_1} du = u_1-u_0$.

(Perciò presa la $u=u_0$ in una linea curva ..., e tirate le geod. ⊥, posso costruire l'altra e le loro traiet. ort. $u=u_1$, portano sulle geod. archi uguali perciò due traiet. ortog. di un dato sist. ∞' di geod. si chiamano geodeticamente parallele)

Proprietà di minimo. – Finchè si rimane in una regione dove vale (1) le geod.che realizzano il minimo. Infatti per ogni linea che va da $(u_0\ v_0)$ a (u_1, v_1) con $v=v(u)$, $v_1=v(u_1)$ ho



la lunghezza data da $\int_{(u_0 v_0)}^{(u_1 v_1)} ds$ lungo quella linea cioè

$$\int_{u_0}^{u_1}\sqrt{1+G v'^2}\,du$$ e per le geod.che u_1-u_0

$> di\ (u_1-u_0)$ per $v'\neq 0$).

Altre forme dette

Teoria dell'eq. delle geodetiche. – L'eq. già vista è risolubile rispetto a v'' (già visto a proposito dei sist. assiali) e risulta allora, come si vedrebbe facendo il calcolo,

$$v''-\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}v'^3+\left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}-2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right]v'^2$$
$$+\left[2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right]v'+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=0. \quad (2)$$

Ritroveremo indirettamente le (2) in quanto segue.

Se lungo γ $u=u(s)$ $v=v(s)$, s arco, e γ è geodetica per γ la normale principale = normale sup. cioè $n = \pm N$. Ora su γ: $x_s = x_u \frac{du}{ds} + x_v \frac{dv}{ds}$;

e (Frenet)

$$x_{ss} = x_u \frac{d^2u}{ds^2} + x_v \frac{d^2v}{ds^2} + x_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2x_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + x_{vv}\frac{dv^2}{ds^2} = \pm \frac{N}{\rho}$$

cioè per le eq. fondamentali

$$x_u \frac{d^2u}{ds^2} + x_v \frac{d^2v}{ds^2} + \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \left\{ \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} x_u + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} x_v + DN \right\} + \dots = \pm \frac{N}{\rho}$$

che si scinde nelle

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0$$

e l'analoga (3); poi

$$\pm \frac{1}{\rho} = \frac{2^a \text{ forma}}{1^a \text{ forma}}$$

che è già nota. Quindi le (3) danno una nuova forma delle eq. delle geodetiche

Se si scrivono le (3) riferendo i pti. di γ a un parametro qualunque t, anziché s, viene

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{du}{dt}\frac{dt}{ds}\right) + \left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \dots\right]\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0$$

e l'analoga cioè

$$\cancel{\frac{d^2u}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{du}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} + \text{c.s.} = 0}$$

~~con l'analoga da cui~~ $\cancel{\left(\times \frac{dv}{dt}, \ \times \frac{du}{dt}\right)}$ ~~viene~~

$$\cancel{\frac{du}{dt}\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{dv}{dt}\frac{d^2u}{ds^2} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}} \qquad \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{du}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} + \left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right]\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0$$

e

$$\frac{d^2v}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{dv}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} + \left[\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right]\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0$$

da cui $\times$ la 2^a per $\frac{du}{dt}$ e la 1^a per $\frac{dv}{dt}$ e sottraendo viene

$$\frac{du}{dt}\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{dv}{dt}\frac{d^2u}{dt^2} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\left(\frac{du}{dt}\right)^3 + \left(2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2\frac{dv}{dt}$$

$$+ \left(\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right)\frac{du}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\left(\frac{dv}{dt}\right)^3 = 0 \quad (4)$$

che per $t=u$ si riduce alla (2) della pag. precedente.

Essa è un'eq. sola, mentre le (3) sono due: eppure

82) essa è non solo nec. ma sufficiente perchè una linea sia geodetica. Invero, soddisfatte le (4) si può affermare solo che scritte le (3) $\alpha=0$, $\beta=0$ è $\frac{dv}{ds}\alpha-\frac{du}{ds}\beta=0$. [Però, da $E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\dots=1$, segue, posto prov. $u'=\dots v'=\dots$

$$(E_u u'^2+2F_u u'v'+G_u v'^2)u'+2Eu'u''+2F(u'v''+v'u'')+2Gv'v''$$

$$\cancel{E_v u'^2+2F_v u'v'+G_v v'^2}$$

$$+(E_v u'^2+2F_v u'v'+G_v v'^2)v' = 0.$$

cioè

$$\text{------} - +\,2Eu'\left\{\alpha-\left\{{11 \atop 1}\right\}u'^2-2\left\{{12 \atop 1}\right\}u'v'-\left\{{22 \atop 1}\right\}v'^2\right\}$$
$$\text{-------}\quad +\,2Fv'\left\{\alpha \quad\quad\quad\quad\quad\right\}$$
$$+\,2Fu'\left\{\beta-\left\{{11 \atop 2}\right\}u'^2 - - - -\right.$$
$$+\,2Gv'\left\{\beta - - - \right\}$$

Ora tutti i termini meno quelli in α e β si elidono: p. es. per il coeff. di u'^3 ho

$$E_u-2E\left\{{11 \atop 1}\right\}-2F\left\{{11 \atop 2}\right\}=0$$ come si verifica

p. es. risultando

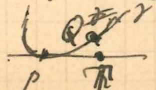
$$E_u-\frac{E(GE_u-2FF_u+FE_v)}{EG-F^2}-\frac{F(-FE_u+2EF_u-EE_v)}{\dots}=0\,]$$

Dunque resta (ho solo enunciato)

$$(Eu'+Fv')\alpha+(Fu'+Gv')\beta=0$$

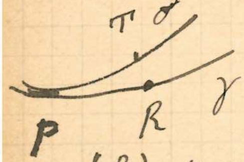
e colla precedente da — (il determ. è $Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2$ generalmente $\neq 0$) $\alpha=\beta=0$. c. d. d.

[Osservo che la (2), che è risoluta rispetto a v'' rimette in evidenza che per P si hanno ∞ geod.....].

Nuovo significato geometrico (intrinseco) della curvatura geodetica. — La 1a f. ass. della sup. ma date l'inv. per applicabilità, si può cercare un significato senza uscire da F. Effettivamente (prescindendo dal segno) su F la c. geod. di γ in P soddisfa alla stessa def. che la curvatura ord. in un piano, pur di sostituire alle rette le geod.che; dove però, per semplicità, intendiamo definita la curv. $\frac{1}{\rho}$ di γ piana in P, agiti nel solito modo, in quella (che ora, semplicemente risulterà c/v.)  ; poi $PQ=PT=\varepsilon$ prop. da curva e tangente [convessi concordanti; omesso] è

84) $\frac{1}{\rho} = \lim \frac{QT}{2\overline{PT}^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2RT}{\varepsilon^2}$ (1).

Su Γ, naturalmente alla retta tg. è da sostituire la geod. g. tg. in P. ~~Le~~ Sia P(u, v). Per ε piccolo ho (trascurando gl' infinitesimi di 2° ordine) in R e riferendo γ al suo arco



$$u(R) = u + \varepsilon\left(\frac{du}{ds}\right)_P + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)_P$$

coll'analoga

e in T

$$u(T) = u + \varepsilon\overline{\left(\frac{du}{ds}\right)}_P + \frac{\varepsilon^2}{2}\overline{\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)}_P$$

dove le nuove derivate vanno però calcolate su g e perciò sono soprassegnate. Per il contatto in P si ha ($du : dv = d\bar{u} : d\bar{v}$ e apportando di metrici $\frac{du^2}{ds^2} + \frac{dv^2}{ds^2} = \cancel{\dots}$ (ecc. viene) (per di far cessare gli ordini)) $\frac{d\bar{u}}{ds} = \frac{du}{ds}$, ...;

Quanto a $\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)_P$ lo ricavo da (3). Quindi posto

$u(R) - u(T) = \delta u$ ecc. (a meno di inf. ...)

$$\delta u = \frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)_P + \left\{{11 \atop 1}\right\}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\left\{{12 \atop 1}\right\}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \left\{{22 \atop 1}\right\} \dots\right\}$$

su γ

ossia con una notazione già introdotta

$$\delta u = \frac{\varepsilon^2}{2}\alpha. \qquad \delta v = \frac{\varepsilon^2}{2}\beta.$$

(le derivate entro α e β van calcolate su γ)

Dunque

$$\overline{RT} = \frac{\varepsilon^2}{2}\sqrt{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2}$$

dove E, F, G andrebbero calcolati in R, ma si possono calcolare in P (a meno di infinitesimi ...). Dunque intanto

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2RT}{\varepsilon^2} = \sqrt{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2} \qquad (2)$$

Intanto, se ne ricava che pel piano questa è la curvatura ordinaria, perchè allora $ds^2 = du^2 + dv^2$, i simb. di Christoffel vanno a zero, $\alpha = \frac{d^2x}{ds^2}$ e il 2° membro è

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}$$

che è appunto la curv. ord. Ma voglio mostrare che sempre

$$\left|\frac{1}{\rho_g}\right| = \lim \frac{2QT}{\varepsilon^2} \qquad (1)$$

e mi basterà far vedere che il 2° membro di (2) vale appunto $\left|1/\rho_g\right|$. Suppongo che γ sia v = cost. ...

86) linee ortogonali allora su γ

$dv=0 \quad d\sigma = \sqrt{E}\, du$ cioè $\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}}, \frac{dv}{ds} = 0.$

$$\alpha = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right) + \left\{ {11 \atop 1} \right\} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 ; \beta = \left\{ {11 \atop 2} \right\} \left(\frac{du}{ds}\right)^2.$$

Ora per $F=0$ è

$$\left\{ {11 \atop 1} \right\} = \frac{E_u}{2E}, \quad \left\{ {11 \atop 2} \right\} = -\frac{E_v}{2G}.$$

cioè

$$\alpha = -\frac{E_u}{2E\sqrt{E}} \frac{1}{E} + \frac{E_u}{2E}\frac{1}{E} = 0.$$

$$\beta = -\frac{E_v}{2G}\frac{1}{E} = \frac{-E_v}{2EG}.$$

Quindi

$$\sqrt{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2} = \sqrt{G \cdot \frac{E_v^2}{4E^2G^2}} = \frac{E_v}{2E\sqrt{G}} =$$

$$\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} = -\frac{1}{\rho_g}. \text{ c.d.d.}$$

Teoremi sull'$\int$ dell'eq. delle geodetiche. – In generale non si sa integrare. Ma si hanno teor. importanti sulla possibilità di $\int$. Proveremo che se dell'eq. $\Delta_1\theta = 1$ nelle sup. considerate θ si conosce un $\int$ costenente una cost. arb. energica a (non additiva) [essenzialmente], così delle sup. considerate si hanno tutte le geod. [per $+ \int (a)$] ~~coordinate ora~~ senza nessuna quadratura.

Provo anzitutto che $\Delta_1 \varphi = f(\varphi)$ è nec. e suff. perchè le linee $\varphi = \text{cost.}$ siano geod. parallele. Invero, anzitutto proviamo che, se così è, a coord. le $\varphi = \text{cost.}$ e le loro traiett. ortogonali (geodetiche) $\psi = \text{cost.}$ ho $ds^2 = \bar{E}\, d\varphi^2 + \bar{G}\, d\psi^2$, dove ora (come già sappiamo p. 78). $\bar{E} = \bar{E}(\varphi)$. Ora $\Delta_1\theta = \frac{\bar{G}}{\bar{E}\bar{G}} = \frac{1}{\bar{E}}$. Quindi viceversa $\Delta_1(\varphi) = \text{funz.}(\varphi)$. – E viceversa c.d.d. Se così è posto $\theta = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta_1\varphi}}$, ho p. es. $\frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{d\theta}{d\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ cioè perciò $\Delta_1\theta = \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 \Delta_1\varphi = \frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\varphi} = 1$. Quindi per linee geod.$^{\text{e}}$ parallele noi posso sempre ridurre a $\Delta_1\theta = 1$. (1) [In tal caso si è ricordano dirsi che θ è l'arco di geodetica]

Da questo pure segue che se ho ∞^1 linee integrali di (1) le loro traiet. ortogonali sono geodetiche. – Ma la determinazione effettiva di un individuo dell'$\int$ ...

88) di un'eq. diff. Quindi la conoscenza di 1 $\int$ di $\Delta_1\theta=1$ si può dire intanto che porta mediante un'eq. diff. ord. del 1° ordine a ∞ geodetiche. - Ma se conosco un $\int$ con una cost. essenziale a, dall'identità rispetto ad a $E\theta_v^2-2F\theta_u\theta_v+G\theta_u^2=EG-F^2$ derivando rispetto ad a (che non entra in E, F, G) viene:

$$E\theta_v\theta_{va}-F(\theta_u\theta_{av}+\theta_v\theta_{au})+G\theta_u\theta_{au}=0$$

cioè $\nabla(\theta,\theta_a)=0$ che esprime ~~...~~ che le linee $\theta=$ costante e le $\frac{\partial\theta}{\partial a}=$ costante sono traj. ort. le une delle altre!! Quindi, fissato a, ho in $\theta(u,v,\bar a)=$ cost. e $\left(\frac{\partial\theta}{\partial a}(u,v,a)\right)_{a=\bar a}=$ cost. 2 sist. ort. ed il 2° è di geodetiche. Ottengo così le geodetiche $\frac{\partial\theta}{\partial a}(u,v,a)=b$, al variare di a e b. Le due cost. a, b lasciano prevedere che si hanno così tutte le geodetiche del pezzo di sup. considerato (eq. di 2° ordine; due costanti). Effettivamente si può mostrare che Quindi le cdz. di ortogonalità di p. 39 per $M\,du+N\,dv=0$, cioè ...

è così, e così che tra le ∞ geod. trovate ve n'è una per P con tg. assegnata: basta vedere che essa è una delle traj. ortogonali in questa condizione; così che esista linea $\theta(u,v,a)=c$ (cost.) per $P(u_0,v_0)$ con data tg. Imporre la tg. equivale a imporre su essa $\left(\frac{dv}{du}\right)_P:\left(-\frac{\theta_u}{\theta_v}\right)_P=$ funz (u_0,v_0,a) che contiene effettivamente a se $\psi(a)$ [illegible]. Da $E\theta_v^2-2F\theta_u\theta_v+G\theta_u^2=EG-F^2$ per $\theta_u=\lambda\theta_v$ con λ indip. da a viene $\cancel{E\theta_v^2}(E-2F\lambda+G\lambda^2)\theta_u^2=EG-F^2$ e θ_u non conterrebbe a, θ_v neppure, e θ la conterebbe solo additivamente). Quindi tutto si riduce a trovare a e c tali che $c=\theta(u,v,a)$ funz $(u_0,v_0,a)=$ valore prefissato K. La 2ª dà a e poi la 1ª c. c.d.d.

Applicazione alle sup. di Liouville. - Sono quelle per cui: $ds^2=(U(u)+V(v))(du^2+dv^2)$. Ridotto il ds^2 a tale forma, si applica il teor. precedente. Invece la $\Delta_1\theta=1$ si riduce a ...

138 $(U+V)\theta_v^2 + (U+V)\theta_u^2 = (U+V)^2$ cioè

$$\theta_u^2 + \theta_v^2 = U+V \qquad (1)$$

Cerco di soddisfarla con $\theta = \alpha(u) + \beta(v)$. Viene

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = U+V; \text{ cioè } \alpha'^2 - U = V - \beta'^2 = \text{cost. } a.$$

Da cui

$$\alpha = \pm\int\sqrt{U+a}\,du, \quad \beta = \pm\int\sqrt{V-a}\,dv$$

$$\theta = \pm\int\sqrt{U+a}\,du \pm \int\sqrt{V-a}\,dv.$$

La $\frac{\partial\theta}{\partial a} = b$ darà

$$\pm\int\frac{du}{\sqrt{U+a}} \pm \int\frac{dv}{\sqrt{V-a}} = b.$$

che è l'eq. delle geodetiche in termini finiti [1]

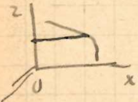
1) Oss. - Sui sistemi isotermi. - Per comprendere in che consiste la particolarità dei ds^2 di Liouville è bene osservare che ogni ds^2 si può ridurre alla forma isoterma

$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$ (e allora i sist. u e v si dicono isotermi). Supposta per tanto F analitica, (e escluso il caso di un solo sist. di linee minime [cioè delle sup.ci isotrope]) si ha che prefissato il ds^2, se $\varphi(u,v) = $ cost. è un sist. di linee minime, l'altro è $\bar\varphi = $ cost. (perchè è definito dall'eq. diff. coniugata). Riferita la F alle linee minime si ha allora

$ds^2 = 4\lambda\, d\varphi\, d\bar\varphi = 4\lambda(dp + i\,dq)(dp - i\,dq) = \lambda(dp^2 + dq^2)$.

I parametri che fanno assumere la forma isoterma si chiamano isometrici. - Per l'isotermia basta avere $ds^2 = (U\,du^2 + V\,dv^2)$.

Caso delle sup. di rotazione. - Ad esse si applica quanto precede, perchè rientrano tutte fra le sup. di Liouville. Invero se v è la longitudine (a partire dal



piano xz) e l'eq. del profilo in questo piano - riferito all'arco u - è $x = f(u)$, $z = g(u)$ (cosicchè $f(u)$ è il raggio corrisp. all'arco u) ho $x = f(u)\cos v$, $y = f \operatorname{sen} v$, $z = g$.

$$ds^2 = (f'^2 + g'^2)\,du^2 + f^2\,dv^2 = du^2 + f^2\,dv^2.$$

Posto $du = f\,du_1$, cioè $u_1 = \int\frac{du}{f}$. Viene

$ds^2 = f^2(du_1^2 + dv^2)$. Quindi applico quanto sopra per $U = f^2$, $V = 0$ e ho l'eq. delle geod.che

$$\int\frac{du_1}{\sqrt{f^2 + a}} \pm \int\frac{dv}{\sqrt{-a}} = b.$$

Posta la cost. a, per realtà, $= -k^2$ stesso, e ritornato u, l'eq. finale viene

$$\int\frac{du}{f\sqrt{f^2 - k^2}} \pm \int\frac{dv}{k} = b'.$$

(Dove, fissato k^2, e poi col segno +, al variare di b, vengono tutte linee con l'eq. $v = A(u) + $ cost.: quindi quelle che si

Geod. si porta per rotazione. Il significato di K è dato dal teor. di Clairaut che per ogni data geodetica è costante il prodotto del raggio del parallelo per il seno dell'angolo di inclinazione sul meridiano. Invero per $ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$ detto φ l'angolo di linea con le linee u, si ha

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u}{ds\sqrt{E}\,\delta u} = \frac{\sqrt{E}\,du}{ds}\text{; dunque } \sin\varphi = \sqrt{1-\frac{E\,du^2}{ds^2}} = \frac{\sqrt{G}\,dv}{ds}\text{; } \cancel{\frac{\sqrt{G}\,dv}{\sqrt{E}\,du}}$$

~~[illegible]~~ $\cancel{\frac{dv}{du}}$ ~~[illegible]~~ $\cancel{\frac{dv}{du}}$ scritto

~~[illegible]~~ $= \frac{f\,dv}{ds} = \frac{f\,dv}{\sqrt{du^2+f^2dv^2}}$. D'altro lato dall'eq. finita, risoluta rispetto a K^2 si ha

$$\frac{du^2}{f^2(f^2-K^2)} = \frac{dv^2}{K^2}\text{; } \frac{K^2du^2}{f^2} = dv^2(f^2-K^2)\text{;}$$

$$K^2\left(\frac{du^2}{f^2}+dv^2\right) = dv^2 f^2\text{; } K = \frac{f\,dv}{\sqrt{\frac{du^2}{f^2}+dv^2}} = \cancel{\frac{f^2dv}{\sqrt{du^2}}}$$

$$= \frac{f^2dv}{\sqrt{du^2+f^2dv^2}} = f\sin\varphi. \text{ c.d.d.}$$

(Si osservi però che la condizione $r\sin\varphi = K$ espressa dal teor.ª di Clairaut non è in altro sufficiente per le geodetiche: ove p. es. è soddisfatta lungo i paralleli, ma questi non sono geodetiche a meno che i relativi raggi non siano normali, cioè (pensando alle ~~[illegible]~~ prof.) non siano di massimo o di minimo.

Caso delle quadriche. Anche le quadriche sono sup. di Liouville, quindi anche su esse si possono determinare le geodetiche. Mi riferisco alle quadriche a centro (per le altre si può procedere analogamente). Prendo le quadriche confocali

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0.$$

e introduco le coord. ellittiche (u, v, w) già note. Allora, tra il ds^2 nello spazio $= dx^2+dy^2+dz^2$, nelle coord. ellittiche si scrive

$$ds^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{(u-v)(u-w)}{f(u)}\,du^2 + \cdots\right]$$

dove

$$f(u) = (a^2+u)(b^2+u)(c^2+u).$$

Invero ~~[illegible]~~ si tratta di un sistema triplo ortogonale e ~~[illegible]~~ il vettore x si ha ~~[illegible]~~

95)

$x_u \times x_v = 0$, ecc. quindi $ds^2 = x_u^2 du^2 + \dots$. Ora da essendo u, v, w le tre radici dell'eq. cubica in λ sopra scritte, si ha identicamente

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \dots - 1 = \frac{(u-\lambda)(v-\lambda)(w-\lambda)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)} \qquad (1)$$

da cui (se le x e le coord. di un dato pt.) se ne passa a forma intera, e pongo $\lambda = -a^2$, $\lambda = -b^2$, $\lambda = -c^2$.

$$x^2 = \frac{(a^2+u)(a^2+v)(a^2+w)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$$

con le analoghe. ~~D'altra parte~~ da cui derivando logaritmicamente

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2}\,\frac{x}{a^2+u} ; \quad y_u = \frac{1}{2}\,\frac{y}{b^2+u} , \quad z_u = \frac{z}{2(c^2+u)} \text{ ecc.}$$

D'altra parte, derivando l'identità (1) rispetto a u, ~~(perché ...)~~ ho

$$\frac{2xx_u}{a^2+\lambda} + \frac{2yy_u}{b^2+\lambda} + \frac{2zz_u}{c^2+\lambda} = \frac{(v-\lambda)(w-\lambda)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}$$

e posto $\lambda = u$,

$$\frac{2xx_u}{(a^2+u)^2} + \frac{2yy_u}{(b^2+u)^2} + \frac{2zz_u}{(c^2+u)^2} = \frac{(u-v)(u-w)}{f(u)}$$

cioè per le precedenti

$$\Sigma x_u^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(u-v)(u-w)}{f(u)} \qquad \text{c.d.d.}$$

Perciò, p. es. su una $w = \text{cost.}$ è

$$ds^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(u-v)(u-w)}{f(u)}\,du^2 + \frac{(v-u)(v-w)}{f(v)}\,dv^2$$

~~cioè~~

$$= \frac{u-v}{4}\left\{ \frac{(u-w)\,du^2}{f(u)} - \frac{(v-w)\,dv^2}{f(v)} \right\}$$

e si ha anche che è un el.[to] di Liouville sostituendo le nuove variabili $u_1(u)$ e $v_1(v)$ con

$$du_1 = \sqrt{\frac{u-w}{f(u)}}\,du ; \qquad dv_1 = \sqrt{\frac{-v+w}{f(v)}}\,dv.$$

Le geodetiche sono date da

$$\int \frac{du_1}{\sqrt{\frac{u}{4}+a}} \pm \int \frac{dv_1}{\sqrt{-\frac{v}{4}-a}} = b$$

cioè (in variabili)

$$\int du\,\sqrt{\frac{u-w}{\left(\frac{u}{4}+a\right)f(u)}} \pm \int dv\,\sqrt{\frac{-v+w}{\left(-\frac{v}{4}-a\right)f(v)}} = b.$$

cui, sostituito $4a$ invece di a.

$$\int du\,\sqrt{\frac{u-v}{(u+a)f(u)}} \pm \int dv\,\sqrt{\frac{v-w}{(v+a)f(v)}} = b.$$

Operazioni sull'eq. diff. di Gauss per le geodetiche.

Per giungere poi a teor.ᵃ importante su Δ geodetici ci occorron 2 op: la prima (qui solo enunciata V. Bianchi I. p. 282-83), è quella che indicando con θ l'angolo (anche col segno (cioè angolo di u positivo crescente + (senso contrario?)) nella pagina + del piano tg.) fra la direzione della linea u e quella di geodetica, si può mettere l'eq. delle geod. sotto la forma

$$d\theta = \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left[\left(\frac{F}{E} E_u + E_v - 2F_u\right)du + \left(\frac{F}{E}E_v - G_u\right)dv\right]$$

Noi la dovremo applicare per $ds^2 = du^2 + G dv^2$ e allora sarà $d\theta = \frac{-1}{2\sqrt{G}} G_u dv. = -(\sqrt{G})_u\, dv.$

Cenni sulle coord. geodetiche polari[1]. - Fisso P su sup.; e considero le ∞^1 geodetiche uscenti da esso, nelle varie direzioni: fissatane una, le altre sono individuate dall'angolo con quella che chiamo v. Su ognuna poi posso individuare i pt. mediante l'arco u contato da P. Ho così un sist. di coord. analogo alle polari nel piano: si chiamano polari. Le linee u sono le geod.ᶜʰᵉ uscenti da P. le v (ottenute da P portando segmenti costanti) (anche geodetici [1]) le linee v ~~potrebbe dimostrare per~~ - per quanto non risulti immediatamente dalle df. sono geodeticamente parallele; ed ds^2 è già (senza variare il parametro u) della forma $ds^2 = du^2 + G dv^2$. Invero, siccome sulle linee u ~~ds~~ è $ds = du$, vuol dire rispetto a $ds^2 = E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2$ è $E = 1$.

Resta a dimostr. $F = 0$. Ora le formule di Bonnet danno per le linee u ($v =$ cost). geodetiche

$$\left(\frac{F}{\sqrt{G}}\right)_u - \left(\frac{E}{\sqrt{G}}\right)_v = 0 \;;\; \text{cioè} \quad (F)_u = 0.$$

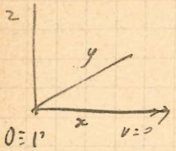
Dunque intanto $F = F(v)$. Poi $(x, x(0,v)$ etc. sono le coord. di P. Dunque $x_v(0,v)$ etc $= 0$. cioè $F(0,v) = \Sigma x_v(0,v)\, x_u(0,v) = 0$. e siccome è funzione (per v arbitrario) di sola v cioè $F = 0$. c.d.d.

Dico che risulta $\sqrt{G} = 0$ per $u = 0$.

$(\sqrt{G})_u = 1$ per $u = 0$.

[1] Altri chiamano così le linee a curvat. geod. costante.

98). Diremo pure $\xi \equiv O \equiv P$, $\eta \equiv ON$, $x \equiv$ tg. a $v=0$,



ho per i pt. di F prossimi a O, (a meno di inf. superiori) su una determinata $v = \text{cost.}$

$$x = u x_u + \frac{u^2}{2} x_{uu}$$

(calcolando le derivate su quella geodetica) cui (x_u etc. sono i cos. dir. di tg. alla linea u, x_{uu} (formule di Frenet) sono quelli della normale principale, cioè – trattandosi di geodetica di $\pm N$ diviso per ρ, cioè $0, 0, \frac{\pm 1}{\rho}$).

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \\ \zeta = \pm \dfrac{u^2}{2\rho} \end{cases}$$

a meno di inf. del terz'ordine

da cui

$G = u^2 + \dots$ cioè $\sqrt{G} = u + \dots$ che dimostra l'enunciato.

Teor.ª di Gauss sulla curv. totale di un Δ geodetico

Per un'area Σ si definisce curvatura totale

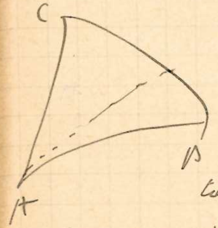
$$\Omega = \int_\Sigma K \, d\sigma.$$

Il teor. dice che per un triangolo geodetico ABC (definito supponendo che i tre archi di geod. limitino effettivamente un pezzo di superf.)

$$\Omega = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi.$$

indicando con [illegible] gli angoli del triangolo.

Mi riferisco a coord. geod. polari con l'origine in A e come $v=0$ assumo la AB.



Ad un Ω (con cui [illegible] estesa all'area Σ) è $d\sigma = \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$.

come si giustifica in modo usuale del tutto rigoroso assimilando la regione limitata da $u, u+du, v, v+dv = \text{cost.}$ a un parallelogr. Allora $d\sigma = (\text{el.}^{\text{to}}\text{ d'arco su linea } u).(\text{id. } v)$. sen angolo $= \sqrt{E}\, du . \sqrt{G}\, dv . \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}} = \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$. Quanto a K, essendo ora $ds^2 = du^2 + G dv^2$ la formula appresa a p. 40 dà

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \left\{ + \left(\frac{G_u}{\sqrt{G}}\right)_u \right\} = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \left(\frac{G_u}{\sqrt{G}}\right)_u = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\sqrt{G}\right)_{uu}.$$

Dunque

$$\Omega = \iint_\Sigma \left(-\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu}\right)\cdot\sqrt{G}\, du\, dv =$$

$$-\Omega = \int_\Sigma (\sqrt{G})_{uu}\, du\, dv = \int dv \int_0^u (\sqrt{G})_{uu}\, du$$

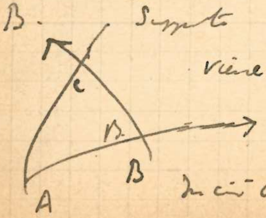
facendo la prima integrazione da 0 a u (corrispondente a un punto dell'arco BC), e quella relativa a v da $v=0$ a v = corrisp. al lato AC, cioè $v = \hat{A}$

$$-\Omega = \int_0^{\hat{A}} dv \left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{calcolato su } BC}}{(\sqrt{G})_u} - 1\right)$$

Ora per $(\sqrt{G})_u$ applico l'eq. di Gauss a p. 96 secondo la quale vale $-\frac{d\theta}{dv}$ e cioè

$$\Omega = \int_0^{\hat{A}} dv \left(\frac{d\theta}{dv} + 1\right) = \int_0^{\hat{A}} d\theta + dv.$$

$= \hat{A} + \theta_C - \theta_B$ dove p.es. θ_B è il valore di θ in B. Supposto BC orientato + (sulla geodetica) viene $\theta_B = \pi - B$, $\theta_C = C$, e



$$\Omega = A + B + C - \pi.$$

Da cui consegue il teor. di Gauss: la curvatura totale di un Δ geodetico vale su ogni sup. l'eccesso della somma dei suoi angoli interni etc. Se ... nelle regioni ove è $K >, =, < 0$, risulta l'eccesso $>0, =0, <0$ ecc.... In particolare se la sup. è a K costante, l'area di ogni Δ geodetico è :: all'eccesso. (il coeff. di :: $= K$): già visto per $K=0$, e anche sulla sfera (K costante >0).

§26. Generalità su alcune corrisp. puntuali fra sup. ~~trasf.~~ rapp. conformi e applicabilità:-

Comincio con un'osservaz. generale (di cui ci siamo già serviti). Se ho corrisp. puntuale tra $F(u,v)$ e $F'(u'v')$ cosicchè $u'=u'(u,v)$, $v'=v'(u,v)$ risulta le F' risulta anche riferita a u,v e pt. corrispondenti di F e F' provengono dagli stessi (u,v). Quindi, volendo, si può sempre immaginare che la corrisp. porga riferendo F e F' agli stessi para- metri e chiamando corrisp. pt. (u,v). ~~[illegible]~~ ma è super- flua (anche Suppongo per analiticità analitiche (come avviene)

Rappr. conforme. - Una corrisp. (o rappresentazione) di F su F' si dice conforme se conserva gli angoli: per il seguito

Riducendoci al caso di sopra, se per F e F'

$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$

$d\bar{s}^2 = \bar{E}\,du^2 + 2\bar{F}\,du\,dv + \bar{G}\,dv^2$

siccome tra ~~pt.~~ fasci di tg. corrisp. risulta subordinata come sappiamo, π, e ora uguaglianza si corrispondono le tg. isotrope, e cioè tra F e F' le linee minime, e le $ds^2=0$ $d\bar{s}^2=0$ dovranno coincidere cosicchè $E:F:G = \bar{E}:\bar{F}:\bar{G}$, e viceversa.

Un caso particolare è quello dell'uguaglianza (applicabilità) ~~[illegible]~~ $\frac{\S 6}{104}$

Si possono sempre due sup. (prescindendo dalle sviluppabili isotrope) rappresentare conformemente l'una sull'altra? Sì: basta alle due linee minime dell'una e dell'altra famiglia dell'una far corrispondere idem idem sull'altra. Il ragionamento geometrico testè fatto prova che la corrisp. è conforme. ~~Sup~~ ~~Nelle applicaz~~ (i cambi ottengono tutte) Ora ciò si può conseguire nel seguente modo. Se (sist. isotermi)

$$ds^2 = \lambda^2 (dp^2 + dq^2) \quad ; \quad d\bar{s}^2 = \bar{\lambda}^2 (dp'^2 + dq'^2).$$

siccome le linee minime sono

$$p \pm iq = \text{cost.} \qquad p' \pm iq' = \text{cost.}$$

ottengo tutte le trasf. conformi ponendo

$$p+iq = f(p' \pm iq') \text{ e quindi } p-iq = \bar{f}(p' \mp iq)$$

Dove si tratta di funzioni derivabili e poi analitiche. Sfuggì al ragionamento il caso dove c'è un solo sistema di linee minime cioè svil. isotrope.

104/. Aggiunta a p. 103 ⊥. Perciò se S e S' sono in rappr. conforme P e P' due pt. corrispond., P_1 e P_1' id. id. inf. vicini si ha $\frac{PP_1}{P'P_1'} =$ cost. quando è fisso P; ciò che si enuncia dicendo che una corrisp. conforme, nell'infinitesimo, conserva inalterati i rapporti delle distanze, cioè opera come una similitudine (con la quale corrisp. divide la proprietà di conservare gli angoli). Ma il fattore di proporzionalità $PP_1 : P'P_1'$ è generalmente funzione di P. Quando esso è costante, le due sup. sono tali che una è simile (in senso classico) a una applicabile sull'altra: poichè se $\frac{P'P_1'}{PP_1} = k$. $\frac{ds'^2}{ds^2} = k$. e se pongo $x' = \frac{x}{\sqrt{k}}$, etc. ho $\cancel{ds'^2} =$ $ds'^2 = ds^2$.

Applicabilità. – Se ne è già parlato a più riprese, definendo come sup. appl. o isometriche due sup. con lo stesso ds^2. Si è anche già parlato dell'applicabilità in senso fisico, cioè della possibilità di flettere una delle due sup. isometriche, considerata come velo flessibile e inestendibile, sull'altra. Effettivamente si può dimostrare (Levi, sulle deformaz. delle sup. flessibili e inestendibili. Torino Atti 1908) ~~la pr~~ che (in regioni abbastanza piccole) sup. isometriche (con lo stesso ds^2) sono sempre applicabili, cioè che si può realizzare la loro applicabilità nel senso sopra detto (evitando posizioni intermedie irraggiungibili per continuità), con la sola restrizione che per $K > 0$ può darsi che l'una sia applicabile sulla simmetrica dell'altra.

Qui osserviamo solo che l'applicabilità (continuando a chiamar così l'isometria) è caso part. della rappr. conforme); che ~~2 sup. isogonali~~ si conservano K, curvatura geodetica, geodetiche etc. Nasce così la possibilità di studiare una geom. sulla sup. cioè geom. delle proprietà invarianti per

106/ applicabilità: Noi non possiamo qui entrare in un ordine d'idee, e nemmeno studiare il problema generale dell'applicabilità: che consiste essenzialmente in questo. Date due sup. che generalmente non sono applicabili (p. es. pensando a k) nasce il doppio problema di

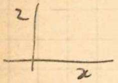
1) riconoscere se due sup. sono applicabili; e ~~determinare tutte~~ le essenzialmente, di trovare tutte le sup. applicabili su una data.

Di questo problema difficile basti qui notare come s'imposta: trovare tutte le sup. che hanno sostanzialmente un dato ds^2; cioè i valori di $D\,D'\,D''$ dalle eq. di Gauss e di Codazzi.

Qui ci limitiamo a qualche esempio.

Il teor.^a di Bour. - Ogni elicoide è applicabile su una sup. rotonda (qualunque sia la generatrice dell'elicoide). ~~Infatti~~ Infatti ~~chiamiamo~~ le eliche traiettorie risultano su F a curvatura geod.^a costante (dato che ognuna si come su si stessa nel moto elicoidale; quindi i piani tg... su si stessi, e le prosi. ort. si coincid. id.); in più se g è una di esse, le varie geod. ad essa $\perp$ uscenti dai suoi punti si sovrappongono le une alle altre, e così gli estremi di archi cost. portati su esse, cosicchè le linee luoghi di questi estremi sono altre eliche traiettorie; cioè le eliche traiettorie sono anche geod. parallele. Poi preso come linee v e le u... dia ~~...~~ ... può ridursi al ds^2 a $du^2 + G\,dv^2$ e siccome le linee v (u = cost.) hanno ~~...~~ ρ_g costante viene $\dfrac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} = f_{uy}(u)$. cioè $(\log\sqrt{G})_u = \log_u(u)$. cioè $G = UV$ che, cambiando v si riduce a G_2U. Perciò... c. d. d.. Si noti che le linee u = cost. qui sono le eliche; sulle sup. rotonde i paralleli: dunque le eliche si distendono sui paralleli. Per es., dimostr. l'applicabilità dell'elicoide ...

considerate sul catenoide. Ho, per il primo $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = hv$. $ds^2 = du^2 + (u^2+h^2)\,dv^2$. È dunque applicabile su ogni sup. rotonda tale che per il suo prof.



profilo meridiano sia $x^2 = u^2+h^2$. Allora

$$x_u = \frac{u}{\sqrt{u^2+h^2}}\ ;\ z_u = \frac{h}{\sqrt{u^2+h^2}}\ ;\ ;$$

$$dz = dx\,\frac{h}{u} = \frac{h\,dx}{\sqrt{x^2-h^2}}\ ;\ z = h\log\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right) - h\log h$$

(ho scelta la cost. arbitraria in modo che per $x = h$ venga $z = 0$). $z = h\left(\log\left(\frac{x}{h} + \sqrt{\frac{x^2}{h^2}-1}\right)\right)$;

$$e^{z/h} = \frac{x}{h} + \sqrt{}\ ;\quad e^{-z/h} = \frac{1}{} = \frac{x}{h} - \sqrt{}$$

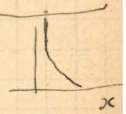
$$\frac{2x}{h} = e^{z/h}+e^{-z/h}\ ;\quad x = \frac{h}{2}\left(e^{z/h}+e^{-z/h}\right),$$ catenaria rispetto a z. Per $u = 0$ si ha l'asse dell'elicoide; e per $x = h$, cioè il parallelo sito in $z = 0$, che è il cerchio di gola (per esso x minimo anche $e^{z/h}$: $e^{-z/h}$; $e^{2z/h} = 1$, $z = 0$.)

Altri es.ⁱ di sup. applicabili si vedranno nella teoria delle sup. a curv. costante.

§ 27. Sup. a curvatura costante.

Quelle a $K = 0$ sono già note (svil.). ~~Quelle cost~~ Quelle che offrono cose interessanti sono dunque esclusivamente quelle con $K > 0$ (sup. a K cost. positiva, es.pio sfere) e quelle con $K < 0$ (dette anche pseudosferiche). Per queste ultime posto $K = -1/R^2$, R si chiama il raggio (si suol dire per $K > 0$, si chiama raggio quello per cui $K = 1/R^2$). Un esempio di sup. pseudosferica è la pseudosfera, sup. rotonda generata dalla rotazione intorno all'asintoto della trattrice (curva tale che risulti cost. ($=R$) il segmento di tangente compreso fra il pt. di contatto e una retta fissa)[1]: essa ha per eq. parametriche (in xz) $x = R\operatorname{sen}\varphi$ (dove φ è l'angolo della tg. con l'asse x)

$z = R\left(\log \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right)$, dove z è l'asintoto. Viene



~~$ds^2 = R^2\left[\cos^2\varphi + \left(\frac{\ldots}{\operatorname{sen}\varphi} - \operatorname{sen}\varphi\right)^2\right]d\varphi^2$~~

~~$= R^2 d\varphi^2 \left\{ 1 - 2\operatorname{sen}\varphi \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} + \operatorname{cot}^2\frac{\varphi}{2} + 2\right)\right\}$~~

[1] Cfr. p. es. Loria. Spezielle Kurven. p. 562 (3)).

chiamando u l'arco ho

$$du^2 = R^2\left\{\cos^2\varphi + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} - \operatorname{sen}\varphi\right)^2\right\} d\varphi^2$$

$$= R^2\left\{1 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi} - 2\right\} d\varphi^2 = R^2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi} - 1\right) = \cancel{R^2 \cdots} d\varphi^2 :$$

$$\frac{R^2\cos^2\varphi\, d\varphi^2}{\operatorname{sen}^2\varphi} = \frac{dx^2}{x^2} R^2. \quad \text{Perciò } u = R \log x + u_0$$

cioè per $v_0 = 0$, (cioè incominciando da un'origine conv. il computo degli archi) $x = e^{u/R}$. Perciò per la sup. rotonda ho $ds^2 = du^2 + e^{2u/R} dv^2$. Allora

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}} = -\frac{\left(e^{u/R}\right)_{uu}}{e^{u/R}} = -\frac{1}{R^2}. \text{ Quindi}$$

ho proprio sup. a curv. costante negativa.

<u>Il problema della determinazione di tutte le sup. a K costante</u> è un problema che non si sa risolvere. Vediamo di farci un'idea in che consista la sua difficoltà: Riferiamoci, per fissare le idee a sup. <u>pseudosferiche</u> ($K<0$): per le altre valgono cose analoghe. Osservo anzitutto che le <u>eq. di Gauss-Codazzi per le linee di</u> curvatura, sostituendo ~~alle~~ ai simboli di Christoffel le loro esp. espressioni prendono la forma

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u + \left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v\right\}$$

e

$$\left(\frac{\mathcal{D}}{\sqrt{E}}\right)_v - \frac{\mathcal{D}''}{G}\left(\sqrt{E}\right)_v = 0$$

$$\left(\frac{\mathcal{D}''}{\sqrt{G}}\right)_u - \frac{\mathcal{D}}{E}\left(\sqrt{G}\right)_u = 0.$$

D'altra lato, in coord. ortogonali $N_u = -\frac{\mathcal{D}}{E} x_u$ con l'analogo e dalla formula di Rodrigues, applicata alle linee di curvatura, ($dx = R\,dN$), viene

$$x_u = R_2\left(-\frac{\mathcal{D}}{E} x_u\right) \text{ cioè } \quad \mathcal{D} = -\frac{E}{R_2}, \ \mathcal{D}'' = -\frac{G}{R_1}.$$

Perciò le form. di Codazzi divengono

$$\left(\frac{\sqrt{E}}{R_2}\right)_v = \frac{1}{R_1}\left(\sqrt{E}\right)_v \; ; \; \left(\frac{\sqrt{G}}{R_1}\right)_u = \frac{1}{R_2}\left(\sqrt{G}\right)_u$$

cioè

$$\cancel{\text{Alle}}\ \left(\log\sqrt{E}\right)_v\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{(R_2)_v}{R_2^2}$$

con l'analoga.

II) ~~non definitiva~~ Supposto ora $\frac{1}{K} = -R^2$ (costante)

pongo $R_1 = R \cot\theta$, $R_2 = -R\,tg\,\theta$; dove θ sarà una certa funzione di u e v. Le eq. di Codazzi divent[a]no

$$(\log\sqrt{E})_v \frac{1}{R}(\cot\theta + tg\,\theta) = \frac{R\left(-\frac{1}{sen^2\theta}\right)\theta_v}{R^2\,\frac{cos^2\theta}{sen^2\theta}}$$

$$(\log\sqrt{G})_u \frac{1}{R}(-\cot\theta - tg\,\theta) = \frac{-R\,\frac{1}{cos^2\theta}\,\theta_v}{R^2\,\frac{sen^2\theta}{cos^2\theta}}$$

cioè

$$\begin{cases} (\log\sqrt{E})_v = -\dfrac{sen\,\theta}{cos\,\theta}\,\theta_v \\ (\log\sqrt{G})_u = \dfrac{cos\,\theta}{sen\,\theta}\,\theta_v \end{cases}$$

Cioè

$$\sqrt{E} = cos\,\theta \cdot f(u)$$
$$\sqrt{G} = sen\,\theta \cdot g(v).$$

$$ds^2 = cos^2\theta\, f^2 du^2 + sen^2\theta\, g^2 dv^2$$

che mutato subito ponendo $R\,du_1 = f\,du$, ecc. si ha

$$ds^2 = R^2(cos^2\theta\, du^2 + sen^2\theta\, dv^2). \quad (1)$$

forma che si potrà dunque dare al ds^2 pseudosferico di

raggio R, con riferimento alle linee di curvatura.

Bisogna ancora imporre l'eq. di Gauss, cioè

$$-\frac{1}{R^2} = -\frac{1}{R^2\, sen\,\theta\, cos\,\theta}\left\{\theta_{uu} - \theta_{vv}\right\}. \quad \text{Cioè}$$

$$\theta_{uu} - \theta_{vv} = sen\,\theta\, cos\,\theta. \quad (2)$$

Viceversa dato un ds^2 in queste condizioni, esiste sempre una sup. pseudosferica che lo ammette, u, v come linee di curvatura (determinata a meno di movimenti), perchè la 2ª forma fondamentale risulta determinata ($D = -\frac{E}{R\cot\theta}$, $D' = 0$, $D'' = \frac{G}{R\,tg\,\theta}$, e le eq. di Gauss e Codazzi sono soddisfatte). (la curvatura calcolata dal ds^2 viene $-\frac{1}{R^2}$ dalla (2).) Quindi la conoscenza di una sup. pseudosferica equivale a quella di una soluzione della (2) e per conoscere tutte le sup. pseudosferiche occorrerebbe avere l'integrale generale della (2).

Non c'è però nessun procedimento che

dia un tale integrale. Si hanno però dei procedi-
menti di trasformazione che permettono da
ogni integrale della (2) di ricavarne un altro
dipendente da due cost. arbitrarie (e con ciò
con altri si conoscono integrali dipendenti da
tante costanti arbitrarie quante si vuole). Accen-
no qui alla trasf. di Bäcklund. Sia θ un $\int$ della
(2): consideriamo una funzione φ che assoggettata alle
due condizioni

$$\begin{cases} \varphi_u + \theta_v = \dfrac{\cos\theta \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta \cos\varphi}{\cos\sigma} \\[2ex] \varphi_v + \theta_u = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma \cos\theta \operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma} \end{cases}$$

dove σ è una cost. arbitraria

Esiste una tal funzione? Sì[1] se è soddisfatta la cond.
di integrabilità cioè

$$-\theta_{vv} + \frac{(-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma \cos\theta\cos\varphi)\,\theta_v}{\cos\sigma} + \frac{(\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi)\,\varphi_v}{\cos\sigma} =$$

$$-\theta_{uu} + \frac{\cos\theta\cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma}\,\theta_u -$$

$$-\frac{-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma \cos\theta\cos\varphi}{\cos\sigma}\,\varphi_u$$

cioè tenuto conto della (2) e delle form. di trasformaz.

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{(-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\varphi)(\cos\theta \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta\cos\varphi)}{\cos^2\sigma}$$

$$+\frac{(\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi)(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma \cos\theta \operatorname{sen}\varphi)}{\cos^2\sigma} = 0$$

cioè

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{-\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}^2\sigma \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\cos^2\sigma} = 0$$

cioè $\operatorname{sen}\theta\cos\theta \left\{1 + \dfrac{-\cos^2\sigma}{\cos^2\sigma}\right\} = 0$

La determ. effettiva di φ si potrebbe vedere che dipende da una eq. di Riccati.

che va bene. Dunque la condizione di integrabilità è
soddisfatta. Allora φ dipende da due cost. arbitrarie: σ e quella introdotta dall'integrazione del sistema in φ; ~~Ciò per l'aspetto analitico della trasfor~~mazioni di Bäcklund; non stiamo qui a cercarne il significato geometrico. — Osserviamo piuttosto che le (2) si prestano a varie questioni di geom. diff.

[1] questa condizione ha anche sufficiente risulta da teoremi ~~sui sistemi alle derivate parziali~~ delle eq. a diff. totali (cfr. p. es. i § 2-3 di Bianchi: Lezioni) e sui gruppi anche per ciò che concerne l'integrazione effettiva (dove si ~~presentano dei sistemi in involuzione~~. — da la stessa (2), come risulta da un calcolo analogo. si pone $\lambda = \operatorname{arc\,tg} \varphi/u$.

116) o tutte quelle o nelle forme equivalenti

$$2\theta_{\alpha\beta} = \sin 2\theta$$

che si trovano posto $\alpha = \frac{u+v}{2}$, $\beta = \frac{u-v}{2}$.

$\theta_u = \frac{1}{2}(\theta_\alpha + \theta_\beta)$; $\theta_{uu} = \frac{1}{4}(\theta_{\alpha\alpha} + 2\theta_{\alpha\beta} + \theta_{\beta\beta})$

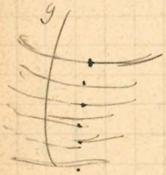
$\theta_v = \frac{1}{2}(\theta_\alpha - \theta_\beta)$ $\theta_{vv} = \frac{1}{4}(\theta_{\alpha\alpha} - 2\theta_{\alpha\beta} + \theta_{\beta\beta})$

da cui

$$\theta_{\alpha\beta} = \sin\theta\cos\theta .$$

Applicabilità di due sup. con la stessa C.C. -

Se vuoi è possibile assegnare tutte le sup. a c.c. si può assegnare il ds^2: e risulterà che per K uguale, sono applicabili. Prendo una geodetica g, come linee u



e le sue traiet. ortogonali; e precisamente chiamo u l'arco a partire da g; le linee u = cost. (linee v) risultano geod. // alle g. Ho $ds^2 = du^2 + G\,dv^2$ Preso per v sia l'arco mis. da certa origine.¹) Per $u=0$ $ds = dv$ cioè $\sqrt{G}(0,v) = 1$. E poichè g è geodetica $\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{G}}$ = 0. per $u = 0$. cioè $(\sqrt{G})_u = 0$ per $(0,v)$. Fin dunque, siamo a K = costante (limitandoci al caso $K \neq 0$) ho

¹) meglio dire: se g chiamo v l'arco; poi chiamo u..... ; le linee u vengono.... le linee v vengono.

per $K>0$. $K = \frac{1}{R^2}$

$$-\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}} = \frac{1}{R^2}$$ cioè (eq. a coeff. costanti) con integr. (sol. $\sin\frac{u}{R}$: $\cos\frac{u}{R}$)

$$\sqrt{G} = \varphi(v)\cos\frac{u}{R} + \psi(v)\sin\frac{u}{R}.$$

da cui

$$(\sqrt{G})_u = -\frac{1}{R}\varphi\sin\frac{u}{R} + \frac{1}{R}\psi\cos\frac{u}{R}$$

che deve essere = 0 per $(0,v)$ da cui $\psi(v) = 0$. E da $\sqrt{G}(0,v) = 1$ viene $\varphi(v) = 1$. Dunque

$$\sqrt{G} = \cos\frac{u}{R} \quad e$$

(1) $ds^2 = du^2 + \cos^2\frac{u}{R}\,dv^2$.

Per $K<0$ ho $K = -\frac{1}{R^2}$.

$$\sqrt{G} = \varphi(v)\,\mathrm{ch}\frac{u}{R} + \psi(v)\,\mathrm{sh}\frac{u}{R}.$$

$$(\sqrt{G})_u = \frac{1}{R}\varphi\,\mathrm{sh}\frac{u}{R} + \frac{1}{R}\psi\,\mathrm{ch}\frac{u}{R}.$$

Per $u=0$ viene $\psi = 0$; poi $\varphi(v) = 1$. e risulta

(2) $ds^2 = du^2 + \mathrm{ch}^2\frac{u}{R}\,dv^2$.

Ciò prova l'asserto. Ora osserviamo in più che

Le sup. a $K>0$ sono quelle applicabili sulle sfere; le sup. con $K<0$ sulle pseudosfere.

118) 1) per ridurre il ds^2 alla forma considerata si è scelta ad arbitrio una geodetica g e su essa un punto (quello da cui si ~~[illegible]~~ cominciano a contare gli archi v). Quindi la riduzione, per data F, del ds^2 per alla forma (1) può avvenire in ∞^3 modi diversi.

È una sup. con la curv. $K =$ cost. sono applicabili in ∞^3 modi diversi (potendosi far corrispondere geod. arbitrarie ecc...). Anzi, potendosi scegliere ad arbitrio il In particolare una sup. [illegible] e poi quelle u, vengono fissati g e A su [illegible] e la corrisp., è con $K =$ cost. è applicabile su sé stessa in ∞^3 modi diversi isometrici (~~[illegible]~~ isometrie [illegible] [illegible] un verso di g [illegible]) diversi. Tali [illegible] si chiamano anche movimenti

2) le sup. ~~[illegible]~~ $K =$ cost. sono di Liouville: (hanno un ds^2 di rotazione). quindi si possono determinare le loro geodetiche.

Rappr. conforme di una sup. pseudosferica su un semipiano (Poincaré). - A chiarire quanto dirò dopo sulla geom. non euclidea, daremo una semplice rapp. conforme di sup. pseudosf. (per ~~[illegible]~~ pseudosfere[1]) su un semipiano. In $ds^2 = du^2 + e^{2u/R} dv^2$ pongo $x = v$, $y = Re^{-u/R}$.

[1] ove vengono tutte le altre pseudosfere.

Ho $dv = dx$; $dy = -e^{-u/R} du$.

$$ds^2 = \frac{dy^2}{~~[illegible]~~} e^{\frac{2u}{R}} + dv^2 e^{2u/R} = \frac{R^2(dx^2 + dy^2)}{y^2}.$$

Interpretando x, y ~~[illegible]~~ come coord. cartesiane ortog. vale $y > 0$ dunque semipiano positivo. Ho corrisp. biunivoca, pur di ammettere valori qualunque per u e v cioè pur di considerare la trattrice (diversamente u) meridiana indefinitamente estesa e v qualunque cioè la pseudosfera ~~[illegible]~~ ripetuta infinite volte** (tutte le rotazioni possibili). $y = 0$ si chiama "retta limite". La rappresentazione è conforme (per la :: di [illegible] in $ds^2 = \frac{R^2}{y^2}(dx^2 + dy^2)$ e in $ds^2 = dx^2 + dy^2$). Alle geodetiche [illegible], cioè per esempio

$$\int \frac{du}{e^{u/R}\sqrt{e^{2u/R} - K^2}} \pm \int \frac{dv}{K} = b$$

(**) a ognuna di queste corrisponde una striscia d'ampiezza 2π [illegible] di y.

cioè

$$\int \frac{-dy}{\sqrt{\frac{R^2}{y^2} - K^2}} \pm \frac{dx}{K} = b$$

I punti pt. corrispondenti (al limite) ai pt. $u = \infty$. cioè ai pt. all'infinito della pseudosfera

120) o ancora

$$\int \frac{-y\,dy}{\sqrt{R^2-k^2y^2}} \pm \frac{x}{k} = b.$$

$$\frac{\sqrt{R^2-k^2y^2}}{k^2} \pm \frac{x}{k} = b\,;\quad \sqrt{\frac{R^2}{k^2}-y^2} \pm x = bk.$$

~~e posto $\frac{R}{k} = c^2$, $bk = \pm a$. $c^2 = y^2 + (\pm x \mp \beta)^2 = 0$;~~

e posto $R^2/k^2 = c^2$; $\quad bx = \pm k\,a$;

$$c^2 - y^2 = (x-a)^2. \qquad (^*)$$

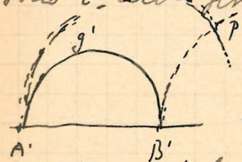
(*) al limite vengon anche le rette ⊥ alla retta limite ~~per ... e ... limite~~

secondo le quali le geodetiche hanno per immagini (semi) cerchi col centro nell'asse y, cioè ortogonali alla retta limite.

Da ciò si desume subito che due geodetiche di T possono o non aver pt. comuni, o averne uno proprio o uno all'infinito (in segno i due cerchi avere un pt. comune, e quindi la relativa

La differenza che per sup K=0 (piano)

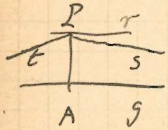
tangenti alla retta limite): in questo caso si dice che le geodetiche sono parallele. Per un punto generico P ~~...~~ passano due geodetiche parallele a una g data (sull'imag. sono i cerchi per P' e tg. a g' risp. in A' e B').



Riferendo i cerchi immagini per P' alle loro tg. in P', è intuitivo che dette t_1', t_2' le tg. alle geod. //, i cerchi corrispondenti a un angolo $t_1' t_2'$ sono secanti; e quelli all'altro esterni: quindi su T si ha che le geod. uscenti da P nelle varie direzioni vengono dalle // a g divise in due angoli, l'uno di geod. secanti; l'altro di esterne. (vedi le p. 123 e sgg.

Legame con la g. n. e. 1 Ricordiamo il post. V (se due rette a, b secate da c formano con questa da una stessa parte angoli la cui somma è < 2 retti, esse si incontrano).]3 Si può provare a costruire la geom. senza tale postulato, e allora vengono

124 delle Gp diverse da quelle della geom. euclidea (o che, per meglio dire, le comprendono). P.es. si ~~fin. contiche~~ (non ci si pronuncia sulla validità o meno di qual postulato) ~~dimostra che la somma dei 3 angoli di un △ è $\leq 2\pi$; e che ~~se ciò~~ come avviene in un triangolo, avviene in tutti.~~ Così ~~come~~, si trova quanto segue. ~~Per P~~ Dati P e g, esistono rette per P non incidenti g (le ⊥ alla ⊥ PA a g); ne esistono

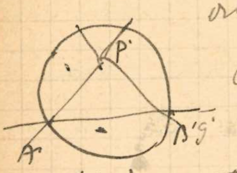


incidenti a g (tutte quelle che congiungono P con pt. di g.); si hanno così p.es. nell'angolo fra PA e r due classi, di cui si prova che si può applicare il post. della cont. e ne segue l'esist. di s per g tale che tutte le rette fra AP e s sono incidenti. e le altre no: analog. per sym. t (escludiamo ~~Ammesso~~ il post. di Euclide $s \equiv t$): s e t si definiscono // a g: vengono due angoli, st. e per uno di essi ha incidenza a g. per l'altro no.

Bogi

Rappr. geodetica di Beltrami. - Tutto ciò riesce ancora più chiaro ricorrendo alle grandi espressioni piane (di Beltrami) delle pseudosfere (o p.es. di una tramite delle altre sup. pseudosferiche). Chiamo π il piano di cui è opera (immagine p.es. orizzontale) e lo immagino ottenuto come proiez. stereogr. di sfera Σ dal suo punto più elevato O: intero: viene soltanto la mezza sfera, limitata dal piano per O e rette limite, che sega centro massimo γ: le imag. delle geod. d. ? sono su questa sfera i (semi)cerchi ortogonali a γ (per la isogonalità della proiez. stereografica) cioè ottenuti con piani ⊥ al piano di γ. Disponiamo p. es. questa sfera in modo che tale piano α venga orizzontale, e rappr. le semisfera su α proiettando ortog. su ~~γ~~ α: vengono i pt. interni a γ e le geodetiche sono rappresentate da rette. È questa

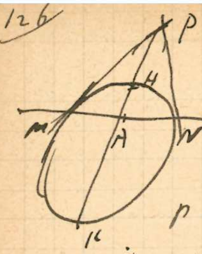
124) Tale rappr. si chiama geodetica (ma non conforme) (in generale si chiama geod. ogni rappr. che conservi le geodetiche: enuncio il teor.ª di Beltrami che solo le sup. a c. c. sono rappr. geod. sul piano, e quello del Dini, che se due sup. sono rappr.[te] geod. l'una sull'altra, o si ha il caso ovvio di sup. uguali o ~~simili~~ simili, oppure sono entrambe di Liouville). I punti all'infinito di F sono rappresentati (v. il teorema) dai punti di γ. Perciò si chiama la rapp. ottenuta delle geod. per P rette di che (rispetto a γ), e, le due geod. per P parallele a g (in corrisp. P'A' e P'B')



Notiamo anche come si hanno in immagine le isometrie di F in sè. Dico che sono le omografiche (movimenti) ~~movimenti~~ di γ in sè (e perciò dell'interno in interno di γ), che corrisp. punti all'infinito di 2 tg.

Ricordare il teor.ª dei sistemi omolti corrisp.

corrisponde ecc.). Intanto ogni isometria di F in sè ha per imag. una corrisp. dell'interno di γ in sè che conservi le imag. delle geodetiche cioè le rette: dico che è omografica (per quanto si sappia solo che soddisfa alla def. di omogr. dentro γ): infatti detti A e A' due pt. corrisp. la corrisp. fra le rette per A e per A' (tg. a sistemi, per il teor. generale sulle corrispondenze (...)) è π; idem per B e B'; quindi se C e C' sono corrisp. si può immaginare con intersez. di rappr. omologhe in fasci proiettivi: con cui teor. dir rappr. e non omin. che è rappr.). Con tale, anzi la corrisp. si estende a tutto il piano, e (quindi continua) al limite γ è trasformato in sè. Viceversa dico che ogni corrisp. omografica di γ in sè (e perciò dell'interno in interno) è imag. di movimenti. Per p. 118 basta mostrare che ve ne sono ∞ portanti A a in A'a' (A e A' interni). Ora, se M, N $\equiv \gamma . a$ e M', N' $\equiv \gamma a'$ (in ordine qualunque), detto P il polo di



a, e H.K ≡ γ . PA e
H'K' ≡ γ . P'A' (ci vorrebbe qua-
a lymen) è necc. che si corrispond.
per MNH, M'N'H'. Vi sono ne compre
P|P', PH|P'H', ~~...~~, A|A'; cioè a|a'.
E per la doppia possibilità di M'N', H'K'
segue c.d.d.]

Dato come esempio

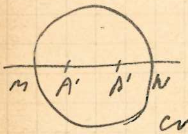
Vediamo ancora nella rapr. geod. come si rappresentino ~~gli~~ ~~...~~ i circoli geodetici della pseudosfera. Uno di essi è il l. g. dei pt aventi dist. geod. K da O, e si può immaginare ottenuto da un punto P mediante un movimento continuo che sovrappone le geod. OP alle altre geod. uscenti da P. portano P in P, ecc. Im imag. sarà da studiare la traiettoria di P' per le omogr. che mantengono inalterato O'. Come le sue polari e le due intersez. (imag.) H, K con γ. Il

fasci-schiere ... γ via

H, K le d. coniche unite in tutte quelle omogr. (HK, γ, O'H.O'K), dunque tutte, cioè ogni conica del fascio-schiera scorre in sé stessa; dunque essa è traiettoria: i circoli geodetici hanno dunque per imag. coniche bitg. (in pt. ~~imag.~~) immag. coniugati a γ. Facendo tendere, se F, O all'infinito, ~~le imag.~~ i circoli geodetici (che sono traiett. ort., come si vede, delle geod. uscenti da O) diventano al limite, le traiett. ortogonali di un sistema di geod. parallele (cosiddetti oricicli). Passando al limite nell'immagine, viene che l'immagine di un oriciclo è una conica a contatto 4-punto con γ.

Notiamo ancora come si esprima, nell'immagine la dist. geod. fra due punti A, B.
Intanto, osserviamo che (immaginata, come si è detto la pseudosfera ricoperta, ecc. ...) per

128/ due pt. qualunque di una piano. si può passare una e una sola geodetica. (~~nondimeno se una sup. qualunque~~ il solo fatto ~~per 2 qualunque due le geod. dipendenti da~~ 2 ~~cost. arbitrarie non permette una~~ Si può dunque parlare delle dist. geod. oggettive di AB. Ora ma è data da



$$AB = k \log (A'B'MN)$$

con k costante. Invece ~~$(A'B'MN)$~~ ~~è invariante per le omografie mutanti la conica in sè, e così è la sola (perchè se $(A'B'MN) = (\bar{A}'\bar{B}'\bar{M}\bar{N})$ le proi. mutanti qui in sè $A'MB'$ e $\bar{A}\bar{B}$ in $A'B'$, certo esistenti, v.s. mutanti A' in $\bar{A}'$) Dunque~~ $d(A,B)$ è una funzione di A', B' che deve riprodursi invariata se l'arco geod. $AB = CD$, cioè se esiste una omogr. di g in sè che porti A', B' risp. in C', D'. Ora le cond. nec. (e suff.) perchè ciò avvenga è che $(A'B'MN) = (C'D'PQ)$ (anche suff. perchè alla ∞^1 omogr. certo esistenti che porti $A'|C'$, $A'B'|C'D'$ porta C' in D'). Dunque, ogni inv. pesi. (cioè f pure) unico funzione di $(A'B'MN)$. Dovrà essere $d(AB) = f((A'B'MN))$.

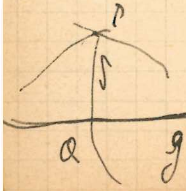
Siano per $ABCD$ allineati c'è $AB + BC = CA$, ma che $f = k \log$. [illegible] N alt. se vuol $f\left(\frac{A'M}{B'M}\right) + f\left(\frac{B'M}{C'M}\right) = f\left(\frac{A'M}{C'M}\right)$ cioè, posto il 1° rapporto $= x$ e il secondo $= y$ $f(x) + f(y) = f(xy)$. [Si badi che il k è lo stesso su tutte le rette, perchè presi valori uguali per $(A'B'MN)$ su rette diverse deve venire lo stesso valore per dist. agg. AB]) e

Analog.te si trova che ~~la dist.~~ geodetica di l'angolo di due geod.che a, b uscenti da P è il bir.to alle quattro rette a, b e tg. (cioè) con da P al cerchio. La dimostr. è la stessa. (con un fattore costante) (v. sotto per dim. diretta)

13) Oss. – Se si approfondisce (pag. Bianchi I. 644) si troverebbe per il la prima costante $K = \frac{R}{i}$, e per le rette $K = \frac{i}{2}$. x) In base a ciò si vede che per la perp. di due geod. ortogonali deve essere, indicando con h', k' le tg. $\frac{\pi}{2} = \frac{i}{2}\log(a'b'h'k')$ cioè $-i\pi = \log(\ldots)$ e $(a'b'h'k') = e^{-i\pi} = -1$. cioè a geod.che ortogonali corrispondono rette coniugate e viceversa.

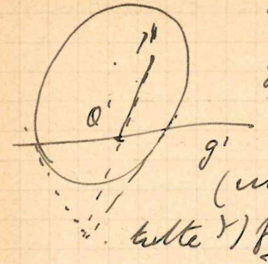
Oss. 2a. – Nella rappr. geod. si può a g sostituire una conica proiettiva e rimane tutto invariato. (punti si corrispondano gli interni delle due coniche).

Aggiungiamo ancora un'oss. sull'angolo di parallelismo, semiangolo α delle due geod.che (asintotiche) per P parallele a g. [1]



Da P si può condurre una geod $PQ \perp g$ (nell'immag. coniugata al polo di g): si può

Fondamentale ... vale $\pi/2$



dunque parlare della dist. geod. δ di P da g. Ebbene, l'angolo di parallelismo è (come solo per g fissa, ma su tutte γ) funzione della distanza geodetica

x) Limitiamoci a dimostrare il 2° fatto. Parto dalla formola di Laguerre, secondo la quale l'angolo θ di due rette r, s (in un piano) vale $\frac{i}{2}\log(rshk)$ dove h, k sono le rette che ~~vanno~~ ai pt. ciclici [Invero per $y = mx$, $y = m'x$, posto $\alpha = \frac{i}{2}\log(m m' i, -i)$, viene $e^{-2i\alpha} =$

$$\frac{(i-m)(i+m')}{(i+m)(i-m')} = \frac{mm'+1+i(m'-m)}{mm'+1-i(m'-m)} = \cancel{1+tg\,\theta}\ \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$$

$= \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$, dunque θ e α differiscono per mult. di 2π cioè coincidono]. Ora siccome la rappr. tra F e la sfera Σ è conforme, l'angolo θ di due geod. $g_1 g_2$ uguaglia l'angolo dei cerchi corrisp. su Σ, cioè delle loro tg. cioè delle r, s, si ha, per quanto precede, indicando con h, k le rette isotrope per il pt. rs. $\theta = \frac{i}{2}\log(rshk)$. Ora, quando si proietta ortog. Σ sul piano di γ, r e s

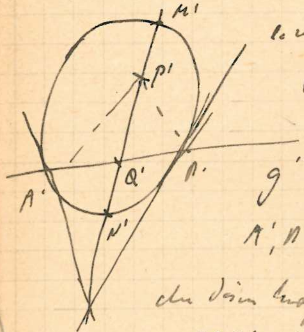
132)

si pros. sulle tracce dei piani che contengono i cerchi, cioè sulle rette del piano ρ g'_i e g_i coniug. di g_i e g_i. Quanto a h, k (della sfera) esse si proiettano sulle rette che da $g'_i g'_i$ vanno agli ~~pti ciclici di ρ (...): il birapporto~~ ~~rette ...~~ toccare il cerchio γ (per le proprietà generali delle proiezioni): il birap. è inalterato.

Dunque $\vartheta = \frac{i}{2} \log (g'_i g'_i \; 2 g_i)$.

Il teor.ª di Laguerre ha interesse anche per sé stesso. È così mostrato che nel piano gli angoli si misurano in modo molto analogo che nelle ipp. pseudosferiche (con le varianti che non c'è bisogno di pensare per l'immaginario e che i 2 pti. ciclici sostituiscono il cerchio γ.

Senza attardarci a esaminare esplicitamente la natura di questa funzione, basti osservare che nell'imag. le rette P'Q' e g' sono coniugate: quindi coniugati P' e Q' (M' e N')



g' è ben definita dalla cond. di passare per Q' e esser coniug. a P'Q': segue allora anche l'altra M', N' cioè i quattro raggi per P' che danno luogo all'angolo 2α. È al variare di P'Q'M'N' π coincide tutto v.rie π a sé stesso, cioè α è funzione di ϑ.

Dato come esercizio

Qui si riprende dopo p. 22

4 Anzi, si ha che quello che avviene una volta avviene tutte. Quindi vi sono due diverse Geometrie:

1) quella che ammette il post. di Euclide e allora sempre $s \equiv t$. (geom. ~~non~~ euclidea)

13') Quella in cui si nega il post. di Euclide (3° t) : geom.a non euclidea, sviluppata ~~da~~ nella prima metà del secolo scorso particolarmente da Lobacefski e Bolyai. Storicamente ebbe grande importanza il problema se il post. V fosse o no vero : ~~dal. del punto di vista teorico, significa solo se è vero il negarlo~~ e si fecero molti tentativi addirittura di dimostrarlo (cioè di stabilirlo come conseguenza degli altri postulati euclidei). Ricordiamo, p.es., e storicamente importante, quello del padre Gerolamo Saccheri (1667-733). Ma tutti questi tentativi - fra cui ricordiamo anche quelli di Legendre - per quanto abbiano fatto maturare la questione - rimasero infruttuosi, nel senso che nessuno è mai riuscito a dimostr. il post. V come conseguenza degli altri. - Invece un passo essenziale si fece

quando si cercò di sviluppare la geom. senza ammettere né negare il post. V. (ciò specialmente ad opera di Lobacefski e Bolyai.)

Il 2° tipo di geom. fu approfondito e se ne trovarono varie proprietà. Rimaneva però ancora aperta in sostanza - ~~ne pure~~ ancora la vecchia questione; cioè la geom. non euclidea è logicamente possibile? Cioè negando il post. V, non vi è contraddizione cogli altri post. euclidei? Che contraddizione non vi sia lasciava già presumere il fatto che nei successivi sviluppi della g. n. e. non si era mai giunti a trovarne. Ma la prima prova logica (poi completata altrimenti) è dovuta a Beltrami nel suo Saggio di interpretazione della G. n. e. (Giorn. di Battaglini t. 6. 1868). Consiste in sostanza nell'osservare (come vedremo poi in maggiori dettagli) che

136/ come si potesse riuscire più precisamente in
base a quanto precede sia come sup. pseudosferica
(ex. pseudosfera) valgono i post. euclidei [piani]
sostituendo alle ~~geod.~~ [rette] le geodetiche (2 pt. uniti da
1 geod., possibilità di sovrapporre mediante
movimenti (applicabilità) (più oggetti, ecc.); ma
il post. di Euclide non vale (ne c'è costi
che per P 2 geod. // a g, come nella g. n. e.
di Lobatschefski). Quindi [almeno 2 cose; 1°] gli altri post. di
Euclide ed è la negazione del 5° non
implicano contraddizioni, cioè è logic.
possibile la g. n. e. allo stesso titolo della
euclidea; 2° la g. piana n. e. vale sulla
pseudosfera. (~~Completare~~:

Così p. es. in g. n. e. si dimostra che la
somma degli angoli di un Δ ~~vale~~ è $< 2\pi$:
ciò si d'accordo con quanto sappiamo della
sup. pseudosferiche: dove $|\cancel{area}| = R^2(A+B+C-\pi) =$

$\left(-\frac{1}{R^2}\right)$. par a 1.

A complemento di quanto precede aggiungiamo
2 osservazioni.

1). Negando il post. di V, ~~si trovano possibili, solo~~
~~le geom.~~ i vari geometri meno recenti, hanno trovato
come possibile solo le geom. n. e. di Lob.-Bol.
(in sostanza a cominciare da Saccheri) ma:
cammin in questo hanno tutti ammessi
la infinità delle rette. Si può provare a sil.
la geom. elementare senza presupporre né il post. V.
né la infinità delle rette (ammettendo le
altre ipotesi); allora si trova che, oltre
alla g. e. e alle g. n. e. di Lob.-Bolyai è
possibile un nuovo tipo di geom. n. e.,
la cosiddetta g. ~~di~~ n. e. di Riemann, dove
$A+B+C-\pi > 0$; e che vale (in regioni limitate)
sulle sup. a c. c. > 0 (superficie sferica). } per ipotesi ... ellittica

2). La g. n. e. di Lob. si può interpretare nel piano pro:

138) ellittico, come si è visto. come geom. dei pt.
interni a γ, ecc. in relazione con le pseudosfere.
Da un punto di vista astratto (senza passare
per il tramite delle pseudosfere) si può
dunque considerare come un piano n. e.
di L. o S. la regione interna a γ, dove si
conviene di chiamare dist. di 2 pt.
$\frac{k}{2}\log(\ldots)$ e angoli di due rette $\frac{i}{2}\log(\ldots)$.
~~I punti dove ..~~ Questa geom. (così astratta)
coincide con la geom. di Lob. - Bolyai: La
metrica così stabilita (cioè legge di mi:
surare le distanze e gli angoli) si chiama cay:
leyana: Ella conica γ si è l'assoluto.[1]
Si potrebbe vedere ora anche per le g. n. e.
di Riemann si è una interpretazione a-
naloga sostituendo a γ con una conveniente metrica cayleyana una ellisse im:
maginaria (e allora tutti i punti del
piano di γ appartengono al piano n. e.)

Tutto ciò si estende allo spazio; e si
ha così nello spazio, introducendo una con:
veniente quadrica come assoluto, i modelli
cayleyani con la possibilità di costruire
una g. n. e.

[1] e al limite si può dimostr. che si può
ottenere l'assoluto proprio circolare (ossia a
partire dalla Lob. né dalla Riem.)

140) Superficie d'area minima: probl. di Plateau

Alla def. nota si può sostituire questa: sono le sup. a curvatura media nulle.

Dalle formule (p. 50) del

$$H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}$$

e ... che rispetto alle ast. ($D = D'' = 0$) queste sono ... ~~... (... $D' \neq 0$)~~ è ($F = 0$) ... $H = 0$ e viceversa.

Ma qui vogliamo solo fare qualche considerazione sul probl.^ma di Plateau. La sua risoluzione ~~...~~ (dim.^ne dell'esistenza, e procedimento per l'effettiva determinazione della sup. minima determinata a un dato contorno) si può ritenere che sia dovuta al Bernstein, in lavori più generali sulle eq.^ni non lineari ellittiche, i vari suoi lavori, che non si possono ritenere del tutto privi di ogni obiezione: anche nell'ultimo fasc. dei Math. Ann. vi è una sua nota

per rispondere a obiezioni. Una teoria completa in parte appoggiata a lavori di Bernstein, in parte originale è dovuta a C. Müntz M.A. 94. 1925: ivi si trovano citati i lavori precedenti di Bernstein.

Qui ci occuperemo per ragioni di tempo solo di un problema più ristretto, cioè al probl. di Plateau per contorni alquanto appiattiti, nel senso che preciseremo più avanti. ~~Ma intanto vo~~gliamo dimostr. l'unicità (non si tratta ognora dell'esistenza) della (eventuale) sup. minima terminata a un dato contorno. Precisamente dimostreremo (seguendo in sostanza un proced. di Steiner Werke II. p. 298) che dato un contorno Γ che si proietti ortogonalmente su xy in ... non si possono avere due sup. minime passanti per Γ.

142. Ma intanto vogliamo senza presupporre contorni appiattiti, dimostr. l'unicità (ossia si tratta dunque ancora dell'esistenza) delle eventuali sup. minima terminate a un dato contorno. Precisamente dimostrare tale unicità per un contorno Γ che si proietti ortogonalmente p. es. su $x\,y$ in γ: allora non si può che una sup. minima per Γ per la quale $\exists\, z$ sia $f(x.y)$ univoca nell'interno di γ." Vi è una dimostr. di Steiner (Werke II p. 298.) dove si considerano le sup. che realizzano un minimo (relativo) di area. La dimostr. che segue, e ci darà occasione di trovare altri risultati, riguarda invece le sup. minime (sodd. all'equazione $(1+p^2)t - \dots = 0$) senza preoccuparci se realizzino o no il minimo dell'area. Supposto che vi siano due sup. z, $\bar z$ colle derivate 1e e 2e continue.

cioè richieste sia sulla sup. $z = z(x.y)$ e sulla $\bar z = \bar z(x,y)$. Se le sup. sono distinte cioè la diff. $\varphi = z(x.y) - \bar z(x.y)$ non è id. nulla dentro γ (~~e allora non è nemmeno costante, poichè su γ~~ nulla al contorno $\varphi = 0$), non è costante ... vicino punto

Cenno della dimostr. di Steiner. Se f e f_1 realizzano il minimo con aree α e β ($\alpha \geq \beta$) ... $(x_0 y_0)$ ... $z = \frac{f + f_1}{2}$ si ha una area $< \frac{\alpha+\beta}{2}$ perchè

$$\sqrt{1+p^2+q^2} + \sqrt{1+p_1^2+q_1^2} \geq \sqrt{1+\left(\frac{p+p_1}{2}\right)^2+\left(\frac{q+q_1}{2}\right)^2}$$

come si può verificare (ma Steiner vi è arrivato con proced.to geometrico). Si ha così $\alpha_1 < \alpha$. ... $\alpha_1 < \alpha$ ... e ... sup. prossima a α con area minore.

... sup. ... $\bar p = 0$.

... coincidano in $(x_0.y_0)$: e così le d.e. Supponiamo che le derivate d'ordine ν siano le prime che non tutte coincidano cioè non ogni c_ν è $= \bar c_\nu$. Sottraendo ...

142). Ma intanto vogliamo senza presupporre contorni appiattiti, dimostr. l'unicità (così si tratta dunque ancora dell'esistenza) delle eventuali sup. minime terminate a un [illegible] contorno. Precisamente [illegible]

tale [illegible]

cità [illegible]

si può [illegible]

per le [illegible]

terno [illegible]

(Weit [illegible]

sup. [illegible]

di [illegible]

a p. 144.

$$dz^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{(pq\,dx + (1+q^2)\,dy)^2}{V^2} =$$

$$dx^2\left(1 + \frac{p^2q^2}{V^2}\right) + \frac{2pq(1+q^2)}{V^2}\,dx\,dy + \frac{(1+q^2)^2\,dy^2}{V^2}$$

$$= \frac{(1+q^2)}{V^2}\left[(1+p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1+q^2)\,dy^2\right]$$

stime di [illegible] altri risultati si prove trovare le sup. minime (soll'equazione $(1+p^2)t - \dots = 0$ senza preoccuparsi se realizzino o no il minimo dell'area.

Supposto che vi siano due sup. z, $\bar z$ colle derivate 1e e 2e continue.

colle richieste [illegible] sulla $z = z(x,y)$ e sull'altra $z = \bar z(x,y)$. Se le sup. sono distinte cioè la differenza $\varphi = z(x,y) - \bar z(x,y)$ non è id. nulla dentro γ (~~[illegible]~~ nulla al contorno $\varphi = 0$), ed è continua, e quindi vi è un punto I interno di massimo o di minimo, sia (x_0, y_0).

Nell'intorno di esso (ritenuto per z e $\bar z$ [illegible] prendiamo come origine caratteristica v. sotto) valgano gli sviluppi

$$z = z_0 + (px + qy) + \dots + \sum_{\nu}^{0\dots n} c_\nu \frac{x^{n-\nu} y^\nu}{(n-\nu)!\,\nu!} + \dots$$

$$z = \bar z_0 + (px + qy) + \dots + \sum_{\nu} \bar c_\nu \frac{x^{n-\nu} y^\nu}{(n-\nu)!\,\nu!} + \dots$$

(ove le c_ν sono proprio le derivate n-ime in (x_0, y_0)) e dove vi è posto lo stesso p, q, perché per avere un estremo di $\varphi = z - \bar z$ è $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ cioè $p - \bar p = 0$. Non anche le derivate 2e di z e $\bar z$ coincidano in (x_0, y_0): siano le 3e: supponiamo che le derivate di ordine n siano le prime che non tutte coincidano cioè non ogni c_ν è $= \bar c_\nu$. Sottraendo [illegible]

(144)

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{r=0}^{n} \frac{(c_r - \bar{c}_r)}{n-r!\, r!} x^{n-r} y^r + \dots$$

dove $\varphi_0 = \varphi(x_0, y_0)$, cioè

$$\varphi - \varphi_0 = \sum_{r=0}^{n} \frac{(c_r - \bar{c}_r)}{n-r!\, r!} x^{n-r} y^r \dots \quad \text{cioè } \sum \frac{\gamma_r x^{n-r} y^r}{n-r!\, r!} \dots$$

Ora da un lato, essendo φ - e quindi anche $\varphi - \varphi_0$ un estremo, il 2° membro ~~...~~ per $|x|$ e $|y|$ abbastanza piccoli deve avere segno costante (+ per il minimo, − per il massimo): lo stesso deve avere valere per il sommatorio scritto (il cui segno è quello di tutta la serie per $|x|$ e $|y|$ prossimi a zero).

D'altro lato avremo che $\sum \gamma_r x^{n-r} y^r$ si scinde in n fattori lineari reali (ciò che contraddice al risultato ora trovato). Invero dall'eq. di Lagrange

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0.$$

derivando rispetto a u, v, si hanno 2 relaz. fra le derivate terze: uuu, uuv, uvv, vvv, tra le le quarte e così via, in modo che per calcolare le derivate n^{me} di z in (x_0, y_0) cioè le c_r si hanno $n-1$ relazioni del tipo

$$(1+q^2)c_0 - 2pqc_1 + (1+p^2)c_2 = \varphi(p, q \ \ \text{der.}\ n-1)$$

$$\dots\dots$$

$$(1+q^2)c_{n-2} - 2pqc_{n-1} + (1+p^2)c_n = \dots$$

con le analoghe per $\bar{c}$, cioè sottraendo, nelle nostre ipotesi

$$(1+q^2)\gamma_0 - 2pq\gamma_1 + (1+p^2)\gamma_2 = 0.$$

$$(1+q^2)\gamma_{n-2} - 2pq\gamma_{n-1} + (1+p^2)\gamma_n = 0.$$

Ora, si può supporre $p = 0$ (basta ruotare gli assi x, y nel piano $z = 0$ in modo che il nuovo asse x ~~...~~ diventi parallelo al piano tangente a F in (x_0, y_0), ciò che è sempre possibile. Allora posto $1+q^2 = Q^2$ (con $Q > 0$). viene

$$Q^2 \gamma_{\mu-1} + \gamma_{\mu+1} = 0. \qquad (0 < \mu < n)$$

da cui

$$\gamma_{2\mu} = (-1)^\mu Q^{2\mu}\gamma_0 \,;\ \gamma_{2\mu+1} = (-1)^\mu Q^{2\mu}\gamma_1$$

v. p. 147 xx

Allora posto $x = \rho\cos\theta$, $Qy = \rho\sin\theta$ quel

(156) Σ diviene

$$\frac{1}{n!}\sum_{\mu=0}^{..}\binom{n}{\nu}\rho^n(-1)^\mu Q^{2\mu}\gamma_0(\cos\theta)^{n-2\mu}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{Q}\right)^{2\mu}$$

$$+\frac{1}{n!}\sum_{\mu=0}^{..}\binom{n}{\nu}\rho^n(-1)^\mu Q^{2\mu}\gamma_1(\cos\theta)^{n-2\mu-1}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{Q}\right)^{2\mu+1}$$

$$=\frac{1}{n!}\rho^n\left(\gamma_0\cos n\theta+\frac{\gamma_1}{Q}\operatorname{sen} n\theta\right).$$

Dunque vi sono n valori distinti di θ (quelli per cui $\operatorname{tg} n\theta = -\frac{Q\gamma_0}{\gamma_1}$. (differenti per π/n l'uno dal successivo) cui n. $g/2$ per cui Σ si annulle.

Dunque è assurdo supporre che vi sia un estremo isolato cioè $z=\Sigma$ identicam. c.d.d.

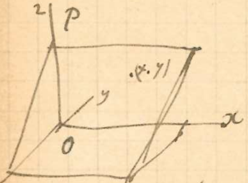
Osservazione. — Il ragionamento fatto serve anche a dimostrare la seguente proprietà (che generalizza quella secondo cui le minime a un suo piano tg. hanno [illegible] (notate) [illegible] tg. perpendicolari. Se ora le minime hanno in P contatto di ordine $(n-1)$. (nel caso precedente $n=2$), la loro interseg. ha in P un

pt. n^{plo} con tangenti tutte reali e formanti a due a due angoli eguali (Mi[illegible] ecc.). Infatti sviluppando c.s. gli sviluppi (sezioni di contatto) in punti $z_0=z_0$ si prestano proprio c.s. Per l'intersezione (avendo ora $g_0=\zeta_0$) è (posto x y)

$$\sum q_{\nu\nu}\frac{x^{n-\nu}y^{\nu}}{(n-\nu)!(\nu)!}+\dots=0.$$

L'origine è pt. n^{plo}. Risulta c.s. che le n tg. in O sono tutte reali.

(xx) ρ e θ sono coord. polari nel piano tg con l'origine e [illegible] asse polare. Infatti l'eq. del piano tg. è $z-z_0=qy$. Poi ho $\rho^2=x^2+y^2+(z-z_0)^2=x^2+Q^2y^2$. Poi per l'angolo θ (anomalia) ho angolo fra $\begin{pmatrix}x. & y. & z-z_0=qy\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$; inoltre



$$\cos\theta=\frac{x}{\rho},$$ da cui poi $\operatorname{sen}\theta=\frac{Qy}{\rho}$.

cui $x=\rho\cos\theta$, $Qy=\rho\operatorname{sen}\theta$. c.d.d.

13) Del segno generale di θ viene che fa angoli di π/n ognuna con le successive

Analiticità delle sup. minime. – Se $z = f(x, y)$ è sup. minima e z, colle derivate prime e seconde è (in un certo campo) finita e continua, z è certo funzione analitica. È un risultato notevole, che rientra in altri più generali sulle eq.^{ni} di tipo ellittico (risultato, da noi tipi di Schwarz, già apparso in colloqui di Weierstrass.) Qui lo dimostriamo direttamente con (Müntz). Essendo z integrale di

(1) $(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0$

ne consideriamo porzione sovrastante all'interno di γ. Porgo fra $\mathcal{F}$ e un piano (ξ, η) la corrisp.

(2) $\xi = x$; $\eta = \int_{x_0, y_0}^{(x,y)} \frac{pq\,dx + (1+q^2)dy}{+\sqrt{1+p^2+q^2}}$

dove $(x_0 y_0)$ è pt. ~~fin~~ fissato entro γ e il cammino di $\int$ integr. non monta trattando. si di un diff. totale (si può verificare che scrivendo che è un diff. totale si risale appunto la (1)). {Si ~~potrebbe~~ può verificare che $d\xi^2 + d\eta^2 = \frac{1+q^2}{V^2} ds^2$ della $\mathcal{F}$. V. foglio p. 140} la corrispondenza tra $\mathcal{F}$ e (ξ, η) è ~~conforme~~; sia λ la regione riempita dai pt. di (ξ, η) corrisp. ai pt. di $\mathcal{F}$). ~~Esso che~~. Le (2) si invertono. Infatti, posto $V = \sqrt{1+p^2+q^2}$

$$d\xi = dx; \quad d\eta = \frac{pq\,dx + (1+q^2)dy}{V}$$

da cui

$$dx = d\xi; \quad dy = \frac{V}{1+q^2}\,d\eta - \frac{pq}{1+q^2}\,d\xi$$

cui

(3) $x = \xi$; $\quad y = \int_{(\xi_0 \eta_0)}^{\xi, \eta} \frac{V\,d\eta - pq\,d\xi}{1+q^2}$

dove (ξ_0, η_0) è il pt. di λ corrisp. a (x_0, y_0) (cioè ~~$\frac{\eta}{\xi}$~~ $\xi_0 = x_0$, $\eta_0 = 0$)} Veramente, sotto il segno $\int$ compaiono ancora p e q che ~~sono~~ fz. di ~~x~~ x e y; ~~non~~ ~~può~~ ~~accadere~~ ~~si vede~~ questi e con ciò anche con questo si esprimono mediante ξ, η. Dunque l'inv. è solo formale. ~~Esse si possono~~ ~~considerare~~ ~~come~~ funzioni di ξ, η. Quant

(15bis) all'$\int$ mediante cui si esprime y, sono anch'esse implicit.te corrispondenti dal cammino di $\int$, potrà deve fornire la y corrisp. a (ξ, η). Anche x y sono a priori polidrome, mutando per continuità il cammino, non si può saltare da una determinazione all'altra: poiché è un diff. esatto). Ebbene, con un calcolo materiale si verifica che la (1) scritta nelle nuove variabili diventa

$$z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta} = 0.$$

cui z come funz. di ξ, η è armonica. Alla l'enunciato si verifica così. Ho intanto

$$p = z_\xi + z_\eta \frac{pq}{V}, \quad q = z_\eta \frac{1+q^2}{V}.$$

da cui

$$z_\eta = \frac{Vq}{1+q^2}, \quad z_\xi = p - \frac{pq^2}{1+q^2} = \frac{p}{1+q^2}:$$

Di qui troppo p.es.

(1) Del resto si potrebbe tentare per $\int$ ... di z_ξ e z_η ... come vi è detto prima

$$z_{\eta\eta} = \left(\frac{Vq}{1+q^2}\right)_x x_\eta + \left(\frac{Vq}{1+q^2}\right)_y y_\eta$$

$$= \left(\frac{Vq}{1+q^2}\right)_y \frac{V}{1+q^2}$$

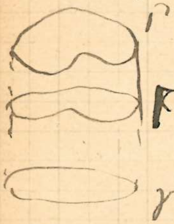
Dunque, z cui bene a queste espr. se in una certa regione z, p, q, r, s, t sono finite e continue, lo sono anche $z, z_\xi, z_\eta, z_{\xi\xi}, z_{\xi\eta}, z_{\eta\eta}$ (che ~~vedremo~~ si esprimono razionalmente mediante quelle, con denominatori $\neq 0$). Però z è notoriamente analitica di ξ e di η (1) e con qualche ulteriore passaggio (p e q sono funz. alg. più analitiche di z_ξ, z_η e attraverso di ξ, η. Poiché da $x = x\,an.(\xi, \eta)$ $y = y\,an.(\xi, \eta)$ (la (3)), invertendo ho $\xi = an.(x, y)$ $\eta = an.$ e $z = an.(x, y)$. c.d.d.

(1) Cfr. Picard 2° vol. 2ª ed. p. 18 - Sonsek.

152) Oss. – Essendo z armonica di x e y non è mai estremo che al contorno. Lo stesso vale per x e y. Dunque se in un campo dove z è fz. regolare di x e y il punto più alto e il più basso del supp. di F sono sempre sul contorno. –

Probl.ª di Plateau per contorni approssimati. –

Prima che si risolvesse il probl. generale di Plateau, erasi stato risoluto da A. Korn e da C. Müntz (Abh. Schw. 1909 e Journ. für Math. 1911) in un caso particolare che era già [illegible] (Poisson (Journ. f. Math t. 6. 1832) senza però approfondirlo: cioè nel caso in cui il contorno è non troppo discosto da un contorno piano (nel qual caso la sup. è formata dal piano stesso) – cioè un contorno approssimativo nel seguente senso. Se c. s. è Γ proiez. in γ. e se messo moltiplica tutte le ordinate per ε con $0 \leq \varepsilon < 1$, ottengo per ciascuna quello che si chiama un contorno approssimativo Γ'. Per $\varepsilon = 0$ tutti contratti e il contorno piano γ. Ebbene per ε abbastanza piccolo vale il seguente procedimento (che qui solo accenno). Se su γ, θ indica un parametro



$$x = x^*_\theta(\theta) \qquad y = y^*_\theta(\theta)$$

e su Γ, in più $z = z^*_\theta(\theta)$

tutte le superf. avendo analoghe γ che, sarà su Γ' $z = \varepsilon z^*_\theta(\theta)$.

La ricerca della sup. minima risolvente per Γ' il probl. di Plateau equiv. alla ricerca di integrali z dell'eq. di Lagrange tali che su γ si $z = \varepsilon z^*_\theta(\theta)$.

Trasformo il problema così. Pongo quella $z = \varepsilon \zeta$ ove ζ una nuova fz. incognita e ho

$\varepsilon \zeta$ = [eq. di Lagrange e $\varepsilon Z = \varepsilon Z^*_\theta(\theta)$ su γ

cioè, scrivendo z in luogo di ζ, 153/

$$(1+\varepsilon^2 q^2)r - 2pq\varepsilon^2 s + (1+\varepsilon^2 p^2)t = 0.$$

$$z = z_0(t) \quad \text{su } \gamma.$$

dove l'eq. si può scrivere

$$(1)\quad r + t + \varepsilon^2(q^2 r - 2pqs + p^2 t) = 0.$$

Si tratta dunque, per ε ast. dato (che dovrà poi essere abbastanza piccolo) di risolvere la (1) con le condizioni al limite $z = z_0$ su γ.

Ora il problema si risolve (v. i particolari in Müntz) per approssimazioni successive costruendo tante funzioni z_0, z_1, z_2 etc. tali che indicando con p_i, q_i etc. di z_i

$$r_0 + t_0 = 0$$

~~$t_i + t_i = -\varepsilon^2(q_{i-1}^2 r_{i-1} - 2$~~

$$r_{i+1} + t_{i+1} = -\varepsilon^2(q_i^2 r_i - 2p_i q_i s_i + p_i^2 t_i)$$
$$i = (0, 1, \ldots)$$

con le condizioni ai limiti

$$z_0 = z_1 = z_2 = \ldots = z^* \quad \text{su } \gamma.$$

Ora da che cosa dipende la determinazione effettiva di queste funzioni? Per la z_0 dalla risoluz. del probl. di Dirichlet relativo all'area racchiusa in γ. Le altre z_i si trovano per ricorrenza dalle eq. sulle che sono del tipo

$$\Delta_2 z = \underbrace{\text{funzione nota}}_{h(x,y)} \quad e \quad z = z^* \text{ su } \gamma.$$

Queste si risolvono in modo noto: poi si riducono al problema di Dirichlet così. Considero una funzione ausiliaria φ tale che sia $\Delta_2\varphi = h(x,y)$ senza preoccuparmi dei valori al contorno. Tale cioè p.es. (per la formula di Poisson nel caso del pot. logaritmico

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma h(x,y)\log\frac{1}{r}\,d\sigma$$

σ indicando l'area interna a γ.) Poi cerco di esprimere ψ in modo che z sia $\varphi + \psi$. Ho

$$\Delta_2\psi = 0, \qquad \psi = \underline{z^* - \varphi}_{\text{cont}} \quad \text{su } \gamma.$$

15) La det.ne di φ e ~~dunque~~ così di f è dunque ancora ricondotta al problema di Dirichlet. E' poi, certo con le 2..., si può dimostrare che il procedimento impiegato (per ξ abbastanza piccolo) è convergente e fornisce così l'(unica) soluzione.

Il procedimento impiegato da Müntz per il caso generale 1) consiste in partire dalle soluz. del probl. di Plateau per l'attuale contorno Γ' e far passare ad esso le parti che qui fuoriescono; allora si passa a un contorno nuovo appiattito e così via; così fa vedere che si può raggiungere il contorno prefissato Γ.

1) Con ~~ipotesi~~ opportune restrittive sulla natura del contorno Γ